République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

SAOULI Sabrine

Titre :

Propriété de la Solution d'une équation Différentielle Stochastique Rétrograde

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	LABED Saloua	UMKB	Président
Dr.	CHAOUCHKHOUANE Nassima	UMKB	Encadreur
Dr.	AOUN Salima	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Pour ma famille, pour leurs patiences et encouragement.

Que dieu les protégent.

Je dédie ce modeste travail

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout particuliérement mon encadreur, **Dr CHAOUCHKHOUANE Nassima** pour ces conseils, sa grande disponibilité et sa générosité avec la quelle il m'a fait partager ses travaux, ses idées et ses intuitions.

Et je veux exprimer tout mon respect aux membres du jury (**Dr LABED Saloua** et **Dr AOUN Salima),** qui ont acceptes d'évaluer et de juger mon travail.

Merci aux members du département de Mathématique à l'Université du Biskra.

Merci à mes amis avec qui j'ai passé des moment mémorable.

Table des matières

Introduction Générale

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR on abrégé) sont une nouvelle classe d'équations différentielles stochastiques. Les EDSR ont réservé une attention considérable dans la recherche en probabilité, car sont fournissent une représentation probabilité pour les solutions de certaine classe d'équations aux dérivées partielles. La théorie des EDSR à trouvé beaucoup d'applications telles que la théorie du contrôle stochastique, économie et des problémes de mathématiques financières.

En 1973, les équations différentielle stochastiques linéaires ont été d'abord introduites par (Bismut, [1]), dans le cas ou f est linéaire par rapport aux variable Y et Z, qui a utilisé ces EDSR pour études les problèmes du contrôle optimal.

Dans le début des années 90, E.pardoux et S.peng [5] sont les premiers a considérer les équations non-linéaires :

$$\begin{cases} dY_t = -f(t, Y_t, Z_t)dt + Z_t dB_t \\ \qquad\qquad Y_T = \xi \end{cases} \tag{1}$$

Où le coefficient $f : [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ (f appelé le générateur) est uniformément Lipshitzien par rapport au variable Y, Z et la condition terminale ξ est de carré intégrable. La solution d'une EDSR est un couple de processus adaptés par rapport à la filtration de Mouvement Brownien $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ est vérifie (1).

Notre objectif est d'étudier une propriété dés équations déffèrentielle stochastiques rétrogrades ce résultat est du Z,chen [4] qui est étudier la réciproque de théorème de comparaisons ce théorème permet de comparer des solutions d'EDSR dés qu' on peut comparer leur générateur, on montrant que si pour chaque condition de l'EDSR associéés à la données standard (ξ, f_1) est égale à l'instant $t = 0$ à la solution de l'EDSR associeé a la donnée (ξ, f_2) , alors on doit avoire $f_1 = f_2$.

chapitre 1 :

Dans ce chapitre, nous allons expliquer la théorie du calcul stochastique, on donne les définitions et les propriétés des processus continues ainsi que leurs résultats principaux (processus stochastiques, mouvement brownien, martingales) qui nous permettre de définir l'intégrale stochastique.[2] et [7]

chapitre 2 :

Dans ce chapitre, nous allons montrer d'existence et d'unicité de la solution de l'équations différentielles stochastique rétrogrades,ce résultat est dû E.Pardoux et S.Peng [5] et c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) dans le cas où le générateur non-linéaire, et on donne une estimation a priori pour la solution de EDSR et ensuite on énonce théorème de comparaison en utilisant les équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires. [3] et [6]

chapitre 3

Dans ce chapitre, nous somme intéressé au résultat d'inverse de théorème de comparaison, puis nous donnons deux contre-exemples. La première prouve que le théorème n'est pas réalisé dans le cas au , $g_1(0, 0, \cdot) \neq 0$, $g_2(0, 0, \cdot) \neq 0$.la seconde confirme que le théorème n'est pas réalisé dans le cas au $g_1(y, 0, \cdot) \neq 0$, $g_2(y, 0, \cdot) \neq 0$ $\forall y \in \mathbb{R}$.

Chapitre 1

Une revue générale sur les calculs stochastiques

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons des définitions de base et des résultats principaux pour utiliser aux prochains chapitre.

1.2 Définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace de probabilité complet.

Définition 1.2.1 (Processus Stochastique) *: Soit T un ensemble. On appelle processus stochastique indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, une famille $(X_t)_{t \in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$; pour tout $t \in T$; X_t est une variable aléatoire.*

Remarque 1.2.1 *Dans ce section, nous aurons $T = \mathbb{N}$ ce qui correspond aux processus à temps discret, $T = \mathbb{R}_+$ ou $T = [0, a]$ pour les processus à temps continu.*

Définition 1.2.2 *Un processus X est mesurable si l'application $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $B(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $B(\mathbb{R}^d)$.*

On peut noter qu'un processus stochastique peut être vu comme une fonction aléatoire à chaque ω, on associe la fonction $t \longmapsto X_t(\omega)$ qui est appelée ***trajectoire****.*

Définition 1.2.3 *Soient $(X_t)_{t\in T}$ et $(Y_t)_{t\in T}$ deux processus stochastique définis sur même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.*

i) X est une modification de Y si : pour tout $t \geq 0$ les v.a X_t et Y_t sont égales

$$P - p.s : \forall t \geq 0, P(X_t = Y_t) = 1.$$

ii) X et Y sont indistinguables si $P - p.s$ les trajectoires de X et de Y sont les mêmes

$$P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

Définition 1.2.4 *Une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ de $(\Omega \ , \mathcal{F})$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ i.e. pour $s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. On définit alors $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\cup_t \mathcal{F}_t\}$ ainsi que, pour tout t, $\mathcal{F}_{t^+} = \cap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$.*

Remarque 1.2.2 *On dit qu'une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est continue à droite si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ pour tout t. On dit qu'elle vérifie les conditions habituelles si elle est continue à droite et si $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $P-$négligeables de $\mathcal{F}$, noté $\mathcal{N}$ dans la suite.*
Si l'on se donne un processus X, on introduit la filtration $\mathcal{G}_t = \sigma\{X_s; s \leq t\}$. Cette filtration s'appelle **la filtration naturelle** *de X. Mais $\mathcal{G}_0$ ne contient pas nécessairement $\mathcal{N}$. C'est pour cela que l'on introduit souvent* ***la filtration naturelle augmentée*** *de X définie par $\mathcal{F}_t^x = \sigma\{\mathcal{N} \cup \mathcal{G}_t\}$.*

Définition 1.2.5 *Un processus stochastique $(X_t)_{t\in T}$ est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$si, pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable.*

Remarque 1.2.3 *Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$, et si X est adapté par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ alors toute modification de X est encore adaptée.*

Définition 1.2.6 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est progressivement mesurable par rapport à* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *si, pour tout* $t \geq 0$, *l'application* $(s,\omega) \longmapsto X_s(\omega)$ *de* $[0,t]\times\Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport à* $B([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$ *et* $B(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 1.2.4 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. On note aussi que si* X *est un processus mesurable et adapté alors il possède une modification progressivement mesurable .*

Proposition 1.2.1 *Si* X *est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (ou à gauche), alors* X *est mesurable et* X *est progressivement mesurable s'il est de plus adapté.*

1.3 Mouvement Brownien

Définition 1.3.1 *On appelle* ***Mouvement Brownien "MB"*** *un processus stochastique* $(B_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs réelles tel que :*

i) Continuité $P-p.s$; *la fonction* $s \longmapsto B_s(\omega)$ *est une fonction continue.*

ii) Indépendance des accroissements: si $0 \leq s \leq t$; $B_t - B_s$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$ *et de loi gaussienne centrée de variance* $t-s$.

iii) Stationnarité des accroissements: si $0 \leq s \leq t$, *la loi de est* $B_t - B_s$ *identique à celle de* $B_{t-s} - B_0 = B_{t-s}$.

Remarque 1.3.1 *On dit qu'un mouvement brownien par rapport à* x *si* $B_0 = x$.

Définition 1.3.2 *Un mouvement brownien est dit* ***standard*** *si*

i) $B_0 = 0\ P-p.s$

ii) $\mathrm{E}[B_t] = 0$

iii) $\mathrm{E}[B_t^2] = t$

Proposition 1.3.1 *Soit B un mouvement brownien Standard, on a:*

1. pour tout $T > 0$; $\{B_{t+T} - B_T\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\sigma(B_u, u \leq T)$.
2. pour tout $c > 0$; $\left\{cB_{\frac{t}{c^2}}\right\}_{t\geq 0}$: est un mouvement brownien.
3. Le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tW_{\frac{1}{t}}$ est un mouvement brownien.

