République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Gossa Mohamed Laid

Titre :

Fonction Convexe et leur Application

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Bellagoun Abdelghani	UMKB	Président
Dr.	Berbiche Mohamed	UMKB	Encadreur
Dr.	Bou Zian Nadjate	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédice ce mémoire aux personnes qui ont contribué de proche ou de loin à la rélisation de ce modeste travail.

A la mémoire de mon pére qui m'a inculqué l'amour de la science et du savoir dés mon jeune âge.

A la mémoire de ma mére qui a veillé sur le travail de mon pére et qui m'a longuement encourager pour poursuivre mes nouvelles études supérieures

A ma femme qui m'a soutenu tout au long de ce projet.

A la lumiéres de mes jours,la source de mes efforts la flamme de mon coeur, ma vie et mon bonheur,mon fis unique oussama,mes filles Messaouda,Nour el imane et Douaa

A mes fréres et surtout l'ainé Abderrazak qui m'étais le deuxiéme pére , l'homme de ma vie.

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encourager,qui étaient toujours à mes cotés et qui m'ont accompagné durant mon chemin d'études supérieur,mes aimables amis, colléque d'étude et tous les profsseurs de maths.

REMERCIEMENTS

Aprés avoir rendu grâce à Dieu le tout puissant et le Miséridieux de m'avoir donné la volonté la santé et le courage d'entamer de nouvelles étude universitaires et de pouvoir les reussir.

Ce travail est l'aboutissement d'un long cheminement au cours duquel j'ai bénificié l'encadrement , des encouragements et de soutien de plusieurs personnes,à qui je tiens à dire profondément et sincèrement mèrci .

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements et ma grande gratitude à mon professeur le Docteur Berbiche Mohamed et mon camarade le Docteur Menacer Tidjani de leurs prècieux conseils et leurs orientations et d'avoir dirigè ce avec leurs grandes qualitès tant sur le plan humain que scientifique,ainsi pour leurs patiences jusqu' à l'achévement de ce travail

Je tiens à remercie ègalement les menbres du jury distingué :

"Bellagoun Abdelghani"

"Bou Zian Nadjate".

Mes remerciements s'adressent spécialement à mon étudiante et nouvelle proffesseure du math Témacini nesrine qui m'a fait beaucoup plaisir.

J'aimerais aussi grafier les efforts de mes collégues du département de math en particulier Adib Hammouda, Ilias Alloui et Sami Benaissa

En fin, j'adresse mes plus sincéres remerciement à tous qui m'ont toujours encouragé et contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce travail

Table des matières

Table des figures

Introduction

La convexité des ensembles et la convexité et la concavité des fonctions ont fait l'objet de nombreuses études au cours des cent dernières années. Les premières contributions à l'analyse convexe ont été faites par Holder (1889), Jensen (1906), et Minkowski (1910, 1911). L'importance des fonctions convexes est bien connue dans les problèmes d'optimisation. Les fonctions convexes apparaissent dans de nombreux modèles mathématiques utilisés en économie, en ingénierie, etc. Plus souvent, la convexité n'apparaît pas comme une propriété naturelle des diverses fonctions et domaines rencontrés dans de tels modèles. La propriété de convexité est invariante par rapport à certaines opérations et transformations.

La convexité est l'une des hypothèses les plus fréquemment utilisées dans la théorie de l'optimisation. Il est généralement introduit pour donner une validité globale aux propositions autrement seulement localement vraie, par exemple, un minimum local est également un minimum global pour une fonction convexe.

De plus, la convexité est également utilisée pour obtenir une suffisance pour les conditions qui sont seulement nécessaire, comme avec le théorème de Fermat classique ou avec les conditions dans programmation non linéaire. En microéconomie, la convexité joue un rôle fondamental dans théorie de l'équilibre général et théorie de la dualité.

Cependant, pour de nombreux problèmes rencontrés en économie et en ingénierie la notion de convexité ne suffit plus. Par conséquent, il est nécessaire d'étendre la notion de convexité aux notions de pseudo-convexité, de quasi-convexité, etc. devrait mentionner les premiers travaux de de Fenchel (1953), D'autre part, l'analyse moderne implique directement ou indirectement les applications de convexité. En raison de ses applications et de son importance Le concept de convexité a été étendu et généralisé dans plusieurs directions. Le concept de convexité et ses variantes ont joué un rôle fondamental dans le développement de divers domaines. Les fonctions convexes sont des outils puissants pour prouvant une grande classe d'inégalités. Ils fournissent un traitement élégant et unifié des inégalités classiques les plus importantes. Il existe de nombreux résultats associés aux fonctions convexes dans le domaine d'inégalités, dont deux sont : l'inégalité de Jensen et l'Hermite-Hadamard l'inégalité, qui se produisent largement dans la littérature mathématique.

L'inégalité de Jensen est parfois appelée le roi des inégalités, car il implique toute la série d'autres inégalités classiques (par exemple celles de Holder, Minkowski, et Young, la moyenne arithmétique-géométrique inégalité, etc.). L'inégalité de Jensen pour les fonctions convexes est probablement l'un des les inégalités les plus importantes qui sont largement utilisées dans presque tous les domaines de mathématiques, en particulier en analyse mathématique et statistiques. Pour un complet l'inspection des résultats classiques et récents liés à cette inégalité le lecteur est référé à [,].

Il est bien connu que l'une des inégalités les plus fondamentales et les plus intéressantes pour les fonctions convexes classiques est celle associée au nom de Hermite Hadamard l'inégalité qui fournit une estimation inférieure et supérieure pour la moyenne intégrale de toutes les fonctions convexes définies sur un intervalle compact, impliquant le point médian et les points d'extrémité du domaine. Cette inégalité a plusieurs applications dans l'analyse non linéaire et la géométrie d'Espaces de Banach.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres

Dans le premier chapitre, nous rappelons des notions très importantes de l'analyse concernant les ensembles convexes. Nous donnons les principales propriétés des fonctions convexes abordons ensuite la notion semi continuité superieure et inferieure, on termine ce chapitre par quelques rappels sur les fonctions differentiables sur $\mathbb{R}^n$.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des fonctions convexes réelles ainsi que leur propriétés. Notamment les inégalités connues sous les noms d'inégalité de convexité et d'inégalité de convexité stricte.

