République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

RABIE Messaouda

Titre :

Sur l'éstimateur des moments pour la queue de distribution

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Chine Amel	UMKB	Président
Pr.	**Brahimi Brahim**	UMKB	Encadreur
Dr.	Soltane Louiza	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce humble travail :

A l'esprit de mon cher frère Aziz,

A mes chers parents,

A mes chers frères et mes chères soeurs,

A mes collègues, et mes amis plus particulièrement,

A tous ceux qui me sont chers ...

REMERCIEMENTS

Je glorifie Allah le tout puissant de m'avoir donné courage et patience qui m'ont permis d'accomplir ce travail.

Le moment est venu pour moi d'exprimer ma plus grande gratitude envers tous celles et ceux qui m'ont aidé et encouragé dans l'accomplissement de cette mémoire dont le prix était l'obtention de diplôme de master.

Ainsi qu'il est d'usage, je tiens tout d'abord à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur Monsieur Brahimi Brahim, professeur à l'université de Biskra, pour sa rigueur scientifique, ses conseils éclairés et ses encouragements.Sincèrement MERCI !

Je remercie chaleureusement Docteure, Chine Amel et Docteure, Soltane Louiza de m'avoir fait l'honneur de participer gentiment au jury de ma mémoire de fin d'étude en master respectivement comme présidente et examinateur. Je leur suis sincèrement reconnaissant de s'être rendus disponibles pour cette soutenance. Merci pour toutes vos critiques constructives. Vos remarques m'ouvrent de nouveaux horizons et de nouvelles perspectives.

Mes plus vifs remerciements vont à Monsieur, docteur, Ben Atia Fateh, pour sa disponibilité, ses précieux conseils, son sens de l'écoute et pour toute l'aide qu'ils m'ont apportée.

Enfin, je ne saurais terminer cette partie sans exprimer ma gratitude à mes parents, mes frères et mes sœurs qui m'ont toujours soutenu, encouragé et stimulé pendant mes études, je n'oublié pas mes collègues et amis grâce à qui ma vie universitaire a été très agréable et joyeuse. Merci à tous ceux que j'ai oubliés.

....

Table des matières

Table des figures

Introduction

La théorie des valeurs extrêmes a été développée pour l'estimation de probabilités d'occurrences d'évènements rares. Elle permet d'extrapoler le comportement de la queue de distribution à partir des plus grandes données observées (les données extrêmes de l'échantillon). Cette théorie est basée sur la connaissance de la loi asymptotique du maximum d'un échantillon. L'expression de cette loi asymptotique, qu'on nomme loi des valeurs extrêmes.

La loi des valeurs extrêmes, lorsqu'elle existe, est indexée par un paramètre appelé indice des valeurs extrêmes ou indice de queues, ainsi qu'éventuellement par des paramètres d'échelle et de position. Il ya de nombreux estimateurs pour estimer cet indice. Dans ce mémoire, on va s'intéresser particulièrement a l'éstimation par la méthode des moments qui est basé sur l'estimateur de Hill qui aussi connu sous le nom de l'estimateur de Hill généralisé. L'avantage de cet estimateur est qu'il est utilisable quel que soit le signe de l'indice des valeurs extrêmes.Dekkers[1] démontre la consistance faible et la consistance forte ainsi que la normalité asymptotique de cet estimateur.

L'organisation de ce mémoire est la suivante :

Chapitre 1 : (Estimation parametrique). Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux deux méthodes d'estimation les plus usuelles : la méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance, que nous présentons avec leurs définitions et caracteristiques particulieres ainsi que des exemples associés aux deux méthode précedentes.

Chapitre 2 : (Théorie des Valeurs Extrêmes). Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord quelques éléments théoriques essentiels de la théorie des valeurs extrêmes (TVE), Apres avoir presenter les définitions et les caracteristiques particuliers celles-ci nous présentons les deux principaux outils servant a modéliser le comportement des valeurs extrêmes d'un échantillon : la loi des valeurs extrêmes et la loi des excès.

Chapitre 3 : (Estimation de l'Indice des Valeurs Extrêmes) On s'intéressera dans ce chapitre aux différentes méthodes d'éstimation du paramètre γ ou σ, avec une attention particulière à l'estimateur des moments.

Chapitre 1

Estimation parametrique

1.1 Méthodes d'estimation

Il existe de nombreuses méthodes pour estimer un paramètre θ. Dans cette partie, nous nous intéressons aux deux méthodes d'estimation les plus usuelles, la méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance.
Mais il faut d'abord définir précisément ce que sont une estimation et surtout un estimateur.

1.1.1 Définition d'un estimateur

Pour estimer θ on ne dispose que des données $x_1, ..., x_n$, donc une estimation de θ sera une fonction de ces observations.

Définition 1.1.1 *une statistique t est une fonction des observations $x_1, ..., x_n$:*

$$t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$(x_1, ..., x_n) \to t(x_1, ..., x_n)$$

Puisque les observations $x_1, ..., x_n$ sont des réalisations des variables aléatoires $X_1, ..., X_n$, la quantité calculable à partir des observations $t(x_1, ..., x_n)$ est une réalisation de la variable aléatoire $t(X_1, ..., X_n)$.

Et on retrouve par exemple le fait que :

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

et une réalisation de

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Pour simplifier les écritures,on note souvent $t_n = t(x_1, ..., x_n)$ et $T_n = t(X_1, ..., X_n)$.

Définition 1.1.2 *Un estimateur d'une grandeur θ est une statistique T_n à valeurs dans l'ensemble des valeurs possibles de θ.Une estimation de θ est une réalisation t_n de l'estimateur T_n.*

Un estimateur est donc une variable aléatoire,alors qu'une estimation est une valeur déterministe.

1.1.2 La méthode des moments

L'estimateur des moments

C'est la méthode la plus naturelle, L'idée de base est d'estimer une espérance mathématique par une moyenne empirique, une variance par une variance empirique, d'une façon generale le moments d'ordre k theorique par celui empirique.

Si le paramétre à estimer est l'espérance de la loi des X_i, alors on peut l'estimer par la moyenne empirique de l'échantillon. Autrement dit, si $\theta = E(X)$ alors l'éstimateur de θ par la méthode des moments est

$$\widetilde{\theta}_n = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Plus généralement, pour $\theta \in \mathbb{R}$, si $E(X) = \varphi(\theta)$, ou φ est une fonction inversible, alors l'estimateur de θ par la méthode des moments est :

$$\widetilde{\theta}_n = \varphi^{-1}(\overline{X}_n).$$

De la même maniére, on estime la variance de la loi des X_i par la variance empirique de l'échantillon

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2.$$

Plus généralement, si la loi des X_i a deux paramètres θ_1 et θ_2 tels que

$$(E(X), Var(X)) = \varphi(\theta_1, \theta_2),$$

alors, les estimateurs de θ_1 et θ_2 par la méthode des moments sont

$$\left(\widetilde{\theta}_{1n}, \widetilde{\theta}_{2n}\right) = \varphi^{-1}\left(\overline{X}_n, S_n^2\right).$$

Ce principe peut naturellement se généralisé aux moments de tous ordres, centrés ou non centrés :

$$E\left[(X - E(X))^k\right] \text{ et } E\ \left(X^k\right), k \geq 1.$$

Exemple 1.1.1 *(Loi Gamma)*

Si $(X_1, ..., X_n)$ sont indépendantes et de même loi gamma $G(a, \lambda)$ avec

$$E(X) = a/\lambda \ et\ Var(X) = a/\lambda^2,$$

on déduit facilement que

$$\lambda = \frac{E(X)}{Var(X)} \quad et\ a = \frac{[E(X)]^2}{Var(X)}.$$

Donc les estimateurs de λ et a par la méthode de moments sont :

$$\widetilde{\lambda}_n = \frac{\overline{X}_n}{S_n^2} \text{ et } \widetilde{a}_n = \frac{\overline{X}_n^2}{S_n^2}.$$

Remarque 1.1.1 *Dans certains cas, l'estimation par la méthode des moments est moins bonne que l'estimation par le maximun de vraisemblance ce dont nous discuterons prochainement. Néanmoins,dans le cas de la loi gamma par exemple, le calcule de la fonction de vraisemblance peut poser des problèmes, tandis que l'estimation des moments est très facilement accessible.*

1.1.3 La méthode du maximum de vraisemblance

La fonction de vraisemblance

Quand les observations sont toutes discrètes ou toutes continues, on appelle fonction de vraisemblance pour l'échantillon $x_1, ..., x_n$ la fonction du paramètre θ :

$$L(\theta; x_1, ..., x_n) = \begin{cases} P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n; \theta) \text{ si les } X_i \text{ sont discrèts.} \\ f_{X_1, ..., X_n}(x_1, ..., x_n; \theta) \quad \text{si les } X_i \text{ sont continues.} \end{cases}$$

Si les X_i sont indépendantes et de même loi, Dans ce cas, la fonction de vraisemblance s'écrit :

$$L(\theta; x_1, ..., x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i; \theta) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i; \theta) & \text{si les } X_i \text{ sont discrèts.} \\ \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) & \text{si les } X_i \text{ sont continues .} \end{cases}$$

