

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Guerfi Asma

Titre :

L'intégrale multiple théorie et application

Membres du Comité d'Examen :

Dr. ZERROUG Abdelhamid	UMKB	Président
Dr. DAKHIA Hassiba	UMKB	Encadreur
Dr. TABARHA Ouarda	UMKB	Examineur

Juin 2018

DÉDICACE

*J*e dédie ce humble travail à :

Grâce à Dieu le tout puissant, le clément, le miséricordieux, que j'ai atteints ce niveau pour présenter ce modeste mémoire.

je dédie ce modeste travail :

- Au support de ma vie, celui qui m'a toujours encouragé et qui s'est sacrifié pour me voir réussir, à mon père **Abd Elrrahmen**.
- A la plus belle créature de dieu sur terre, la lumière de mes jours ma mère **Salima**.
 - A mes frères **Abd Elkader** et **Imed**.
 - A mes seours **Lamia, Imen** et **Fadhila**.
 - A mes cousines **Radja** et **Roufida**.
 - A tout la famille.
- A tous mes chers Professeurs du Departement sans exception.
- A mes amis dont je garde de très bons souvenirs Aicha, Nina, Missou, Merzaka, Micha, Hanan, Karima, Sabrina, Ladmia, Romaissa, Fatma.

REMERCIEMENTS

Je tiens en premier lieu, à remercier : **ALLAH** qui m'a donné la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il nous a donnée durant toutes ces années d'études et pour finir ce travail

- Je tiens à remercier mon encadreur Madame **DAKHIA Hassiba**.
- Mes vifs remerciements vont également aux membres du Jury Dr. **ZERROUG Abdelhamid** et Dr. **TABARHA Ouarda** qui ont bien voulu lire et évaluer le contenu de mon travail et d'être présent le jour de sa présentation.
- Je tiens à remercier :Dr. **HFAYADH Mokhtar** -Chef de département de mathématiques- pour son aide considérable durant ma formation.
- Enfin, Je voudrais associer à mes remerciements toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	vi
Introduction	1
1 L'intégrale simple et intégrale simple de Reimann	3
1.1 Rappel sur l'intégrale simple	3
1.2 Techniques d'intégration	6
1.3 Intégration par parties	6
1.3.1 Intégration par parties, intégrale indéfinie	6
1.3.2 Intégration par parties, intégrale définie	6
1.4 Intégration par substitution	7
1.4.1 Intégration par substitution, intégrale indéfinie	7
1.4.2 Intégration par substitution, intégrale définie	7
1.5 Intégration par changement de variable.	8
1.5.1 Intégration par changement de variable, intégrale indéfinie.	8
1.5.2 Intégration par changement de variable, intégrale définit	9
1.6 Intégrale simple de Reimann	9
1.6.1 Définition de l'intégrale de Reimann	10

2	L'intégrale multiple double et triple	12
2.1	L'intégrale d'une fonction sur un ouvert borné de \mathbb{R}^2	12
2.2	Fonction intégrable	13
2.3	Intégrale double d'une fonction continue sur un rectangle	13
2.3.1	Principe de l'intégrale double	14
2.3.2	Définition de l'intégrale double sur un rectangle	15
2.4	Théorème de Fubini sur un rectangle	17
2.5	Intégrale double sur un domaine borné D	19
2.5.1	Propriétés générales de l'intégrale double	19
2.6	Changement de variable dans une intégrale double.	21
2.7	Changement de variable en coordonnées polaires	22
2.8	L'intégrale triple	23
2.9	Théorème de Fubini	24
2.9.1	Sur un parallélépipède	24
2.9.2	Sur un domaine quelconque borné	25
2.10	Changement de variable	26
2.11	Les coordonnées cylindriques	26
2.12	Les coordonnées sphérique	28
3	Théorie et application en physique	30
3.1	Physique de semi-conducteur	30
3.1.1	Semi-conducteur l'équilibre	30
3.2	Physique statistique	32
3.3	Masse. Centre de masse. Barycentre	34
3.3.1	Centre de masse : barycentre	34
3.4	Physique classique	38
3.4.1	Centre d'inertie d'un corps	38

Bibliographie

40

Table des figures

1.1	représente la subdivision de l'intervalle $[a, b]$	10
2.1	Une division d'un intervalle en sous-intervalles	14
2.2	représente le changement de variable dans une intégrale triple	27

Introduction

L'intégrale multiple est une forme d'intégrale qui s'applique aux fonctions de plusieurs variables (généralement deux ou trois variables) à l'instar des intégrales simples. Les intégrales multiples possèdent des interprétations géométriques significatives et encore calculent les volumes. Dans ce travail on a fait trois chapitres :

- Dans le premier chapitre on commence par l'intégrale simple c'est à dire l'intégrale de fonction d'une seule variable que l'on note $\int f(x)dx$ mesure l'aire de la région du plan située entre l'axe des abscisses dans l'intervalle $[a, b]$ pour calculer cette intégrale il suffit de trouver une primitive de f et encore donnée les techniques d'intégrations (le changement de variable, l'intégrale par partie...) et ensuite en rappelons l'intégrale de **Reimann** (historiquement, de nombreux problèmes physiques, géométriques font intervenir des calculs approchés de certaines quantités numériques sous la forme de sommes de parties infinitésimales appelées **somme de Reimann**. Ces sommes constituent intuitivement des valeurs approchées des quantités recherchées. Elles sont alors, par un passage à la limite la base de la théorie des intégrales définies au sens de **Reimann**) élabore la théorie rigoureuse de ce qu'on appelle aujourd'hui l'intégrale de **Reimann**.
- Dans le deuxième chapitre on poursuit l'étude des intégrales multiples de deux ou trois variables de fonction continue et bornée. premièrement on commence par étudier l'intégrale double qui s'écrit sous la forme $\iint f(x, y)dx dy$ qui consiste à intégrer sur le rectangle et ensuite on utilise le théorème de "**Fubini**" consiste à intégrer sur les "tranches" correspondant aux segments données par les intersections du domaine d'intégration avec

les droites d'équations $x = cte$ puis d'intégrer le résultat par rapport à x . On peut également commencer par intégrer sur les tranches horizontales $y = cte$ puis intégrer le résultat par rapport à y . Ensuite nous touchons à présent les changements des variables le plus utilisés dans les calculs des intégrales "les coordonnées géométriques" (polaires, cylindriques, sphériques) et donnée quelques exemples simples. En deuxième chose on traitent l'intégrale triple qui définie par $\iiint f(x, y, z) dx dy dz$ sur une région bornées de \mathbb{R}^3 et nous présenterons quelques -unes de ces théorèmes "théorème de **Fubini**". Ensuite nous verrons comment calculer ces intégrales au moyen d'intégrales itérés. Nous utilisons le changement de variable et les coordonnées cylindriques et sphériques pour simplifier l'intégrale triple et données quelques exemples.

- Dans le troisième chapitre on présenter les théories et l'application sur physique qui parle en cas générale sur physique classique et physique statistique.