Définition 1.3.3 *On appelle MB standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, un vecteur $B = (B^1,..,B^d)$ où les B^i sont des MB réels indépendants.*

Proposition 1.3.2 *Soit B un MB. La filtration$\{\mathcal{F}_t^B\}_{t\geq 0}$ vérifie les conditions habituelles et B est un$\{\mathcal{F}_t^B\}_{t\geq 0}$ MB.*

1.4 Martingales

Définition 1.4.1 *Un processus $(M_t)_{t\geq 0}$ est dit martingale si :*

i) Pour tout $t \geq 0$; M_t est $\mathcal{F}_t$ $-$mesurable ;

ii) Pour tout $t \geq 0$; M_t est intégrable i.e $\mathrm{E}(|M_t|) < \infty$;

iii) Pour tout $0 \leq s \leq t$, $\mathrm{E}(M_t/\mathcal{F}_s) = M_s.\ P - p.s.$

Remarque 1.4.1 *Une sous-martingale si (iii) est remplacé par*

$$\mathrm{E}(M_t/\mathcal{F}_s) > M_s.\ P - p.s.$$

Et sur-martingale si (iii)est remplacé par

$$\mathrm{E}(M_t/\mathcal{F}_s) < M_s.\ P - p.s.\ \forall t \geq s \geq 0$$

Théorème 1.4.1 *Si X est une martingale et si σ et τ sont deux temps d'arrêt bornés tels que :*

$$\sigma \leq \tau, \ \ alors, \ \ \mathrm{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma \ P - p.s.$$

Rappelons aussi qu'un processus X adapté et intégrable est une martingale si et seulement si pour tout temps d'arrêt borné τ,

$$\mathrm{E}[X_\tau] = \mathrm{E}[X_0].$$

Proposition 1.4.1 *Soit X une **martingale locale** continue. Il existe un unique processus croissant et continu, $\langle X, X\rangle$ nul en 0 tel que $X^2 - \langle X, X\rangle$soit une martingale locale.*

Remarque 1.4.2 *Si B est un MB, on a $\langle B, B\rangle_t = t$ car $\{B^2{}_t - t\}_{t\geq 0}$ est une martingale.*

Proposition 1.4.2 *Soit X une martingale locale continue. Il y a équivalence entre :*

i) $X_0 \in L^2$ et $\mathrm{E}[\langle X, X\rangle_\infty] < \infty$.

ii) X est une martingale bornée dans L^2.

Mentionner pour finir ce paragraphe les inégalités de **Burkholder–Davis–Gundy** connues aussi sous le nom d'inégalités BDG.

Théorème 1.4.2 (Inégalités Burkholder-Davis-Gundy "BDG") *Soit $p > 0$ un réel. Il existe deux constantes $c_p$et C_p telles que, pour toute martingale locale continue X, nulle en 0.*

$$c_p \,\mathrm{E}[\langle X, X\rangle_\infty^{p/2}] \leq \mathrm{E}[sup_{t\geq 0}|X_t|^p] \leq C_p \,\mathrm{E}[\langle X, X\rangle_\infty^{p/2}]$$

Remarque 1.4.3 *En particulier, si $T > 0$*

$$c_p \,\mathrm{E}[\langle X, X\rangle_T^{p/2}] \leq \mathrm{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p] \leq C_p \,\mathrm{E}[\langle X, X\rangle_T^{p/2}]$$

Théorème 1.4.3 (Théorème de représentation des martingales) *Soit* $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ *la filtration naturelle du mouvement brownien standard* $\{B_t\}_{0\leq t\leq T}$. *Soit* M *une martingale continue de carré intégrable par rapport à* $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$. *Alors il existe un processus adapté* Z *tel que*

$$\mathrm{E}\left(\int_0^T Z_s^2 ds\right) < \infty,$$

et, pour tout $t \in [0,T]$,

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s \;\; P-p.s$$

1.5 Calcul d'Itô

On se donne $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace de probabilité complet et un mouvement Brownien B sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s; s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien.

1.5.1 Intégrale stochastique générale

On cherche à définir

$$\int_0^t \psi_s dB_s \tag{1.1}$$

quand $\{\psi_s; s \geq 0\}$ est un processus stochastique.

Définition 1.5.1 *On dit que* $\{\psi_t; t \geq 0\}$ *est un bon processus s'il est* $(\mathcal{F}_t^B)$*-adapté, càglàd et si*

$$\mathrm{E}\left[\int_0^t \psi_s^2 ds\right] < \infty$$

pour tout $t > 0$

1.5.2 Cas des processus étagés

ce sont les processus du type

$$\psi_t^n = \sum_{i=0}^{p_n} \psi_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}(t) \tag{1.2}$$

ou $p_n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 \leq t_1 ...... \leq t_{p_n}$ et $\psi_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, P)$ (les processus de carré intégrables et $\mathcal{F}_{t_i}-$mesurable) pour tout $i = 0, ..., p_n$. On voit emmédiatement que ψ^n est un bon processus. On définit alors :

$$I_t(\psi^n) = \int_0^t \psi_s^n dB_s = \sum_{i=0}^{p_n} \psi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right) \tag{1.3}$$

Propriété 1.5.1

$$\mathrm{E}\left[I_t(\psi^n) \right] = 0$$
$$\mathrm{var}\left[I_t(\psi^n) \right] = \mathrm{E}\left[\int_0^t (\psi_s^n)^2 ds \right]$$

les processus $I_t(\psi^n)$ et $I_t^2(\psi^n) - \int_0^t (\psi_s^n)^2 ds$ sont des martingales.

1.5.3 Cas général

Si ψ est un bon processus, il existe $\{\psi^n, n \geq 0\}$ suite de processus étagés telle que

$$\mathrm{E}\left[\int_0^t \left(\psi_s - \psi_s^n \right)^2 ds \right] \longrightarrow 0 \tag{1.4}$$

quand $n \uparrow \infty$ il existe une v.a. $I_t(\psi)$ de carré intégrable telle que

$$\mathrm{E}\left[\left| I_t(\psi) - I_t(\psi) I_t(\psi)^n \right|^2 \right] \longrightarrow 0$$

quand $n \uparrow \infty$. On pose

$$I_t(\psi) = \int_0^t \psi_s dB_s$$

pour tout $t \geq 0$.

Propriété 1.5.2

$$\mathrm{E}\left[I_t(\psi)\right] = 0$$

$$\mathrm{var}\left[I_t(\psi)\right] = \mathrm{E}\left[\int_0^t \psi_s^2 ds\right]$$

Proposition 1.5.1 (Linéarité) *Pour tous $t \geq 0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et ψ_1, ψ_2 des bons processus,on a*

$$I_t\left(a_1\psi_1 + a_2\psi_2\right)$$

c'est-à-dire

$$I_t\left(a_1\psi_1 + a_2\psi_2\right) = a_1 I_t(\psi_1) + a_2 I_t\left(\psi_2\right)$$

Proposition 1.5.2 (Propriétes des Martingales) *Pour tout bon processus ψ, les processus*

$$t \longmapsto I_t(\psi) \;\; et \; t \longmapsto I_t(\psi^2) - \int \psi_s^2 ds$$

sont des $\mathcal{F}_t^B$ martingales continues. On a donc, pour tout $s \leq t$

$$\mathrm{E}\left[I_t(\psi)/\mathcal{F}_s^B\right] = I_s(\psi) \tag{1.5}$$

donc

$$\mathrm{E}\left[(I_t(\psi) - I_s(\psi))/\mathcal{F}_s^B\right] = \mathrm{E}\left[I_t\left(\psi\right)/\mathcal{F}_s^B\right] - \mathrm{E}\left[I_s\left(\psi\right)\right]$$

$$= 0$$

car ($I_t(\psi)$ est une martingale). D'autre part

$$\mathrm{E}\left[(I_t(\psi)-I_s(\psi))^2/\mathcal{F}_s^B\right]=\mathrm{E}\left[\int_s^t \psi_u^2 du/\mathcal{F}_s^B\right].$$

Proposition 1.5.3 *Soit ψ est un bon processus. On a*

$$\mathrm{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\int_0^t \psi_s dB_s|^2\right]\leq 4\,\mathrm{E}\left[\int_0^T \psi_s ds\right] \tag{1.6}$$

si τ est un temps d'arret alors

$$\int_0^\tau \psi_s dB_s=\int_0^T 1_{s\leq\tau}\psi_s dB_s,\ \ P-p.s.$$

Proposition 1.5.4 (Propriétes d' Isométrie d'Itô) *Pour tout bons processus φ,ψ et tout $s,t\geq 0$, on a*

$$\mathrm{E}\left[I_s(\varphi)I_t(\psi)\right]=\int_0^{s\wedge t}\psi_u\varphi_u du.$$

De plus, le processus

$$I_t(\varphi)I_t(\psi)-\int_0^t \psi_u\varphi_u du$$

est une $\mathcal{F}_t^B$ martingale.

Définition 1.5.2 *On dit que $\{\psi_t, t\geq 0\}$ est un bon processus local s'il est càglàd $\mathcal{F}_t^B$ adapté et vérifie*

$$\int_0^t \psi_s^2 ds<\infty\ p.s$$

pour tout $t\geq 0$

Soit ψ un bon processus local. On pose

$$\tau_n=\inf\left\{t>0,\int_0^t \psi_s^2 ds=n\right\}$$

comme :

$$\{\tau_n > t\} = \left\{ \int_0^t \psi_s^2 ds \leq n \right\}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$ on voit que τ_n est un $\mathcal{F}_t^B$-temps d'arrét pour tout $n \in \mathbb{N}$ par adaptation de ψ.