L'estimateur de maximum de vraisemblance (EMV)

Définition 1.1.3 *L'estimatieur de θ par la méthode du maximum de vraisemblance, est la valeur $\widetilde{\theta}_n$ qui rend maximale la fonction de vraisemblance $L(\theta; x_1, ..., x_n)$.*

Dans la plupart des cas, la fonction de vraisemblance s'exprime comme un produit. Donc $\widetilde{\theta}_n$ sera en général calculé en maximisant la log-vraisemblance :

$$\widetilde{\theta}_n = \arg\max_{\theta} \ln L(\theta; x_1, ..., x_n).$$

Quand $\theta = (\theta_1, ..., \theta_d) \in \mathbb{R}^d$ et que toutes les dérivées partielles ci-dessous existent,$\widetilde{\theta}_n$ est solution du système d'équations appelées équations de vraisemblance :

$$\forall j \in \{1, ..., d\}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln L(\theta; x_1, ..., x_n) = 0.$$

Exemple 1.1.2 *(Loi exponentielle)*

Si les X_i sont des loi $\exp(\lambda)$,*la fonction de vraisemblance est :*

$$L(\lambda; x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}.$$

D'ou

$$\ln L(\lambda; x_1, ..., x_n) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Alors

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L(\lambda; x_1, ..., x_n) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{1.1}$$

1.1 s'annule pour :

$$\lambda = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{x}_n}.$$

Par conséquent,l'EMV de λ est

$$\widetilde{\lambda}_n = \frac{1}{\overline{X}_n}.$$

Chapitre 2

Théorie des Valeurs Extrêmes

Dans ce chapitre, nous allons présenter de façon trés classique la théorie des valeurs extrêmes (EVT,Extrem Value Theory). En effet, notre point de départ sera les statistiques d'ordre, qui sont un outil essentiel dans la théorie des valeurs extrêmes.

2.1 Théorèmes Limites

Définition 2.1.1 *(Fonction de distribution emprique)*

Soit un échantillon $X = (x_1, ..., x_n)$, de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ avec une distribution de probabilité F. La fonction de répartition empirique notée F_n et définie par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}(\mathbf{x}_i \leq x), x \in \mathbb{R}.$$

En plus notons par $\overline{F}$ la fonction des queues (ou la fonction de survie)

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x).$$

Définition 2.1.2 *(somme et moyenne arithmétique)*

Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d, et F la fonction de répartition commune. Pour un entier $n \geq 1$, on définie la somme partielle et la moyenne arithmétique correspondante respectivement par :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad et \quad \overline{X}_n = \frac{S_n}{n},$$

ou $\overline{X}_n$ est la moyenne empirique.

Lois des grands nombres

Ces lois décrivent le comportement asymptotique de la moyenne de l'échantillon. Il ya deux types : la loi faible mettant en jeu la convergence en probabilité et la loi forte relative à la convergence présque sûre.

Théorème 2.1.1 *(lois des grands nombres)*

Si $(X_1, ..., X_n)$ suite de v.a, tel que $E \mid X \mid < \infty$ alors :

la loi forte $\quad \overline{X}_n \xrightarrow{ps} \mu \quad$ *quand* $n \to \infty,$

la loi faible $\quad \overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu \quad$ *quand* $n \to \infty,$

d'ou $\mu = E(X)$.

Théorème centrale limite

L'étude de somme de variables indépendantes et de même loi joue un rôle capitale en statistique. Le théorème suivant connu sous le nom de théorème central limite (TCL) établit la convergence vers la loi de Gauss.

Théorème 2.1.2 ***(TCL)***

Si $(X_1, ..., X_n)$ suite des v a définie sur le même espace de probabilité de variance $\sigma^2 < \infty$ et de moyenne μ alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma} \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \qquad quand\ n \to \infty.$$

2.2 Statistique d'ordre

Définition 2.2.1 *Soient n variables aléatoires i.i.d $X_1, ..., X_n$ .Rangeons ces variables aléatoires par "ordre croissant de grandeur". Pour cela, nous introduisons la notation $X_{i,n}$ avec*

$$X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq ... \leq X_{n-1,n} \leq X_{n,n}$$

$X_{k,n}$ est donc la k-ème statistique d'ordre (ou statistique d'ordre k) dans un échantillon de taille n.

Deux statistiques d'ordre sont particulièrement intéressantes pour l'étude des évènements extrêmes ce sont :
La statistique du minimum qui est la plus petite statistique :

$$X_{1,n} := \min(X_1, ..., X_n).$$

La statistique du maximun qui est la plus grande statistique :

$$X_{n,n} := \max(X_1, ..., X_n).$$

Dans la suite de notre travail, on s'interesse à la statistique du maximum puisque la statistique du minimum se déduit par la relation suivante :

$$\min(X_1, ..., X_n) = -\max(-X_1, ..., -X_n).$$

Remarque 2.2.1 *Même si les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes, les statistiques d'ordre ne le sont pas.*

Définition 2.2.2 *(Fonction des quantiles)*

La fonction des quantiles associée à F est l'inverse généralisé de F notée par Q et définie *par*

$$Q(t) := F^{\leftarrow}(t) := \inf\{s : F(s) \geq t\}, \quad 0 < t < 1.$$

Définition 2.2.3 *(Fonction des quantiles empirique).*

La fonction des quantiles empirique d'un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *est définie par*

$$Q_n(t) := F_n^{\leftarrow}(t) = \inf\{s : F_n(s) \geq t\}, \quad 0 < t < 1.$$

Où $F^{\leftarrow}$ *est l'inverse généralisée de la fonction de distribution* F *.*

Définition 2.2.4 *(Fonction des quantiles de queues) .*

La fonction des quantiles de queue ,notée U *est défînée par :*

$$U(t) := Q(1 - 1/t) = (1/\overline{F})^{\leftarrow}(t), \quad 1 < t < \infty.$$

Définition 2.2.5 *(La fonction des quantiles de queue empirique)*

La fonction des quantiles de queue empirique notée U_n *est donnée par :*

$$U_n(t) := Q_n(1 - 1/t), \quad 1 < t < \infty.$$

2.2.1 Distribution de la statistique d'ordre

Proposition 2.2.1 *(Distribution du maximum et du minimum)*

Soient $X_1, ..., X_n$ *,* n *va's i.i.d, de fonction de distribution commune* F *. La fonction de distribution de la plus grande statistique d'ordre est*

$$F_{X_{n,n}}(x) = [F(x)]^n, -\infty < x < +\infty.$$

De même pour la plus petite statistique d'ordre, nous avons

$$F_{X_{1,n}}(x) = 1 - \left[\overline{F}(x)\right]^n, -\infty < x < +\infty.$$

en effet, pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_{X_{n,n}}(x) &= P(X_{n,n} \leq x) = P\left\{X_1 \leq x, ..., X_n \leq x\right\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_1 \leq x) \\ &= \left\{F(x)\right\}^n . \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} F_{X_{1,n}}(x) &= P(X_{1,n} \leq x) = 1 - P(X_{1,n} > x) \\ &= 1 - P\left\{X_1 > x, ..., X_n > x\right\} \\ &= 1 - \left\{\overline{F}(x)\right\}^n . \end{aligned}$$

Proposition 2.2.2 *(Fonction de répartition de la k-ième statistique d'ordre).*

Fonction de répartition de la k-ième statistique d'ordre $X_{k,n}$ pour $1 \leq k \leq n$ est la suivante :

$$F_{X_{k,n}}(x) = \sum_{i=k}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} (F(x))^i (1 - F(x))^{n-i}, -\infty < x < +\infty.$$

Proposition 2.2.3 *(Densité de la k-ième statistique d'ordre)*

Nous supposerons maintenant que les X_i sont de densité de probabilité f. La fct de densité de probabilité de la k-ième statistique d'ordre $X_{k,n}$ pour $1 \leq k \leq n$ est la suivante :

$$f_{X_{k,n}}(x) = \frac{1}{\beta(k, n-k+1)} F^{k-1}(x)(1 - F(x))^{n-k} f(x).$$

2.2.2 Distribution Jointe d'un Couple de Statistiques d'Ordre

Proposition 2.2.4 *(Densité jointe d'un couple de statistiques d'ordre).*

La densité jointe d'un couple de statistiques d'ordre$(X_{j,n}, X_{k,n})$ *avec* $j \neq k$ *est :*

$$f_{X_{j,n},X_{k,n}}(x,y) = \frac{n!}{(j-1)!(k-j-1)!(n-k)!} F^{j-1}(x) \left\{F(y) - F(x)\right\}^{k-j-1} \left\{1 - F(y)\right\}^{n-k} f(x)f(y),$$

avec $-\infty < x < y < +\infty$.