Chapitre 1

L'intégrale simple et intégrale simple de Reimann

1.1 Rappel sur l'intégrale simple

- Dans un premier temps, nous rappellerons ce qu'est l'intégrale simple (l'intégration pour les fonctions d'une seule variable réelle), ainsi que le théorème fondamental du calcul
- Dans ce chapitre, nous traiterons l'intégrale simple. Soient deux nombres réelles a, b avec $a < b$ est une fonction $f(x)$ réel définie et bornée sur l'intervalle fermé $[a, b]$, alors l'intégrale définie de f sur $[a, b]$, que l'on note :

$$\int_a^b f(x) dx$$

est la limite :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max\{\delta_i \mid 1 \leq i \leq n\} \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i) \delta_i$$

pour laquelle nous considérons toutes les subdivisions de l'intervalle $[a, b]$ en n sous intervalles $[a_{i-1}, a_i]$, dont longueur de chacun de ceux-ci est notée $\delta_i = (a_i - a_{i-1})$,

en y laissant n , le nombre de ces sous- intervalles devenir de plus en plus grand et le maximum $\max \{\delta_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ des longueurs de ces sous -intervalles devenir de plus en plus près de zéro de plus, dans cette définition pour chaque i , x_i peut être n'importe quel point de l'intervalle $[a_{i-1}, a_i]$.

- Le théorème fondamentale au calcul dit que s'il existe une fonctions $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Il y'a aussi une seconde forme du théorème fondamentale du calcul :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

- La première forme du théorème fondamentale du calcul nous fournit un outil très précieux pour calculer des intégrales définies

Proposition 1.1.1 Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions bornée sur $[a, b]$.

- (*régle linéaire*) on a α et β deux nombres réels alors :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

- (*régle des puissances*)

$$\int_a^b x^n dx = \begin{cases} x^{n+1} / (n+1) \Big|_a^b & , si \ n \neq -1 \\ \ln(|x|) \Big|_a^b & , si \ n = -1 \end{cases}$$

- (*régle du produit*)

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int_a^b g(x) \cdot f'(x) dx$$

- (*régle de substitution*)

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) \Big|_a^b$$

ou $F(x)$ est une primitive de $f(x)$

Proposition 1.1.2 (*primitives des fonctions usuelles*)

$$\int_a^b \exp(x) dx = \exp(x) \Big|_a^b \quad , \quad \int_a^b \ln(x) dx = x \ln(x) \Big|_a^b - x \Big|_a^b$$

$$\int_a^b \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_a^b \quad , \quad \int_a^b \cos(x) dx = \sin(x) \Big|_a^b$$

Dans le cas de la règle du produit, on parle plutôt d'intégration par parties. C'est ainsi que nous désignerons cette règle par la suite.

1.2 Techniques d'intégration

1.3 Intégration par parties

1.3.1 Intégration par parties, intégrale indéfinie

L'intégration par parties découle de la règle de la dérivée du produit de deux fonctions.

Soit F une primitive de f .

$$\begin{aligned} [F(x).g(x)]' &= f(x).g(x) + F(x).g'(x) \\ f(x).g(x) &= [F(x).g(x)]' - F(x).g'(x) \\ \int f(x).g(x)dx &= F(x).g(x) - \int F(x).g'(x)dx \end{aligned}$$

1.3.2 Intégration par parties, intégrale définie

Passons de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie.

$$\begin{aligned} \int f(x).g(x)dx &= F(x).g(x) - \int F(x).g'(x)dx \\ \int_a^b f(x).g(x)dx &= F(x).g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x).g'(x)dx \\ \int_a^b f(x).g(x)dx &= F(b).g(b) - F(a).g(a) - \int_a^b F(x).g'(x)dx \end{aligned}$$

1.4 Intégration par substitution

1.4.1 Intégration par substitution, intégrale indéfinie

L'intégration par substitution découle de la règle de la dérivée de la composée de deux fonctions.

- Soit G une primitive de g .

En lieu et place de la formule En lieu et place de la formule précédente, on peut retenir la liste des substitutions à effectuer (à retenir!).

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = t \\ f'(x)dx = dt \\ t = f(x) \end{array} \right.$$

1.4.2 Intégration par substitution, intégrale définie

Maintenant en passe à l'intégrale définie.

- Soit G une primitive de g .

$$\begin{aligned} [G(f(x))] &= g(f(x)).f'(x). \\ \int g(f(x)).f'(x)dx &= G(f(x)) + c \\ \int_a^b g(f(x)).f'(x)dx &= G(f(b)) - G(f(a)) \\ \int_a^b g(f(x)).f'(x)dx &= \int_{f(a)}^{f(b)} g(t)dt. \end{aligned}$$

En lieu et place de la formule précédente, on peut retenir de la liste des substitutions

à effectuer :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = t \\ f'(x)dx = dt \\ x = a \leftrightarrow t = f(a) \\ x = b \leftrightarrow t = f(b) \end{array} \right.$$

1.5 Intégration par changement de variable.

1.5.1 Intégration par changement de variable, intégrale indéfinie.

Dans l'intégrale par changement de variable, on effectue une intégration par substitution "à l'envers", puis on revient à la variable originelle au moyen de la fonction réciproque.

$$\left(\int g(x)dx \right) |_{x=f(t)} = \int g(f(t)) \cdot f'(t)dt$$

Dans le cas où la fonction f est bijective, on notant $f^{-1}(x)$ la fonction réciproque de f .

$$\int g(x)dx = \left(\int g(f(t)) \cdot f'(t)dt \right) |_{t=f^{-1}(x)}$$

Le changement de variable est décrit par la liste de remplacement à effectuer

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f(t) \\ dx = f'(t) \\ t = f^{-1}(x) \end{array} \right.$$

1.5.2 Intégration par changement de variable, intégrale définie

Passons de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie en trouvant :

$$\int_{f(c)}^{f(d)} g(x) dx = \int_a^b g(f(t)) \cdot f'(t) dt$$

Dans le cas où la fonction f est bijective, en posant $a = f(c)$, $b = f(d)$ et en utilisant la fonction réciproque

$$c = f^{-1}(a) \quad , \quad d = f^{-1}(b)$$

$$\int_a^b g(x) dx = \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} g(f(t)) \cdot f'(t) dt$$

Le changement de variable est décrit par la liste des remplacements à effectuer :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f(t) \\ dx = f'(t) dt \\ x = a \longleftrightarrow t = f^{-1}(a) \\ x = b \longleftrightarrow t = f^{-1}(b) \end{array} \right.$$

1.6 Intégrale simple de Reimann

Rappel : On appelle subdivision de $[a, b]$ un ensemble fini de points $\delta = \{x_0, \dots, x_n\}$

telle que :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Le pas $\delta(s)$ de la subdivision est le plus grand des nombres $x_i - x_{i-1}$ ou $i \in \{1, \dots, n\}$.

