

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

BAOUDJ Khadidja

Titre :

**Estimateurs à noyaux associés discrets d'une
chaîne du Markov**

Membres du Comité d'Examen :

Pr. NECIR Abdelhakim	UMKB	Président
Dr. CHERFAOUI Mouloud	UMKB	Encadreur
Dr. SAYAH Abdallah	UMKB	Examineur

Juin 2018

DÉDICACE

Avec un énorme plaisir, que je dédie ce modeste travail à mes très chers, respectueux et magnifiques parents qui m'ont soutenus tout au long de ma vie.

À mes chers frères "**Abderahmane**" et "**Aymen Djaber**".

À ma chère sœur "**Nour Amira**".

À tous ma famille "**Baoudj**" et "**Barkati**".

À mon fiancé.

À mon amie, ma sœur "**Hiba**", à mes meilleurs amies "**Zinoba** et **Samsoma**".

À mes copines "**Asmahane, Souha, Dalila, Wafae, Sabrine, Chafia, Hanane, Nour, Selma**".

À toute la **promotion 2018** de 2ème année master mathématique.

À tous ceux qui m'ont aidé de prêt ou de loin pour la réalisation de ce travail.

REMERCIEMENTS

Avant tout, je remercie **DIEU**, le tout puissant, pour m'avoir accordé santé, courage et patience afin d'accomplir ce travail.

Je tiens à remercier vivement mon encadreur **Dr. CHERFAOUI Mouloud** d'avoir accepté de diriger ce projet de fin d'étude, sa gentillesse, sa disponibilité et ses précieux conseils.

Je voudrais remercier également les membres de jury **Pr. Necir Abdelhakim** et **Pr. Sayah Abdallah** de m'avoir fait l'honneur en acceptant de juger ce travail.

Je tiens à remercier, tous ceux qui m'ont enseignés durant toutes mes années du primaire jusqu'à l'université.

Je tiens aussi à remercier tous les personnes qui m'ont encouragé pendant la réalisation de ce travail : mes parents, ma famille, mes amis et mes collègues.

BAOUDJ KHADIDJA

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des tableaux	v
Introduction générale	1
1 Estimation à noyaux associés d'une densité discrètes	3
Introduction	3
1.1 Estimation à noyau d'une densité	3
1.2 Notion de noyaux associé discret	5
1.3 Propriétés de l'estimateur à noyau associé discret	5
1.4 Choix du noyau	7
1.4.1 Noyau associé Poissonnien	8
1.4.2 Noyau associé Binomiale	9
1.4.3 Noyau associé Binomiale négatif	10
1.4.4 Noyau associé Triangulaire	11
1.5 Choix de paramètre de lissage	13
1.6 Avantages et inconvénients des méthodes classiques	15
2 Les normes matricielles pour le choix du paramètre de lissage	17

Introduction	17
2.1 Le modèle (R, s, S)	18
2.2 Probabilités de transition	19
2.3 Choix de paramètre de lissage	21
Conclusion	23
3 Etude numérique comparative	24
Introduction	24
3.1 Présentation de l'application	24
3.2 Résultats numériques et discussion	25
Conclusion	30
Bibliographie	30

Liste des tableaux

1.1	Solution h_0 des noyaux discrets	15
3.1	Estimateur des paramètre de lissage h_{opt} , cas f poissonnienne	26
3.2	Estimateur des paramètre de lissage h_{opt} , cas f géométrique	26
3.3	Estimation du niveau du stock moyen, cas f poissonnienne	27
3.4	Estimation du niveau du stock moyen, cas f géométrique	28

Introduction générale

Rappelons que pour l'évaluation des performances d'un système d'une manière générale et d'un système décrit par une chaîne de Markov, on se base sur les différents paramètres de départ le décrivant. Cependant, dans la pratique et en règle générale, les valeurs des paramètres de départ d'un système ne sont connus que se forme d'un échantillon de données. Dans ce sens, les techniques d'estimation d'une manière générale et d'estimations non paramétrique en particulier vise à fournir une approximation pour les valeurs des paramètres (inconnus) en exploitant l'information apportée par l'échantillon afin d'évaluer les performances du système considère par la suite.

Dans la théorie classique de l'estimation paramétrique d'une matrice de transition associée à une chaîne de Markov, nous disposons de plusieurs méthodes, décrites dans [2], qui présentent l'avantage d'être simples à utiliser. Toutefois, il est difficile d'estimer avec précision des matrices de transition modélisant des phénomènes complexes. Pour pallier cette difficulté, nous faisons appel aux méthodes d'estimation non paramétriques. Ces dernières ont fait l'objet de travaux établis par Roussas (1969) [17] en utilisant la méthode du noyau. Les résultats obtenus par celui-ci ont été complétés par plusieurs autres auteurs mais ces résultats sont restreints dans le cadre théorique plus que pratique.

L'exploitation de la méthode du noyau dans un cadre pratique reviens initialement au travail de Bareche et Aïssani (2008) [1], où les auteurs ont prouvé l'applicabilité de la méthode du noyau dans les systèmes de files d'attente classiques lorsque l'une des lois les régissant est générale et inconnue. Par la suite, Gontijo et al. (2011) [6], ont appliqué la

méthode de noyau pour estimer les mesures de performance du système $GI^{[X]}/M/C/N$. Récemment, Cherfaoui et al. (2015) [5] ont abordé le problème du choix du paramètre de lissage dans le contexte d'estimation à noyau d'une chaîne de Markov décrivant un système d'attente. Dans ce dernier travail, afin de prendre en considération l'interaction des différentes composantes d'un système d'attente les auteurs ont proposé une procédure de sélection du paramètre de lissage qui se base sur les normes matricielles où ils ont démontré que l'estimateur du paramètre de lissage choisi, par la minimisation d'une certaine norme matricielle, donne de meilleurs résultats que les méthodes classiques.

Notons que la totalité des travaux cités auparavant ont été effectués via des estimateurs à noyaux associés continue (pour estimer des densités définies sur \mathbb{R}^+). Dans ce mémoire nous proposons de reprendre le travail de Cherfaoui et al. [5] mais tout en considérant le cas discret. Plus précisément, nous étudions le problème du choix du paramètre de lissage pour un estimateur à noyau associé de la matrice de transition d'une chaîne de Markov discrète correspondante au modèle de stock de type (R, s, S) .

Pour répondre à notre objectif nous avons organisé le reste de notre mémoire comme suit :

- Dans le premier chapitre, nous allons présenter la notion de l'estimateur à noyau associé d'une distribution discrète, en effet, après la présentation de la définition de l'estimateur à noyau associé discret, nous citons quelques-unes de ses propriétés. Par la suite nous abordons le problème du choix du paramètre de lissage et du noyau.
- Le deuxième chapitre, sera consacré à l'estimation de la matrice de transition d'une chaîne de Markov décrivant un modèle de stock de type (R, s, S) .
- Avant de conclure, l'illustration numérique des résultats théoriques obtenus est présentée dans le chapitre trois.