Des définitions s'appliquent à des fonctions qui ne sont pas forcément dérivables. Dans le cas où la fonction est dérivable ou mieux admet une dérivée seconde, nous verrons que l'on peut trouver des caractérisations plus simples des fonctions convexes et une condition suffisante de convexité stricte.

Dans le troisième chapitre, nous abordons la notion de fonctions convexes multidimensionnelles. Nous étudions ses propriétés en plusieurs niveaux. On examine les propriétés de semi-continuité, de continuité puis de dérivabilité. Pour aborder des fonctions non-lisses, nous introduisons le concept de sous-différentiel. **Dans le quatrième chapitre,** nous étudions les applications des fonctions convexes pour démontrer les inégalités de Hölder, Minkowski et d'Hermite-Hadmard et aussi pour le calcule aproché de l'integrale d'une fonction convexe.

Chapitre 1

Notation et Définition Préliminaire

1.1 Segment

Définition 1.1.1 *Soient A et B deux points d'un K espace vectoriel E. On appelle segment (AB) l'enssemble de tout les barycentre du système $\{A(\alpha), B(\beta)\}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ et $\alpha + \beta \neq 0$*

$$\begin{aligned} AB &= \left\{G \in \mathbb{E} \ / \ \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \ et \ \alpha + \beta \neq 0\right\} \\ &= \left\{G \in \mathbb{E} \ / \ \overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{OB}\right\} \\ &= \{G \in \mathbb{E}/\overrightarrow{OG} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB} \ avec \ \lambda = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

1.2 Partie convexe

Définition 1.2.1 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{E}$, $K-$espace vectoriel.*
On dit que A est convexe, si et seulement si, pour tout $(x, y) \in A^2, \forall\lambda \in [0, 1]$:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$$

Exemple 1.2.1 *1. $B(x, r)$ et $\overline{B}(x, r)$ dans un espace normé sont convexes.*

2. *Chaque interval I de $\mathbb{R}$ est convexe.*

3. *L'image d'un convexe par une application lineaire est convexe.*

4. *L'intersection $\underset{i\in I}{\cap} k_i$ d'une famille quelconque $(k_i)_{i\in I}$ de convexe est convexe.*

5. *Le produit cartesien de deux convexes est convexe.*

1.3 Epighraphe d'une fonction

Définition 1.3.1 *L'épigraphe d'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ noté $epi(f)$ est l'enssemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :*

$$epi(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} / z \geq f(x) \right\}$$

L'ensemble de niveau α est l'ensemble des x de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = \alpha$ que l'on noté N_α

$$N_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) = \alpha\}$$

La section associe a l'enssemble de nineau α notée S_α est

$$S_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \leq \alpha\}$$

Cas particulier :si f une fonction definie sur un interval I de R à valeurs dans R, On appelle l'épigraphe de f l'enssemble ξ telque

$$\xi = epi\,(f) = \{(x, y) \in I \times R \; / y \geq f(x)\}\,.$$

1.4 Fonction pente en x_0

Définition 1.4.1 *Soit f une fonction définie sur un interval I de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On appelle fonction pente en $x_0 \in I$, la fonction φ_{x_0} définie sur $I - \{x_0\}$ par :*

$$\varphi_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

1.5 Limite à droite et limite à gauche

Définition 1.5.1 *Soit I un interval de $\mathbb{R}\cdot$*

1. *Toute fonction monotone sur I possède en chaque point de I une limite à droite et une limite à gauche finies.*
2. *On pose $a = \inf I$, $b = \sup I$ et f fonction définie et monotone sur $I - \{x_0\}$ où $x_0 \in \mathbb{R}$*

   si $a < x_0 < b$ alors f possède en x_0 une limite à droite et une limite à gauche finie.

   si f est croissante alors

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) \leq \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x)$$

   si f est décroissante alors

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) \leq \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x)$$

3. *si $x_0 = a$ alors f possède en x_0 une limite à droite finie ou infinie.*

si $x_0 = b$ alors f possède en x_0 une limite à gauche finie ou infinie.

1.6 Fonction semi-continue infèrieurement

Définition 1.6.1 *Soit C un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f fontion de C dans $\mathbb{R}$. On dit que f est semi continue infèrieurement en $x \in C$ si pour toute suite $\{x_k\} \subset C$ convergent vers x,on* *a*

$$\liminf f(x_k) \geq f(x).$$

1.7 Fonction différentiable dans $\mathbb{R}^n$

Définition 1.7.1 *Soit $f : C \to \mathbb{R}$ où C est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ la dérivée directionnelle de f en $x \in C$ dans la direction $d \in \mathbb{R}^n$ est définie par la limite quand elle existe de*

$$f^{'}(x,d) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$$

La fonction f sera dite différentiable en $x \in C$ si elle possède des dérivées directionnelles dans toutes les directions et si $f^{'}$ est linéaire par rapport à d c.a.d s'il existe un vecteur $\nabla f(x)$ appelé le gradient de f en x tel que

$$f^{'}(x,d) = \langle \nabla f(x), d \rangle$$

Chapitre 2

Fonction Convexe d'une Seul Variable

2.1 Définition d'une fonction convexe

Définition 2.1.1 *Soit I un interval $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.*

On dit que f est convexe sur I si et seulement si l'épigraphe de f est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

On dit que f est concave sur I si et seulement si la fonction $(-f)$ est convexe sur I.