Corollaire 2.2.1 *(Distribution jointe du minimum et du maximum).*

$$f_{X_{1,n},X_{n,n}}(x,y) = n(n-1)(F(y) - F(x))^{n-2} f(x)f(y), -\infty < x < y < +\infty.$$

Maintenant, la généralisation est plus simple, la densité de probabilité jointe de n statistiques d'ordre est donnée par le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.2 *(Densité jointe de n statistiques d'ordre).*
Si la v.a X_1 *possède une densité* f*, alors la statistique d'ordre* $(X_{1,n}, ..., X_{n,n})$ *possède la densité :*

$$f_{X_{1,n},X_{2,n},...,X_{n,n}}(x_1, x_2, ..., x_n) = n!\prod_{i=1}^{n} f(x_i), -\infty < x_1 < ... < x_n < +\infty.$$

Pour plus de détails sur les statistiques d'ordre on peut consulter [1]

Apres avoir défini les valeurs extremes on s'interesse à leur lois.

2.3 Loi des valeurs extrêmes

Dans la suite de ce travail on va noter par x_F le point terminal à droite de la distribution F défini par :

$$x_F = \sup\left\{x \in \mathbb{R}, F(x) < 1\right\},$$

Ce point terminal peut être infini ou fini.

Fisher et Tippett(1928),Gendenko(1943)et de Haan(1970) ont montré que les seules distributions limites non dégénérée $\mathcal{H}$ possibles sont les distributions de valeurs extrêmes. Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une loi limite non dégénérée pour le maximum.

Théorème 2.3.1 *(Fisher et Tippet (1928) ; Gnedenko (1943))*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires i.i.d, s'il existe un réel* γ *et deux suites réel* (a_n) *et* (b_n),$n \in \mathbb{N}$ *avec* $a_n > 0$ *et* $b_n \in \mathbb{R}$ *telles que :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\frac{X_{n,n} - b_n}{a_n} \leq x) = \mathcal{H}_\gamma(x). \tag{2.1}$$

Pour tout x, *où* $\mathcal{H}$ *est fonction de distribution non dégénérée. Alors* $\mathcal{H}$ *est du même type que lune des trois lois suivantes :*

$$\Phi_\alpha(x) = \exp(-(x)^{-\alpha})\mathbf{1}_{(x\geq 0)}, \alpha > 0 \qquad \textit{(loi de Fréchet)},$$

$$\Lambda(x) = \exp(-e^{-x}), \qquad \textit{(loi de Gumbel)},$$

$$\Psi_\alpha(x) = \exp(-(-x)^{\alpha})\mathbf{1}_{(x<0)} + \mathbf{1}_{(x\geq 0)}, \alpha > 0 \quad \textit{(loi de Weibull)},$$

où $\mathbf{1}_A$ *est la fonction indicatrice de l'ensemble* A.
Ces trois distributions limites sont appelées les distributions de valeurs extrêmes standard.

2.3.1 Distribution des valeurs extrêmes généralisée

Il est possible de rassembler les trois familles de lois en une seule famille paramétrique $(\mathcal{H}_\gamma, \gamma \in \mathbb{R})$ dite famille des lois des valeurs extrêmes généralisée notée GEV (Generalized Extreme Value distribution).Elle est paramétrée par un seul nombre réel $\gamma \in \mathbb{R}$, appelé indice des valeurs extrêmes (EVI,Extreme Value Index), mais toujours à un facteur de changement d'échelle et de translation près.

La foncion de distribution de la famille $\mathcal{H}_\gamma$ des valeurs extrêmes généralisée (GEV), est :

$$\mathcal{H}_\gamma(x) := \begin{cases} \exp(-(1+\gamma x)^{-1/\gamma} \text{ si } \gamma \neq 0, 1+\gamma x > 0, \\ \exp(-\exp(-x)) \quad \text{ si } \gamma = 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Pour les variables non centrées et non réduites, en introduisant les paramètres de localisation μ et un paramètre d'échelle σ dans la paramétrisation 2.2, on obtient la forme la plus générale da la GEV :

$$\mathcal{H}_{\gamma,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \exp(-(1+\gamma(\frac{x-\mu}{\sigma}))^{-1/\gamma}) & \text{si } \gamma \neq 0, 1+\gamma\frac{x-\mu}{\sigma} > 0, \\ \exp(-\exp(\frac{x-\mu}{\sigma})) & \text{si } \gamma = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.3}$$

2.3.2 Domaines d'attraction

Définition 2.3.1 *(Domaines d'attraction) On dit qu'une distribution F appartient au domaine d'attraction de $\mathcal{H}_\gamma$,si F vérifie le théorème 2.3.1,et on note $F \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_\gamma)$.*
Avant de caractèriser les domaines d'attractions, on définit les fonctions à variations.

Définition d'une fonction à variations régulières

Définition 2.3.2 *On dit qu'une fonction G à variation régulière d'indice $\rho \in \mathbb{R}$ à ∞ et on note $G \in \mathcal{RV}_\rho$ si et seulement si*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{G(tx)}{G(x)} = t^\rho, t > 0.$$

Dans le cas ou $\rho = 0$, la fonction G s'appellera fonction à variation lente à ∞ . Nous réserverons le symbole l(et parfois L) pour de telles fonctions.

Proposition 2.3.1 *(Fonction à variation régulière et à variation lente).*
$G \in \mathcal{RV}_\rho$ si et seulement si

$$G(x) = x^\rho l(x), \quad \textit{où} \;\; l \in \mathcal{RV}_0.$$

Théorème 2.3.2 *(Représentation de Karamata) l est une fonction à variation lente si et seulement si pour tout $x > 0$,*

$$l(x) = c(x) \exp \left\{ \int_1^x t^{-1} \varepsilon(t) dt \right\},$$

où c et ε sont des fonctions positives telles que

$$\lim_{x \to \infty} c(x) = c \in]0, +\infty[\quad et \quad \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = 0.$$

Conditions du Premier et du Second ordre

Dans le contexte des modèles à queue lourde, c'est-à-dire, pour tout $x > 0$, et avec la fonction de queue de quantile U, l'une des conditions (équivalentes) suivantes sont satisfaites :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\overline{F}(tx)}{\overline{F}(t)} = x^{-1/\gamma} \iff \lim_{t \to \infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^{\gamma}, \tag{2.4}$$

L'équation 2.4 est connue comme la condition du premier ordre des fonctions à variations régulières avec l'indice $-1/\gamma$ (ou l'indice γ) et $\gamma > 0$, ce qui signifie $\overline{F} \in \mathcal{RV}_{-1/\gamma}$ ou $U \in \mathcal{RV}_{\gamma}$.

Cependant, une condition du premier ordre en général n'est pas suffisante pour étudier les propriétés des estimateurs des paramètres de queue, en particulier la normalité asymptotique. Dans ce cas, une condition du second ordre des fonctions à variations régulières est nécessaire en spécifiant le taux de convergence dans l'équation 2.4 .

Définition 2.3.3 *(Condition du second ordre).*

On dit que la fonction de queue de quantile U est à variation régulière du second ordre avec le paramètre du premier ordre $\gamma > 0$ et le paramètre du second ordre $\rho \leq 0$, on écrit $U \in 2\mathcal{RV}_{\gamma,\rho}$, s'il existe une fonction $A^*(t) \to 0$ et ne change pas le signe au voisinage de

∞, telles que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)/U(t) - x^{\gamma}}{A^*(t)} = x^{\gamma}\frac{x^{\rho}-1}{\rho}, x > 0, \tag{2.5}$$

où $\mid A^* \mid \in \mathcal{RV}_{\rho}$ est appelée la fonction auxiliaire de U.

Le corollaire suivant exprime la condition du second ordre des fonctions à variations régulières en fonction de $\overline{F}$.

Corollaire 2.3.1 *Pour tout $x > 0$ avec $\rho \leq 0$ et $A(t) := A^*(1/(1-F(t)))$, la relation 2.5 est équivalente à*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\overline{F}(tx)/\overline{F}(t) - x^{-1/\gamma}}{A(t)} = x^{-1/\gamma}\frac{x^{\rho}-1}{\gamma\rho}. \tag{2.6}$$

Caractérisation des domaines d'attraction

Nous allons donner des conditions sur la fonction de répartition F pour qu'elle appartienne à l'un des trois domaines d'attraction.

Domaine d'attraction de Fréchet Ce domaine d'attraction regroupe la majorité des distributions à queue lourde (par exemple :la loi de Paréto, Cauchy, Student, et de Burr,...)

Théorème 2.3.3 *On dit que $F \in D(\Phi_{\gamma})$ avec $\gamma > 0$ ssi $x_F = +\infty$ et $1-F$ est une fonction à variation régulière d'indice $-1/\gamma$ (i.e. $\overline{F}(x) = x^{-1/\gamma}l(x)$,ou l est une fonction à variation lente). Dans ce cas, un choix possible pour les suites a_n et b_n est $a_n = F^{\leftarrow}(1-\frac{1}{n})$ et $b_n = 0$.*

Domaine d'attraction de Weibull Ce domaine d'attraction contient la majorité des fonctions de répartition dont le point terminal est fini (par exemple : les lois uniforme, bêta, inverse de Pareto,...).