De plus, l'hypothése d'intégrabilité sur ψ entraine facilement que $\tau_n \longrightarrow +\infty$ $p.s.$ Enfin par construction

$$\mathrm{E}\left[\int_0^{\tau_n \wedge t} \psi_s^2 ds \right] \leq n < +\infty.$$

Ainsi, par le partie précédent. On peut définir $I_{\tau_n \wedge t}(\psi)$ comme une martingale. Lorsque $\tau_n \rightarrow +\infty$ $p.s.$

On peut définir aussi $I_t\left(\psi\right)$ pour tout $t > 0$, comme une martingale locale. De méme, en prenant la méme suite de temps d'arrét. Le processus

$$I_t\left(\psi\right)^2 - \int_0^t \psi_s^2 ds$$

est une martigale locale.

1.5.4 Processus d'Itô

Nous introduisons à présent une classe de processus qui sera très utile dans la suite.

Définition 1.5.3 *On appelle* ***processus d'Itô*** *un processus X à valeurs réelles tel que :*

$$P.p.s\ \forall\ 0 \leq t \leq T,\ X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions, $P-p.s.$

$$\int_0^T |b_s| ds < \infty \ \ et \ \int_0^T |\sigma_s|^2 ds < \infty.$$

Théorème 1.5.1 (Formule d'Itô) *Soient* $(t,x) \longmapsto f(t,x)$ *une fonction réelle deux fois différentiable en* x *et une fois différentiable en* t $(f \in C^{1,2})$ *et* X *un processus d' Itô. On a*

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t f_x^{'}(s,X_s)dX_s + \int_0^t f_s^{'}(s,X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}^{''}(s,X_s)\sigma_s^2 ds.$$

ce qui l'on note

$$\begin{aligned} df(t,X_t) &= \left[f_t^{'}(t,X_t) + \frac{1}{2} f_{xx}^{''}(t,X_t)\sigma_t^2 \right] dt + f_x^{'}(t,X_t)dX_t \\ &= f_t^{'}(t,X_t)dt + f_x^{'}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}^{''}(t,X_t) d\left\langle X \right\rangle_t . \end{aligned}$$

Proposition 1.5.5 *La formule d'Itô montre que*

$$d\left[X_1X_2\right](t) = X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + \sigma_1(t)\sigma_2(t)dt.$$

Cette formule est connue sous le nom **d'intégration par parties.** La quantité $\sigma_1(t)\sigma_2(t)$ correspond au crochet de X_1, X_2 noté $\langle X_1, X_2\rangle$ est défini comme le processus à variation fini $\langle X_1, X_2\rangle = \int_0^t \sigma_1(s)\sigma_2(s)ds$.

1.6 Espérance conditionnelle

Nous donnons dans cette section quelques définitions et propriétés qui nous seront utiles dans la suite.

Notons $\mathbb{L}^1_{\mathcal{F}}(\Omega, P)$ l'ensembles des fonctions réelles $\mathcal{F}-$mesurables et intégrables par rapport à la mesure de probabilité P.

Définition 1.6.1 *Soit* $X \in \mathbb{L}^1_{\mathcal{F}}(\Omega, P)$ *et* $\mathcal{G}$ *une sous tribu de* $\mathcal{F}$. *On définit l'espérance conditionnelle de* X *sachant* $\mathcal{G}$, *l'unique variable aléatoire* $\mathrm{E}\left(X|\mathcal{G}\right)$ $\mathcal{G}-$*mesurable sur* Ω

telle que :

$$\int_B X \, dP = \int_B \mathrm{E}\left[X|\mathcal{G}\right] dP, \ \forall B \in \mathcal{G}.$$

1.6.1 Propriétés dé l'espérance conditionnelle

Soient $X, Y \in \mathbb{L}^1_{\mathcal{F}}(\Omega, P)$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, presque sûrement on a :

1. Linéarité : si $X, Y \in \mathbb{L}^1_{\mathcal{F}}(\Omega, P)$ $\forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}$ alors :

$$\mathrm{E}\left[\lambda X + \mu Y|\mathcal{G}\right] = \lambda \, \mathrm{E}\left[X \ |\mathcal{G}\right] + \mu \, \mathrm{E}\left[Y \ |\mathcal{G}\right]$$

2. Monotonie : si $X, Y \in \mathbb{L}^1_{\mathcal{F}}(\Omega, P)$ alors :

$$X \geq Y \Rightarrow \mathrm{E}\left[X|\mathcal{G}\right] \geq \mathrm{E}\left[Y|\mathcal{G}\right],$$

   en particulier

$$X \geq 0 \Rightarrow \mathrm{E}\left[X \ |\mathcal{G}\right] \geq 0.$$

3. Si X est $\mathcal{G}-$mesurable alors :

$$\mathrm{E}\left[X|\mathcal{G}\right] = X$$

4. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires, si Y est $\mathcal{G}-$mesurable alors :

$$\mathrm{E}\left[XY|\mathcal{G}\right] = Y \, \mathrm{E}\left[X|\mathcal{G}\right],$$

   en particulier

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[X|\mathcal{G}\right] Y|\mathcal{G}\right] = \mathrm{E}\left[X|\mathcal{G}\right] \mathrm{E}\left[Y|\mathcal{G}\right].$$

5. Si X est indépendante de $\mathcal{G}$ alors :

$$\mathrm{E}\left[X|\mathcal{G}\right] = X.$$

6. Si $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ alors :

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[X|\mathcal{G}_2\right]|\mathcal{G}_1\right] = \mathrm{E}\left[X|\mathcal{G}_1\right].$$

Chapitre 2

Equations Differentille Stochastique Rétrograde

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la notion d'équations différentielles stochastiques rétrogrades, **EDSR** en abrégé, et de préciser la terminologie employée dans ce contexte. Nous montrerons le résultat classique d'existence et d'unicité de la solution dans le cas linéaire et non-linéaire.

2.2 Vocabulaire et notations

2.2.1 Présentation du problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et B un mouvement brownien d-dimensionnel. Pour appliquer le théorème de la représentation martingale, nous supposerons toujours dans ce chapitre.

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}^B = \{\mathcal{F}_t,\ 0 \leq t \leq T.\} \tag{2.1}$$

Comme EDS est une extension non-linéaire de l'intégration stochastique, EDS Rétrograde est une version non-linéaire du théorème de la représentation martingale. En fait, les résultats et les arguments de ce chapitre sont analogues à ceux de l' EDSs, combinés avec le théorème de la martingale.

Soit $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{F})$, il induit naturellement une martingale

$$Y_t := \mathrm{E}\left[\xi/\mathcal{F}_t\right].$$

Par le théorème de représentation de martingale, il existe un unique $Z \in \mathbb{L}^2(\mathbb{F})$ tel que

$$dY_t = Z_t dB_t \text{ ou équivalent } Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s \tag{2.2}$$

Ceci est un EDS linéaire avec condition terminale $Y_T = \xi$, et donc appelé EDS Rétrograde. Nous affirmons que la solution d'un EDSR est un couple de processus $\mathbb{F}$-mesurable (Y, Z). Le composant Z est essentiellement dérivé de Y avec ce qui concerne B et est donc unique déterminé par Y (et B). Nous soulignons également que la présence de Z est important pour assurer la $\mathbb{F}$-mesurabilité de Y.

Dans ce chapitre, nous considérons le non-linéaire EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f_s(Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s,\ 0 \leq t \leq T,\ P - p.s, \tag{2.3}$$

où $Y \in \mathbb{L}^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k)$, $Z \in \mathbb{L}^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k\times d})$ pour une dimension k. Nous appelons f le générateur et ξ la condition terminale de l'EDSR. Nous supposerons toujours.

Hypothése (2.1)

1. $\mathbb{F} = \mathbb{F}^B$.
2. $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est $\mathbb{F}$-mesurable dans toutes les variables.
3. f est uniformément lipschitz continue en (y, z) avec une constante lipschitz L.
4. $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{R}^k)$ et $f^0 = f(0, 0) \in \mathbb{L}^{1.2}(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k)$.

Pour la simplicité de notation, nous supposerons $k = d = 1$ dans la plupart des preuves. Nous remarquons que dans la littérature standard, il est nécessaire que $f^0 \in \mathbb{L}^2(\mathbb{F})$. Notre condition ici est légèrement.

2.2.2 Notations

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et B un mouvement Brownien de d-dimensionnel (dans $\mathbb{R}^d$) sur cet espace.

On notera $\{\mathbb{F}\}$ la filtration naturelle de mouvement Brownien.

Tout processus de $\Omega \times \mathbb{R}^+$ dans ou $\mathbb{R}^{k\times d}$ mesurable par rapport à la tribu previsible $\mathcal{B}_{[0,T]} \times \mathcal{F}$ est dit prévisible.

Soit $\mathbb{S}^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k\right)$ l'espace vectoriel formé des processus Y progréssivement mesurables a valeur dans $\mathbb{R}^d$ telle que :

$$\|Y\|_{\mathbb{S}^2}^2 = \mathrm{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty$$

et $\mathbb{S}_c^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k\right)$ est un sous espace de $\mathbb{S}^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k\right)$ formé par les processus continus.

Soit $\mathbb{L}^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k\times d}\right)$ celui formé par les processus Z progréssivement mesurables à valeur dans $\mathbb{R}^{k\times d}$ telle que :

$$\|Z\|_{\mathbb{L}^2}^2 = \mathrm{E}\left[\int_0^T \|Z\|^2\, dt\right] = \mathrm{E}\left[\int_0^T \operatorname{trace}\left(ZZ^*\right) dt\right] < \infty$$

Les espaces $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}_c^2$ et $\mathbb{L}^2$ sont des espace de Banach pour ces normes.