Chapitre 1

Estimation à noyaux associés d'une densité discrètes

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter brièvement la différence entre les estimateurs à noyau classique de Parzen-Rosenblatt et les estimateurs à noyaux associés d'une manière générale et en particulier dans le cadre de variables discrètes. Par la suite, notre intérêt sera orienté vers la question du choix du noyau associé et du paramètre de lissage dans le cas discret ainsi que les propriétés des estimateurs obtenus pour un noyau bien déterminé.

1.1 Estimation à noyau d'une densité

Soient X_1, X_2, \dots, X_n un n -échantillon issu d'une densité de probabilité inconnue $f(x)$. L'estimateur classique de $f(x)$ obtenu par la méthode du noyau, proposé par Rosenblatt [16] suivi de Parzen [12] s'écrit sous la forme :

$$f_{(n,h)}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right), \quad (1.1)$$

où h représente le paramètre de lissage et K est un noyau qui vérifie les conditions suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} K(y)dy = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} yK(y)dy = 0, \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} y^2K(y)dy = \sigma_K^2 < \infty. \quad (1.2)$$

L'estimateur à noyau continu (1.1) a été développé principalement pour les densités à supports continus et non-bornés. La fonction noyau K est classiquement symétrique (i.e. $K(-x) = K(x)$), elle est considérée comme moins importante que le paramètre de lissage h . Bien qu'un noyau symétrique soit approprié pour ajuster des densités à supports non-bornés, il ne l'est pas pour des densités à supports compacts ou bornés d'un côté et a fortiori à supports discrets.

En effet, lorsque on veut estimer des densités à support borné au moins d'un seul coté, l'estimateur à noyau classique devient non consistant, à cause des effets du bord. Ce problème est dû à l'utilisation d'un noyau symétrique qui assigne un poids en dehors du support lorsque le lissage est pris en compte près du bord. Plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature pour remédier à cette difficulté. La solution la plus simple est de remplacer le noyau symétrique par un noyau asymétrique, qui n'assigne pas un poids en dehors du support de la densité que l'on veut estimer. Cette idée est due à l'origine aux travaux de Chen [3, 4]. Ainsi, la naissance de la notion des noyaux associés qui englobent les noyaux continus symétriques (classiques) et asymétriques (non classiques) où l'expression de l'estimateur, à noyau associé d'une densité f , est donnée par :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x,h}(X_i) \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

avec h est le paramètre de lissage et $K_{x,h}$ sera dit alors "noyau associé" de cible x et de fenêtre h qui n'est pas forcément symétrique.

1.2 Notion de noyaux associé discret

Ci-dessous deux définitions liées au notions du noyau associé discret et de l'estimateur à noyau associé discret.

Définition 1 Soit $x \in \mathbb{N}$ et $h > 0$, on appelle noyau associé $K_{x,h}$ toute densité de masse probabilité liée à la variable aléatoire discrète $K_{x,h}$ de support \mathbb{N}_x contenant au moins x indépendant de h vérifiant les quatre conditions :

1. $\cup \mathbb{N}_x \supseteq \mathbb{N}$,
2. $E(K_{x,h}) \sim x$ lorsque $h \rightarrow 0$,
3. $Var(K_{x,h}) < +\infty$,
4. $Var(K_{x,h}) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$,

Définition 2 Soit X_1, X_2, \dots, X_n un n -échantillon iid issu d'une variable aléatoire X de la fonction de masse de probabilité inconnue f sur \mathbb{N} , L'estimateur à noyau associé discret de f est défini par :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x,h}(X_i), \quad (1.4)$$

où h est le paramètre de lissage (fenêtre) et $K_{x,h}$ est le noyau associé discret dépendant de x et h support $\mathbb{N}_{x,h} = \mathbb{N}_x$ (ne dépend pas de h).

1.3 Propriétés de l'estimateur à noyau associé discret

Dans cette section nous allons rappeler quelques résultats théoriques qui ont été établis par Senga Kiessé [8] et Kokonendji & Senga Kiessé [9] sur la convergence presque sûre, la convergence en moyenne quadratique, en moyenne quadratique intégrée et la convergence en loi de l'estimateur à noyau discret.

Rappelons que le l'espérance, biais et la variance de l'estimateur à noyau associé d'une manière générale sont donnés comme suit :

$$E(\hat{f}(x)) = f(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) \mu_2(K) + o(h^2), \quad (1.5)$$

$$Biais(\hat{f}(x)) = E(\hat{f}(x)) - f(x) = \frac{h^2}{2} f''(x) \mu_2(K) + o(h^2), \quad (1.6)$$

$$Var(\hat{f}(x)) = \frac{f(x)}{nh} \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(y) dy - \frac{f'(x)}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} y K^2(y) dy - \frac{1}{n} (f(x) + biais^2(x)), \quad (1.7)$$

où $\mu_2(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 K(y) dy$.

L'adaptation des expressions (1.5)–(1.7) au cas discret nous permet de formuler la proposition suivantes qui est nécessaire pour l'étude des estimateurs à noyaux discrets.

Proposition 1 *Soit X_1, X_2, \dots, X_n un n -échantillon iid issu d'une variable aléatoire X de la fonction de mass de probabilité inconnue f sur \mathfrak{N} , si \hat{f}_h l'estimateur à noyau associé discret de f , alors, pour $x \in \mathfrak{N}$ et $h > 0$ on a :*

$$E\{\hat{f}_h(x)\} = E(K_{x,h}),$$

où $K_{x,h}$ est la variable aléatoire de loi $K_{x,h}$ sur \mathfrak{N}_x . De plus, on a $\hat{f}_h(x) \in [0, 1]$ pour $x \in \mathfrak{N}$

$$\sum_x \hat{f}_h(x) = C,$$

où C est une constante strictement positive et finie.

Notons que :

$$E(\hat{f}_h(x)) = \sum_{y \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_x} f(y) K_{x,h}(y) \longrightarrow f(x) \text{ quand } h \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

– **L'erreur quadratique moyenne (MSE) :**

$$MSE(\hat{f}(x)) = E[\hat{f}(x) - f(x)]^2 = Var(\hat{f}(x)) + BiAIS^2((\hat{f}_h(x)),$$

où $E[\hat{f}_h(x) - f(x)]^2 \rightarrow 0$ quand $nh \rightarrow +\infty$ et $h \rightarrow 0$.

– **L'erreur quadratique moyenne intégrée (MISE) :**

$$\begin{aligned} MISE(\hat{f}_h(x)) &= \sum_{x \in \mathbb{N}} MSE(f(x), \hat{f}_h(x)) = \sum_{x \in \mathbb{N}} Var(\hat{f}(x)) + \sum_{x \in \mathbb{N}} BiAIS^2((\hat{f}(x)), \\ &= \frac{1}{n} \sum_{x \in \mathbb{N}_x} f(x) [(\Pr(K_{x,h} = x))^2 - f(x)] \\ &+ \sum_{x \in \mathbb{N}_x} \left[f(E(K_{x,h})) - f(x) + \frac{1}{2} Var(K_{x,h}) f^{(2)}(x) \right]^2 \\ &+ o\left(\frac{1}{n} + h^2\right) = MISE(n, h, K, f), \end{aligned} \tag{1.8}$$

où $f^{(2)}(x)$ est la différence finie d'ordre 2.