Théorème 2.3.4 *On dit que $F \in D(\Psi_{\gamma})$ avec $\gamma < 0$ ssi $x_F < +\infty$ et $1 - F^*$ est une* *fonction à variation régulière d'indice* $1/\gamma$ *(i.e.* $\overline{F}(x) = (x_F - x)^{-1/\gamma}[l(x_F - x)^{-1}]$*). Avec*

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ F(x_F - x^{-1}) & x > 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, le choix possible pour les suites a_n *et* b_n *est :* $a_n = x_F - F^{\leftarrow}(1 - \frac{1}{n})$ *et* $b_n = x_F$.

Domaine d'attraction de Gumbel La loi normale, log-normale, gamma, et expentielle, appartiennent à ce domaine d'attraction, ces lois possèdent des queues de distribution peu épaisses (ou a queue fine).

Rappelons premièrement la définition d'une fonction de Von-Mises.

Définition 2.3.4 *Soit* F *une fonction de répartition de point terminal* x_F *(fini ou infini),s'il exist* $z < x_F$ *tel que*

$$\overline{F}(x) = c \exp\left\{ -\int_z^x \frac{1}{a(t)} dt \right\}, z < x < x_F \leq \infty,$$

où $c > 0$ *et* a *est une fonction positive absolument continue de densité* $a^{'}$ *vérifiant* $\lim_{x \to x_F^+} a'(x) = 0$,

alors F *est une fonction de* ***Von-Mises*** *et* a *est sa fonction auxiliaire.*

Théorème 2.3.5 *On dit que* $F \in D(\Lambda)$ *si et seulement s'il existe une fonction de Von-Mises* F^* *telle que pour* $z < x < x_F$ *on ait :*

$$\overline{F}(x) = c(x)\left[1 - F^*(x)\right] = c(x) \exp\left\{ -\int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt \right\},$$

où g *et* c *sont des fonctions mesurables tels que* $g(x) \to 1$ *et* $c(x) \to c > 0$*,lorsque* $x \to x_F$. *Dans ce cas, le choix possible pour les constantes de normalisation est :*$b_n = Q(1 - 1/n)$ *et* $a_n = a(b_n)$.

Dans cette partie, nous allons établir des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une distribution F appartienne au domaine d'attraction de $\mathcal{H}_\gamma$.

Proposition 2.3.2 *(Caractérisation de $D(\mathcal{H}_\gamma)$)*

Soit $\gamma \in \mathbb{R}$,d'après Embrechets et al, les affirmations suivantes sont équivalentes :

(a) $F \in D(\mathcal{H}_\gamma)$.

(b) *Pour une certaine fonction positive b*

$$\lim_{t \to x_F} \frac{\overline{F}(t + xb(t))}{\overline{F}(t)} = \begin{cases} (1+\gamma x)^{-1/\gamma} & si\ \gamma \neq 0, \\ e^{-x} & si\ \gamma = 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

pour tout $x > 0$ et $1 + \gamma x > 0$.

(c) *Pour une certaine fonction positive $\overline{a}$*

$$\lim_{s \to 0} \frac{Q(1-sx) - Q(1-s)}{\overline{a}(s)} = \begin{cases} \frac{x^{-\gamma}-1}{\gamma} \ \ si\ \gamma \neq 0, \\ \log x \ \ si\ \gamma = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

pour $x > 0$.

(d) *Pour certaine fonction positive $a(t) = \overline{a}(1/t)$*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{U(sx) - U(s)}{a(s)} = \begin{cases} \frac{x^{\gamma}-1}{\gamma} \ \ si\ \gamma \neq 0, \\ \log x \ \ si\ \gamma = 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

pour $x > 0$.

Les deux derniers rapports sont équivalents(resp) à

$$\lim_{s \to 0} \frac{Q(1-sx) - Q(1-s)}{Q(1-sy) - Q(1-s)} = \begin{cases} \frac{x^{-\gamma}-1}{y^{-\gamma}-1} \ \ si\ \gamma \neq 0, \\ \frac{\log x}{\log y} \ \ si\ \gamma = 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

et

$$\lim_{s\to\infty}\frac{U(sx)-U(s)}{U(sy)-U(s)}=\begin{cases}\frac{x^\gamma-1}{y^\gamma-1} & si\ \gamma\neq 0,\\ \frac{\log x}{\log y} & si\ \gamma=0,\end{cases} \tag{2.11}$$

pour tout $x,y>0, y\neq 1$.

2.4 Distribution conditionnelle des excès

L'idée d'utiliser un nombre croissant de statistiques d'ordre de l'échantillon a ensuite été plus largement développée dans le cadre de l'approche « Peaks Over Threshold »(POT), via l'approximation de la loi des excès au-delà d'un seuil par des GPD (Generalized Pareto Distributions). Plus précisément, soit $u<x_F$ et F_u la fonction de répartition des excès définie par

$$F_u(y)=\mathbb{P}(Y\leq y\mid X>u)=\mathbb{P}(X-u\leq y\mid X>u)=\frac{F(u+y)-F(u)}{\overline{F}(u)}.$$

Ce qui équivaut à

$$F_u(x)=\mathbb{P}(X\leq x\mid X>u)=\frac{F(x)-F(u)}{\overline{F}(u)},\quad \text{pour } x\geq u.$$

F_u décrit la loi de X sachant $\{X>u\}$ On a alors le résultat suivant dû à Balkema et de Haan (1974) et Pickands (1975).

Théorème 2.4.1 *Si F appartient à l'un des trois domaines d'attraction de la loi des valeurs extrêmes (Fréchet, Gumbel ou Weibull), alors il existe une fonction $\sigma(u)$ strictement positive et un $\gamma\in\mathbb{R}$ tels que*

$$\lim_{u\to x_F}\sup_{0<y<x_F-u}\mid F_u(y)-G_{\gamma,\sigma(u)}(y)\mid=0.$$

où $G_{\gamma,\sigma}$ *est la fonction de répartition de la loi de Paréto Généralisée définie par*

$$G_{\gamma,\sigma}(y) = \begin{cases} 1-(1+\gamma y/\sigma)^{-1/\gamma} & si\ \gamma \neq 0, \sigma > 0, \\ 1-\exp(-y/\sigma) & si\ \gamma = 0, \sigma > 0, \end{cases}$$

pour $y \in [0, (x_F - u)]$ *si* $\gamma \geq 0$, *et* $y \in [0, \min(-\sigma/\gamma, x_F - u)]$ *si* $\gamma < 0$.

Ainsi, pour une valeur de u assez élevée, la loi des excès est approchée par une loi Paréto généralisée :

$$F_u \approx G_{\gamma,\sigma(u)}.$$

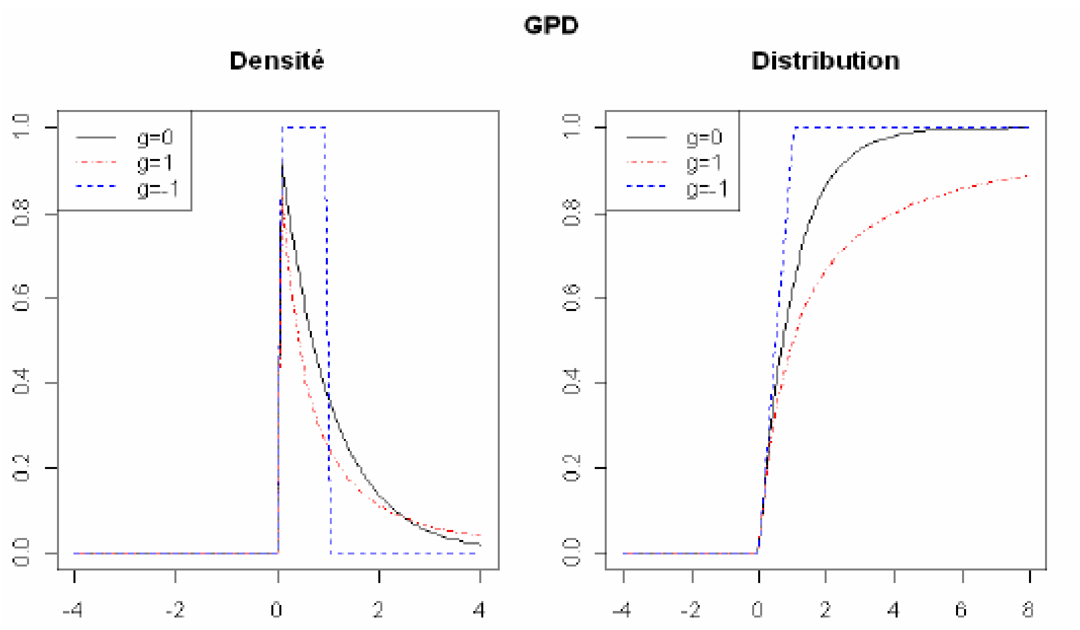

FIG. 2.1 – Densités et Distributions de lois de Pareto Généralisées avec différentes valeurs de γ

Chapitre 3

Estimation de l'Indice des Valeurs Extrêmes

3.1 Estimateurs de l'indice des valeurs extrêmes γ

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux différentes méthodes d'estimation du paramètre γ ou σ,en particulier l'estimateur du moment et leurs propriétés asymptotiques.