2.3 Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades Linéaires

Dans cette section, nous étudions le cas où f est linéaire. Nous obtenons d'abord le résultat simple suivant.

Proposition 2.3.1 *Soit* $\xi \in \mathbb{L}^2\left(\mathcal{F}_T, \mathbb{R}^k\right)$ *et* $f^0 \in \mathbb{L}^{1.2}\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k\right)$. *Alors l'EDSR linéaire suivante posséde une unique solution* $(Y, Z) \in \mathbb{S}^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k\times d})$:

$$Y_t = \xi + \int_t^T f_s^0 ds - \int_t^T Z_s dB_s \tag{2.4}$$

Preuve. il est évident que

$$Y_t = \mathrm{E}\left[\xi + \int_t^T f_s^0 ds / \mathcal{F}_t\right]$$

Notez que

$$\tilde{Y}_t = Y_t + \int_0^t f_s^0 ds = \mathrm{E}\left[\xi + \int_0^T f_s^0 ds / \mathcal{F}_t\right]$$

est une martingale de carrée intégrable. Par le théorème représentation de martingale, il existe $Z \in \mathbb{L}^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k\times d})$ telle que :

$$d\tilde{Y}_t = Z_t dB_t.$$

On peut vérifier facilement que le couple (Y, Z) vérifie (2.3.1), et à partir de la dérivation ci-dessus, c'est la solution unique. ■

Nous considérons le général linéaire EDSR avec $k = 1$:

$$Y_t = \xi + \int_t^T \left[\alpha_s Y_s + Z_s \beta_s + f_s^0\right] ds - \int_t^T Z_s dB_s. \tag{2.5}$$

La bonne posture de ce EDSR découlera de la théorie générale. Ici, nous fournissons une formule de représentation pour sa solution.

Proposition 2.3.2 *soit* $k = 1$, $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{F}, \mathbb{R})$, $\beta \in \mathbb{L}^\infty\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^d\right)$, *et* $f^0 \in \mathbb{L}^{1,2}(\mathbb{F}, \mathbb{R})$, *si* $(Y, Z) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{1\times d})$ *satisfait le EDSR linéaire* (2.5), *puis*

$$Y_t = \Gamma_t^{-1}\,\mathrm{E}\left[\Gamma_T \xi + \int_t^T \Gamma_s f_s^0 ds / \mathcal{F}_t\right] \tag{2.6}$$

Où

$$\Gamma_t = 1 + \int_0^t \Gamma_s \left[\alpha_s dt + \beta_s \cdot dB_s\right], \ \textit{ou dis}, \ \Gamma_t := \exp\left(\int_0^t \beta_s \cdot dB_s + \int_0^t \left[\alpha_s - 1/2|\beta_s|^2\right] ds\right). \tag{2.7}$$

Preuve. En appliquant la formule d'Itô nous avons

$$d(\Gamma_t Y_t) = -\Gamma_t f_t^0 dt + \Gamma_t \left[Y_t \beta_t^\intercal + Z_t\right] dB_t.$$

Dénoter

$$\hat{Y}_t := \Gamma_t Y_t, \ \hat{Z}_t := \Gamma_t \left[Y_t \beta_t^\intercal + Z_t\right], \ \hat{\xi} := \Gamma_T \xi, \ \hat{f}_t^0 := \Gamma_t f_t^0 \tag{2.8}$$

Ensuite, on peut récrire (2.5) comme

$$\hat{Y}_t = \hat{\xi} + \int_t^T \hat{f}_t^0 ds - \int_t^T \hat{Z}_t dB_s.$$

C'est une EDSR linéaire de la forme (2.4) ; nous voyons que $\int_0^t \hat{Z}_t dB_s$ est une martingale. Alors

$$\hat{Y}_t = \mathrm{E}\left[\hat{\xi} + \int_t^T \hat{f}_t^0 ds / \mathcal{F}_t\right],$$

ce qui implique (2.6) immédiatement. ∎

2.4 Estimations a priori pour les EDSR

Nous étudions maintenant l'EDSR non-linéaire (2.3).

Théorème 2.4.1 *Supposons que l'hypothése* (2.1) *soit valide et que* $(Y, Z) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k \times d})$ *soit une solution de EDSR* (2.3). *Alors* $Y \in \mathbb{S}^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k)$ *et il existe une constante* C *qui dépendant que de* T, L *et* d, k, *telle que*

$$\|(Y, Z)\|^2 = \mathrm{E}\left[|Y_T^*|^2 + \int_0^T |Z_t|^2 dt\right] \leq C I_0^2. \ \textit{où} \ I_0^2 = \mathrm{E}\left[|\xi|^2 + (\int_0^T \left|f_t^0\right| dt)^2\right]. \tag{2.9}$$

Preuve. Pour simplifier, nous supposons $d = k = 1$. Nous procédons en plusieurs étapes.

Étape 1. Nous montrons d'abord que

$$\mathrm{E}\left[|Y_T^*|^2\right] \leq C\,\mathrm{E}\left[\int_0^T \left[|Y_t|^2 + |Z_t|^2\right] dt\right] + CI_0^2 < \infty. \tag{2.10}$$

En effet, notez que

$$|Y_t| \leq |\xi| + \int_t^T \left[\left|f_s^0\right| + C|Y_s| + C\,|Z_s|\right] ds + \left|\int_t^T Z_s dB_s\right|.$$

alors

$$Y_T^* \leq C\left[|\xi| + \int_0^T \left[\left|f_t^0\right| + |Y_t| + |Z_t|\right] dt + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_s dB_s\right|\right].$$

En appliquant l'inégalité Burkholder-Davis-Gundy, nous avons

$$\mathrm{E}\left[|Y_T^*|^2\right] \leq C\,\mathrm{E}\left[|\xi|^2 + \left(\int_0^T \left|f_t^0\right| dt\right)^2 + \int_0^T \left[|Y_t|^2 + |Z_t|^2\right] dt\right].$$

ce qui implique (2.10) immédiatement.

Étape 2. nous montrons ensuite que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathrm{E}\left[|Y_t|^2\right] + \mathrm{E}\left[\int_0^T |Z_t|^2\, dt\right] \leq \varepsilon\left[|Y_T^*|^2\right] + C\varepsilon^{-1} I_0^2. \tag{2.11}$$

En effet, par la formule d'Itô.

$$d\,|Y_t|^2 = 2Y_t dY_t + |Z_t|^2\, dt = -2Y_t f_t\left(Y_t, Z_t\right) dt + 2Y_t Z_t dB_t + |Z_t|^2\, dt. \tag{2.12}$$

Ainsi,

$$|Y_t|^2 + \int_t^T |Z_s|^2\, ds = |\xi|^2 + 2\int_t^T Y_s f_s\left(Y_s, Z_s\right) ds + 2\int_t^T Y_s Z_s dB_s. \tag{2.13}$$

Par (2.10) nous savons que $\int_0^t Y_s Z_s dB_s$ est une vraie martingale. Maintenant, en prenant l'espérance des deux côtés de (2.13) et en notant que :

$$ab \leq 1/2a^2 + 1/2b^2$$

nous avons,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[|Y_t|^2 + \int_t^T |Z_s|^2 \, ds\right] &= \mathrm{E}\left[|\xi|^2 + 2\int_t^T Y_s f_s\left(Y_s, Z_s\right) ds\right] \\
&\leq \mathrm{E}\left[|\xi|^2 + C\int_t^T |Y_s| \left[\left|f_s^0\right| + |Y_s| + |Z_s|\right] ds\right] \\
&\leq \mathrm{E}\left[|\xi|^2 + CY_T^* \int_0^T \left|f_s^0\right| ds + C\int_0^T \left[|Y_s|^2 + |Z_s Y_s|\right] ds\right] \\
&\leq \mathrm{E}\left[|\xi|^2 + CY_T^* \int_0^T \left|f_s^0\right| ds + C\int_t^T |Y_s|^2 \, ds + 1/2\int_t^T |Z_s|^2 \, ds\right].
\end{aligned}$$

Cela mène à

$$\mathrm{E}\left[|Y_t|^2 + 1/2\int_t^T |Z_s|^2 \, ds\right] \leq \mathrm{E}\left[C\int_t^T |Y_s|^2 \, ds + |\xi|^2 + CY_T^* \int_0^T \left|f_s^0\right| ds\right]. \tag{2.14}$$

Ce qui, avec théorème Fubini, implique que

$$\mathrm{E}\left[|Y_t|^2\right] \leq \mathrm{E}\left[|\xi|^2 + CY_T^* \int_0^T \left|f_s^0\right| ds\right] + C\int_t^T \mathrm{E}\left[|Y_s|^2\right] ds.$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall (rétrograde), nous obtenons

$$\mathrm{E}\left[|Y_t|^2\right] \leq C\,\mathrm{E}\left[|\xi|^2 + Y_T^* \int_0^T \left|f_s^0\right| ds\right], \ \forall\, t \in [0, T]. \tag{2.15}$$

Ensuite, en laissant $t = 0$ et prise (2.15) dans to (2.14) nous avons

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T |Z_s|^2 \, ds\right] \leq C\,\mathrm{E}\left[|\xi|^2 + Y_T^* \int_0^T \left|f_s^0\right| ds\right]. \tag{2.16}$$

Par (2.15) et (2.16) et notant que $2ab \leq \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2$, nous obtenons (2.11) immédiatement.