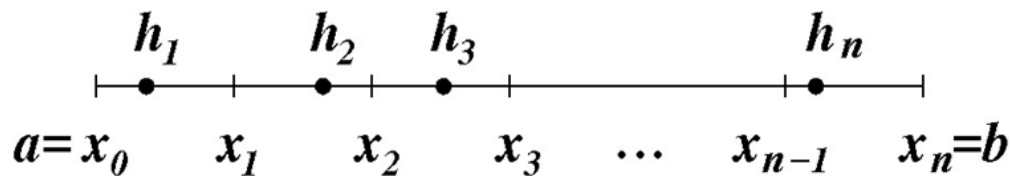
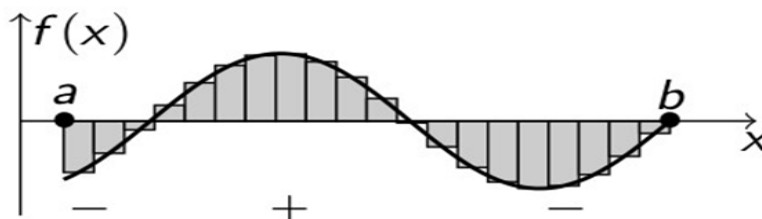


FIG. 1.1 – représente la subdivision de l'intervalle $[a, b]$

Pour tout choix de n points $h_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$ on appelle **SOMME DE RIEMANN** de f le nombre

$$R(f, s, \{h_1, \dots, h_n\}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(h_i)$$

Dans cette somme chaque terme $(x_i - x_{i-1}) f(h_i)$ représente l'aire algébrique du rectangle de base I_i et hauteur $f(x_i)$



1.6.1 Définition de l'intégrale de Reimann

Soit n un entier strictement positif. On considère une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et n sous-intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$. On pose donc :

$$x_j = a + j \frac{b-a}{n}, j = 0, \dots, n$$

(en particulier $x_0 = a$ et $x_n = b$)

On recherche sur le j -ième intervalle la borne supérieure M_j et la borne inférieure m_j de

la fonction f , on note :

$$T_-^n = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) m_j$$

$$T_+^n = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) M_j$$

Ces sommes sont appelées sommes de *Darboux*.

Lorsque f est à valeurs positives et que l'on peut mesurer l'aire $A(S)$ de la surface S , on doit avoir

$$T_-^n \leq A(S) \leq T_+^n$$

En effet le réel $(x_j - x_{j-1}) m_j$ est par exemple l'aire du rectangle dont l'un des cotés est le segment $[x_{j-1}, x_j]$ et dont la hauteur est m_j . Il est clair que l'encadrement ci-dessus est d'autant plus précis que le nombre n de rectangles est grand. Voici donc la définition naturelle de l'aire de cette surface.

Définition 1.6.1 Soit f une fonction bornée sur un intervalle $[a, b]$.

On dit que f est intégrable (au sens de Reimann) sur $[a, b]$ lorsque les suites T_+^n et T_-^n convergent vers une même limite I . Ce nombre est appelé l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$. On le note

$$I = \int_a^b f(t) dt$$

Si de plus f est à valeurs positives, alors l'aire de la surface S est égale à l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle a, b

Chapitre 2

L'intégrale multiple double et triple

2.1 L'intégrale d'une fonction sur un ouvert borné de \mathbb{R}^2

Définition 2.1.1 soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 de frontière régulière et ρ un pavage de Ω :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n w_i$$

On dit que f est **intégrable** sur Ω si, et seulement si, il existe un réel S vérifiant :
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout pavage ρ de Ω de diamètre $\delta < \eta$
et pour toute **Somme de Riemann** R associée à f et à ρ , on a

$$|S - R| < \varepsilon$$

si S existe il est unique.

Si f est intégrable sur Ω , le réel S est appelé **intégrale double** de f sur Ω est noté par :

$$\int_{\Omega} \int f(x, y) dx dy$$

2.2 Fonction intégrable

Théorème 2.2.1 *toute fonction continue et bornée sur Ω est intégrable sur Ω .*

Remarque 2.2.1 *on a la fonction $f(x, y) = 1$ est intégrable sur Ω et $\int_{\Omega} \int dx dy = 1$ est l'aire de Ω :*

$$\int_{\Omega} \int dx dy = \text{aire}(\Omega)$$

2.3 Intégrale double d'une fonction continue sur un rectangle

- On a le rectangle $[a, b] \times [c, d]$, on à l'ensemble des points (x, y) qui vérifiant $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$.
- Nous allons nous limiter systématiquement à une fonction f continue sur le rectangle $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ à valeurs réelles, alors on va donner :

$$\int_{\Omega} \int f(x, y) dx dy$$

et qui va représenter le volume de \mathbb{R}^3 situé entre le plan xoy , la surface d'équation $z = f(x, y)$ et les quatres plan verticaux $x = a$, $x = b$, $y = c$ et $y = d$. Nous indiquons la démarche qui exactement la même que pour l'intégrale simple mais n'est pas les mêmes principes des démonstrations.

- Maintenant au lieu d'approcher une surface par l'aire d'une famille de rectangles, nous approchons un volume par une famille de parallélépipèdes verticaux, dont les bases sont des petits rectangles du plan .
- Enfin le lemme de continuité uniforme d'une fonction de deux variables est le même dans \mathbb{R}^2 que dans \mathbb{R} en remplaçant "segment" par "rectangle" ou plus généralement "fermé borné".

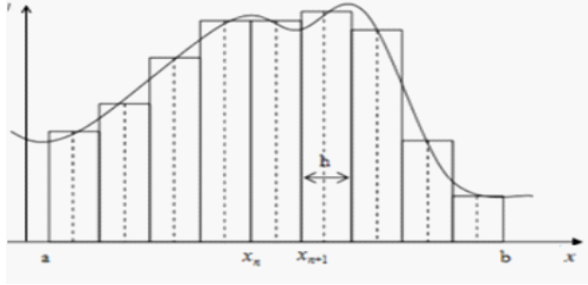


FIG. 2.1 – Une division d'un intervalle en sous-intervalles

2.3.1 Principe de l'intégrale double

- Un quadrillage du rectangle est la donnée d'une subdivision $d_1 : a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ de $[a, b]$ et de $d_2 : c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = d$ de $[c, d]$. le quadrillage q est constitué des $n \times m$ petits rectangles $\Omega_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$.
- Une somme de **Darboux** inférieure sera de la forme :

$$\Gamma_-^n(q) = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})m_{ij}$$

où m_{ij} est le minimum de la fonction continue f sur le rectangle $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.

- Une somme de **Darboux** supérieure sera de la forme :

$$\Gamma_+^n(q) = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})M_{ij}$$

où M_{ij} est le maximum de la fct continue f sur le rectangle $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.

- L'ensemble des sommes de **Darboux** inférieures admet une borne supérieure, qui est inférieure ou égale à la borne inférieure de l'ensemble des sommes de **Darboux** supérieure.
- La définition de l'intégrale double voulue c'est la démonstration comme pour l'intégrale simple que ces deux bornes sont égale.