3.1.1 L'éstimateur des Moments

Un inconvénient de l'estimateur de Hill est qu'il est conçu seulement pour l'IVE des distributions à queues lourdes. Dekkers et al ont proposé une extension de tout type de distribution, appelée estimateur de moment.

Définition 3.1.1 *(Estimateur des Moments).*
Pour $\gamma \in \mathbb{R}$, l'estimateur des moments est

$$\widehat{\gamma}^M = \widehat{\gamma}^M(k) := M_n^{(1)} + 1 - \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{\left(M_n^{(1)}\right)^2}{M_n^{(2)}}\right\}^{-1}. \tag{3.1}$$

Avec

$$M_n^{(r)} = M_n^{(r)}(k) := \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\log X_{(n-i,n)} - \log X_{(n-k,n)}\right)^r, r = 1, 2, \tag{3.2}$$

où $M_n^{(1)}$ *est l'estimateur de Hill* $\widehat{\gamma}_n^H$.

3.1.2 Propriétés asymptotique de l'estimateur des Moments

La consistance faible et forte de cet estimateur a été établie par Dekkers et al [4].

Théorème 3.1.1 *(Propriétés asymptotique de* $\widehat{\gamma}^M$*)*

Soit $F \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $k \to \infty$ *et* $k/n \to 0$, *quand* $n \to \infty$, *alors*

(i) Consistance faible :

$$\widehat{\gamma}^M \xrightarrow{\mathbb{P}} \gamma, \text{ quand } n \to \infty.$$

(ii) Consistance forte : si $k/(\log n)^\delta \to \infty$ *quand* $n \to \infty$*,pour* $\delta > 0$, *alors*

$$\widehat{\gamma}^M \xrightarrow{p.s} \gamma, \text{ quand } n \to \infty.$$

(iii) Normalité asymptotique : si les conditions du Théorème 3 :1 de Dekkers et al [4] sont satisfaites et si $k = o\left(n/g_1^{-1}(n)\right)$ *où* $g_1(t) := t(U(t)/a(t))^2$*,alors*

$$\sqrt{k}\left(\widehat{\gamma}^M - \gamma\right) \xrightarrow{D} \mathcal{N}\left(0, \nu^2\right), \text{ quand } n \to \infty,$$

avec

$$\nu^2 := \begin{cases} 1+\gamma^2, & si\ \gamma \geq 0, \\ (1-\gamma)^2(1-2\gamma)\left[4 - 8\frac{1-2\gamma}{1-3\gamma} + \frac{(5-11\gamma)(1-2\gamma)}{(1-3\gamma)(1-4\gamma)}\right], & si\ \gamma < 0. \end{cases}$$

Preuve. (consistance faible et forte)

Pour le preuve,nous avons besoin des lemmes suivants :. ■

Lemme 3.1.1 *Supposons $U_1, U_2, ...$ des variables aléatoires i.i.d, avec une distribution uniforme sur $[0,1]$. Soit $\Gamma_n(t)$ la fonction de distribution empirique basée sur $U_1, U_2, ...(n = 1, 2, ...)$, puis pour $0 < k(n) \leq n$, $k(n)/(\log n)^{\delta} \to \infty$ pour un certain $\delta > 0$ et $a < \delta/(2(1+\delta))$,*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{k(n)}\right)^{1-a} \int_0^{k(n)/n} t^{-a-1} \left\{\Gamma_n(t) - t\right\} dt = 0 \quad p.s\ .$$

Lemme 3.1.2 *Soit $0 < k(n) \leq n$ et $k(n)/(\log n)^{\delta} \to \infty$ $(n \to \infty)$, pour un certain $\delta > 0$.*

(i) Supposons $F(x) = x^{\alpha}$ $(0 < x < 1)$ pour un certain $\alpha > 0$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} \frac{X_{(i,n)}}{X_{(k(n)+1,n)}} = \frac{\alpha}{\alpha+1} \ p.s.$$

(ii) Supposons $F(x) = 1 - x^{-\alpha}$ $(x > 1)$ pour un certain $\alpha > 2(1+\delta)/\delta$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k(n)} \sum_{i=0}^{k(n)-1} \frac{X_{(n-i,n)}}{X_{(n-k(n),n)}} = \frac{\alpha}{\alpha-1} \quad p.s.$$

Lemme 3.1.3 *Soit $0 < k(n) \leq n$ et $k(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$*

(i) Supposons $F(x) = x^{\alpha}$ $(0 < x < 1)$ pour un certain $\alpha > 0$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} \frac{X_{(i,n)}}{X_{(k(n)+1,n)}} = \frac{\alpha}{\alpha+1} \quad \text{en probabilité.}$$

(ii) Supposons $F(x) = 1 - x^{-\alpha}$ $(x > 1)$ pour un certain $\alpha > 1$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k(n)} \sum_{i=0}^{k(n)-1} \frac{X_{(n-i,n)}}{X_{(n-k(n),n)}} = \frac{\alpha}{\alpha-1} \quad \text{en probabilité.}$$

Lemme 3.1.4 *Soit $x_F > 0$, et $U = (1/(1-F))^{\leftarrow}$, (la flèche indiquant la fonction in-*

verse), alors pour toute fonction positive a

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log U(tx)-\log U(t)}{a(t)/U(t)}=\begin{cases}\log x & \gamma\geq 0,\\ \frac{x^{\gamma}-1}{\gamma} & \gamma<0,\end{cases}$$

pour tout $x>0$, et pour chaque $\varepsilon>0$ il exist t_0 tel que, pour $t\geq t_0$ et $x\geq 1$,

(i)

$$(1-\varepsilon)\frac{1-x^{-\varepsilon}}{\varepsilon}-\varepsilon<\frac{\log U(tx)-\log U(t)}{a(t)/U(t)}<(1+\varepsilon)\frac{x^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}+\varepsilon,$$

a condition que $\gamma\geq 0$,et

(ii)

$$1-(1+\varepsilon)\,x^{\gamma+\varepsilon}<\frac{\log U(tx)-\log U(t)}{\log U(\infty)-\log U(t)}<1-(1-\varepsilon)\,x^{\gamma-\varepsilon},$$

a condition que $\gamma<0$.

Pour les preuves des lemmes précédents voir [4]

Preuve. (du théoreme 3.1.1)

Nous donnons seulement la preuve de la consistence forte en utilisant le lemme 3.1.2, la preuve de la consistence faible est similaire à partir du lemme 3.1.3.Soient $Y_1, Y_2, ...$i.i.d, de fonction de distribution commune $1-1/x$ $(x>1)$, alors $(X_1, X_2, ...)\overset{d}{=}(U(Y_1), U(Y_2), ...)$, et pour tout n on a aussi $\left(X_{(1,n)}, ...X_{(n,n)}\right)\overset{d}{=}\left(U(Y_{(1,n)}, ...U(Y_{(n,n)}\right)$. Nous utiliserons cette derniere égalité.

(i) Pour $\gamma \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ donnés et pour $r = 1, 2$,par le lemme 3.1.4 (i), nous avons p.s pour n suffisamment grand

$$\frac{M_n^{(r)}}{\left\{a\left(Y_{(n-k(n),n)}\right)/U\left(Y_{n-k(n),n)}\right)\right\}^r} =$$

$$\frac{1}{k(n)} \sum_{i=0}^{k(n)-1} \left\{\log U\left(\frac{Y_{(n-i,n)}}{Y_{(n-k(n),n)}}.Y_{(n-k(n),n)}\right) - \log U(Y_{(n-k(n),n)})\right\}^r$$

$$\div \left\{a(Y_{(n-k(n),n)})/U(Y_{(n-k(n),n)})\right\}^r$$

$$< \frac{1}{k(n)} \sum_{i=0}^{k(n)-1} \left[\varepsilon + (1+\varepsilon)\frac{Y^{\varepsilon}_{(n-i,n)}/Y^{\varepsilon}_{(n-k(n),n)} - 1}{\varepsilon}\right]^r.$$

Supposons d'abord pour $r = 1$, alors $Y^{\varepsilon}_{(n-j,n)}$ est la $(n-j)$ ème statistique d'ordre, de fonction de distribution $1 - 1/x^{1/\varepsilon}$ $(x > 1)$, nous pouvons appliquer le lemme 3.1.2(ii) pour $\varepsilon < \delta/\left(2(1+\delta)\right)$ et déduire :

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{M_n^{(1)}}{a(Y_{(n-k(n),n)})/U(Y_{(n-k(n),n)})} \leq \varepsilon + (1+\varepsilon)\,\frac{\left\{\frac{\varepsilon^{-1}}{\varepsilon^{-1}-1} - 1\right\}}{\varepsilon} \text{ p.s.}$$

et pour $\varepsilon = 0$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n^{(1)}}{a(Y_{(n-k(n),n)})/U(Y_{(n-k(n),n)})} = 1 \text{ p.s.}$$