Étape 3. prise (2.11) pour (2.10), nous obtenons

$$\mathrm{E}\left[|Y_T^*|^2\right] \leq C\varepsilon\,\mathrm{E}\left[|Y_T^*|^2\right] + C\varepsilon^{-1} I_0^2.$$

En choisissant $\varepsilon = \frac{1}{2}C$ pour la constante C ci-dessus, on obtient

$$\mathrm{E}\left[|Y_T^*|^2\right] \leq C I_0^2.$$

Ceci, avec (2.11), prouve (2.9). ■

Remarque 2.4.1 *semblable à théorème* (2.4.1) *reste vrai si nous affaiblissons la condition de Lipschitz de l'hypothèse* 2.1 *(iii) à la condition de croissance linéaire :*

$$|f_t\,(y,z)| \leq \left|f_s^0\right| + L\left[|Y| + |Z|\right]. \tag{2.17}$$

Théorème 2.4.2 *pour $i = 1, 2$. supposons (ξ_i, f^i) satisfont l'hypothèse* (2.1) *et $(Y^i, Z^i) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k\times d})$ est une solution de l'EDSR* (2.3) *avec coefficients (ξ_i, f^i). Puis*

$$\|(\triangle Y, \triangle Z)\|^2 \leq C\,\mathrm{E}\left[|\triangle\xi|^2 + \left(\int_0^T \left|\triangle f_t(Y_t^1, Z_t^1)\right| dt\right)^2\right]. \tag{2.18}$$

Où

$$\triangle Y = Y^1 - Y^2,\ \triangle Z = Z^1 - Z^2,\ \triangle\xi = \xi_1 - \xi_2,\ \triangle f = f^1 - f^2.$$

Preuve. Supposons encore $d = k = 1$. Notez que

$$\begin{aligned}\triangle Y_t &= \triangle\xi + \int_t^T \left[f_s^1(Y_s^1, Z_s^1) - f_s^2(Y_s^2, Z_s^2)\right] ds - \int_t^T \triangle Z_s dB_s \\ &= \triangle\xi + \int_t^T \left[\triangle f_s^1(Y_s^1, Z_s^1) + \alpha_s \triangle Y_s + \beta_s \triangle Z_s\right] ds - \int_t^T \triangle Z_s dB_s.\end{aligned}$$

Où

$$\alpha_t = \frac{f_t^2\left(Y_t^1, Z_t^1\right) - f_t^2\left(Y_t^2, Z_t^1\right)}{\triangle Y_t} 1_{\{\triangle Y_t \neq 0\}},\ \beta_t = \frac{f_t^2\left(Y_t^2, Z_t^1\right) - f_t^2\left(Y_t^2, Z_t^2\right)}{\triangle Z_t} 1_{\{\triangle Z_t \neq 0\}} \tag{2.19}$$

sont bornés par L. Puis par théorème (2.4.1) nous obtenons le résultat immédiatement. ■

2.5 Existence et l'unicité du solution d'un EDSRs

Nous établissons maintenant la bonne posture de l' EDSR (2.3) .

Théorème 2.5.1 *Sous l'hypothèse* (2.1)*, EDSR* (2.3) *possède une unique solution* $(Y, Z) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k\times d})$.

Preuve. l'unicité découle directement du théorème (2.4.2). En particulier, l'unicité signifie

$$Y_t^1 = Y_t^2 \text{ pour tout } t \in [0, T]\,,\ P - p.s. \text{ et } Z_t^1 = Z_t^2\ dt \times dP - p.s. \tag{2.20}$$

Nous prouvons maintenant l'existence en utilisant l'itération de Picard. Nous devons utiliser l'approche locale et laisser l'approche globale. Pour la simplicité, nous supposons $d = k = 1$.

Étape1. Soit $\delta > 0$ une constante qui sera spécifiée plus tard, et supposons $T \leq \delta$. Nous insistons sur le fait que δ ne dépendra que de la constante Lipschitz L (et des dimensions). En particulier, elle ne dépend pas de la condition terminale ξ.

Dénoter $Y_t^0 = 0$, $Z_t^0 = 0$. Pour $n = 1, 2, ...,$ soit

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T f_s(Y_s^{n-1}, Z_s^{n-1}) ds - \int_t^T Z_s^n dB_s. \tag{2.21}$$

Supposons $(Y^{n-1}, Z^{n-1}) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{F}) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{F})$. Notez que

$$\left|f_t(Y_t^{n-1}, Z_t^{n-1})\right| \leq C\left[\left|f_t^0\right| + \left|Y_t^{n-1}\right| + \left|Z_t^{n-1}\right|\right].$$

Alors $f_t(Y_t^{n-1}, Z_t^{n-1}) \in \mathbb{L}^{1,2}(\mathbb{F})$. d'après la Proposition (2.3.1), le linéaire EDSR (2.21) détermine uniquement $(Y^n, Z^n) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{F}) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{F})$, et ensuite théorème (2.4.1) implique plus loin que $(Y^n, Z^n) \in \mathbb{S}^2(\mathbb{F}) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{F})$. Par récurence alors nous avons $(Y^n, Z^n) \in \mathbb{S}^2(\mathbb{F}) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{F})$ pour tous $n \geq 0$.

Dénoter $\triangle Y_t^n = Y_t^n - Y_t^{n-1}$, $\triangle Z_t^n = Z_t^n - Z_t^{n-1}$.alors ;

$$\triangle Y_t^n = \int_t^T \left[\alpha_s^{n-1} \triangle Y_s^{n-1} + \beta_s^{n-1} \triangle Z_s^{n-1}\right] ds - \int_t^T \triangle Z_s^n dB_s.$$

où α^n, β^n sont définis de la même manière que dans 2.19 et sont délimités par L. En appliquant la formule d'Itô nous avons

$$d\left(|\triangle Y_t^n|^2\right) = -2 \triangle Y_t^n \left[\alpha_t^{n-1} \triangle Y_t^{n-1} + \beta_t^{n-1} \triangle Z_t^{n-1}\right] dt \; + 2 \triangle Y_t^n \triangle Z_t^n dB_t + |\triangle Z_t^n|^2 dt.$$

remarquons que $\int_0^t \triangle Y_s^n \triangle Z_s^n dB_s$ est une vraie martingale. Notant que $\triangle Y_T^n = 0$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[|\triangle Y_t^n|^2 + \int_t^T |\triangle Z_s^n|^2 ds\right] &= \mathrm{E}\left[2\int_t^T \left[\triangle Y_s^n \left[\alpha_s^{n-1} \triangle Y_s^{n-1} + \beta_s^{n-1} \triangle Z_s^{n-1}\right]\right] ds\right] \\ &\leq C\,\mathrm{E}\left[\int_0^t |\triangle Y_s^n| \left[\left|\triangle Y_s^{n-1}\right| + \left|\triangle Z_s^{n-1}\right|\right] ds\right] \end{aligned} \tag{2.22}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\int_0^T |\triangle Y_t^n|^2 dt\right] &\leq C\delta\,\mathrm{E}\left[\int_0^T |\triangle Y_s^n| \left[\left|\triangle Y_s^{n-1}\right| + \left|\triangle Z_s^{n-1}\right|\right] ds\right] \\ &\leq C\delta\,\mathrm{E}\left[\int_0^T \left[|\triangle Y_t^n|^2 + \left|\triangle Y_t^{n-1}\right|^2 + \left|\triangle Z_s^{n-1}\right|^2\right] dt\right]. \end{aligned}$$

Supposons $\delta < \frac{1}{2C}$ pour la constante ci-dessus C et donc $1 - C\delta \leq \frac{1}{2}$, puis

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T |\triangle Y_t^n|^2 dt\right] \leq C\delta\,\mathrm{E}\left[\int_0^T \left[\left|\triangle Y_t^{n-1}\right|^2 + \left|\triangle Z_t^{n-1}\right|^2\right] dt\right].$$

De plus, en mettant $t = 0$ dans (2.22), nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\int_0^T |\triangle Z_t^n|^2\, dt\right] &\leq C\,\mathrm{E}\left[\int_0^T |\triangle Y_s^n|^2\, dt\right] + \frac{1}{8}\,\mathrm{E}\left[\int_0^T [\left|\triangle Y_s^{n-1}\right|^2 + \left|\triangle Z_t^{n-1}\right|^2]dt\right] \\ &\leq \left[C\delta + \frac{1}{8}\right]\mathrm{E}\left[\int_0^T [\left|\triangle Y_s^{n-1}\right|^2 + \left|\triangle Z_t^{n-1}\right|^2]dt\right].\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T [|\triangle Y_t^n|^2 + |\triangle Z_t^n|^2]dt\right] \leq \left[C\delta + \frac{1}{8}\right]\mathrm{E}\left[\int_0^T [\left|\triangle Y_t^{n-1}\right|^2 + \left|\triangle Z_t^{n-1}\right|^2]dt\right].$$

Soit $\delta = \frac{1}{8C}$ pour C ci-dessus. Puis

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T [|\triangle Y_t^n|^2 + |\triangle Z_t^n|^2]dt\right] \leq \frac{1}{4}\,\mathrm{E}\left[\int_0^T [\left|\triangle Y_t^{n-1}\right|^2 + \left|\triangle Z_t^{n-1}\right|^2]dt\right].$$

Par récurence, nous avons

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T [|\triangle Y_t^n|^2 + |\triangle Z_t^n|^2]dt\right] \leq \frac{C}{4^n}.\forall n \geq 1.$$

Maintenant, on peut voir qu'il existe (Y, Z) tel que

$$\lim_{n\to\infty} \|(Y_t^n - Y_t, Z_t^n - Z_t)\| = 0$$

Par conséquent, en laissant $n \to \infty$ dans EDSR (2.21), nous savons que (Y, Z) satisfait EDSR (2.3) .