Remarque 2.3.1 *Apriori, l'intégrale double est faite pour calculer des volumes de même que l'intégrale simple était faite pour calculer une aire.*

2.3.2 Définition de l'intégrale double sur un rectangle

Définition 2.3.1 *Soit f la fonction de deux variable x et y continue sur un rectangle $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ de \mathbb{R}^2 .*

- *On partage Ω en sous rectangles, dans chaque sous rectangle $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ on choisit un point $N(x, y)$ et on calcule l'image de (x, y) pour la fonction f .*
- *La somme des volumes des colonnes dont la base est des sous-rectangles et la hauteur $f(x, y)$ est une approximation du volume compris entre le plan $Z = 0$ et la surface S . Lorsque le quadrillage devient suffisamment pour que la diagonale de chaque sous-rectangle tende vers 0, ce volume sera la limite des sommes de Reimann et on le note :*

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} f\left(a + i \frac{b-a}{n}, c + j \frac{d-c}{n}\right)$$

Théorème 2.3.1 *Il existe un unique nombre I possédant la propriété suivante :*

pour tout $\varepsilon > 0, \exists q : \{ [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \}$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$. tq :

$$\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})m_{ij} \leq I \leq \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})M_{ij}$$

$$0 < \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(M_{ij} - m_{ij}) < \varepsilon$$

Ce nombre I s'appelle intégrale double de f sur $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ et se note :

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

Exemple 2.3.1 *on prenons $f(x, y) = x + 2y$ et $\mathbb{R} = [0, 1] \times [0, 1]$. Nous allons prendre*

comme quadrillage du plan une découpe régulière en n^2 petits carrés de sommets $\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$ avec $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq n$. chaque petit carré a une surface égale à $\frac{1}{n^2}$. Nous devons calculer le minimum et le maximum de $f(x, y)$ sur un tel petit carré.

Nous avons donc, bonne révision, un problème d'extremum d'une fonction de deux variables $(x, y) \rightarrow x + 2y$ sur un rectangle $[a, b] \times [c, d]$.

Comme il est clair que f n'a aucun point critique, ces extrema sont réalisés sur le bord du rectangle. Les encadrements $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ nous donnent $a + 2c \leq x + 2y \leq b + 2d$ et nous avons les extrema de façon évidente (pour une fois)

Sur le petit carré de quadrillage $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$ nous avons ainsi :

$$m_{i,j} = \frac{i-1}{n} + 2\frac{j-1}{n}, \quad M_{i,j} = \frac{i}{n} + 2\frac{j}{n}.$$

Nous sommes amenés à calculer les sommes :

$$s(q) = \sum_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n} \frac{1}{n^2} \left(\frac{i-1}{n} + 2\frac{j-1}{n} \right), \quad s(q) = \sum_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n} \frac{1}{n^2} \left(\frac{i}{n} + 2\frac{j}{n} \right)$$

Calculons par exemple $s(q)$ qui est plus sympathique :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (i + 2j) &= 1 + 2 + \dots + n + 2nj = \frac{n(n+1)}{2} + 2nj. \\ \sum_{j=1}^n \frac{n(n+1)}{2} + 2nj &= n \frac{n(n+1)}{2} + 2n(1 + 2 + \dots + n) \\ &= n \frac{n(n+1)}{2} + n \times n(n+1) = \frac{3}{2}n^2(n+1). \end{aligned}$$

Ce qui nous donne finalement $s(q) = \frac{3n+1}{2n}$ dont la limite est $\frac{3}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Finalement :

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} (x + 2y) dx dy = \frac{3}{2}$$

Un calcul analogue donne $s(q) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$, qui tend bien lui-aussi vers $\frac{3}{2}$ et l'on a bien :

$$s(q) \leq \iint_{[0,1] \times [0,1]} (x + 2y) dx dy \leq s(q).$$

2.4 Théorème de Fubini sur un rectangle

Théorème 2.4.1 *soit f une fonction continue sur un rectangle $\Omega = [a, b] \times [c, d]$. Nous avons :*

$$\int_{\Omega} \int f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

Preuve. On pose $H = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$ et $\forall \varepsilon > 0$ donné par définition de l'intégrale double, il existe un entier p tq pour tout $n \geq p$ et tout $m \geq p$ on a :

$$\left| \int_{\Omega} \int f(x, y) dx dy - \frac{(b-a)(d-c)}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f\left(a + i \frac{b-a}{n}, c + j \frac{d-c}{m}\right) \right| < \varepsilon$$

on a $x \rightarrow g(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ est continue sur $[a, b]$. $\exists n_0$ a partir duquel :

$$\left| \int_a^b g(x) dx - \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n g\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n g\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b g(x) dx \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n g\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) - H \right| < \varepsilon$$

Fixon un entier plus grand que n_0 et p pour chaque i , le nombre $g\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$ est encore une intégrale simple. Il existe donc un entier m_i (depend de i) tq pour tout $m \geq m_j$ on ait :

$$\left| g\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) - \frac{d-c}{m} \sum_{j=1}^m f\left(a + i\frac{b-a}{n}, c + j\frac{d-c}{m}\right) \right| < \varepsilon$$

En prenant alors un entier m plus grand que p et m_0 ou m_0 est le plus grand des entiers m_1, m_2, \dots, m_n . chacune des n relations précédente est vérifiée, et nous pouvons les additionner pour obtenir :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) - \frac{(d-c)}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f\left(a + i\frac{b-a}{n}, c + j\frac{d-c}{m}\right) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{i=1}^n g\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) - \frac{(d-c)}{m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f\left(a + i\frac{b-a}{n}, c + j\frac{d-c}{m}\right) \right| < n\varepsilon$$

ce qui donne :

$$\left| \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n g\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) - \frac{(d-c)}{m} \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f\left(a + i\frac{b-a}{n}, c + j\frac{d-c}{m}\right) \right| < (b-a)\varepsilon$$

$$\left| H + \varepsilon - \frac{(d-c)}{m} \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f\left(a + i\frac{b-a}{n}, c + j\frac{d-c}{m}\right) \right| < (b-a)\varepsilon$$

$$\left| H - \frac{(d-c)}{m} \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f\left(a + i\frac{b-a}{n}, c + j\frac{d-c}{m}\right) \right| < (1 + (b-a))\varepsilon$$

En utilisant le premier encadrement nous avons donc :

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy - \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx < (2 + (b-a))\varepsilon$$

Comme ε est quelconque les deux nombres sont égaux.

On fait de même avec la seconde intégrale

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

■

Exemple 2.4.1 On va calculer $\iint_{\Omega} 2xy - 3y^2 dx dy$ telle que : $\Omega = [0, 1] \times [1, 2]$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} 2xy - 3y^2 dx dy &= \int_0^1 \left[\int_1^2 2xy - 3y^2 dx \right] dy = \int_0^1 [yx^2 \Big|_1^2 - 3y^2 x \Big|_1^2] dy \\ &= \int_0^1 [4y - y - 6y^2 + 3y^2] dy = 2y^2 \Big|_0^1 - \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 - 2y^3 \Big|_0^1 + y^3 \Big|_0^1 \\ &= 2 - \frac{1}{2} - 2 + 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} 2xy - 3y^2 dx dy &= \int_1^2 \left[\int_0^1 2xy - 3y^2 dy \right] dx = \int_1^2 [xy^2 \Big|_0^1 - y^3 \Big|_0^1] dx \\ &= \int_1^2 (x - 1) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 - x \Big|_1^2 = 2 - \frac{1}{2} - 2 + 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.5 Intégrale double sur un domaine borné D

2.5.1 Propriétés générales de l'intégrale double

- (La linéarité)

$$\iint_D (\lambda f + \mu g)(x, y) dx dy = \lambda \iint_D f(x, y) dx dy + \mu \iint_D g(x, y) dx dy$$

- si D et D' sont deux domaines disjoints (D et D' ont une intersection vide) :

$$\iint_{D \cup D'} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_{D'} f(x, y) dx dy$$

Exemple 2.5.1 Si $f(x, y) \geq 0$ en tout point de D , avec f non identiquement nulle, alors

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$$

Théorème 2.5.1 L'intégrale double $\int_{\Omega} \int f(x, y) dx dy$ se calcule par l'une l'autre des façons suivantes :

- Si $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } \Psi_1(x) \leq y \leq \Psi_2(x)\}$

$$\text{alors } \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

- Si $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \text{ et } \Psi_1(y) \leq x \leq \Psi_2(y)\}$ alors $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy.$

- Si les deux représentations sont possible, les deux résultats sont évidemment égaux.