Théorème 2.1.1 *Soit f une fonction sur I de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.*

1. *f est convexe sur I, si et seulement si, $\forall(x_1, x_2) \in I^2$, $\forall\lambda \in [0, 1]$:*

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

2. *f est concave sur I, si et seulement si, $\forall(x_1, x_2) \in I^2, \forall\lambda \in [0, 1]$:*

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Preuve.

a) Supposons que f est convexe sur I

D'aprés la définition (2.1.1), ξ l'épigraphe de f est convexe·

Soient $(x_1, x_2) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$:

donc les points $A_1(x_1, f(x_1)), A_2(x_2, f(x_2))$ sont des points de ξ, alors le segment $[A_1A_2]$ est contenu dans ξ et en particulier le point $(1-\lambda)A_1 + \lambda A_2 \in \xi$

d'où

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

b) Supposons maintenant que$\forall(x_1, x_2) \in I^2, \forall\lambda \in [0, 1]$:

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

Montrons que ξ est un convexe de $\mathbb{R}^2$. Soient 2 points $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2)$ de ξ et $\lambda \in [0, 1]$ soit $M = (1-\lambda)A_1 + \lambda A_2$ et posons $M(x, y)$, alors d'où $y \geq f(x)$ c.a.d M est un point de ξ donc ξ est convexe.

1. f est concave sur I

$$\Longleftrightarrow (-f)\text{est convexe sur } I$$
$$\Longleftrightarrow \forall(x_1, x_2) \in I^2, \forall\lambda \in [0, 1] \ :$$
$$(-f)((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)(-f(x_1)) + \lambda(-f(x_2))$$
$$\Longleftrightarrow \forall(x_1, x_2) \in I^2, \forall\lambda \in [0, 1] :$$
$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

■

Théorème 2.1.2 *(Inégalité de Jensen) Soit f une fonction définie sur un interval I de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.*

f est convexe sur I, si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n, \forall \lambda_i \in [0,1]^n \ \textit{tel que} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Remarque 2.1.1 *Pour démontrer ce théorème on applique la démonstration par récurrence en utilisant le théorème précédent.*

Théorème 2.1.3 *Soit f une fonction définie sur un interval I de $\mathbb{R}$.*

1. *f est convexe sur I si et seulement si la fonction pente en x_0 est croissante sur $I - \{x_0\}$.*
2. *f est strictement convexe sur I si et seulement si la fonction pente en x_0 est strictement croissante sur $I - \{x_0\}$.*

Preuve.

1. $\Leftarrow$Supposons que pour tout x_0 de I,φ_{x_0} est croissante sur $I - \{x_0\}$

   Montrons que f est convexe sur I

   Soient $(x_1, x_2) \in I^2$ tel que $x_1 < x_2$ et $\lambda \in]0, 1[$,on a donc :

$$x_1 < (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 < x_2$$

   alors :

$$\varphi_{x_1}((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq \varphi_{x_1}(x_2)$$

   car φ_{x_1} est croissante sur $I - \{x_1\}$

$$\Longrightarrow \frac{f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) - f(x_1)}{((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
$$\Rightarrow \frac{f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) - f(x_1)}{\lambda(x_2 - x_1)} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
$$\Longrightarrow f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) - f(x_1) \leq \lambda f(x_2) - \lambda f(x_1)$$

   d'ou $\quad f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$

Cette inégalité reste claire quand $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ ou $x_1 = x_2$ donc f est convexe sur I.Si pour tout x_0 de I la fonction φ_{x_0} est strictement croissante sur $I - \{x_0\}$ et par la même méthode précédente en remplace les inégalités large par des inégalités strictes et on obtient que f est strictement convexe sur I

$\Rightarrow$Soit maintenant f fonction convexe sur I. Montrons que φ_{x_0} est croissante sur $I - \{x_0\}$.

Soient x_0, x_1, et $x_2 \in I$ tels que $x_0 < x_1 < x_2$ et posons$\lambda = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} \in]0, 1[$ donc $x_1 = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_2$

$$f(x_1) = f((1 - \lambda)x_0 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_0) + \lambda f(x_2)$$

car f convexe

$$\begin{aligned}
f(x_1) = f((1 - \lambda)x_0 + \lambda x_2) &\leq (1 - \lambda)f(x_0) + \lambda f(x_2) \\
\Rightarrow f(x_1) &\leq \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0} f(x_0) + \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} f(x_2) \\
\Rightarrow f(x_1) - f(x_0) &\leq \frac{-x_1 + x_0}{x_2 - x_0} f(x_0) + \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} f(x_2) \\
\Rightarrow f(x_1) - f(x_0) &\leq \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} (f(x_2) - f(x_0)) \\
\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} &\leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \\
\Rightarrow \varphi_{x_0}(x_1) &\leq \varphi_{x_0}(x_2)
\end{aligned}$$

alors φ_{x_0}est croissante dans le cas $x_0 < x_1 < x_2$ et par la même méthode φ_{x_0}est croissante dans le cas $x_1 < x_2 < x_0$.

2. On utilise la même méthode précédente en remplacant les inégalités large par des inégalités strictes.

■

2.2 Propriétées des fonctions convexes

Propriété 2.2.1 *Soit I un interval de $\mathbb{R}$ et f application de I dans $\mathbb{R}$.*

f est convexe sur I si et seulement si pour tout A, B du courbe représentative l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est au_ dessous de la segment $[AB]$.

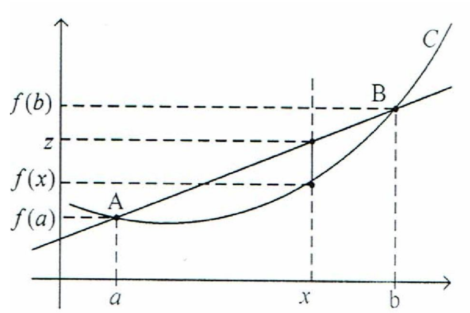

FIG. 2.1 – courbe d'une fonction convexe

Propriété 2.2.2 *Si f est convexe sur I alors I est réunion de trois sous intervalles, consucutifs tel que f est strictement décroissante sur le premier ,constante sur le deuxième et strictement croissante sur le troisième*

Remarque 2.2.1 *L'un des trois intervalles peut être vide.*

Propriété 2.2.3 **i)** *Si f_1 et f_2 deux fonctions convexes telles que :$f_1+ f_2$ est convexe*

ii) $\alpha\ f_1$*est convexe* $\forall \alpha \geq 0$

iii) $\sup\{f_1, f_2\}$ *est convexe*

Propriété 2.2.4 *Soit f une fonction convexe strictement monotone sur un interval ouvert I, alors la fonction f^{-1} est :*