Étape 2. Nous prouvons maintenant l'existence arbitraire T. Soit $\delta > 0$ la constante à l'étape 1. Considérons une partition $0 = t_0 < ..... < t_n = T$ telle que $t_{i+1} - t_i \leq \delta$, Définir $Y_{t_n} = \xi$, et pour $i = n-1, ..., 0$ et $t \in [t_i, t_{i+1})$, soit (Y_t, Z_t) la solution de l'EDSR suivante sur $[t_i, t_{i+1}]$:

$$Y_t = Y_{t_{i+1}} + \int_t^{t_{i+1}} f_s(Y_s, Z_s)ds - \int_t^{t_{i+1}} Z_s dB_s, t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Depuis $t_{i+1} - t_i \leq \delta$, par l'étape 1 l'EDSR ci-dessus est bien posé. De plus, puisque n est fini ici, on voit que $(Y, Z) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{F}) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{F})$, et donc ils sont une solution globale sur tout l'intervalle $[0, T]$. ■

Remarque 2.5.1 *Supposons que f vérifie l'hypothèse* (2.1)*, $\tau \in \Im(\mathbb{F})$, et $\xi \in L^2(\mathcal{F}_\tau)$. Considérons l'EDSR suivant*

$$Y_t = \xi + \int_t^T \tilde{f}_s(Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s.\text{où } \tilde{f}_s(y, z) = f_s(y, z)1_{[0.\tau]}(s) \tag{2.23}$$

On peut facilement voir que $\tilde{f}$ satisfait aussi l'hypothèse (2.1)*, et donc l'EDSR ci-dessus a une solution unique. Depuis $\xi \in \mathcal{F}_\tau$, on voit immédiatement que $Y_s = \xi$, $Z_s = 0$, satisfait* (2.23) *pour $s \in [\tau, T]$. Donc, on peut récrire* (2.23) *comme*

$$Y_t = \xi + \int_t^\tau f_s(Y_s, Z_s)ds - \int_t^\tau Z_s dB_s. 0 \leq t \leq \tau. \tag{2.24}$$

et c'est aussi bien posé.

2.6 Propriétés de base des EDSRs

Ce théoréme permet de comparer les solutions de deux EDSR (dans $\mathbb{R}$), des que l'on sait comparer les conditions terminales et les générateurs. Ce théoréme est de l'origine à S.Peng.

Théorème 2.6.1 *(Théorème de Comparaison) Soit $k = 1$. Supposons que, pour $i = 1, 2$. (ξ_i, f^i) satisfait l'hypothèse* (2.1) *et $(Y^i, Z^i) \in \mathbb{S}^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{1\times d})$ est la solution unique* *au EDSR suivant :*

$$Y_t^i = \xi_i + \int_t^T f_s^i(Y_s^i, Z_s^i)ds - \int_t^T Z_s^i dB_s. \tag{2.25}$$

Supposons en outre que $\xi_1 \leq \xi_2$, P-p.s, et $f^1(y,z) \ \leq f^2(y,z)$,$dt \times dP - p.s.$que pour tout (y,z), alors

$$Y_t^1 \leq Y_t^2, \ 0 \leq t \leq T \ , P - p.s. \tag{2.26}$$

Preuve. Dénoter

$$\triangle Y_t = Y_t^1 - Y_t^2 \ , \triangle Z_t = Z_t^1 - Z_t^2, \ \ \triangle \xi = \xi_1 - \xi_2, \ \ \triangle f = f^1 - f^2.$$

alors

$$\begin{aligned}\triangle Y_t &= \triangle\xi + \int_t^T \left[f_s^1(Y_s^1, Z_s^1) - f_s^2(Y_s^2, Z_s^2)\right] ds - \int_t^T \triangle Z_s dB_s \\ &= \triangle\xi + \int_t^T \left[\alpha_s \triangle Y_s + \triangle Z_s \beta_s + \triangle f_s(Y_s^2, Z_s^2)\right] ds - \int_t^T \triangle Z_s dB_s.\end{aligned}$$

où α et β sont bornés. Définir Γ par (2.7) nous avons

$$\triangle Y_t = \Gamma_t^{-1} \, \mathrm{E}\left[\Gamma_T \triangle \xi + \int_t^T \Gamma_s \triangle f_s(Y_s^2, Z_s^2)ds \ /\mathcal{F}_t\right] \tag{2.27}$$

nous avons aussi

$$f^1(y,z) \leq f^2(y,z) \text{ pour tous } (y,z), \ dt \times dP - p.s.$$

Cela implique que $\triangle f\left(Y^2, Z^2\right) \leq 0$; $dt \times dP - p.s.$ depuis $\Gamma \geq 0$ et $\triangle\xi \leq 0$. ■

Chapitre 3

Une propriété des équations différentielles stochastique rétrogrades

3.1 Présentation du problème

Ce chapitre confirme et explore une conjecture de S.Peng concernant les équations différentielles stochastique rétrogrades (EDSR).

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

Soit pour $i = 1, 2$ la solution $(Y_t^{\xi, f_i, T}, Z_t^{\xi, f_i, T})$ de la EDSR suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f_i(Y_s, Z_s, s) ds - \int_t^T Z_s dB_s. \; 0 \leq t \leq T.$$

avec l'hypothése ci-dessous :

$$f_1(Y, 0, t) = f_2(Y, 0, t) = 0 \; \forall (Y, t) \in \mathbb{R} \times [0, T] \, . \tag{H}$$

On a le résultat suivant :

Théorème 3.1.1 *Sous les hypothéses précédentes, si*

$$Y_0^{\xi,f_1,T} = Y_0^{\xi,f_2,T} \ \forall \xi \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}),$$

alors nécessairement

$$f_1(Y,Z,t) = f_2(Y,Z,t) \ p.s \ \forall (Y,Z,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,T]\,.$$

3.2 Rappelle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré.

On $T \in (0,\infty)$; soit $\xi \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ et $f \in \mathcal{L}(\mu)$, alors il existe une unique couple $(Y_t^{\xi,f,T}, Z_t^{\xi,f,T})_{0\leq t\leq T}$, qui dépend (ξ, T, f), résoudre l' EDSR suivant :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(Y_s, Z_s, s)ds - \int_t^T Z_s dB_s \ .0 \leq t \leq T. \tag{3.1}$$

De plus, $\mathrm{E}\int_0^T |Y_s|^2 \, ds < \infty$ et $\mathrm{E}\int_0^T |Z_s|^2 \, ds < \infty$, où

- $\{B_t\}_{t\geq 0}$est un mouvement brownien $\mathcal{F}_t$ standard de d-dimension sous $\mathbb{P}$, pour une probabilité donnée $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$, et $\mathcal{F}_t$ est la filtration générée par le mouvement brownien $\{B_t\}\,, i.e.\ \mathcal{F}_t = \sigma\left(B_s : s \leq t\right).$
- $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ est l'ensemble de tous variables aléatoires $\mathcal{F}_T-$mesurables telles que $\mathrm{E}\left[\xi^2\right] < \infty$.
- $\mathcal{L}(\mu)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

  1. pour tout $(Y,Z) \in \mathbb{R}^{1+d}$, $\{f(Y,Z,t)\}_{0\leq t\leq T}$ est progressivement mesurable et continue en t tel que $\mathrm{E}\left[\int_0^T f^2(Y,Z,s)ds\right] < \infty$.
  2. f satisfait la condition de Lipschitz avec la constante de Lipschitz $L>0$, $i.e\,\forall\,(Y^i, Z^i) \in$

$\mathbb{R}^{1+d}$ $(i = 1, 2)$

$$\left|f(Y^1, Z^1, t) - f(Y^2, Z^2, t)\right| \leq L\left(\left|Y^1 - Y^2\right| + \left|Z^1 - Z^2\right|\right), \ \forall t \in [0, T].$$

Nous supposons en outre que f satisfait la condition suivante :

$$f(Y, 0, t) = 0, \forall (Y, t) \in \mathbb{R} \times [0, T], \tag{H}$$

Plus récemment, S. Peng a proposé la conjecture suivante :
Supposer $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(\mu)$ satisfaire l'hypothèse (H), soit $\left(Y_t^{\xi, f_1, T}, Z_t^{\xi, f_1, T}\right)$ et $\left(Y_t^{\xi, f_2, T}, Z_t^{\xi, f_2, T}\right)$ les solutions de EDSR (3.1) correspondant à $f = f_1$ et $f = f_2$,respectivement.
Puis le fait que

$$Y_0^{\xi, f_1, T} = Y_0^{\xi, f_1, T} \ \forall \xi \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$$

implique

$$f_1(Y, Z, t) = f_2(Y, Z, t), p.s \ \forall (Y, Z, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times [0, T].$$

L'objectif de ceci est de prouver la conjecture ci-dessus. De plus, nous donnons deux contre-exemples pour montrer que la conjecture de Peng ne tient pas sans l'hypothèse (H).