Exemple 2.5.2 On va calcule $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ sur le trapéze limité par les sommets $(1, 0), (4, 0), (3, 2)$ et $(2, 2)$. Il s'agit du moment d'inertie de ce trapéze, supposé homogène, par rapport à l'origine.

Les bases du trapéze sont horizontales; les côtés inclinés sont des segment des droites $y = 2(x - 1)$ et $y = -2(x - 4)$. Il faut clairement fixer y entre 0 et 2 et intégrer d'abord en x variant entre $x = 1 + \frac{y}{2}$ à $x = 4 - \frac{y}{2}$. Nous calculons donc :

$$I = \int_0^2 \left[\int_{1+\frac{y}{2}}^{4-\frac{y}{2}} (x^2 + y^2) dx \right] dy$$

Nous avons tout d'abord

$$\int_{1+\frac{y}{2}}^{4-\frac{y}{2}} (x^2 + y^2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_{1+\frac{y}{2}}^{4-\frac{y}{2}} = 21 - \frac{17}{2}y + \frac{15}{4}y^2 - \frac{13}{12}y^3$$

puis

$$I = \int_0^2 \left(21 - \frac{17}{2}y + \frac{15}{4}y^2 - \frac{13}{12}y^3 \right) dy = \frac{92}{3}$$

2.6 Changement de variable dans une intégrale double.

Rappel : On appelle la matrice jacobienne de $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ la matrice à p lignes et n colonnes :

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

telle que la première colonne contient les dérivées partielles des coordonnées de φ par rapport à la première variable x_1 , la deuxième colonne contient les dérivées partielles des coordonnées de φ par rapport à la deuxième variable x_2 et ainsi de suite.

Théorème 2.6.1 Soit $(u, v) \in \Delta \rightarrow (x, y) = \varphi(u, v) \in \Omega$ une bijection de classe C^1 du domaine Δ au domaine Ω . Soit $|\det(\varphi)|$ la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de φ . Alors, nous avons :

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f \circ \varphi(u, v) |\det(\varphi)| du dv$$

Exemple 2.6.1 On va calculer $\iint_{\Omega} (x-1)^2 dx dy$ sur le domaine

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x + y \leq 1, -2 \leq x - y \leq 2\}$$

En effectuant le changement de variable $u = x + y, v = x - y$ on a alors

$$\{-1 \leq u \leq 1, -2 \leq v \leq 2\}$$

et on a aussi

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \iff \begin{cases} u + v = 2x \\ u - v = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u + v}{2} \\ y = \frac{u - v}{2} \end{cases}$$

Le jacobien de ce changement de variables est :

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta x}{\delta v} \\ \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Et donc

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{u+v}{2} - 1\right)^2 \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| dudv = \frac{136}{3}$$

2.7 Changement de variable en coordonnées polaires

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tq $(r, \theta) \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Alors φ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , et son

jacobien vaut :

$$J_\varphi(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Exemple 2.7.1 On calcule l'intégrale de changement de variable en coordonnées polaires suivantes :

$$I = \iint_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$$

où $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$. Alors :

$1 \leq r^2 \cos^2 x + r^2 \sin^2 x \leq 4$ alors $1 \leq r \leq 2$ où $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \frac{1}{r^2 \cos^2 x + r^2 \sin^2 x} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \frac{r}{r^2} dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \frac{1}{r} dr d\theta = \frac{\pi}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

2.8 L'intégrale triple

Le principe est le même que pour les intégrales doubles, en remplaçant un petit élément de volume.

- D un domaine borné de \mathbb{R}^3 si $(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) \in \mathbb{R}$ est une fonction continue de trois variables sur un domaine $D \in \mathbb{R}^3$. Alors on va définir :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \lim \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^p f(x_i, y_j, z_k) \nabla x_i \nabla y_j \nabla z_k$$

tel que :

- $\{x_0 = a, \dots, x_i, \dots, x_n = b\}$ subdivision de $[a, b]$, $\nabla x_i = x_i - x_{i-1}$.
- $\{y_0 = c, \dots, y_j, \dots, y_m = d\}$ subdivision de $[c, d]$, $\nabla y_j = y_j - y_{j-1}$.
- $\{z_0 = e, \dots, z_k, \dots, z_p = h\}$ subdivision de $[e, h]$, $\nabla z_k = z_k - z_{k-1}$.
- $p_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$.

- Si $f(x, y, z) = 1$ alors $\iiint_D dx dy dz = \text{vol de } D$.

$dv = dx dy dz$ est l'élément de volume en coordonnées cartésiennes .

Proposition 2.8.1 Soit D_1, D_2 deux régions de \mathbb{R}^3 . Si $D_1 \cup D_2 = D$ et si le volume de

$D_1 \cap D_2$ est nul alors :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{D_2} f(x, y, z) dx dy dz$$

Proposition 2.8.2 (Règle linéaire)

Soit $f(x, y, z), g(x, y, z)$ deux fonctions réelles et a, b deux nombres réels. Alors :

$$\iiint_D (af(x, y, z) + bg(x, y, z)) dx dy dz = a \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz + b \iiint_D g(x, y, z) dx dy dz$$

Proposition 2.8.3 Soit f et g deux fonctions réelles dans D vérifiant $\forall M \in D : f(M) \leq g(M)$ alors

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_D g(x, y, z) dx dy dz$$

Proposition 2.8.4 Si f est bornée et intégrable sur D , alors $|f|$ est aussi :

$$\left| \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \iiint_D |f(x, y, z)| dx dy dz$$

2.9 Théorème de Fubuni

2.9.1 Sur un parallélépipède

Le théorème de **Fubuni** s'applique de nouveau façons quand $D = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$.

- On fixe une variable par exemple z entre e et h , et on intègre sur le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ en (x, y) . On se ramène donc une intégrale double suivie d'une intégrale simple. Le

résultat comme suite :

$$\begin{aligned} \iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [e,h]} f(x, y, z) dx dy dz &= \int_e^h \left[\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y, z) dx dy \right] dz = \int_e^h \left[\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y, z) dx \right] dy \right] dz \\ &= \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_e^h f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx = \dots \end{aligned}$$

Exemple 2.9.1 on a $\iiint_D f(x, y, z) = \iiint_D 2x + yz$ le parallélépipède $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 3]$.