1. *convexe sur $f(I)$ si f est strictement décroissante*
2. *convace sur $f(I)$ si f est strictement croissante*

Preuve. Soit f une fonction sur I

1. supposons que f est strictement décroissante d'aprés le théorème (2.1.3), la fonction pente en x_0 est croissante alors f est continue sur I. Par conséquent f admet une application invèrse f^{-1}. Pour $a, b \in I, \exists! c, d \in f(I) / \; \{c = f(a)$ et $d = f(b)\} \Longleftrightarrow \{a = f^{-1}(c)$ et $b = f^{-1}(d)\}$

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \,]0,1[\;\; & f(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \\ & \Longrightarrow f^{-1}(\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)) \leq f^{-1}(f(\lambda a + (1-\lambda) b)) \\ & \Longrightarrow f^{-1}(\lambda c + (1-\lambda) d) \leq \lambda f^{-1}(c) + (1-\lambda) f^{-1}(d) \end{aligned}$$

ce qui montre que f^{-1} est convexe sur $f(I)\cdot$

2. Si f est strictement croissante alors $(-f)$ est strictement décroissante sur I et on a aussi $(-f)$ est continue sur I donc il existe $(-f)^{-1}$ invèrse de $(-f)$ d'où $(-f)^{-1}$ est convexe c.a.d f^{-1} est concave sur $f(I)$.

■

Propriété 2.2.5 *Soient I, J deux intervalles ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow J$ fonction convexe Pour tout $g : J \rightarrow \mathbb{R}$*

1) *si g est convexe et croissante alors $g \circ f$ est convexe sur I.*

2) *si g est concave et décroissante alors $g \circ f$ est concave sur I.*

Preuve.

1) Supposons g est convexe et croissante soient $a, b \in I$ et $\lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \text{ , } (car \;\, f \;\, est \;\, convexe)$$
$$g(f(\lambda a + (1-\lambda) b)) \leq g(\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)) \text{ , } (car \;\, g \;\, est \;\, croissante)$$
$$g \circ f(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \lambda g \circ f(a) + (1-\lambda) g \circ f(b) \text{ , } (car \;\, g \;\, est \;\, convexe)$$

donc $g \circ f$ est convexe sur I.

2) Si g est concave et décroissante $\Longrightarrow$ $(-g)$ est convexe et croissante sur J donc $(-g)\circ f$ est convexe c.a.d $g \circ f$ est concave.

■

Propriété 2.2.6 *Si une fonction $k : I \to [0, +\infty[$ est logarithmique convexe (c'est à dire*

$\ln \circ k$

convexe) alors k est convexe.

Preuve. On a $I \overset{k}{\to} [0, +\infty[\overset{\ln}{\to} \mathbb{R}$ on pose $f = \ln \circ k : I \to \mathbb{R}$ est convexe, on a aussi $g = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante et convexe d'aprés la propriété précédente $g \circ f$ estconvexe

$$g \circ f(x) = \exp(\ln(k(x)) = k(x)$$

donc k est convexe sur I. ■

2.2.1 Fonctions convexes dérivables

Théorème 2.2.1 *Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$*

1) *la fonction dérivée à gauche f_g' est continue à gauche en x_0 et la fonction dérivée à droite f_d' est continue à droite en x_0*

2) *la fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f_g' ou f_d' est continue en x_0*

3) *l'enssemble des points de I où f n'est pas dérivable est fini ou dénombrable, si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

Preuve.

1) Soient x et y dans I tels que $y < x < x_0$ on a :

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq f_g'(x) \leq f_d'(x_0)$$

par passage à la limite lorsque x tend vers x_0 par valeurs infèrieurs on obtient :

$$\frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y} \leq l \leq f^{'}(x_0)$$

où l est la limite à gauche de $f_g^{'}$ en x_0 (qui existe car $f_g^{'}$ est continue), si y tend vers x_0 par valeurs infèrieurs on a $f_g^{'}(x_0) \leq l \leq f_g^{'}(x_0)$ d'où $l = f_g^{'}(x_0)$ donc la continuité de $f_g^{'}$ à gauche en x_0 et par même méthode on fait la démenstration pour la dérivée à droite.

2) Supposons par exemple $f_d^{'}$ continue en x_0 et soit $x \in I$, telque $x < x_0$, on a

$$f_d^{'}(x) \leq f_g^{'}(x_0) \leq f_d^{'}(x_0),$$

d'où en passant à la limite quand x tend vers x_0 par valeurs infèrieures ,on obtient $f_d^{'}(x_0) = f_g^{'}(x_0)$, f est donc dérivable en x_0.

Supposons maintenant f dérivable en x_0 et soit $x \in I, x < x_0$ on a :

$$f_g^{'}(x) \leq f_d^{'}(x) \leq f_d^{'}(x_0) = f_g^{'}(x_0)$$

La fonction $f_g^{'}$ étant continue à gauche de x_0

$$\lim_{x \overset{\leq}{\rightarrow} x_0} f_g^{'}(x) = \lim_{x \overset{\leq}{\rightarrow} x_0} f_d^{'}(x) = f_d^{'}(x_0)$$

d'où la continuité de $f_d^{'}$ à gauche en x_0

3) Les points de I où f n'est pas dérivable sont les point de discontinuité de la fonction monotone $f_g^{'}$, il n'y en a donc qu'un nombre fini ou une infinité dénombrable.

4) L'application $x \rightarrow f'(x)$ est la restriction de l'application $x \rightarrow f_g^{'}(x)$ à l'enssemble des points où cette fonction est continue, elle est donc elle même continue (mais elle n'est pas en général définie sur un intervalle).