1.4 Choix du noyau

Dans la littérature et la pratique plusieurs fonctions sont proposées pour jouer le rôle du noyau. Dans cette section nous allons présenter les noyaux les plus usités dans le cadre d'estimation d'une densité discrète.

1.4.1 Noyau associé Poissonien

Nous rappelons qu'une loi de Poisson $P_o(\lambda)$ de paramètre λ est une loi discrete définie sur \mathbb{N} de fonction de probabilité

$$\Pr(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x \in \mathbb{N}$$

de plus $E(X) = Var(x) = \lambda$.

Soit $K_{p_o(x+h)}$ le noyau de Poisson equidispersé sur \mathbb{N} tel que :

$$K_{p_o(x+h)}(y) = e^{-(x+h)} \frac{(x+h)^y}{y!},$$

avec $x, y \in \mathbb{N}$, $h > 0$ est le paramètre de lissage.

Propriété 1 Soit $\hat{f}_h(x)$ l'estimateur d'une loi discrete construit par le noyau **Poissonien** alors :

1. L'estimateur de f :

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \left(e^{-(x+h)} \frac{(x+h)^{X_i}}{X_i!} \right).$$

2. Le Biais ponctuelle de $\hat{f}_h(x)$:

$$Biais(\hat{f}_h(x)) = hf^{(1)}(x) + \frac{1}{2}(x+h)f^{(2)}(x) + o(h).$$

3. La **Variance** ponctuelle :

$$Var(\hat{f}_h(x)) = \frac{1}{n} f(x) \frac{(x+h)^x}{x!}.$$

4. La forme de MISE :

$$\begin{aligned} MISE(n, h, K, f) &= \frac{1}{n} \sum_{x \in \mathbb{N}_x} f(x) \frac{(x+h)^x}{x!} e^{-(x+h)} \\ &\quad + \sum_{x \in \mathbb{N}_x} \left(h f^{(1)}(x) + \frac{1}{2} (x+h) f^{(2)}(x) + o(h) \right)^2, \end{aligned}$$

1.4.2 Noyau associé Binomiale

Nous rappelons qu'une loi Binomiale de paramètre (N, p) est une loi discrète définie sur l'ensemble $\{0, 1, \dots, N\}$, avec $N \in \mathbb{N}$ fixé de fonction de masse de probabilités $g_{BN(N,p)}$ tel que :

$$\Pr(X = x) = \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x (1-p)^{N-x},$$

De plus : $E(X) = Np$ et $Var(X) = Np(1-p)$.

Soit $K_{B(x+1, (x+h)/(x+1))}$ le noyau associé de loi Binomiale définie sur le support

$\mathbb{N}_{x,h} = \{0, 1, \dots, x+1\}$ tel que :

$$K_{B(x+1, (x+h)/(x+1))}(y) = \frac{(x+1)!}{y!(x+1-y)!} \left(\frac{x+h}{x+1} \right)^y \left(\frac{1-h}{1+x} \right)^{x+1-y} \mathbf{1}_{\{y \leq x+1\}},$$

où $x \in \mathbb{N}$, $h \in]0; 1]$ et $\mathbf{1}$ est la fonction indicatrice.

Propriété 2 Soit $\hat{f}_h(x)$ l'estimateur d'un loi discret construit par le Noyau **Binomiale** alors :

1. L'estimateur de f :

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(x+1)!}{X_i!(x+1-X_i)!} \left(\frac{x+h}{x+1} \right)^{X_i} \left(\frac{1-h}{x+1} \right)^{x+1-X_i} \mathbf{1}_{\{x+1 \geq X_i\}}.$$

2. Le *Biais ponctuelle* de $\hat{f}_h(x)$:

$$\text{Biais}(\hat{f}_h(x)) = hf^{(1)}(x) + \frac{1}{2}(x+h) \left(\frac{1-h}{x+1} \right) f^{(2)}(x) + o(h).$$

3. La **Variance** ponctuelle de $\hat{f}_h(x)$:

$$\text{Var} \left(\hat{f}_h(x) \right) = \frac{1-h}{n} \left(\frac{x+h}{x+1} \right)^x f(x).$$

4. Le *MISE* :

$$\begin{aligned} \text{MISE}(n, h, K, f) &= \frac{1-h}{n} \sum_{x \in \mathbb{N}} \left(\frac{x+h}{x+1} \right)^x f(x) \\ &+ \sum_{x \in \mathbb{N}} \left\{ hf^{(1)}(x) + \frac{1}{2}(x+h) \left(\frac{1-h}{x+1} \right) f^{(2)}(x) + o(h) \right\}^2, \end{aligned}$$

1.4.3 Noyau associé Binomiale négatif

Nous rappelons qu'une loi binomiale négative de paramètres s et p définie sur \mathbb{N} de fonction de masse de probabilité $g_{BN(s,p)}(x)$ tel que :

$$g_{BN(s,p)}(x) = \frac{(x+s)!}{x!s!} p^s (1-p)^s,$$

de plus : $E(X) = s(1-p)/p$ et $\text{Var}(X) = s(1-p)/p^2$.

Soit $K_{BN(x+1,(x+1)/(2x+1+h))}$ le noyau associé de loi Binomiale négative définie sur \mathbb{N} tel que :

$$K_{BN(x+1,(x+1)/(2x+1+h))}(y) = \frac{(x+y)!}{y!x!} \left(\frac{x+h}{2x+1+h} \right)^y \left(\frac{x+1}{2x+1+h} \right)^{x+1},$$

où $x, y \in \mathbb{N}$ et $h > 0$.

Propriété 3 Soit $\hat{f}_h(x)$ l'estimateur d'une loi discret construit par le noyau **Binomiale négatif**

1. *L'estimateur de f :*

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(x + X_i)!}{X_i! x!} \left(\frac{x+h}{2x+1+h} \right)^{X_i} \left(\frac{x+1}{2x+1+h} \right)^{x+1}.$$

2. *Le Biais ponctuelle de $\hat{f}_h(x)$:*

$$\text{Biais} \left(\hat{f}_h(x) \right) = h f^{(1)}(x) + \frac{1}{2} (x+h) \left(\frac{2x+1+h}{x+1} \right) f^{(2)}(x) + o(h).$$

3. *La **Variance** ponctuelle : de $\hat{f}_h(x)$:*

$$\text{Var} \left(\hat{f}_h(x) \right) = \frac{1}{n} \frac{2}{x!} \left(\frac{x+h}{2x+1+h} \right)^x \left(\frac{x+1}{2x+1+h} \right)^{x+1} f(x).$$

4. *le MISE :*

$$\begin{aligned} \text{MISE}(n, h, K, f) &= \frac{1}{n} \sum_{x \in \mathbb{N}} \frac{2}{x!} \left(\frac{x+h}{2x+1+h} \right)^x \left(\frac{x+1}{2x+1+h} \right)^{x+1} f(x) \\ &\quad + \sum_{x \in \mathbb{N}} \left(h f^{(1)}(x) + \frac{1}{2} (x+h) \left(\frac{2x+1+h}{x+1} \right) f^{(2)}(x) \right)^2 + o(h). \end{aligned}$$