L'ordre des variables n'a pas d'importance alors :

$$\int_1^3 \left[\int_1^2 \left[\int_0^1 (2x + yz) dx \right] dy \right] dz$$

- On a d'abord $\int_0^1 (2x + yz) dx = x^2 + yzx \Big|_0^1 = 1 + yz$

- En suite $\int_1^2 (1 + yz) dy = y + \frac{y^2}{2} z \Big|_1^2 = (2 - 1) + (2z - \frac{1}{2}z) = 1 + \frac{3}{2}z$

- Finalement $\int_1^3 (1 + \frac{3}{2}z) dz = z + \frac{3}{4}z^2 \Big|_1^3 = (3 - 1) + (\frac{27}{4} - \frac{3}{4}) = 8$

2.9.2 Sur un domaine quelconque borné

Théorème 2.9.1 Représentons un domaine D pour d'intégrations. L'idée est de prendre l'une des trois variables dont on voit de façon claire qu'elle varie entre deux bornes extrême, supposons que ce soit x fixé, variant entre x_{\min} et x_{\max} , on découpe dans D une surface D_x . On peut alors représenter D_x dans le plan $yo z$, puis le traitement sur D_x se fait comme avec les intégrales doubles :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left[\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left[\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx$$

Bien sur on peut intervertir les rôles de x, y et z .

Exemple 2.9.2 On a $I = \iiint_D dx dy dz$, tq $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, x + y + z \leq 1\}$, on va calculer le volume de tétraédre, il s'agit donc de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\iint_{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1-z} dz dy \right] dx &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} dz \right] dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (1-x-y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[(1-x) - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \right] dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

2.10 Changement de variable

On a φ est une application **bijective** et de classe C^1 du domaine Δ sur le domaine D définie par : $(u, v, w) \rightarrow \varphi(u, v, w) = (x, y, z)$. La formule du changement de variables est :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f \circ \varphi(u, v, w) |J_{\varphi}(u, v, w)| du dv dw$$

$|J_{\varphi}|$ est le déterminant du jacobien définie par : $J_{\varphi} = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta x}{\delta v} & \frac{\delta x}{\delta w} \\ \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta v} & \frac{\delta y}{\delta w} \\ \frac{\delta z}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta v} & \frac{\delta z}{\delta w} \end{vmatrix}$

Ce jacobien ne doit pas s'annuler sur Δ pour que l'application φ soit inversible.

2.11 Les coordonnées cylindriques

Dans \mathbb{R}^3 , les coordonnées cylindriques sont utiles lorsque le problème étudié présente une symétrie autour d'un axe

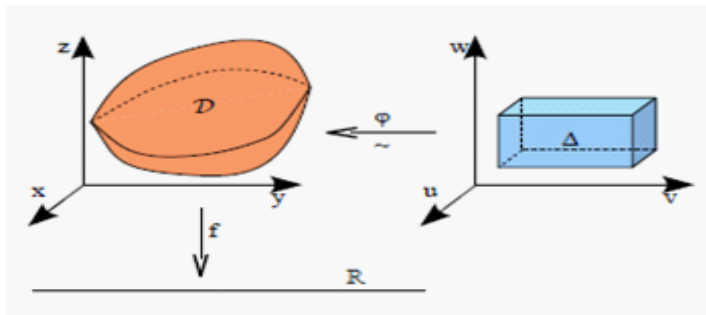


FIG. 2.2 – représente le changement de variable dans une intégrale triple

Proposition 2.11.1 soit Δ une partie de \mathbb{R}^3 telle que : $\Delta = \{(r, \theta, z) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \setminus (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in \mathbb{R}\}$. La région correspondante dans l'espace des r, θ, z et une fonction réelle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que l'intégrale triple $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ existe alors :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

Preuve. On a les variables :
$$\begin{cases} x(r, \theta, z) = r \cos \theta \\ y(r, \theta, z) = r \sin \theta \quad \text{pour } r > 0, \theta \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R} \\ z(r, \theta, z) = z \end{cases}$$
 alors le jacobienne est :

$$J_{\varphi(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta r} & \frac{\delta x}{\delta \theta} & \frac{\delta x}{\delta \varphi} \\ \frac{\delta y}{\delta r} & \frac{\delta y}{\delta \theta} & \frac{\delta y}{\delta \varphi} \\ \frac{\delta z}{\delta r} & \frac{\delta z}{\delta \theta} & \frac{\delta z}{\delta \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = r$$

■

Remarque 2.11.1 $dv = r dr d\theta dz$ est l'élément de volume en **coordonnées cylindrique**.

Exemple 2.11.1 Evaluons l'intégrale triple $\iiint_D z \exp(x^2 + y^2) dx dy dz$. La région Δ correspondant à D dans les coordonnées cylindriques sera $\Delta = \{(r, \theta, z) \setminus 0 \leq r \leq a, \theta \in$

$[0, 2\pi], 0 \leq z \leq h$. Noter que $x^2 + y^2 = (r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 = r^2$. Alors :

$$\begin{aligned}
 \iiint_D z \exp(x^2 + y^2) dx dy dz &= \iiint_{\Delta} z \exp(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 r dr d\theta dz = \iiint_{\Delta} z \exp(r^2) r dr d\theta dz \\
 &= \int_0^h \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^a z \exp(r^2) r dr \right] d\theta \right] dz = \int_0^h \left[\int_0^{2\pi} \frac{z \exp(r^2)}{2} \Big|_0^a d\theta \right] dz \\
 &= \int_0^h \left[\int_0^{2\pi} \left(\frac{z}{2} \exp(a) - \frac{z}{2} \right) d\theta \right] dz = \frac{(\exp(a) - 1)}{2} \int_0^h \left[\int_0^{2\pi} z d\theta \right] dz \\
 &= \frac{(\exp(a) - 1)}{2} \int_0^h \left[\frac{z^2}{2} \Big|_0^{2\pi} \right] dz = \frac{(\exp(a) - 1)}{2} \int_0^h 2\pi^2 dz \\
 &= (\exp(a) - 1) [\pi^2 z \Big|_0^h] = (\exp(a) - 1) \pi^2 h
 \end{aligned}$$

2.12 Les coordonnées sphérique

C'est le principal changement de variables utiles dans les intégrales triples (et un peu partout quand on travaille dans \mathbb{R}^3 , d'ailleurs on a l'application :

$$\varphi : (r, \theta, \varphi) \rightarrow \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}) \\ x(r, \theta, \varphi) = r \cos \theta \cos \varphi \\ y(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi \\ z(r, \theta, \varphi) = r \sin \varphi \end{cases}$$

Finalement on trouve :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \varphi) r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi$$

Preuve. on vérifie le calcul jacobien pour $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a le jacobien :

$$J_{(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta r} & \frac{\delta x}{\delta \theta} & \frac{\delta x}{\delta \varphi} \\ \frac{\delta y}{\delta r} & \frac{\delta y}{\delta \theta} & \frac{\delta y}{\delta \varphi} \\ \frac{\delta z}{\delta r} & \frac{\delta z}{\delta \theta} & \frac{\delta z}{\delta \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r^2 \cos \varphi$$

est un C^1 difféomorphisme en doit outre pour tout $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a :

$$|J_{(r,\theta,\varphi)}| = r^2 \cos \varphi$$

■

Remarque 2.12.1 $dv = r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi$ est l'élément de volume en **coordonnées sphérique**.