■

Proposition 2.2.1 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

a) *La fonction f est convexe sur I.*

b) *Pour tout $(x, a) \in I^2$ $\quad f(x) \geq (x-a)f^{'}(a) + f(a)$.*

c) *La fonction $f^{'}$ est croissante sur I.*

Preuve.

a) $a) \Longrightarrow b)$ La fonction f étant dérivable $\forall a \in I$, $f^{'}(a) = f^{'}_{g}(a) = f^{'}_{d}(a)$. Pour $x < a$ et d'aprés la proposition précédente

$$f^{'}_{d}(x) \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq f^{'}_{g}(x)$$
$$\Longrightarrow f(x) \geq (x-a)f^{'}(a) + f(a)$$

b) $b) \Rightarrow c)$ $\forall x \in I, \forall y \in I \qquad f(y) \geq f(x) + (y-x)f^{'}(x)$ et $f(x) \geq f(y) + (x-y)f^{'}(y)$ d'ou

$$f^{'}(x)(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq f^{'}(y)(y-x)$$

et donc

$$(y-x)(f^{'}(y) - f^{'}(x)) \geq 0$$

$\Rightarrow f^{'}$ est croissante.

c) $c) \Rightarrow a)$ Soit x et y , $x < y$ deux éléments de I. Considérons l'application $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(\lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

$g(\lambda)$ est la distance entre le point $(\lambda x + (1-\lambda)y, f(\lambda x + (1-\lambda)y))$ et le point de même abscisse situé sur la droite passant par $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$. La fonction f est convexe sur $[x, y]$ si et seulement si pour tout $\lambda \in [0,1], g(\lambda) \geq 0$. La fonction g vérifie les hypothèses du théorème due rolle sur $[0,1]$, il existe donc $\lambda_0 \in [0,1]$ tel que $g^{'}(\lambda_0) = 0$. On a $g^{'}(\lambda) = f(x) - f(y) + (y-x)f^{'}(\lambda x + (1-\lambda)y))$. L'application $\lambda \to \lambda x + (1-\lambda)y$ étant décroissante La fonction $f^{'}$ étant par hypothèse croissante d'où $\lambda \to f^{'}(\lambda x + (1-\lambda)y)$ est décroissante On a $g(\lambda) > 0$, si $\lambda \in [0, \lambda_0]$ $g(\lambda) > 0$ si, $\lambda \in [\lambda_0, 1]$ d'où g est est croissante sur $[0, \lambda_0]$ et décroissante sur $[\lambda_0, 1]$ comme $g(0) = g(1) = 0$ la fonction g est positive sur $[0,1]$ et donc f est convexe sur I

■

Théorème 2.2.2 *Soit une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.*

1) *la fonction f est strictement convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur cet intervalle I.*

2) *la fonction f est strictement convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur cet intervalle et si $\left\{x \in I / f^{''} = 0\right\}$ ne contient aucun intervalle ouvert non vide.*

Preuve. On sait qu'une fonction dérivable sur un intervalle I et croissante (respectivement strictement croissante) sur I si et seulement si sa fonction dérivée est positivee (respectivement positive) et ne s'anulle pas dans un intervalle ouvert et non vide. En fin f est convexe sur $I \Longleftrightarrow f^{'}$ est croissante sur $I \Leftrightarrow f^{''}$ est positive sur I ■

2.3 Etude de convexité de quelque fonctions usuelles

Fonction	convexité sur	I
x^2	convexe	$\mathbb{R}$
x^3	convexe	$[0, +\infty[$
x^3	concave	$]-\infty, 0]$
$\frac{1}{x}$	convexe	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	concave	$]-\infty, 0[$
e^x	convexe	$\mathbb{R}$
$\ln x$	concave	$]0, +\infty[$
$\sin x$	convexe	$[0, \pi]$
$\sin x$	convexe	$[\pi, 2\pi]$
$\cos x$	convexe	$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$
$\sqrt{x}$	concave	$[0, +\infty[$
$x^n(n \in \mathbb{N})$	convexe	$\mathbb{R}$,si n paire
$x^n(n \in \mathbb{N})$	convexe	$[0, +\infty[$, si n impaire
$x^n(n \in \mathbb{N})$	concave	$]-\infty, 0]$

Chapitre 3

Fonction convexe de plusieur variables

Dans ce chapitre on va étudier la convexité des fonctions de n variables $(n \geq 2)$ qu'est prolongement de la convexité des fonctions d'une seule variable

3.1 Définitions

Soit S un enssemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, et soit la fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$

3.1.1 Fonction convexe

On dit que f est convexe sur S si :

$\forall (x_1, x_2) \in S^2, \forall \lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

3.1.2 Fonction strictement convexe

On dit que f est strictement convexe sur S si :

$\forall(x_1, x_2) \in S^2$, avec $(x_1 \neq x_2), \forall\lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

3.1.3 Fonction fortement convexe

On dit que f est fortement convexe de constant $\alpha > 0$ si :

$\forall(x_1, x_2) \in S^2$, avec $(x_1 \neq x_2), \forall\lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - \frac{\alpha}{2}\lambda(1-\lambda)(|x_1 - x_2|)^2$$

Remarque 3.1.1 *toute fonction fortement convexe , elle est strictement convexe.*

Proposition 3.1.1 *Soit C de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}^n$*

si f est fortement convexe de constant $\alpha > 0$, alors la fonction $g : C \to \mathbb{R}^n$

définie par

$$g(x) = f(x) - \frac{\alpha}{2}\|x - a\|^2$$

est convexe sur C

Preuve. Soient $x_1, x_2 \in C \subset \mathbb{R}^n$ tel que $x_1 \neq x_2$, soit $\lambda \in [0, 1]$

on suppose que f est forcement convexe sur C de constente $\alpha > 0$, on va montrer que g est convexe.