1.4.4 Noyau associé Triangulaire

Nous rappelons qu'une fonction triangulaire $T_{a,b,c}$ de paramètre a et c dans \mathbb{N} et $b \in \mathbb{R}_+$ est une loi centrée en c et de bras a définie sur $\mathbb{N}_{a,c} = \{c, c \pm 1, \dots, c \pm a\}$ de fonction de probabilités :

$$\Pr(T_{a,b,c} = y) = (a+1) - \frac{|y-c|^h}{P(a,b)},$$

où $P(a,b)$ est la constante de normalisation telle que :

$$P(a,b) = (2a+1)(a+1)^b - 2 \sum_{i=0}^a i^b,$$

de plus :
$$\begin{cases} E[X] = c, \\ Var(x) = \frac{1}{P(a, b)} \left[\frac{a(a+1)^{b+1}(2a+1)}{3} \right] - 2 \sum_{i=0}^a i^{b+2}. \end{cases}$$

Soit $K_{T_{(a,h,x)}}$ le noyau associé défini sur $\{x, x \pm 1, \dots, x \pm a\}$ tel que :

$$K_{T_{(a,h,x)}}(y) = \frac{(a+1)^h - |y-x|^h}{(2a+1)(a+1)^h - 2 \sum_{j=0}^a j^h} \mathbf{1}_{\{|y-x| < a\}},$$

avec $x \in \mathbb{N}$, $h > 0$ et $a \in \mathbb{N}$.

Propriété 4 Soit $\hat{f}_h(x)$ l'estimateur d'une loi discrete construit par le noyau **Triangulaire**

1. L'estimateur de f :

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{T_{(a,h,x)}}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^a \frac{(a+1)^h - |X_i - x|^h}{(2a+1)(a+1)^h - 2 \sum_{j=0}^a j^h} \mathbf{1}_{\{|y-x| < a\}}.$$

avec $x \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}$ et $h > 0$.

2. Le Biais ponctuelle de $\hat{f}_h(x)$:

$$Biais(\hat{f}_h(x)) = \frac{1}{2} \frac{1}{P(a, h)} \left[\frac{a(a+1)^{h+1}(2a+1)}{3} \right] - 2 \sum_{i=0}^a i^{h+2} f^{(2)}(x) + o(h).$$

3. La **variance** ponctuelle de $\hat{f}_h(x)$:

$$Var(\hat{f}_h(x)) = \frac{(a+1)^h}{nP(a, h)} f(x).$$

4. le *MISE* :

$$MISE(n, h, K, f) = \frac{(a+1)^h}{nP(a, h)} \sum_{x \in \mathbb{N}} f(x) + \sum_{x \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{P(a, h)} \left[\frac{a(a+1)^{h+1}(2a+1)}{3} \right] - 2 \sum_{i=0}^a i^{h+2} f^{(2)}(x) + o(h) \right\}^2.$$

Preuve. Les résultats énoncés dans les propriétés 1–4 découlent des expressions générales (1.4) et (1.6)–(1.8) lorsque on remplace le noyau K par sa forme explicite. ■

1.5 Choix de paramètre de lissage

Dans cette section nous présentons quelques méthodes classiques pour le choix du paramètre de lissage dans l'estimation des fonctions discrètes. Ces méthodes, qui consiste à déterminer la valeur idéale de la fenêtre h définie par :

$$h_{id} = \arg \min_h MISE(n, h, K, f) = h_{id}(n, h, f),$$

ont été proposée par Kokonendji et Senga Kiessé [10] ; Kokonendji et Senga Kiessé [9].

1. Minimisation du MISE

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un n échantillons fixé *iid* de distribution inconnue f alors l'erreur quadratique intégrée (ISE) est donné par :

$$ISE = \sum_{x \in \mathbb{N}} (\hat{f}_{n,h,k}(x) - f(x))^2 = ISE(n, h, K, f), \quad (1.9)$$

ainsi (1.9) conduit à choisir une fenêtre adéquate :

$$h^{**} = \arg \min_h ISE(X, h, K, f), \quad (1.10)$$

pour laquelle la mesure est sur un seul échantillon et la fenêtre optimale h_{opt}^* peut être obtenue à travers $h_{opt}^* = \arg \min_{h>0} E(ISE(X, h, K, f))$.

2. Validation croisée

Nous proposons ici trois techniques qui se basent sur la méthode de validation croisée

(a) Validation croisée par les moindres carrées

La fenêtre optimale, dans ce cas, s'obtient par :

$$\begin{aligned} h_{cv} &= \arg \min \left[\sum_{x \in \mathbb{N}} \hat{f}_{n,h,k}(x) - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f}_{n,h,k,-i}(X_i) \right] \\ &= \arg \min \left[\sum_{x \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x,h}(X_i) \right\}^2 - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq j} (X_j) \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

(b) Validation croisée par le maximum de vraisemblance.

Ce critère consiste à choisir h qui maximise

$$LCV(h) = \prod_{i=1}^n f_{h,i}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\hat{f}_{n,h,K,-i}(X_i) \right),$$

où :

$$f_{h,i}(X_i) = (n-1)^{-1} \sum_{j=1, i \neq j} K_{X_i, h}(X_j),$$

alors on détermine une fenêtre optimale h_{LCV} par :

$$h_{LCV} = \arg \max_{h>0} LCV(h).$$

(c) Validation croisée par Kullback-leiber :

On cherche à minimiser la distance par rapport h en utilisant comme critère l'estimateur :

$$L(f, \hat{f}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log [f(X_i) \hat{f}_{h,i}^{-1}(X_i)].$$

3. Excès des zéros

On peut choisir une fenêtre adaptés $h_0 = h_0(X, K)$ tel que h satisfait :

$$\sum_{i=1}^n \Pr(K_{x, h_0} = 0) = n_0,$$

où $n_0 = \text{card}\{X_i = 0\}$ désigne le nombre des zéros dans l'échantillon X_1, \dots, X_n .

Le tableau suivant résume quelques exemples de h_0 .

Type de noyau	h_0 tel que $\sum_{i=1}^n \Pr(K_{x, h_0} = 0) = n_0$ et $n_0 > 0$.
Poisson	$h_0 = \log \left(\frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^n e^{-X_i} \right)$
Binomiale	$n_0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1 - h_0}{X_i + 1} \right)^{X_i + 1}$
Binomiale négative	$n_0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i + 1}{2X_i + 1 + h_0} \right)$

TABLE 1.1: Solution h_0 des noyaux discrets

Remarque 1 Dans le cas d'utilisation des noyaux discrets triangulaires le paramètre de lissage h_0 dans la solution d'excès des zéros n'existe pas car l'équation

$$\sum_{i=1}^n \Pr(K_{a, x, h_0} = 0) = n_0 \Leftrightarrow (n - (2a - 1)n_0) (a + 1)^h + 2n_0 \sum_{k=0}^a K^h = \sum_{i=1}^n X_i^h$$

n'admet pas de solution (voir Kokonendji et al [10] et Senga Kiessé [8]).