3.3 Résultat principal

Pour prouver la conjecture de Peng sous l'hypothèse (H), Nous donnons d'abord les lemmes suivants

Lemme 3.3.1 *On a* $T \in [0, \infty)$, *soit* $\xi \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ *et* $f \in \mathcal{L}(\mu)$ *satisfaire l'hypothèse* (H), *supposer* $\left(Y_t^{\xi, f, T}, Z_t^{\xi, f, T}\right)_{0 \leq t \leq T}$ *est la solution de EDSR* (3.1), *alors pour tout* $A \in \mathcal{F}_r$,

$(0 \leq r \leq T)$, *nous avons*

$$Y_r^{I_A \xi, f, T} = I_A Y_r^{\xi, f, T} \; 0 \leq r \leq T.$$

où I_A *est la fonction d'indicateur de l'événement* A.

Preuve. On pose $(Y_t, Z_t) = \left(Y_t^{\xi,f,T}, Z_t^{\xi,f,T}\right)$,pour tout $A \in \mathcal{F}_r$ multipliant I_A, nous avons

$$I_A Y_t = \xi I_A + \int_t^T I_A f(Y_s, Z_s, s) ds - \int_t^T I_A Z_s dB_s, \; 0 \leq t \leq T.$$

Notez que $f(I_A Y, Z_s I_A, t) = I_A f(Y, Z, t) \; \forall (Y, Z) \in \mathbb{R}^{1+d}$ vérifier pour l'hypothèse (H). Nous pouvons obtenir le fait que $(Y_t I_A, Z_t I_A)$ résoudre l'EDSR suivante lorsque $r \leq t \leq T$,

$$\tilde{Y}_t = \xi I_A + \int_t^T f(\tilde{Y}_s, \tilde{Z}_s, s) ds - \int_t^T \tilde{Z}_s dB_s, \; 0 \leq t \leq T \tag{3.2}$$

alors par l'unicité de la solution de EDSR (3.2) que

$$Y_t I_A = \tilde{Y}_t. \; \forall t \in [r, T].$$

ce qui signifie $I_A Y_r^{\xi,f,T} = Y_r^{I_A \xi, f, T}$. ■

Le lemme suivant est la direct de l'hypothèse (H).

Lemme 3.3.2 *On* $T \in [0, \infty)$ *,soit* $\xi \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ $(0 \leq r \leq T)$. *supposer* $f \in \mathcal{L}(\mu)$ *satisfait l'hypothèse* (H), *soit* $\left(Y_t^{\xi,f,T}, Z_t^{\xi,f,T}\right)$ *la solution de EDSR* (3.1), *ensuite nous avons :*

$$Y_0^{\xi,f,T} = Y_0^{\xi,f,r}, \; (0 \leq r \leq T).$$

où $Y_0^{\xi,f,r}$ est la valeur de la solution (y_t) de l'EDSR suivant au $t=0$

$$Y_t = \xi + \int_t^r f(Y_s, Z_s, s)ds - \int_t^r Z_s dB_s,\ 0 \leq t \leq r.$$

Preuve. Il est facile de vérifier que :

$$Y_t^{\xi,f,T} = \begin{cases} Y_t^{\xi,f,r} \ si\ t \leq r, \\ \xi \ si\ t > r, \end{cases},\ Z_t^{\xi,f,T} = \begin{cases} Z_t^{\xi,f,r} \ si\ t \leq r, \\ 0 \ si\ t > r, \end{cases}$$

particulièrement $Y_0^{\xi,f,T} = Y_0^{\xi,f,r}$. Pour la simplicité de notation, nous adoptons les notations de f-espérance introduit par S.peng dans [8] ■

Définition 3.3.1 *On a $T \in [0,\infty)$, soit $\xi \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ $(0 \leq r \leq T)$, $f \in \mathcal{L}(\mu)$ satisfaire l'hypothèse (H), et $\left(Y_t^{\xi,f,T}, Z_t^{\xi,f,T}\right)$ la solution de EDSR (3.1), nous appelons $\varepsilon_f(\xi)$, défini par :*

$$\varepsilon_f(\xi) = Y_0^{\xi,f,T}$$

l'espérance de ξ générée par f.

Lemme 3.3.3 *supposer $\xi \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, alors il existe une unique variable aléatoire $\eta \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, tel que*

$$\varepsilon_f(I_A\xi) = \varepsilon_f(I_A\eta)\ \forall A \in \mathcal{F}_t, (0 \leq t \leq T).$$

on appelle η l'espérance conditionnelle de variable aléatoire ξ générée par la fonction f sous $\mathcal{F}_t$, et l'écrire comme $\varepsilon_f(\xi/\mathcal{F}_t)$. En outre

$$\varepsilon_f(\xi/\mathcal{F}_t) = Y_t^{\xi,f,T}$$

où $Y_t^{\xi,f,T}$ est la valeur de la solution $\left\{Y_t^{\xi,f,T}\right\}$ de EDSR (3.1) à l'instant t.

Preuve. pour tout $A \in \mathcal{F}_t$, par la définition de $\varepsilon_f(\xi)$ et le lemme $(3,3,1)$, nous avons

$$\varepsilon_f(I_A\xi) = \varepsilon_f(Y_t^{I_A\xi,f,T}) = \varepsilon_f\left(I_A Y_t^{\xi,f,T}\right).$$

Définir $\eta = Y_t^{\xi,f,T}$, puis $\eta \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, nous prouvons maintenant que η est unique. En effet, s'il existe un autre $\bar{\eta} \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ tel que

$$\varepsilon_f(I_A\eta) = \varepsilon_f(I_A\bar{\eta}) \ \forall A \in \mathcal{F}_t \tag{3.3}$$

mais $\mathrm{P}(\eta \neq \bar{\eta}) > 0$.

Définir $B = \{\eta > \bar{\eta}\}$, sans perte la généralité, on suppose que $\mathrm{P}(B) > 0$, il s'ensuit un théorème de comparaison strict en [7]

$$\varepsilon_f(I_B\eta) > \varepsilon_f(I_B\bar{\eta}),$$

ce qui est contraire à l'égalité (3.3). ■

Remarque 3.3.1 *les notations $\varepsilon_f(\xi)$ et $\varepsilon_f(./\mathcal{F}_t)$ proviennent de [8]. De toute évidence, si $f = 0$, alors $\varepsilon_f(\xi)$ et $\varepsilon_f(\xi/\mathcal{F}_t)$ sont l'espérance mathématique classique et l'espérance conditionnelle ,respectivement, par exemple.*

$$\varepsilon_f(\xi) = \mathrm{E}(\xi), \ \varepsilon_f(\xi/\mathcal{F}_t) = \mathrm{E}(\xi/\mathcal{F}_t).$$

En outre, Peng a prouvé que $\varepsilon_f(.)$ et $\varepsilon_f(./\mathcal{F}_t)$ préservent respectivement de nombreuses propriétés de l'espérance mathématique et l'espérance conditionnelle classique et s'attendent à une linéarité. Pour cette raison, Peng appelle l'espérance générale et l'espérance conditionnelle générale, f-l'espérance et f-l'espérance conditionnelle respectivement [8]

Dans les notations de $\varepsilon_f(.)$, la conjecture de Peng peut être récrite comme suit :

Théorème 3.3.1 *On a* $T \in [0, \infty)$, *soit* f_1*and* $f_2 \in \mathcal{L}(\mu)$ *satisfaire l'hypothèse* (H) , *si*

$$\varepsilon_{f_1}(\xi) = \varepsilon_{f_2}(\xi),\ \forall \xi \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}).$$

puis

$$f_1(Y, Z, t) = f_2(Y, Z, t),\ \ p.s\ \forall (Y, Z, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times [0, T].$$

Preuve. pour tout $\xi \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ et pour tout $A \in \mathcal{F}_t$ $(0 \leq t \leq T)$, par la définition de f-l'espérance et l'hypothèse de la théorème, nous avons

$$\varepsilon_{f_2}(I\varepsilon_{f_2}[\xi/\mathcal{F}_t]) = \varepsilon_{f_2}(I_A\xi) = \varepsilon_{f_1}(I_A\xi) = \varepsilon_{f1}(I_A\varepsilon_{f_1}[\xi/\mathcal{F}_t]) = \varepsilon_{f_2}(I_A\varepsilon_{f_1}[\xi/\mathcal{F}_t]).$$