$$\begin{aligned}
g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) &= f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-\frac{\alpha}{2}\left\|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2-a\right\|^2 \\
&\leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)-\frac{\alpha}{2}\lambda(1-\lambda)\left\|x_1-x_2\right\|^2 \\
&-\frac{\alpha}{2}\left\|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2-a+\lambda a-\lambda a\right\|^2 \\
&\leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)-\frac{\alpha}{2}\left\|\lambda(x_1-a)+(1-\lambda)(x_2-a)\right\|^2 \\
&\leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)-\frac{\alpha}{2}(\lambda^2\left\|x_1-a\right\|^2+(1-\lambda)^2\left\|x_2-a\right\|^2) \\
&\leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)-\frac{\alpha}{2}\lambda\left\|x_1-a\right\|^2-\frac{\alpha}{2}(1-\lambda)\left\|x_2-a\right\|^2 \\
&\leq \lambda g(x_1)+(1-\lambda)g(x_2)
\end{aligned}$$

■

3.2 Propriétés des fonctions convexes

1. Si f est une convexe sur le sous-emsemble C de $\mathbb{R}^n$, et ϕ une fonction convexe croissante de $f(C)$ dans $\mathbb{R}^n$ alors la fonction $h=\phi\circ f$ est convexe sur C

2. Si A une transformation affine de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, alors la fonction $f\circ A$ définie par :

   $(f\circ A)(x)=f(Ax)$ est convexe.

   Car l'épigraphe de $f\circ A$ est l'image réciproque de f par la transformation affine de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$: $(x,z)\to(Ax,z)$

3. Si f une convexe de de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, alors la fonction Af définie par :

   $Af(x)=\inf\{f(y)/Ay=x\}$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$

   car l'épigraphe de Af est l'image directe de l'épigraphe de f par la transformation affine précédente.

3.3 Continuité et différentiabilité

Soit f une fonction propre définie sur un ouvert convexe C de $\mathbb{R}^n$

3.3.1 Monotonie des accroissements

Lemme 3.3.1 *Soit $x \in C$ et d une direction de $\mathbb{R}^n$, alors la fonction q définie pour des réels t suffisamment petits par :*

$$q(t) = \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$$

est une fonction croissante.

Preuve. Soit $h, k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $h < k$ on pose $x + hd = (1-\alpha)x + \alpha(x + kd)$ avec $\alpha = \frac{h}{k} < 1$. Donc

$$\begin{aligned} f(x+hd) &= f((1-\alpha)x + \alpha(x+kd)) \\ &\leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(x+kd) \quad \text{(car f est convexe)} \\ &\leq (1-\frac{h}{k})f(x) + \frac{h}{k}f(x+kd) \\ \text{d'où } \frac{f(x+hd)-f(x)}{h} &\leq \frac{f(x+kd)-f(x)}{k} \end{aligned}$$

c.a.d $q(h) \leq q(k) \Rightarrow q$ est croissante et de même raisonement si $h, k \in \mathbb{R}_-^*$. et d'aprés (**1.7**) la dérivée directionnelle de f est

$$f'(x,d) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} q(t)$$

donc une fonction convexe est continue et différentiable presque partout sur l'intérieur de son domaine d'où

$$f'(x,d) = \langle \nabla f(x), d \rangle$$

■

Théorème 3.3.1 *Si f est différentiable sur l'ouvert convexe C, alors les 3 affirmations suivantes sont équivalentes :*

a) *f convexe sur C*

b) $\forall x, y \in C, \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x)$

c) $\forall x, y \in C, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$

3.4 Supports affines et fonctions conjuguées

3.4.1 Supports affines

Considérons Γ_0 l'ensemble des fonctions convexes dont l'épigraphe est un ensemble convexe fermée·

Définition 3.4.1 *On appelle fonction support d'un ensemble C de $\mathbb{R}^n$ la fonction σ_C définie par :*

$$\sigma_C(y) = \sup_{x \in C} \langle x, y \rangle$$

Remarque 3.4.1 **1)** *σ_c est convexe et semi-continue inferieurement*

2) *σ_c est positivement homogène c.a.d $\sigma_c(ay) = a\sigma_c(y), \forall a \geq 0$*

3) $C_1 \subset C_2 \Rightarrow \sigma_{c_1}(y) \leq \sigma_{c_2}(y), \forall y$

3.4.2 Fonctions conjuguées

Définition 3.4.2 *On appelle fonction conjuguée d'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ la fonction f^* définie par :*

$$f^*(y) = \sup_{x \in dom(f)} \langle y, x \rangle - f(x)$$

donc

$$\sigma_{epi(f)}(y) = \langle y_0, x_0 \rangle - f(x_0) = f^*(y_0)$$

pour chaque $x \in Dom(f), \langle y, x \rangle - f(x)$ *définit une fonction affine de la variable* y*, on définit que* $f^* \in \Gamma_0$

Théorème 3.4.1 $f \in \Gamma_0$ *si et seulement si* $f^{**} = f$*.*

Preuve. Soit H_0 l'éperplan support de l'épigraphe de f

$$H_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \diagup \langle y_0, x \rangle - z = \langle y_0, x_0 \rangle - f(x_0) \right\},$$

$f^*(y_0) \geq \langle y_0, x \rangle - f(x), \forall x \in Dom(f)$, cette inégalitée peut s'écrire

$$f(x) > \langle x, y \rangle - f^*(x), \forall y \in Dom(f^*)$$

et $\forall x \in Dom(f)$ donc $f^{**} = f$. ∎

Exemple de fonctions conjugées

a) Soit x_c la fonction indicatrice d'un ensemble C de $\mathbb{R}^n$ définie par : χ_c est convexe si et seulement si C est convexe.

$$\begin{aligned} (\chi_c)^*(y) &= \sup_{x \in C} \{\langle y, x \rangle - \chi_c(x)\} \\ &= \sup_{x \in C} \langle y, x \rangle \\ &= \sigma_c(y) \end{aligned}$$

donc la fonction support est la conjugée de l'indicatrice

b) Si $f(x) = \frac{1}{p} \|x\|^p$ alors $f^*(y) = \frac{1}{q} \|y\|^q$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

c) $f(x) = \langle a, x\rangle + b \Rightarrow f^*(y) = -b + \chi_{\{a\}}(y)$

d) soient f_1 et f_2 deux fonctions convexes de $\mathbb{R}^n$ et soit $f = f_1 \square f_2$ alors