1.6 Avantages et inconvénients des méthodes classiques

Pour la première méthode qui consiste à choisir le paramètre de lissage h de sorte à minimiser $MISE$, l'intérêt est théorique (voir Senga Kiessés [8], Kokonendji et Senga Kiessé [9]). La difficulté majeure de cette méthode réside en fait dans les applications, car l'expression du $MISE$ dépend de la densité inconnue f à estimer. Même si on peut remplacer

f par l'estimateur naïf (empirique) f_0 , l'analyse s'avère délicat pour des échantillons de petite ou moyenne taille. De plus des approximations pour la *variance* et le *biais* sont nécessaire afin d'approximer le *MISE*. La méthode la plus répandue en pratique est la technique de **validation croisée**, puisque elle est guidée seulement par les observations et n'utilise pas des approximations de f . Cependant la minimisation du critère *CV* ne garantit pas l'existence d'un seul minimum i.e. la difficulté majeure de cette méthode est bien que le problème des minimums locaux. Enfin, la méthode d'Excès des zéros n'est appropriée que pour des échantillons qui représentent une proportion importante de zéros (voir Senga Kiessé [8]).

Chapitre 2

Les normes matricielles pour le choix du paramètre de lissage

Introduction

Dans le présent chapitre, l'objectif principal est l'estimation à noyau d'une matrice de transition inconnue P associée à un modèle stochastique de **Gestion du stock** de type $(\mathbf{R}, \mathbf{s}, \mathbf{S})$ modélisé par une chaîne de Markov discrète. Plus précisément, notre étude se base principalement sur la sélection du paramètre de lissage par les **normes matricielles**.

Notons que les normes que nous allons développer sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|A\|_1 = \sup_i \sum_j |a_{ij}|, \\ \|A\|_2 = \sum_i \sum_j (a_{ij})^2, \\ \|A\|_\infty = \sup_j \sum_i |a_{ij}|, \end{array} \right.$$

où A est une matrice constituée d'éléments a_{ij} .

2.1 Le modèle (R, s, S)

Suivant la signification de modèle (R, s, S) [13, 14, 15], le niveau de la position de stock est inspecté chaque R unités de temps et une commande sera lancée si le processus de position du stock à la date nR est inférieur au niveau s . Au début de chaque période le gestionnaire décide s'il doit ou non commander une quantité d'articles et si oui, combien commander. On suppose que le fournisseur est parfaitement fiable et que les commandes arrivent immédiatement. Durant la période n , $n \geq 1$, la demande totale est une variable aléatoire discrète ζ_n . On suppose également que les variables aléatoires ζ_n , $n \geq 1$, sont indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune :

$$a_k = \Pr(\zeta_1 = k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Pour tel problème de gestion des stocks, l'état du stock X_n est inspectée aux date $t_n = nR$ ($n \geq 1$). Si le niveau du stock $X_n \leq s$, le gestionnaire passe une commande de manière à ramener le stock au niveau S , la taille de la commande est égale alors à $S - X_n$. Si par contre le niveau du stock est supérieure au seuil s , on ne passe aucune commande et l'on attend jusqu'au prochain moment d'inspection.

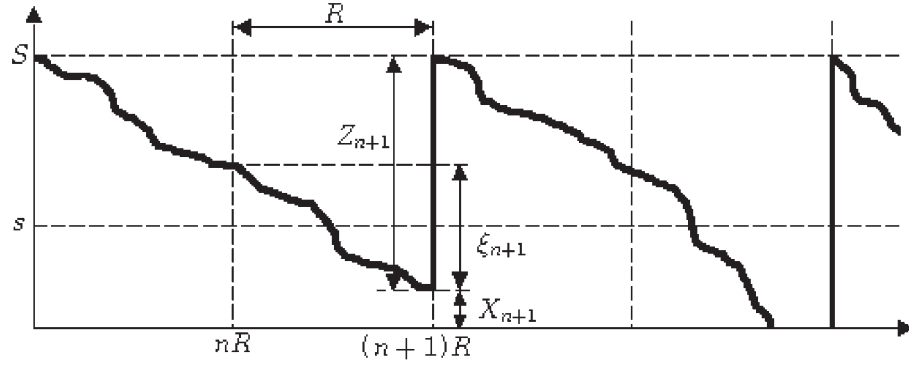
L'état du stock X_{n+1} à la fin de la période $n + 1$ est alors donné par :

$$X_{n+1} = \begin{cases} (S - \zeta_{n+1})^+ & \text{if } X_n \leq s, \\ (X_n - \zeta_{n+1})^+ & \text{if } X_n > s, \end{cases}$$

où $(A)^+ = \max(A, 0)$.

La variable aléatoire X_{n+1} ne dépend que de X_n et ζ_{n+1} , où ζ_{n+1} est indépendante de n et de l'état du système avant t_n . Donc X est donc une chaîne de Markov homogène, à espace d'état $E = \{0, 1, \dots, S\}$.

Enfin, le modèle de stock en question peut être schématisé sous sa forme générale comme suit :


 FIGURE 2.1 – Le niveau du stock dans le système (R, s, S) avec un délai d'exécution nul.

Pour plus de détails sur les modèles de stock d'une manière générale et du modèle de stock de type (R, s, S) en particulier le lecteur peut se référer à [13].

2.2 Probabilités de transition

Supposons que le niveau du stock à la date $t_n = nR$ et la date $t_{n+1} = (n+1)R$ est $X_n = i$ et $X_{n+1} = j$, respectivement. Alors les probabilités de transition de cette chaîne est :

1. si $0 \leq i \leq s$ on a : $X_{n+1} = (X_n - \zeta_{n+1})^+$, donc on distingue les deux cas suivants :

cas $j = 0$

$$\Pr(X_{n+1} = 0 \mid X_n = i) = \Pr(S - \zeta_{n+1} \leq 0) = \Pr(\zeta_{n+1} \geq S) = \sum_{k=S}^{+\infty} a_k,$$

cas $0 < j \leq S$

$$\Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \Pr(S - \zeta_{n+1} = j) = \Pr(\zeta_{n+1} = S - j) = a_{S-j},$$

2. si $s + 1 \leq i \leq S$ et $X_{n+1} = (i - \zeta_{n+1})^+$ on distingue les cas suivants :

cas $j = 0$

$$\Pr(X_{n+1} = 0 \mid X_n = i) = \Pr(i - \zeta_{n+1} \leq 0) = \Pr(\zeta_{n+1} \geq i) = \sum_{k=i}^{+\infty} a_k,$$

cas $0 < j \leq i$

$$\Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \Pr(i - \zeta_{n+1} = j) = \Pr(\zeta_{n+1} = i - j) = a_{i-j},$$

cas $j > i$

$$\Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = 0,$$

en résumé on a :

$$P_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=S}^{+\infty} a_k & \text{Si } 0 \leq i \leq s \quad \text{et } j = 0 \\ a_{S-j} & \text{Si } 0 \leq i \leq s \quad \text{et } 1 \leq j \leq S \\ \sum_{k=i}^{\infty} a_k & \text{Si } s+1 \leq i \leq S \quad \text{et } j = 0 \\ a_{i-j} & \text{Si } s+1 \leq i \leq S \quad \text{et } 1 \leq j \leq i, \\ 0 & \text{Si } s+1 \leq i \leq S \quad \text{et } j \geq i+1 \end{cases}$$