Exemple 2.12.1 Evaluons l'intégrale triple $\iiint_D z dx dy dz$. La régions Δ correspondant a D en coordonnées sphérique sera $\Delta = \{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq R\}$

$$\begin{aligned} \iiint_D z dx dy dz &= \iiint_{\Delta} r \sin \varphi \cdot r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^R \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \right] dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^R \left(r^3 \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^R \frac{r^3}{2} dr \right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^4}{8} d\theta \\ &= \frac{R^4 \theta}{8} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16} R^4 \end{aligned}$$

Chapitre 3

Théorie et application en physique

3.1 Physique de semi-conducteur

3.1.1 Semi-conducteur l'équilibre

Théorème de Gausse

Rappels :

- Un matériau **S.C** homogène est neutre en tout point (neutralité électrique locale). Lorsqu'un matériau est non homogène il y a une possibilité d'existence d'un champ électrique **interne** associé à celle d'une densité de charge dans une (zone de charge d'espace "**ZCE**").
- Soit un volume V délimité par une surface fermée S contenant une charge Q le flux du champ électrique sortant s'écrit :

$$\iiint_S \vec{\xi} \cdot \vec{n} ds = \frac{Q}{\epsilon.sc} = \frac{\iiint_V p(\vec{r}) dV}{\epsilon.sc} = \iiint_V \text{div}(\vec{\xi}) dV$$

telle que : $\text{div}(\vec{\xi})$ le champ électrique.

Equation de poisson

L'équation de Poisson établit un rapport entre les variations du potentiel électrostatique ϕ et la densité de charge locale. Cette dernière est la somme des contributions de toutes les charges mobiles et fixes, incluant les électrons, les trous, et les impuretés ionisées.

$$\nabla (\varepsilon_0 \varepsilon_r \nabla \phi) = -q(N_D^+ - N_D^- - n + p)$$

où ε_0 et ε_r sont respectivement la permittivité du vide et la permittivité relative du matériau, q est la valeur absolue de la charge élémentaire de l'électron, $N_D^+ - N_D^-$ est la densité des ions donneurs et accepteurs, n est la densité d'électrons libres, et p est la densité de trous libres. Le champ électrique est obtenu à partir du gradient du potentiel

par la relation :

$$E(x, y, z) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x, y, z)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} dx dy dz$$

telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, y, z) \text{ la masse volumique} \\ 0 \leq x \leq L \\ 0 \leq y \leq L \\ 0 \leq z \leq L \\ \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-14} \\ \varepsilon_r = 13.1 \end{array} \right.$$

Dans le cas de distribution linéaire on suppose que

$$\varphi(x, y, z) = -(N_a \cdot x + N_a \cdot y + N_a \cdot z) + (N_d \cdot x + N_d \cdot y + N_d \cdot z) = N_d(x + y + z) - N_a(x + y + z)$$

3.2 Physique statistique

Généralement, dans l'étude des particules, par exemple (l'électron est la plus petite chose dans la matière, il y a deux type :

1. **Le Fermion**

2. **Le Boson**

La différence entre les deux est la nature de (**SPIN**) c'est une propriété qui caractérise les particules (la masse et la charge). Une des erreurs les plus courantes à propos du **SPIN** est l'électron autour de lui-même (c'est faux avec les physiciens) parce que l'électron tourne autour de noyau et autour de lui cette rotation ce que n'appelle le **SPIN**. Et ça peut être un nombre réel 0, 1, 2, ..., ou nombre demi-réel $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

Définition 3.2.1 (*Les Fermions*)

Si le **SPIN** est demi-réel. Par exemple, l'électron qui a un spin égal à $\frac{1}{2}$. Les Fermion utilisent une distribution **Fermi-Dirac** ce qui à la fin, nous obtenons l'intégration de **Fermi-Dirac**. Pour trouver le nombre de **Fermion** on donne la formule suivante :

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g.v \frac{1}{h^3 \exp\left(\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mk_B T} - \frac{E_F}{k_B T}\right) + 1} dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z$$

telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} p = m.v \\ p : \text{la quantité de mouvement dans les directions } (\vec{ox}), (\vec{oy}), (\vec{oz}) \\ E_F : \text{l'énergie de } \mathbf{Fermi-Dirac} \text{ (constante)} \\ m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ Kg la masse de l'électron.} \\ k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ (constante de } \mathbf{Boltzman}) \\ T = 300\text{K (degré de température de } \mathbf{Kelven}). \\ h : \text{constant de Planck} \\ g = 2s + 1 : \text{le facteur de dégénérescence (s est } \mathbf{SPIN}). \end{array} \right.$$

Et encore on définit l'énergie de fermion par :

$$U = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} \cdot g \cdot v \cdot \frac{1}{h^3 \exp\left(\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mk_B T} - \frac{E_F}{k_B T}\right) + 1} dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z$$

Définition 3.2.2 (Les Bosons)

Si le **SPIN** est un nombre réel par exemple $s = 1$ pour photon (particule de la lumière). les Bosons utilisent une distribution **Bose-Einstein** dans ce dernière nous trouvons l'intégration **Bose-Einstein**. Pour trouver le nombre de Bosons en volume v on définit la formule suivante par :

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g \cdot v \cdot \frac{1}{h^3 \exp\left(\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mk_B T} - \frac{E_F}{k_B T}\right) - 1} dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z$$

Et ainsi nous pouvons trouver l'énergie totale par suite :

$$U = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} \cdot g \cdot v \cdot \frac{1}{h^3 \exp\left(\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mk_B T} - \frac{E_F}{k_B T}\right) - 1} dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z$$

Remarque 3.2.1 En résumé, chaque intégration appartient à un type particulier

Intégrale de **Fermi-Dirac** intéresse les Fermions exemple (l'électron).

Intégrale de **Bose-Einstein** intéresse les Bosons exemple (photon).

Remarque 3.2.2 La plupart des intégrales en physique n'ont pas de solution. Les intégrations sont résolues avec une série d'approximations alors l'intégrale. Un modèle d'équations qui n'ont pas de solution pour calcule cette intégrale on suppose :

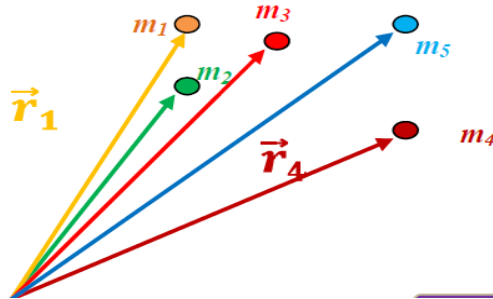
$$\frac{1}{\exp\left(\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mk_B T} - \frac{E_F}{k_B T}\right) + 1} \simeq \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mk_B T} + \frac{E_F}{k_B T}\right)$$

3.3 Masse. Centre de masse. Barycentre

3.3.1 Centre de masse : barycentre

Soit N point matériels de masse m_1, m_2, \dots, m_N .