Ensuite, nous notons que la fonction a/U est à variation lente, d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(\left(\frac{Y_{(n--k(n),n)}}{n/k(n)}\cdot\frac{n}{k(n)}\right)/U\left(\frac{Y_{(n-k(n),n)}}{n/k(n)}\cdot\frac{n}{k(n)}\right)}{a\left(\frac{n}{k(n)}\right)/U\left(\frac{n}{k(n)}\right)} = 1 \text{ p.s.}$$

Le cas où $r = 2$ est similaire, il suffit de travailler sur le carré et calculer les limites de tous les termes. Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n^{(r)}}{\left\{a\left(\frac{n}{k(n)}\right)/U\left(\frac{n}{k(n)}\right)\right\}^r} = r! \text{ p.s. } \quad \text{Pour } r = 1, 2. \tag{3.3}$$

(ii) soient $\gamma < 0$ et $\varepsilon > 0$ donnés et pour $r = 1, 2$ nous retrouvons les memes resultats que dans la partie (i), maintenant en utilisant le lemme 3.1.4 (ii). Pour n suffisament grand

$$\frac{M_n^{(r)}}{\left\{\log U(\infty) - \log U(Y_{(n-k(n),n)})\right\}^r} < \frac{1}{k(n)} \sum_{i=0}^{k(n)-1} \left[1 - (1-\varepsilon) \cdot \frac{Y_{(n-i,n)}^{\gamma-\varepsilon}}{Y_{(n-k(n),n)}^{\gamma-\varepsilon}}\right]^r.$$

D'abord,supposons $r = 1$, puisque $Y_{(n-i,n)}^{\gamma-\varepsilon}$ est la $(i+1)$ ème statistique d'ordre de fonction de distribution $x^{1/(-\gamma+\varepsilon)}$ $(0 < x < 1)$, nous pouvons appliquer le lemme 3.1.2(i), et trouver

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{M_n^{(1)}}{\log U(\infty) - \log U(Y_{(n-k(n),n)})} \leq 1 - (1-\varepsilon) \frac{(\varepsilon-\gamma)^{-1}}{(\varepsilon-\gamma)^{-1} + 1} \text{ p.s.}$$

Ainsi, avec la même inégalité inférieur, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n^{(1)}}{\log U(\infty) - \log U(Y_{(n-k(n),n)})} = \frac{-\gamma}{1-\gamma} \quad \text{p.s.}$$

Notons que puisque la fonction $\log U(\infty) - \log U$ est a variation régulière on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log U(\infty) - \log U\left(\left\{Y_{(n-k(n),n)} k(n)/n\right\} . [n/k(n)]\right)}{\log U(\infty) - \log U(n/k(n))} = 1 \quad \text{p.s.}$$

Le cas $r = 2$ est similaire, il suffit de travailler sur le carré et calculer les limites de tous les termes, il s'ensuit que pour $r = 1, 2$ presque sûrement

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n^{(r)}}{\left\{\log U(\infty) - \log U(n/k(n))\right\}^r} = \begin{cases} -\gamma/(1-\gamma), & r = 1, \\ 2\gamma^2/\left\{(1-\gamma)(1-2\gamma)\right\}, & r = 2. \end{cases} \tag{3.4}$$

Maintenant, 3.3 et 3.4 impliquent que pour tout réel γ on a presque sûrement

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(M_n^{(1)}\right)^2}{M_n^{(2)}} = \begin{cases} 1/2, & \gamma \geq 0, \\ (1-2\gamma)/(2-2\gamma), & \gamma < 0. \end{cases}$$

Et si $\lim_{n\to\infty} a\left(n/k(n)\right)/U\left(n/k(n)\right) = 0$ pour $\gamma = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \log U\left(\infty\right) - \log U(n/k(n)) = 0$ pour $\gamma < 0$, alors

$$\lim_{n\to\infty} M_n^{(1)} = \max(0,\gamma) \quad \text{p.s.}$$

■

Pour la normalité asymptotique de l'estimateur des moments on a la preuve suivante.

Preuve. (La normalité asymptotique)

Rappelons tout d'abord le vecteur

$$\sqrt{k\left(n\right)}\left(\frac{M_n^{(1)}}{f(\log X_{(n-k(n),n)})} - \rho_1\left(\gamma\right), \frac{M_n^{(2)}}{\left\{f(\log X_{(n-k(n),n)})\right\}^2} - \rho_2\left(\gamma\right)\right), \tag{3.5}$$

avec

$$f(t) := a\left(1/\left\{1 - F(\exp t)\right\}\right)/U(1/\left\{1 - F(\exp t)\right\}),$$

a asymptotiquement une distribution normale, avec une moyenne nulle et une matrice de covariance $(\mathcal{S}_{i,j})$ définie pour $\gamma \leq 0$ par :

$$\mathcal{S}_{11} = \left(1-\gamma\right)^{-2}\left(1-2\gamma\right)^{-1}, \mathcal{S}_{12} = 4\left(1-\gamma\right)^{-2}\left(1-2\gamma\right)^{-1}\left(1-3\gamma\right)^{-1},$$
$$\mathcal{S}_{22} = 4\left(5-11\gamma\right)\left(1-\gamma\right)^{-2}\left(1-2\gamma\right)^{-2}\left(1-3\gamma\right)\left(1-4\gamma\right),$$

Et pour $\gamma \geq 0$,

$$\mathcal{S}_{11} = 1, \mathcal{S}_{12} = 4, \mathcal{S}_{22} = 20.$$

Les fonctions ρ_1 et ρ_2 sont définés par :

$$\rho_1\left(\gamma\right) := \begin{cases} 1, & \text{si } \gamma \geq 0, \\ 1/\left(1-\gamma\right), & \text{si } \gamma < 0. \end{cases}$$
$$\rho_2\left(\gamma\right) := \begin{cases} 2, & \text{si } \gamma \geq 0, \\ 2/\left\{\left(1-\gamma\right)\left(1-2\gamma\right)\right\}, & \text{si } \gamma < 0. \end{cases}$$

Donc, pour notre preuve on écrit (P, Q) pour le vecteur normale limite dans 3.5 , alors

$$\sqrt{k(n)}\left\{\frac{\left(M_n^{(1)}\right)^2}{M_n^{(2)}}-\frac{(\rho_1(\gamma))^2}{\rho_2(\gamma)}\right\}$$

$$=\frac{\left(f(\log X_{(n-k(n),n)})\right)^2}{\rho_2\left(\gamma\right).M_n^{(2)}}\left[\begin{array}{c}\rho_2\left(\gamma\right)\sqrt{k(n)}\left\{\frac{(M_n^{(1)})^2}{(f(\log X_{(n-k(n),n)}))^2}-\left(\rho_1\left(\gamma\right)\right)^2\right\}\\ -(\rho_1(\gamma))^2\sqrt{k(n)}\left\{\frac{M_n^{(2)}}{(f(\log X_{(n-k(n),n)}))^2}-\rho_2\left(\gamma\right)\right\}\end{array}\right]$$

$$\rightarrow 2\frac{\rho_1\left(\gamma\right)}{\rho_2\left(\gamma\right)}.P-\frac{\left\{\rho_1\left(\gamma\right)\right\}^2}{\left\{\rho_2\left(\gamma\right)\right\}^2}.Q$$

$(n \rightarrow \infty)$ en distribution, par conséquent

$$\sqrt{k(n)}\left[\left\{1-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{(M_n^{(1)})^2}{M_n^{(2)}}}\right\}-\left\{1-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{(\rho_1(\gamma))^2}{\rho_2(\gamma)}}\right\}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{k(n)}}{2}\frac{\left\{\frac{(\rho_1(\gamma))^2}{\rho_2(\gamma)}-\frac{\left(M_n^{(1)}\right)^2}{M_n^{(2)}}\right\}}{\left[\left\{1-\frac{(M_n^{(1)})^2}{M_n^{(2)}}\right\}\left\{1-\frac{(\rho_1(\gamma))^2}{\rho_2(\gamma)}\right\}\right]}$$

$$\rightarrow\frac{\rho_1\left(\gamma\right)\left\{\frac{\rho_1(\gamma)Q}{2}-\rho_2\left(\gamma\right)P\right\}}{\left\{\rho_2\left(\gamma\right)-\left(\rho_1\left(\gamma\right)\right)^2\right\}^2}$$

$(n \rightarrow \infty)$ en distribution, notons que

$$1-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{(\rho_1(\gamma))^2}{\rho_2(\gamma)}}=\min\left(0,\gamma\right).$$

Il reste à déterminer la distribution asymptotique de $\sqrt{k(n)}\left\{M_n^{(1)}-\max(0,\gamma)\right\}$. cette expression tend vers $P.\max(0,\gamma)$ en distribution, pour $\gamma > 0$ .Pour $\gamma = 0$ la condition supplémentaire du correlaire est $\sqrt{k(n)}b_2\left(n/k(n)\right) \rightarrow 0\,(n \rightarrow \infty)$ en probabilité, par conséquent $\sqrt{k(n)}f(\log X_{(n-k(n),n)}) \rightarrow 0$ et finalement $\sqrt{k(n)}M_n^{(1)} \rightarrow 0\,(n \rightarrow \infty)$ en probabilité. D'une manière similaire, nous obtenons $\sqrt{k(n)}M_n^{(1)} \rightarrow 0\,(n \rightarrow \infty)$ en probabilité pour $\gamma < 0$. ∎