$f^* = f_1^* + f_2^*$

$$\begin{aligned}
(f_1 \square f_2)^*(y) &= \sup\left\{\langle y, x\rangle - \inf\left\{f_1(x_1) + f_2(x_2)/x_1 + x_2 = x\right\}\right\} \\
&= \sup_x \sup\left\{\langle y, x\rangle - f_1(x_1) - f_2(x_2)/x_1 + x_2 = x\right\} \\
&= \sup\left\{\langle y, x_1\rangle + \langle y, x2\rangle - f_1(x_1) - f_2(x_2)\right\} \\
&= f_1^*(y) + f_2^*(y)
\end{aligned}$$

3.5 Sous-différentiabilité

Définition 3.5.1 *Soit f une fonction convexe. On appelle sous-gradient d'une fonction convexe f en x_0 tout vecteur V de $\mathbb{R}^n$ tel que*

$$\forall x \in Dom(f) : f(x) \geq f(x_0) + \langle V, x - x_0\rangle$$

L'enssemble dessous-gradient en x_0 est le sous différentiel de f en x_0 noté $\partial f(x_0)$ et on dira que f est sous differentiable en x_0 s'ilexiste au moins un
sous-gradient.
On vue plus haut que les dérivées directionnelles existent en tout point intérieur au domaine et ans toute direction.
Observons que $f'(x, d)$ est une fonction positivement homogène et sous-additive c.a.d $f'(x, ad) = af'(x, d)$ si $a \geq 0$ $f'(x, d + d') \leq f'(x, d) + f'(x, d')$
Elle est donc la fonction support d'un ensemble qui n'est autre que le sous-différentiel $\partial f(x_0)$ donc une conséquence importante est que si f est différentiable en x_0,le sous-

différentiel $\partial f(x_0)$ *se réduit à un élément, le gradient de* f *en* x_0.

$$f \text{ différentiable en } x_0 \Leftrightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}.$$

Exemple de calcul du sous-différentiel

a)Soit un ensemble C convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ et soit χ_c sa fonction indicatrice. on a alors si $x \in C, \partial x_c = \{g \in \mathbb{R}^n / \sigma_c(g) = \langle g, x \rangle\} = N_c(x)$, le cône normal à C en x.

f n'est pas différentiable en 0 et $\partial f(0) = [0, 2]$

Chapitre 4

Applications des Fonctions Convexes

Dans ce chapitre on va utiliser la convexcité des fonctions pour démontre quelques inégalités et pour le calcul approché des intégrales.

4.1 Représentation graphique des fonctions

Le graphe d'une fonction convexe soit au-dessus (ou concave soit au-dessous)de chacune de ses tangentes permet de préciser son allure.

Les fonctions usuelles dont on doit tracer le graphe son définies sur une réunion d'intervalles de longueur maximums sur lesquels la dérivée seconde existe et garde un signe constant , sur chacun de ses intervalles la fonction est convexe ou concave.

Si en x_0 la dérivée seconde s'annule ,en changeant de signe , alors on dit que le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion pour le graphe de f, en ce point le graphe de f traverse sa tangente.

Si la dérivée seconde s'annulle sans changer de signe il n'ya pas de point d'inflexion

4.1.1 Exemples

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to x^4$

f est de classe C^∞ et $f'(x) = 4x^3$et $f"(x) = 12x^2$ on a $f"$ s'annulle en 0 sans changer de signe alors il n'y a pas de point d'inflexion

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to e^{-x^2}$

- f est de classe C^∞ et $f'(x) = -2xe^{-x^2}$et $f"(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$.
- f est convexe sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.
- f est concave sur $\left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

Alors les points d'abscissent $-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ sont des points d'inflexions.

4.2 Inégalités du type $f(x) \geq ax + b$ ou $f(x) \leq ax + b$

Si f et convexe et sa graphe est au-dessus de sa tangente d'équation $y = ax + b$ alors $f(x) \geq ax + b$.

Si f et concave et sa graphe est au-dessous de sa tangente d'équation $y = ax + b$ alors $f(x) \leq ax + b$.

Exemple 4.2.1 **1)** *la fonction $x \to e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$, la tangente au point d'abscisse o du graphe de*

la fonction " exp " *à pour équation $y = x + 1$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}$:*

$$e^x \geq x + 1$$

2) *la fonction $x \to \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ la tangent au point d'bscisse $x = 1$ du graphe* "ln " *à pour équation $y = x - 1$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$*

$$\ln x \leq x - 1.$$

3) *la fonction* $x \to \sin x$ *est concave sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *son graphe est au-dessous de sa tengente à l'origine et au-dessus de la corde qui joint l'origine au point* $(\frac{\pi}{2}, 1)$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

4.3 Inégalité des Moyennes

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictements positives $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$des réels positives tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

On utilise le théoreme (1.1.3) pour la fonction " exp ", on posant $y_i = \ln x_i$, alors $x_i = e^{y_i}$

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} &= \prod_{i=1}^{n} e^{y_i \lambda_i} \\
&= e^{\sum y_i \lambda_i} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{y_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i
\end{aligned}$$

4.3.1 Cas particulier :

$\forall i \in [1, n]$

$$\prod_{i=1}^{n} t_i^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i.$$

4.4 Inégalités du holder de Minkowski

Soient p et q deux réels strictement positifs verifian $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Soient $(a_i),(b_i)$, $1\leq i\leq n$ deux familles de nombre réels strictement positifs, on a les inégalités dites de holder et de minkowski

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}} \quad \text{inégalitée de Holder}$$

$$(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{inégalitée de Minkowski}$$

Preuve. Dans l'inégalité$(4,3)$:

$$x_i^{\frac{1}{p}} y_i^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} x_i + \frac{1}{q} y_i$$

tel que :

$$x_i = \frac{a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p}, \quad y_i = \frac{b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q}$$

d'où :

$$\frac{a_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{a_i^p}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)} + \frac{1}{q} \frac{b_i^q}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right)}$$

En ajoutant les n inégalités

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i}{(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{a_i^p}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)} + \frac{1}{q} \frac{b_i^q}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right)} = 1$$