Ainsi, la matrice de transition P de la chaîne de Markov X sera présentée comme suit :

$$P = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & & s & & s+1 & & S \\ \hline 0 & \sum_{k=S}^{+\infty} a_k & a_{S-1} & \cdots & a_{S-s} & & a_{S-s-1} & \cdots & a_0 \\ 1 & \sum_{k=S}^{+\infty} a_k & a_{S-1} & \cdots & a_{S-s} & & a_{S-s-1} & \cdots & a_0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ s & \sum_{k=S}^{+\infty} a_k & a_{S-1} & \cdots & a_{S-s} & & a_{S-s-1} & \cdots & a_0 \\ \hline s+1 & \sum_{k=s+1}^{+\infty} a_k & a_s & \cdots & a_1 & & a_0 & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & 0 \\ S & \sum_{k=S}^{+\infty} a_k & a_{S-1} & \cdots & a_{S-s} & & a_{S-s-1} & \cdots & a_0 \end{array}$$

Il s'agit d'une chaîne de Markov irréductible (on peut aller de n'importe quel état vers n'importe quel autre) et apériodique.

2.3 Choix de paramètre de lissage

Dans le cadre de ce mémoire nous proposons d'utiliser la méthode du noyau associé discret pour estimer la matrice P . Pour le choix du noyau K , le problème est facile il suffit de le sélectionner, par exemple, parmi les noyaux exposés dans le **Chapitre 1**. Tandis que le problème du choix du paramètre de lissage h , on peut envisager deux manières :

1. Estimation des éléments $a_k = \Pr(X = k)$ indépendants de leur position dans la matrice P ie les \hat{a}_k sont définis par

$$\hat{a}_k = \hat{P}(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{k,h}(X_i), \quad k \in \mathbb{N}$$

et pour le choix de paramètre du lissage, dans ce cas, se fait par le biais de l'une des techniques citées dans le **Chapitre 1**.

2. Prendre en considération la position des éléments a_k dans la matrice P , alors on a :

$$\hat{P} = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & \dots & s & s+1 & \dots & S \\ \hline 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{a}_k & \hat{a}_{S-1} & \dots & \hat{a}_{S-s} & \hat{a}_{S-s-1} & \dots & \hat{a}_0 \\ 1 & \sum_{k=1}^{+\infty} \hat{a}_k & \hat{a}_{S-1} & \dots & \hat{a}_{S-s} & \hat{a}_{S-s-1} & \dots & \hat{a}_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s & \sum_{k=s}^{+\infty} \hat{a}_k & \hat{a}_{S-1} & \dots & \hat{a}_{S-s} & \hat{a}_{S-s-1} & \dots & \hat{a}_0 \\ \hline s+1 & \sum_{k=s+1}^{+\infty} \hat{a}_k & \hat{a}_s & \dots & \hat{a}_1 & \hat{a}_0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ S & \sum_{k=S}^{+\infty} \hat{a}_k & \hat{a}_{S-1} & \dots & \hat{a}_{S-s} & \hat{a}_{S-s-1} & \dots & \hat{a}_0 \end{array}$$

avec $\hat{a}_k = \hat{P}(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{k,h}(X_i)$, et $k \in \mathbb{N}$

et pour le choix de la fenêtre h nous proposons d'utiliser les normes matricielles. Dans ce cas le paramètre de lissage peut être choisi selon l'une des trois expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1^* = \arg \min_h \left\| \hat{P} - P \right\|_1 = \arg \min_h \left[\sup_i \left(\sum_{j=0}^S \left| \hat{P}_{ij} - P_{ij} \right| \right) \right] \quad \text{où } 0 \leq i \leq S, \\ h_2^* = \arg \min_h \left\| \hat{P} - P \right\|_2 = \arg \min_h \left[\sum_{i=0}^S \sum_{j=0}^S \left(\hat{P}_{ij} - P_{ij} \right)^2 \right], \\ h_3^* = \arg \min_h \left\| \hat{P} - P \right\|_\infty = \arg \min_h \left[\sup_j \left(\sum_{i=0}^S \left| \hat{P}_{ij} - P_{ij} \right| \right) \right] \quad \text{où } 0 \leq j \leq S. \end{array} \right.$$

En remplaçant les éléments de P et \hat{P} dans ces trois dernières expressions on obtient :

$$\begin{aligned} h_1^* &= \arg \min_h \left[\sup_{0 \leq i \leq S} \left(\sum_{j=0}^S \left| \hat{P}_{ij} - P_{ij} \right| \right) \right] = \arg \min_h \left[\sup_{s+1 \leq i \leq S} \left(\sum_{j=0}^S \left| \hat{P}_{ij} - P_{ij} \right| \right) \right] \\ &= \arg \min_h \left[\sup_{s+1 \leq i \leq S} \left(\sum_{k=0}^{i-1} \left| \hat{a}_k - a_k \right| + \left| \sum_{k=0}^{i-1} (\hat{a}_k - a_k) \right| \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} h_2^* &= \arg \min_h \left[\sum_{i=0}^S \sum_{j=0}^S \left(\hat{P}_{ij} - P_{ij} \right)^2 \right] \\ &= \arg \min_h \left[(S+1) \sum_{k=0}^s (\hat{a}_k - a_k)^2 + \sum_{k=s+1}^{S-1} (S+s+1-k) (\hat{a}_k - a_k)^2 \right. \\ &\quad \left. + (s+2) \left(\sum_{k=0}^{S-1} (\hat{a}_k - a_k) \right)^2 + \sum_{i=s+1}^{S-1} \left(\sum_{k=0}^{i-1} (\hat{a}_k - a_k) \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
 h_3^* &= \arg \min_h \left[\sup_j \left(\sum_{i=0}^S |\hat{P}_{ij} - P_{ij}| \right) \right] \\
 &= \arg \min_h \left[\sup_{0 \leq j \leq S} \left(\begin{aligned} &\left[(s+2) \left| \sum_{k=0}^{S-1} (\hat{a}_k - a_k) \right| + \sum_{i=s+1}^{S-1} \left| \sum_{k=0}^{i-1} (\hat{a}_k - a_k) \right| \right] \mathbf{1}_{\{j=0\}} \\ &+ \left[(s+2) |\hat{a}_{S-j} - a_{S-j}| + \sum_{i=s+1}^{S-1} |\hat{a}_{i-j} - a_{i-j}| \right] \mathbf{1}_{\{1 \leq j \leq s\}} \\ &+ \left[(s+2) |\hat{a}_{S-j} - a_{S-j}| + \sum_{i=j}^{S-1} |\hat{a}_{i-j} - a_{i-j}| \right] \mathbf{1}_{\{s+1 \leq j \leq S-1\}} \end{aligned} \right) \right]. \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

Conclusion

Dans cette partie nous avons proposé d'estimer la matrice de transition, P , d'une chaîne de Markov discrète, décrivant un modèle de stock de type (R, s, S) , à l'aide de la méthode du noyau. Nous avons remarqué qu'il existe deux manières de choisir le paramètre de lissage optimal à savoir : les méthodes classiques et les normes matricielles. A cet effet une question s'impose : quelle est la technique la plus adéquate pour le choix de h dans cette situation ? La réponse à cette question fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Etude numérique comparative

Introduction

L'objectif du présent chapitre est d'identifier l'impact du choix de paramètre de lissage et du noyau sur la qualité de l'estimateur, où nous avons étudié l'effet de quelques procédures de sélection de h présentées dans les chapitres 1 et 2 sur les performances de l'estimateur à noyau d'une matrices de transition d'**une chaîne de Markov** qui décrit un modèle de **gestion stock** de type (R, s, S) .