Définition 3.1.2 *(Estimateur $\widehat{Q}^M$)*

Estimation du quantile extrême sur la base de l'estimateur des moment est alors :

$$\widehat{x}_p := \frac{a_n^{\widehat{\gamma}_n} - 1}{\widehat{\gamma}_n} . \frac{X_{(n-k,n)} M_n^{(1)}}{\rho\left(\widehat{\gamma}_n^M\right)} + X_{(n-k,n)}, \tag{3.6}$$

avec le choix

$$a_n := \frac{k}{n.p}, \text{ et } \rho\left(\widehat{\gamma}_n^M\right) := \begin{cases} 1, & \gamma \geq 0, \\ \frac{1}{1-\gamma} & \gamma < 0. \end{cases}$$

Quand $\gamma < 0$, le point terminal est fini et peut être estimé par :

$$\widehat{x}_n^* := X_{(n-k,n)} M_n^{(1)} \left(1 - \frac{1}{\widehat{\gamma}_n}\right) + X_{(n-k,n)}.$$

La normalité asymptotique de l'estimateur 3.6 , pour différentes conditions sur la queue de distribution et sur l'ordre de limitation $p = p_n$ pour $n \to \infty$ est prouvée par Dekkers et al [4].

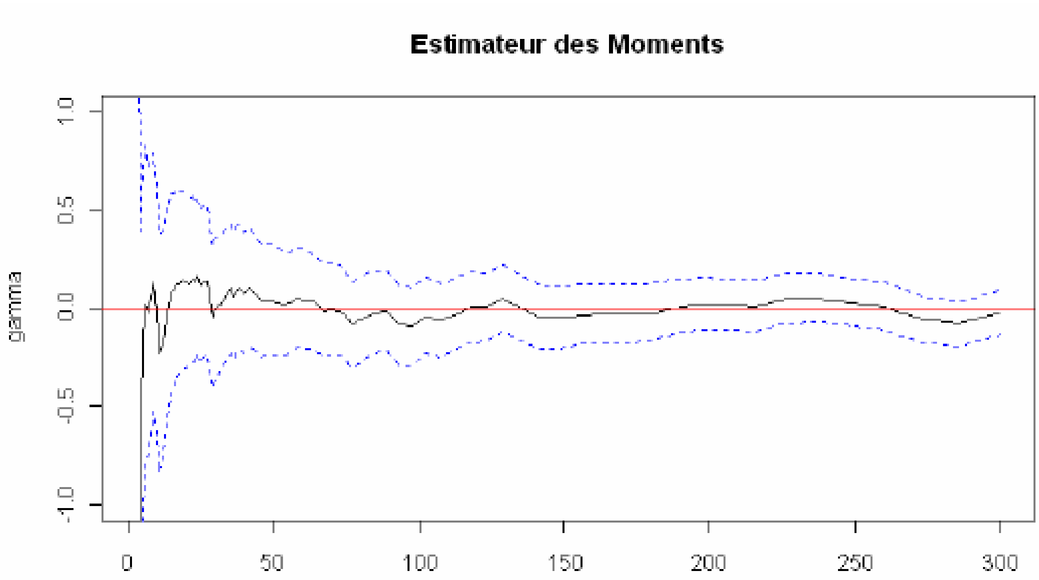

FIG. 3.1 – Estimateur des Moments, avec un intervalle de confiance de niveau 95% ,pour l'EVI de la distribution de Gumbel($\gamma = 0$) basé sur 100 échantillons de 3000 observations.

3.1.3 L'estimateur de Hill

L'estimateur de l'EVI le plus populaire est l'estimateur de Hill qui a été introduit en 1975 [5], il est cependant limité au cas de Fréchet $\gamma > 0$. Il est défini par la statistique

$$\widehat{\gamma}^{H}_{k(n)} := \frac{1}{k(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} \log X_{n-i+1,n} - \log X_{n-k(n),n}. \tag{3.7}$$

Théorème 3.1.2 *(Propriétés asymptotiques $\widehat{\gamma}^H$).*

On suppose que $F \in \mathcal{D}\left(\Phi_{1/\gamma}\right)$, $\gamma > 0$, $k \to \infty$, et $k/n \to 0$ quand $n \to \infty$ alors :

(i) Consistance faible :

$$\widehat{\gamma}^{H}_{k(n)} \xrightarrow{P} \gamma, \ \text{quand } n \to \infty.$$

(ii) Consistance forte : Si $(k/\log\log n) \to \infty$ quand $n \to \infty$, alors

$$\widehat{\gamma}^{H}_{k(n)} \xrightarrow{p.s} \gamma, \ \text{quand } n \to \infty.$$

(iii) Normalité asymptotique : On Suppose que F satisfait 2.6 . Si $\sqrt{k}A\,(n/k) \to \lambda$ quand $n \to \infty$, alors

$$\sqrt{k}(\widehat{\gamma}^{H}_{k(n)} - \gamma) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\frac{\lambda}{1-\rho}, \gamma^2\right), \ \text{quand } n \to \infty.$$

Définition 3.1.3 *(Estimateur de Weissman $\widehat{Q}^H$)*

L'estimateur de Weissman est défini par :

$$\widehat{Q}^{H} := X_{n-k+1,n} + \left(\frac{k}{np}\right)^{\widehat{\gamma}^H}.$$

3.1.4 Estimateur de Pickands

L'estimateur de Pickands a été introduit en 1975 par James Pickands [7], pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$. Il est défini par :

$$\widehat{\gamma}^{P} := \frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{X_{n-k+1,n} - X_{n-2k+1,n}}{X_{n-2k+1,n} - X_{n-4k+1,n}}\right). \tag{3.8}$$

Théorème 3.1.3 *(Propriétés asymptotiques de $\widehat{\gamma}^p$)*

Soit $F \in D(\mathcal{H}_\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $k \to \infty$ *et* $k/n \to 0$, *quand* $n \to \infty$.

(i) Consistance faible :

$$\widehat{\gamma}^P \xrightarrow{\mathbb{P}} \gamma, \text{ quand } n \to \infty.$$

(ii) Consistance forte : Si $k/\log\log n \to \infty$, *quand* $n \to \infty$, *alors*

$$\widehat{\gamma}^P \xrightarrow{p.s} \gamma, \text{ quand } n \to \infty.$$

(iii) Normalité asymptotique : On Suppose que U *admet des dérivées positives* U' *et que* $\overset{+}{-}t^{1-\gamma}U'(t)$ *(avec l'un ou l'autre choix du signe) est à variation régulière à l'infini avec la fonction auxiliaire* a. *Si* $k = o(n/g^{-1}(n))(n \to \infty)$, *où* $g(t) = t^{3-2\gamma}(U'(t)/a(t))^2$, *alors*

$$\sqrt{k}(\hat{\gamma}^P - \gamma) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \nu^2), \text{ quand } n \to \infty.$$

où

$$\nu^2 := \frac{\gamma^2(2^{2\gamma+1}+1)}{(2(2^\gamma-1)\log 2)^2}.$$

Définition 3.1.4 *(Estimateur $\widehat{Q}^P$)*

L'estimateur $\widehat{Q}^P$ *de quantile* $Q(1-p)$ *associé à l'estimateur de Pickands est :*

$$\widehat{Q}^P := X_{n-k+1,n} + \frac{(k/np)^{\widehat{\gamma}^P} - 1}{1 - 2^{-\widehat{\gamma}^p}} \left(X_{n-k+1,n} - X_{n-2k+1,n}\right).$$

Dans le cas où $\gamma < 0$, *le point terminal peut être estimé par :*

$$\widehat{x}_F^P := X_{n-k+1,n} + \frac{(X_{n-k+1,n} - X_{n-2k+1,n})}{2^{-\widehat{\gamma}^P} - 1}.$$

3.2 Estimateurs du couple (γ, σ)

Suivant le type de problématique que l'on a, on peut avoir besoin non seulement d'un estimateur de γ mais aussi d'un estimateur de σ.

3.2.1 Estimateurs par la méthode des moments

Dans le cas d'une distribution $\mathcal{GPD}(\gamma, \sigma)$, l'estimateur des moments est basé sur le fait que

$$\mathbb{E}\left[\left(1+\frac{\gamma X}{\sigma}\right)^r\right] = \frac{1}{1-r\gamma} \quad \text{si} \quad 1-r\gamma>0.$$

Il en découle l'expression des paramètres en fonction des deux premiers moments μ_1 et μ_2

$$\sigma = \frac{1}{2}\mu_1\left(\frac{\mu_1^2}{\mu_2-\mu_1^2}+1\right),$$
$$\gamma = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1^2}{\mu_2-\mu_1^2}\right).$$

En remplaçant dans les expressions précédentes μ_1 et μ_2 par leurs versions empiriques,nous obtenons l'estimateur des moments du couple$\left(\widehat{\sigma}_n^{MOM}, \widehat{\gamma}_n^{MOM}\right)$ défini comme suit :

$$\widehat{\sigma}_n^{MOM} = \frac{1}{2}\overline{X}\left(\frac{\overline{X}^2}{\overline{X^2}-\overline{X}^2}+1\right), \quad \widehat{\gamma}_n^{MOM} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\overline{X}^2}{\overline{X^2}-\overline{X}^2}\right), \tag{3.9}$$

où $\overline{X}$ et $\overline{X^2}$ sont les estimateurs empiriques des moments d'ordre 1 et 2 de l'échantillon. La normalité asymptotique du couple $\left(\widehat{\gamma}_n^{MOM}, \widehat{\sigma}_n^{MOM}\right)$ peut être établie sous la condition $\gamma < 1/4$. Pour affaiblir cette condition d'autres alternatives ont été proposées, telle la méthode des moments pondérés (éventuellement généralisés).