Il s'ensuit ensuite l'unicité de f-l'espérance conditionnelle dans le lemme $(3, 3, 3)$ que

$$\varepsilon_{f1}\left[\xi/\mathcal{F}_t\right] = \varepsilon_{f2}\left[\xi/\mathcal{F}_t\right].$$

définir

$$y_t^\xi = \varepsilon_{f1}\left[\xi/\mathcal{F}_t\right] = \varepsilon_{f2}\left[\xi/\mathcal{F}_t\right].$$

par la définition de $\varepsilon_{f_i}\left[\xi/\mathcal{F}_t\right]$, $i = 1, 2$. Il existe z^1et z^2 tel que (Y^ξ, Z^i) $i = 1, 2$ sont les solutions des EDSR suivants, respectivement :

$$Y_t^\xi = \xi + \int_t^T f_i(Y_s^\xi, Z_s^i)ds - \int_t^T Z_s^i dB_s\ i = 1, 2 \tag{3.4}$$

immédiatement, $Z_t^\xi = Z_t^1 = Z_t^2 = \frac{d\left\langle Y_t^\xi, B_t\right\rangle}{dt}$, où $\left\langle Y_t^\xi, B_t\right\rangle$est la variation quadratique de Y_t^ξ et B_t. De plus, pour tout $\xi \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, la solution (Y^ξ, Z^ξ) de EDSRs (3.4) satisfait

$$f_1(Y_t^\xi, Z_t^\xi, t) = f_2(Y_t^\xi, Z_t^\xi, t)\ \forall t \in [0, T] \tag{3.5}$$

montrons maintenant que, pour arbitraire $(a,b,t_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times[0,T]$, il existe une variable aléatoire $\xi \in \mathbb{L}^2(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbb{P})$ telle que la solution (Y_t^{ξ}, Z_t^{ξ}) de EDSR (3.4) satisfait

$$(Y_{t_0}^{\xi}, Z_{t_0}^{\xi}) = (a,b). \tag{3.6}$$

en effet, pour tout donné $(a,b,t_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times[0,T]$, considérons l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$\tilde{Y}_t = a - \int_{t_0}^{t} f_1(\tilde{Y}_s, b, s)ds + \int_{t_0}^{t} b\ dB_s,\ t_0 \le t \le T$$
$$\tilde{Y}_t = a.\ 0 \le t \le t_0$$

évidemment, l'EDS ci-dessus admet une solution unique $\left(\tilde{Y}_t\right)_{0\le t\le T}$ pour $f \in \mathcal{L}(\mu)$. Nous choisissons $\xi = \tilde{Y}_T$, évidemment $\xi \in \mathbb{L}^2(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbb{P})$, Il est facile de vérifier que $(\tilde{Y}_t, b)$ $(t_0 \le t \le T)$ résout l'EDSR (3.4) correspondant à $\xi = \tilde{Y}_T$; i.e. la solution (Y_t^{ξ}, Z_t^{ξ}) de EDSR (3.4) satisfait

$$(Y_t^{\xi}, Z_t^{\xi}) = (\tilde{Y}_t, b)\ ,t_0 \le t \le T$$

Il s'ensuit alors que $\tilde{Y}_{t_0} = a$, on peut obtenir (3.6), ceci avec (3.5) peut obtenir le résultat souhaité. Nous donnons maintenant deux conter exemples . ■

– Le premier montre que la conjecture ci-dessus ne tient pas lorsque $f_1(0,0,.) \neq 0$ et $f_2(0,0,.) \neq 0$.

Exemple 3.3.1 *soit* (Y^1,Z^1) *et* (Y^2,Z^2) *sont les solutions des EDSRs suivants, respectivement :*

$$Y_t^1 = \xi + \int_t^T f_1(s)\, ds - \int_t^T Z_s dB_s \ et\ Y_t^2 = \xi + \int_t^T f_2(s)\, ds - \int_t^T Z_s dB_s.$$

où

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & si\ t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \end{cases},\ f_2(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \\ 1 & si\ t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \end{cases} \tag{3.7}$$

évidemment

$$Y_0^1 = \left(\xi + \int_0^T f_1(s)\, ds\right) = \mathrm{E}\left(\xi + \int_0^T f_2(s)\, ds\right) = Y_0^2\ \forall \xi \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$$

mais $f_1 \neq f_2$.

– Le deuxième contre-exemple montre que la conjecture ci-dessus ne tient pas $f_1(Y, 0, .) \neq 0$ et $f_2(Y, 0, .) \neq 0\ \forall Y \in \mathbb{R}$.

Exemple 3.3.2 *Soit* (y^1, z^1) *et* (y^2, z^2) *être les solutions des EDSR suivants, respectivement*

$$Y_t^1 = \xi + \int_t^T f_1(s)\, Y_s^1 ds - \int_t^T Z_s^1 dB_s\ \ et\ Y_t^2 = \xi + \int_t^T f_2(s)\, Y_s^2 ds - \int_t^T Z_s^2 dB_s$$

où f_1*et* f_2*sont définis dans* (3.7).*Résoudre les EDSR linéaires ci-dessus, nous pouvons obtenir :*

$$Y_t^i = \mathrm{E}\left[\xi\, \mathrm{e}\left\{\int_0^T f_i(s) ds\right\} / \mathcal{F}_t\right]\ \ i = 1, 2.\ 0 \leq t \leq T.$$

évidemment

$$Y_0^1 = \mathrm{E}\left[\xi\, \mathrm{e}\left\{\int_0^T f_1(s) ds\right\}\right] = \mathrm{E}\left[\xi\, \mathrm{e}\left\{\int_0^T f_2(s) ds\right\}\right] = Y_0^2,\ \forall \xi \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}).$$

mais $f_1 \neq f_2$.

Conclusion

L'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades est très importante, pour cela nous avons étudiés les résultats d'existences et l'unicité de la solution de l'EDSR dans le cas ou le générateur soit :

– Linéaire.

– Non linéaire.

On démontre aussi propriétés de base des EDSR le théoréme de comparaison et la réciproque de le théoréme.

En générale des nombreux travaux sur l'étude de l'EDSR qui détermine l'existence et l'unicité de la solution sur des conditions minimales.

Annexe A

A.1 Lemme de Gronwal :

Lemme A.1.1 *Soit $T \geq 0$ et g une fonction positive mesurable bornée telle que ;*

$$g(t) < a + b\int_0^t g(s)ds. \text{ pour tout } t \leq T$$

où a et b sont des constantes positives alors,

$$g(t) < a\ e^{Bt} \text{ pour tout } t \leq T$$

A.2 Lemme de Fatou

Lemme A.2.1 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoire réelles positives alors*

$$\mathrm{E}\left[\lim_{n\longrightarrow\infty}\ \inf\ X_n\right] \leq \lim_{n\longrightarrow\infty}\ \inf\ \mathrm{E}\left[\ X_n\right].$$

A.3 Inégalité de Hölder :

soit p, q, conjugués avec $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $X \in \mathbb{L}^p$ et $Y \in \mathbb{L}^q$. Alors

$$\|XY\|_1 \leq \|X\|_p \|Y\|_q .$$

A.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Soient X et Y deux variables aléatoires de L^2 pour tout $p = q = 2$ on a :

$$\mathrm{E}\left[|XY|\right] \leq \left(\mathrm{E}\left[|X|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathrm{E}\left[|Y|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}.$$

A.5 Inégalité de Chebychev :

Soit X variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2 finie, pour réel strictement positif β,

$$P(X - \mu \geq \beta) \leq \frac{\sigma^2}{\beta^2}.$$

A.6 Théorème de convergence dominée de Lebesgue :

Théorème A.6.1 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoire convergeant p.s vers X. Supposons qu'il existe une variable aléatoire Y intégrable telle que $|X_n| < Y$ alors X est intégrable et $\mathrm{E}\left[|X_n - X|\right] \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.*

A.7 Notation et Abréviations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$	Filtration.
$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité filtré.
$(B_t)_{t\geq 0}$	Mouvement Brownien.
$\mathbb{R}^d$	L'espace réel euclidien de dimension d.
$\mathcal{N}$	L'ensemble $\mathbb{P}$-négligeable.
$\mathbb{F}$	La filtration naturelle de B.
$\mathbb{L}^2\left(\mathbb{F}_T, \mathbb{R}^k\right)$	L'espace des processus $\mathbb{F}_T$-mesurable et de carré intégrable.
Y_T^*	$\sup_{0\leq t\leq T} \lvert Y_t \rvert$.
$\mathbb{P} - p.s$	Persque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$\mathcal{L}(\mu)$	L'ensemble des fonctions linéaires continues de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.
$\varepsilon_f(.)$	$f -$ l'espérence.
$\varepsilon_f(./\mathcal{F}_t)$	$f -$ l'espérence conditionnelle.

Bibliographie

[1] Bismut, J. M. Conjugate convex functions in optimal stochastic control. *J. Math.Anal. Appl. 44* (1973), 348–404.

[2] Briand, P. équations différentielles stochastiques rétrogrades. Tech. rep., Univ. Rennes 1, 2001.

[3] Briand, P. Introduction aux equations did'erentielles stochastiques rétrogrades. Tech. rep., Université de Rennes. 1, 2002.

[4] Chen, Z. A property of backward stochastic diffrential equation. *Probability Theory 1* (1998), 483–488.

[5] E. Pardoux, S. P. Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems and Control Letters 14* (1990), 55–61.

[6] El Karoui N., Peng S., Q. M. C. Backward stochastic differential equations in finance. *Mathematical Finance 7* (1997), 1–71.

[7] Lakhdari, I. E. Equations différentielles stochastiques rétrogrades et applications en contrôle optimal. Master's thesis, Université Mohamed Khider, Département de Mathematique, 2010.

[8] Peng, S. G. BSDE and related g-expectation. *Pitman Research Notes 364* (1997), 141–159.