Soit $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N$ les vecteurs positions (rayons vecteurs)



Alors le centre de masse du système est le point G telle que :

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

$$\sum_{i=1}^N m_i = m_{tot} \text{ (masse totale).}$$

- Si la répartition de masse est **continue**, les masses m_i devient dm et on obtient :

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \Rightarrow \vec{OG} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

- Si répartition de masse est **volumique** :

$$\mu = \frac{dm}{dv} \Rightarrow dm = \mu \cdot dv$$

$$\vec{OG} = \frac{\int \vec{r} dm}{dm} = \frac{\int \vec{r} \mu dv}{\int \mu dv}$$

Ou $M = \int \mu \cdot dv$ représente la masse totale du système.

- Si la répartition de la masse est **homogène**, sa masse volumique μ est alors constante.

$$\vec{OG} = \frac{\int \vec{r} dv}{\int dv} = \frac{\iiint \vec{r} dv}{\iiint dv}$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} dv = dx dy dz \text{ (cartésien)} \\ dv = r dr d\theta dz \text{ (cylindrique)} \\ dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \text{ (sphérique)} \end{array} \right.$$

ou $\iiint dv$ représente le volume total du système.

- Si la répartition de masse est surfacique :

$$\sigma = \frac{dm}{ds} \Rightarrow dm = \sigma \cdot ds$$

$$\vec{OG} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \sigma \cdot ds}{\int \sigma \cdot ds}$$

$M = \int \sigma \cdot ds$ représente la masse totale du système.

- Si la répartition de la masse est **homogène**, sa masse surfacique σ est alors constante.

$$\vec{OG} = \frac{\int \vec{r} ds}{\int ds} = \frac{\iint \vec{r} ds}{\iint ds}$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} ds = dx dy \text{ (cartésien)} \\ ds = r dr d\theta \text{ (cylindrique)} \\ ds = r \sin \theta dr d\theta \text{ (sphérique)} \end{array} \right.$
 $\iint ds$ représente la surface totale du système.

- Si la répartition de masse est linéique :

$$\lambda = \frac{dm}{dl} \Rightarrow dm = \lambda \cdot dl$$

$$\vec{OG} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \lambda \cdot dl}{\int \lambda \cdot dl}$$

$M = \int \lambda \cdot dl$ représente la masse totale du système.

- Si la répartition de la masse est **homogène**, sa masse linéique λ est alors constante.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int \vec{r} dl}{\int dl}$$

$\int dl$ représente la longueur totale du système.

Exemple 3.3.1 On va déterminer le centre de masse G d'un demi disque circulaire de rayon a , on appellera σ la masse surfacique du demi disque que l'on supposera constante.

On utilise les coordonnées cylindriques pour calculer cette solution alors :

Elément de surface $ds = r dr d\theta$

G : barycentre (ou centre de masse ou centre d'inertie)

Écrire la formule donnant le barycentre pour une répartition surfacique : c'est un demi-disque

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\iint \vec{r} ds}{\iint ds}$$

Calculons l'intégrale se trouvant au numérateur. Il y a un vecteur qu'il faut exprimer dans une base fixe pour faciliter les calculs. Vecteur position :

$$\vec{r} = r \cos(\theta) \vec{u}_x + r \sin(\theta) \vec{u}_y$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{\iint (r \cos(\theta) \vec{u}_x + r \sin(\theta) \vec{u}_y) r dr d\theta}{\iint r dr d\theta} \\ &= \frac{\iint r \cos(\theta) \vec{u}_x r dr d\theta + \iint r \sin(\theta) \vec{u}_y r dr d\theta}{\iint r dr d\theta} \end{aligned}$$

Il faut maintenant préciser les bornes d'intégration afin de décrire toute la surface du

demi-disque r varie entre 0 et a et θ varie entre 0 et π , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{\int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \cos(\theta) d\theta \cdot \vec{u}_x + \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \cdot \vec{u}_y}{\int_0^a r dr \int_0^\pi d\theta} \\ \overrightarrow{OG} &= \frac{\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a [\sin(\theta)]_0^\pi \cdot \vec{u}_x + \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a [-\cos(\theta)]_0^\pi \cdot \vec{u}_y}{\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a [\theta]_0^\pi} \\ \overrightarrow{OG} &= \frac{4a}{3\pi} \vec{u}_y \end{aligned}$$

3.4 Physique classique

3.4.1 Centre d'inertie d'un corps

On a :

$$I = \frac{\sum r_i^2 m_i}{\sum m_i} \Rightarrow \frac{\iiint r^2 \varphi dv}{\iiint \varphi dv}$$

$$\text{telle que : } \begin{cases} \varphi : \text{ la masse volumique} \\ r : \text{ constante (rayon de cylindre)} \\ dv = dx dy dz \end{cases}$$

Exemple 3.4.1 On utilise le coordonnée cylindrique pour calculer l'équation le centre

$$d'inertie d'un corps : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \\ z = z \end{cases}, \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^R r^2 \cdot r dr dz d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^R r dr dz d\theta} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^R r^3 dr dz d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^R r dr dz d\theta} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R dz d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R dz d\theta} = \frac{\int_0^{2\pi} \left[\frac{R^4}{4} z \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} d\theta}{\int_0^{2\pi} \left[\frac{R^2}{2} z \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} d\theta} \\ & = \frac{\frac{2}{8} \int_0^{2\pi} R^4 h \cdot d\theta}{\frac{2}{4} \int_0^{2\pi} R^2 h \cdot d\theta} = \frac{\frac{2}{8} [R^4 \cdot h \cdot 2\pi]}{\frac{2}{4} [R^2 \cdot h \cdot 2\pi]} = \frac{R^2}{2} \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] Cottet-Emard, F.(2006). Analyse 2 : Calcul différentiel, intégrales multiples, séries de Fourier (*Vol.2*). De Boeck Supérieur.
- [2] Francis PÈCASTAINGS et Jacky SEVIN. LibrairieVuibert, septembre (1985). Chemins vers l'analyse tome 2, exercices avec solutions et rappels de cours pour les classes préparatoires et le premier cycle universitaire. 63, bd St-Germain, 75005 Paris.
- [3] Vincent Borrelli. Samedi 18 mars (2017). Intégrale multiple. Université de Lyon
- [4] Jean-François Burnol. 27 novembre (2014) . Convergence des sommes de Darboux et de Riemann.
- [5] Alain Prout. Intégrale Simple. La version la plus récente peut être téléchargée à partir de : <http://www.math.jussieu.fr>. Université Denis Diderot — Paris 7.
- [6] J.YAMEOGO. Résumé des seance du 24 et du 31 mars(2010).
- [7] HADJI Djamel. Le 8 juillet (1999). MODELISATION ET SIMULATION TRIDIMENSIONNELLE DES COMPOSANTS A SEMICONDUCTEUR DE TAILLEC SUBMICRONIQUE. Institut National Poly-technique de Grenoble-INPG, 1999. Français.
- [8] Chovet, A., & Masson, P. (2004). Physique des Semi-conducteurs. Cours de l'école polytechnique universitaire de Marseille.
- [9] M. BOUGUECHAL. (2010 – 2011) .Cour physique **I**.

- [10] Pascal SIMON. 15 janvier (2010). Théorie statistique des champs ou quelques applications de l'intégrale fonctionnelle.
- [11] Khelladi, A. Introduction à l'analyse mathématique.
- [12] Ngô, C., & Ngô, H. (2008). Physique statistique-3ème édition. Dunod.