3.2.2 Estimateurs par la méthode des moments pondérés

Hosking et Wallis [6] ont également proposé une approche des Moments de Probabilités Pondérés pour la $\mathcal{GPD}$

$$\varpi_r := \mathbb{E}\left[X\overline{G}^r_{\gamma,\sigma}(X)\right] = \frac{\sigma}{(r+1)(r+1-\gamma)}, \quad r \in \mathbb{N}, \tag{3.10}$$

avec X une v.a de fonction de distribution $G_{\gamma,\sigma}$.Pour $r = 0, 1$, on obtient

$$\gamma = 2 - \frac{\omega_0}{\omega_0 - 2\omega_1} \text{ et } \sigma = \frac{2\omega_0\omega_1}{\omega_0 - 2\omega_1}.$$

Lorsqu'on remplace ω_0 et ω_1 par leurs estimateurs empirique, on obtient les estimateurs des moments de probabilités pondérés $\widehat{\gamma}$ et $\widehat{\sigma}$ des paramètres de la $\mathcal{GPD}$.

3.2.3 Estimateurs par maximum de vraisemblance

Supposons que notre échantillon des excès $(X_1, ..., X_{N_u})$ est i.i.d avec la fonction $\mathcal{GPD}$. La fonction de densité $g_{\gamma,\sigma}$ de $G_{\gamma,\sigma}(x)$ est alors

$$g_{\gamma,\sigma}(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sigma}\left(1 + \gamma\frac{x}{\sigma}\right)^{-1/\gamma - 1} & \text{si } \gamma \neq 0 \\ e^{-x/\sigma} & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}, \sigma > 0. \tag{3.11}$$

La fonction log-vraisemblance associé à l'échantillon $(X_1, ..., X_{N_u})$ vaut donc

$$l_{\gamma,\sigma}(x_1, ..., x_{N_u}) := -N_u \log\sigma - \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right)\sum_{i=1}^{N_u} \log\left(1 + \frac{\gamma}{\sigma}x_i\right), \tag{3.12}$$

pour $\gamma \neq 0$. L'annulation des dérivées partielles de cette fonction par rapport à γ et σ (resp.), conduit au système des équations de maximisation, à partir desquelles nous calculons les estimateurs du Maximum de vraisemblance$(\widehat{\gamma}_{N_u}, \widehat{\sigma}_{N_u})$

$$\begin{cases} \frac{1}{N_u} \sum\limits_{i=1}^{N_u} \log\left(1 + \gamma \frac{x_i}{\sigma}\right) = \gamma, \\ \frac{1}{N_u} \sum\limits_{i=1}^{N_u} \frac{x_i/\sigma}{1+\gamma x_i/\sigma} = \frac{1}{1+\gamma}, \end{cases}$$

où $(x_1, ..., x_{N_u})$ sont les réalisations de $(X_1, ..., X_{N_u})$. Lorsque $\gamma > -1/2$ Smith [8] a montré la normalité asymptotique des estimateurs du maximum de vraisemblance

$$\sqrt{N_u} \begin{pmatrix} \widehat{\gamma}_{N_u} - \gamma \\ \widehat{\sigma}_{N_u}/\sigma_{N_u} - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}_2 \left(0, (1+\gamma) \begin{pmatrix} 1+\gamma & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right) \text{ quand } n \to \infty,$$

avec $\mathcal{N}_2\left(\mu, \sum\right)$: la distribution Gaussienne bivariée de vecteur moyennne μ et de matrice de covariance $\sum$. Ce résultat permet en particulier de calculer les bornes de l'intervalle de confiance pour les estimateurs du maximum de vraisemblance.

Conclusion

Tous les estimateurs de l'indice des valeurs extrêmes mentionnés sous l'approche semi-paramétrique (Estimateurs de Hill, de Pickands, des Moments) partagent quelques propriétés souhaitables communes, telles que la consistance (faible et forte) et la normalité asymptotique. L'objectif principal de ce mémoire est l'estimateur des moments. Nous avons présenté la propriéte asymptotique de ce dernier, et l'utilisation de cet estimateur pour obtenir des intervalles de confiance asymptotiques pour les quantiles relevés de F (dans le cas ou $\gamma < 0$) ainsi que pour le point terminal.
Une autre méthode pour définir les "grandes observations" consiste à prendre les observations qui dépassent un seuil déterministe u. Cette méthode appelée méthode POT (Peaks Over Threshold), est notamment utilisée pour estimer l'indice des valeurs extrêmes.

Bibliographie

[1] Arnold, B. C., Balakrishnan, N., & Nagaraja, H. N. (1992). A first course in order statistics (Vol. 54). Siam.

[2] BENAMEUR, S. (2010). Sur L'estimation de L'indice Des Valeurs Extrêmes. Mémoire de magister, Université Mohamed Khider Biskra, Algeria.

[3] SOLTANE, L. (2016). Analyse des Valeurs Extrêmes en Présence de Censure. Thèse de doctorat, Université Mohamed Khider Biskra, Algeria.

[4] Dekkers, A. L., Einmahl, J. H., & De Haan, L. (1989). A moment estimator for the index of an extreme-value distribution. The Annals of Statistics, 1833-1855.

[5] Hill, B. M. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution. The annals of statistics, 3(5), 1163-1174.

[6] Hosking, J. R., & Wallis, J. R. (1987). Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto distribution. Technometrics, 29(3), 339-349.

[7] Pickands III, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. the Annals of Statistics, 119-131.

[8] Smith, R. L. (1987). Estimating tails of probability distributions. The annals of Statistics, 1174-1207.

[9] TOULEMONDE, G. (2008). Estimation et tests en théorie des valeurs extrêmes. Thèse de doctorat, Université Paris VI - Pierre et Marie Curie.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(X_1, ..., X_n)$	échantillon de taille n de v.a's.
EMV	estimateur de Maximum de Vraisemblance
$\overline{X}_n$	moyenne arithmétique
i.i.d	indépendantes et identiquement distribuées
$\xrightarrow{\mathcal{P}}$	convergence en probabilité.
$\xrightarrow{\mathcal{D}}$	convergence en distribution.
$\xrightarrow{p.s.}$	convergence presque sûre.
F	fonction de distribution de la variable aléatoire X
F_n	fonction de distribution empirique
$\overline{F}$	fonction de survie
$F^{\leftarrow}$	l'inverse généralisé de F
$(\Omega, \mathbb{F}, P)$	espace de probabilité
TCL	Théorème Centrale Limite
$\mathcal{N}(0, 1)$	loi normale standard
$(X_{1,n}, ..., X_{n,n})$	statistiques d'ordre associe à $(X_1, ..., X_n)$

$X_{1,n}$	minimum de $X_1, X_2, ..., X_n$
$X_{n,n}$	maximum de $X_1, X_2, ..., X_n$
$X_{k,n}$	k-ième statistique d'ordre
Q	fonction des quantiles
Q_n	fonction des quantiles empirique
$U(t)$	La fonction des quantiles de queue
$U_n(t)$	La fonction des quantiles de queue empirique
$F_{X_{k,n}}$	fonction de répartition de la k-ième statistique d'ordre
$f_{X_{k,n}}$	fonction de densité de probabilité de $X_{k,n}$
$f_{X_{j,n},X_{k,n}}$	fonction de densité jointe de $X_{j,n}$ et $X_{k,n}$
EVT	Extrem Value Theory
GEV	lois de valeurs extrêmes généralisées
Φ_α	loi de Fréchet
Ψ_α	loi de Weibull
Λ	loi de Gumbel
H_γ	famille des lois des valeurs extrêmes généralisées
$D(H_\gamma)$	domaine d'attraction
GPD	Generalised Pareto distribution
x_F	point terminale
x_p	quantile d'ordre p
u	seuil
$\widehat{\gamma}^M$	estimateur des moments
$U_1, U_2, ..., U_n$	suite de va's uniformément distribuées sur $[0;1]$
$\overset{d}{=}$	égalité en distribution
p.s	presque sûre
$\widehat{\gamma}^H_{k(n)}$	estimateur de Hill
γ^P	estimateur de Pickands
$l_{\gamma,\sigma}(x_1, ..., x_{N_u})$	fonction log-varisemblance