3.1 Présentation de l'application

Rappelons que notre objectif est d'analyser numériquement l'impact du choix du paramètre de lissage via les normes matricielles sur les performances de l'estimateur d'une matrice de transition associée à une chaîne de Markov décrivant un modèle de stock de type (R,s,S) . Afin de répondre à notre objectif, nous avons implémenté un programme sous **MATLAB** dont les principales étapes sont comme suit :

Étape 1 Fixer la totalité des paramètres : $R, s, S, \lambda, f, \dots$

Étape 2 Générer m échantillons de taille n de distribution f .

Étape 3 Estimer h_{opt} par les expressions (1.10), (2.1), (2.2) et (2.3) et par la méthode

d'excès des zéros pour chaque échantillon.

Étape 4 Calculer \hat{f} pour chaque h_{opt} obtenus dans l'**Étape 3**.

Étape 5 Calculer les estimateurs moyens de h_{opt} et \hat{f} .

Pour l'exécution du programme nous avons fixé les paramètres comme suit :

- le nombre de réplifications (échantillons) $m = 100$,
- la taille de l'échantillon $n \in \{50; 100; 500; 1000\}$,
- la fonction f est une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$ et une loi géométrique de paramètre $p = 0.3$,
- le noyau $K \in \{Poisson; Binomiale\ Négatif\}$,
- le seuil de stock de risque $s = 5$, capacité du stock $S = 20$ et $R = 1$ unité de temps.

3.2 Résultats numériques et discussion

Les résultats obtenus pour les différents paramètres précédents (voir section 3.1) sont rangés dans les Tables 3.1 et 3.2.

A partir de ces résultats (Tables 3.1 et 3.2) :

- On constate que la valeur du paramètre de lissage optimale h_{opt} dépend de la procédure de sélection et du noyau utilisé et également de la distribution estimée.
- Le paramètre de lissage dépend de la taille de l'échantillon. En effet, d'une manière générale h décroît en fonction de n et à mesure que n augmente, mais contrairement à la méthode d'*Excès des zéros* dans le cas du noyau binomiale négatif, l'effet de la taille de l'échantillon dans notre cas (cas discret), est moins considérable que dans le cas des densités continues.
- L'estimation du paramètre de lissage par la minimisation de la norme $\|\cdot\|_1$ a tendance de nous fournir des valeurs constantes dans le cas d'une distribution de Poisson.
- On constate que la méthode d'*Excès des zéros* nous fournit des h_{opt} qui sont sensiblement différents des h_{opt} fournis par les autres procédures.

Noyau K	n	Méthodes classiques		Normes matricielles		
		h_0^*	h_{ise}^*	h_1^*	h_2^*	h_3^*
Poisson	50	2.6491	0.4612	0.5011	0.4540	0.3984
	100	2.6753	0.4534	0.4994	0.4461	0.3999
	500	2.7072	0.4487	0.4994	0.4414	0.4014
	1000	2.7102	0.4479	0.4993	0.4406	0.4013
Binomiale Négatif	50	0.6775	0.9059	0.9998	0.8785	0.8286
	100	0.6605	0.9041	0.9998	0.8770	0.8302
	500	0.6459	0.9017	0.9998	0.8746	0.8306
	1000	0.6402	0.9015	0.9998	0.8745	0.8310

TABLE 3.1: Estimateur des paramètre de lissage h_{opt} , cas f poissonnienne

Noyau K	n	Méthodes classiques		Normes matricielles		
		h_0^*	h_{ise}^*	h_1^*	h_2^*	h_3^*
Poisson	50	1.4702	0.4629	0.4858	0.4311	0.4442
	100	1.0306	0.4510	0.4821	0.4186	0.4374
	500	0.4482	0.4468	0.4817	0.4161	0.4400
	1000	0.3156	0.4475	0.4824	0.4171	0.4410
Binomiale Négatif	50	0.4202	0.9161	0.9791	0.8363	0.8924
	100	0.5093	0.9109	0.9789	0.8321	0.8942
	500	0.5303	0.9089	0.9806	0.8315	0.9075
	1000	0.5278	0.9083	0.9808	0.8306	0.9056

TABLE 3.2: Estimateur des paramètre de lissage h_{opt} , cas f géométrique

Vue qu'à ce niveau les différents estimateurs sont incomparable alors, afin de juger leurs qualités, nous allons estimer une autre quantité qui est le niveau moyen du stock et cela pour la totalité des h_{opt} rangés dans les Tables 3.1 et 3.2.

Notons que le niveau de stock moyen \bar{Q} est défini comme suit :

$$\bar{Q} = \sum_{i=0}^S i\pi_i, \quad (3.1)$$

avec $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_S)$ est la solution de l'équation

$$\pi = \pi P, \quad (3.2)$$

Sous la condition $\sum_{i=0}^S \pi_i = 1$.

Les estimateurs du niveau du stock moyen correspondant aux paramètres de lissage optimaux sont rangés dans les Tables 3.3 et 3.4.

Noyau K	n	Méthodes classiques		Normes matricielles			\bar{Q} exacte
		$\bar{Q}_{h_0^*}$	$\bar{Q}_{h_{ise}^*}$	$\bar{Q}_{h_1^*}$	$\bar{Q}_{h_2^*}$	$\bar{Q}_{h_3^*}$	
Poisson	50	6.6204	11.9780	12.0275	11.9698	11.9031	12.2312
	100	6.4708	11.9760	12.0310	11.9673	11.9095	
	500	6.3430	11.9696	12.0278	11.9607	11.9104	
	1000	6.3333	11.9676	12.0259	11.9587	11.9093	
Binomiale	50	–	11.7499	11.7582	11.7451	11.7330	
	100	11.5981	11.7543	11.7627	11.7491	11.7370	
Négatif	500	11.6395	11.7546	11.7623	11.7492	11.7375	
	1000	11.6417	11.7559	11.7637	11.7504	11.7387	

TABLE 3.3: Estimation du niveau du stock moyen, cas f poissonnienne

Noyau K	n	Méthodes classiques		Normes matricielles			\bar{Q} exacte
		$\bar{Q}_{h_0^*}$	$\bar{Q}_{h_{ise}^*}$	$\bar{Q}_{h_1^*}$	$\bar{Q}_{h_2^*}$	$\bar{Q}_{h_3^*}$	
Poisson	50	9.7978	11.3751	11.3539	11.3984	11.3813	11.6618
	100	11.1239	11.3825	11.3582	11.4051	11.3872	
	500	13.7935	11.3912	11.3658	11.4120	11.3943	
	1000	14.9746	11.3946	11.3696	11.4149	11.3980	
Binomiale	50	-	11.1524	11.1069	11.2053	11.1623	
	100	-	11.1614	11.1128	11.2139	11.1689	
Négatif	500	11.3834	11.1742	11.1227	11.2263	11.1742	
	1000	11.3820	11.1692	11.1171	11.2214	11.1705	

TABLE 3.4: Estimation du niveau du stock moyen, cas f géométrique

Les résultats obtenus sur le niveau du stock moyen (voir Tables 3.3 et 3.4) montrent que :

- à l'exception de la méthode d'*Excès des zéros*, le reste des techniques fournies des résultats raisonnables et satisfaisants. De plus, d'une manière générale les meilleurs résultats correspondants à ceux conçu à base des paramètres de lissage optimaux au sens d'erreurs matricielles.
- Une autre constatation est que la qualité des estimateurs du niveau du stock moyen n'est pas très sensible à la taille de l'échantillon.
- Les résultats fournis par la méthode d'*Excès des zéros* sont erronés voir dans certaines situations on ne peut même pas estimer le niveau du stock moyen. L'analyse détaillée de ce dernier problème sur des exemples numériques (résultats non exposé dans ce mémoire) indiquent que la résolution des équations correspondantes à la méthode d'*Excès des zéros* peut fournir des solutions négatives ($h_0 < 0$) ou voir même elle n'admet pas de solution. Dans ce cas une question de grande importance s'impose :

est-il un problème d'inférence statistique ou un problème de l'analyse numérique (algorithmes de résolution d'équation non linéaire) ?

Remarque 2 *Dans la réalisation de la présente application, initialement le noyau **Binomiale** avait été suggéré. Cependant, les résultats obtenus dans ce cas montrent qu'on doit éviter l'utilisation de ce noyau dans le contexte de notre travail.*

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons considéré le choix du paramètre de lissage par des procédures qui se basent sur des normes matricielles dans le cadre d'estimation à noyaux associés d'une matrice de transition d'une chaîne de Markov discrète, décrivant un modèle de stock de type (R, s, S) .

Pour répondre à notre objectif nous avons exposé en premier lieu, la notation de l'estimateur à noyaux associés discrets où nous avons mis l'accent sur ces propriétés, choix du noyau et choix du paramètre de lissage. En deuxième lieu, après avoir décrit brièvement le modèle de stock de type (R, s, S) et sa matrice de transition P , nous avons développé des formes explicites des paramètres optimaux lorsque ces dernière sont sélectionnés par la minimisation des normes matricielles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Afin d'illustrer l'importance du choix de la procédure de sélection du paramètre de lissage pour l'estimation de la matrice de transition P de la chaîne de Markov correspondante au modèle en question, nous avons réalisé une application numérique qui se base sur des échantillons artificielles.

Les résultats obtenu mis en évidence l'utilité de l'utilisation des normes matricielles pour la sélection du paramètre de lissage pour estimer P par la méthode de noyau. De plus, elle nous a permis d'écarter la méthode classique Excès des zéros qui nous donne des résultats erronés dans ce contexte. Il sera intéressant de compléter ce travail par :

- Simulation extensive toute en considérant d'autres paramètres : f , K ,...
- Développer des formules pratique pour h_1 , h_2 et h_3 .

Bibliographie

- [1] Bareche, A. & Aïssani, D. (2008). Kernel density in the study of the strong stability of the $M/M/1$ queueing system. *Operations Research Letters*, 36, 535–538.
- [2] Billingsley, P. (1961). *Statistical inference for Markov processes*. University of Chicago Press.
- [3] Chen, S. X. (1999). Beta kernel estimators for density functions. *Computational Statistics & Data Analysis*, 31(2), 131-145.
- [4] Chen, S. X. (2000). Probability density function estimation using gamma kernels. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 52(3), 471-480.
- [5] Cherfaoui, M. (2015). *Estimation non paramétrique et approximations dans les systèmes de files d'attente* (Doctoral dissertation, Université Abderrahmane Mira de Bejaïa).
- [6] Gontijo, G. M. Atuncar, G. S. Cruz, F. R. B. & Kerbache, L.(2011). Performance evaluation and dimensioning of $GI^{[X]}/M/c/N$ systems through kernel estimation. *Mathematical Problems in Engineering*, (Article ID 10.1155/2011/348262) :1–20, 2011.
- [7] Khalifa, I. B. (2007-2008). *Estimation non-paramétrique par noyaux associés et données de panel end marketing*.
- [8] Kiessé, T. S. (2008). *Approche non-paramétrique par noyaux associés discrets des données de dénombrement* (Doctoral dissertation, Université de Pau et des Pays de l'Adour).

- [9] Kokonendji, C. C., & Kiese, T. S. (2011). Discrete associated kernels method and extensions. *Statistical Methodology*, 8(6), 497-516
- [10] Kokonendji, C. C., Senga Kiessé, T., & Zocchi, S. S. (2007). Discrete triangular distributions and non-parametric estimation for probability mass function. *Journal of Nonparametric Statistics*, 19(6-8), 241-254.
- [11] Kokonendji, C. C., & Kiese, T. S. (2006). Estimateur à noyau discret standard pour une densité de probabilité discrète.
- [12] Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *The annals of mathematical statistics*, 33(3), 1065-1076.
- [13] Rabta, B. (2002). Stabilités forte dans un modèle stochastique de gestion des stocks, Thèse de Magister, Université de Bejaïa.
- [14] Rabta, B., & Aïssani, D. (2005). Strong stability in an (R, s, S) inventory model. *International Journal of Production Economics*, 97(2), 159-171.
- [15] Rabta, B., & Aïssani, D. (2008). Strong stability and perturbation bounds for discrete Markov chains. *Linear Algebra and its Applications*, 428(8-9), 1921-1927.
- [16] Rosenblatt, M. (1956) Remarks in some nonparametric estimates of a density function, *Ann. Math. Statist.*, 27,832–837
- [17] Roussas, G. G. (1969) Nonparametric estimation in Markov processes. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 21, 73–87.
- [18] Zougab, N. (2013). Approche bayésienne dans l'estimation non paramétrique de la densité de probabilité et la courbe de régression de la moyenne Thèse de doctorat, Université de Bejaïa.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions le problème du choix du paramètre de lissage pour un estimateur à noyau associé de la matrice de transition d'une chaîne de Markov discrète. Pour ce faire, nous avons considéré le système de gestion de stock de type (R, s, S) . En se basant sur des exemples numériques, nous avons constaté que l'estimateur du paramètre de lissage choisi, par la minimisation d'une certaine norme matricielle, donne de meilleurs résultats, en termes de la qualité des estimateurs des caractéristiques stationnaire du modèle, que les méthodes classiques.

Abstract

In this work, we study the problem of choosing the smoothing parameter for an associate kernel estimator of the transition matrix of a discrete Markov chain. To do this, we have considered a periodic review inventory model with an (R, s, S) policy. The proposed smoothing parameter performs better than the existing classical methods in terms of quality of the estimators of the stationary characteristics of the model.