D'ou l'inégalitée de Holder

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}$$

Pour l'inégalité de minkowski on a :

$$
\begin{aligned}
(a_i+b_i)^p &= (a_i+b_i)^{p-1}(a_i+b_i) = (a_i+b_i)^{p-1}\times a_i + (a_i+b_i)^{p-1}\times b_i \\
\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p &= \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{p-1}\times a_i + (a_i+b_i)^{p-1}\times b_i \\
\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p &\leq \left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} \times (\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} \times (\sum_{i=1}^{n}b_i^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} \times \left[(\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n}b_i^p)^{\frac{1}{p}}\right] \\
&\leq \left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{p}\right]^{\frac{1}{q}} \times \left[(\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n}b_i^p)^{\frac{1}{p}}\right]
\end{aligned}
$$

■

En divisons les deux membres par $[\sum(a_i+b_i)^p]^{\frac{1}{q}}$ on obtient

$$
\begin{aligned}
\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right]^{1-\frac{1}{q}} &\leq (\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n}b_i^p)^{\frac{1}{p}} \\
\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} &\leq (\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n}b_i^p)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

4.5 Application aux normes $\|x\|_p$ de $\mathbb{R}^n$

On sait que $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} /x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $p \geq 1$. On applique l'inégalité de jensen avec $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ $\alpha_i = \frac{1}{n}$. En remplace x_i par $|x_i|^p$, on obtient

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{q}{p}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q$$

d'où

$$\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\,\|x\|_q$$

D'autre part, pour $x \geq 0$ et $\alpha \geq 1$ on a $1 + x^\alpha \leq (1+x)^\alpha$. d'où pour toute famille

$$(a_i) : \sum_{i=1}^{n} |a_i|^\alpha \leq (\sum_{i=1}^{n} |a_i|)^\alpha$$

Pour $\alpha = \frac{p}{q}$ et $a_i = |x_i|^p$ on a

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{q}{p}}$$

d'où

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p .$$

4.6 Inégalité d'Hermite–Hadmard

Lemme 4.6.1 *Si une fonction* f :$[a,b] \to \mathbb{R}$ *est convexe alors son intégral est bornée par*

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x) \leq (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Preuve. Soit f une fontion continue convexe et positive sur un interval $[a,b]$

Donc la courbe représentative de f est au-dessous de la corde definie par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ c'est a dire pour tout $x \in [a,b]$ on a :

$$f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \tag{4.1}$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \int_a^b (x-a)dx + (b-a)f(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a) \tag{4.2}$$

Consédirons maintenant la tangente (à droite ou à gauche) (Δ) au graphe de f au point

$I(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ d'équation $y = \phi(x) = \lambda(x - \frac{a+b}{2}) + f(\frac{a+b}{2})$ et puisque le graphe d'une fonction convexe au-dessus de toute ses tengentes on a $\forall x \in [a,b] : f(x) \geq \phi(x)$ d'où

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \phi(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \geq (b-a)f(\frac{a+b}{2}) \tag{4.3}$$

$(b-a)f(\frac{a+b}{2})$ designe l'aire du rectengle défini par l'axe (Ox) et la parallèle à (Ox) passant par I et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ d'où d'aprés (4.2) et (4.3)

$$(b-a)f(\frac{a+b}{2}) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a) \tag{4.4}$$

■

4.6.1 Calcul approché d'intégral

d'aprés (4.4) $(b-a)f(\frac{a+b}{2})$ est une approximation de $\int_a^b f(x)dx$ par défaut avec une erreur infèrieur à $(b-a)[\frac{f(a)+f(b)}{2} - f(\frac{a+b}{2})]$

En divisant l'intervalle $[a,b]$, cette erreur peut devenir aussi petite que l'on veut plus précisement, considérons pour tout entier n ,la suite des points (a_k) de $[a,b]$ definie par $a_0 = a$ et $a_k = a_0 + k\frac{b-a}{2^n}$ pour $0 < k < 2^n$ posons

$$S_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}$$

et

$$s_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f(\frac{a_k+a_{k+1}}{2})$$

et on a

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx$$

et donc (4.4) entraine $s_n \leq \int_a^b f(x)dx \leq S_n$.

Posons $E_n = S_n - s_n$ on va montrer que pour $n \to \infty$; $E_n = 0(\frac{1}{2^n})$, peur cela il suffit de montrer que $E_1 \leq \frac{1}{2}E_{0,}$ car le passage de n à $n+1$sefait en partageant chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ par son milieu .on reprend la notation du début avec en plus $a_1 = a + \frac{b-a}{4}$, $a_2 = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$, $\quad a_3 = a + \frac{3(b-a)}{4}$.

On a $E_0 = (b-a)[\frac{f(a)+f(b)}{2} - f(\frac{a+b}{2})]$

$E_1 = (\frac{b-a}{2})[\frac{f(a)+f(b)}{2} - f(a_1) + \frac{f(a_2)+f(b)}{2} - f(a_3)]$

En utilisant la convexité de f ,

$$f(\frac{a+b}{2}) = f(a_2) \leq \frac{f(a_1)+f(a_3)}{2}$$

$$\frac{f(a)+f(a_2)}{2} - f(a_1) + \frac{f(a_2)+f(b)}{2} - f(a_3) \leq \frac{f(a)+f(a_2)}{2} - \frac{f(a_2)+f(b)}{2} - 2f(\frac{a+b}{2})$$

$$\frac{f(a)+f(a_2)}{2} - f(a_1) + \frac{f(a_2)+f(b)}{2} - f(a_3) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - f(\frac{a+b}{2})$$

$$\text{ce qui entraine } E_1 \leq \frac{1}{2}E_0$$

donc E_n tend ver 0 et s_n est une approximation par défaut de $\int_a^b f(x)dx$ avec une erreur infèrieure a $\frac{b-a}{2^n}(\frac{f(a)+f(b)}{2} - f(\frac{a+b}{2}))$.

4.7 Optimalité

Théorème 4.7.1 *quand on cherche à minimis une fonction de* $\mathbb{R}^n$ *on distingue minimum global de* f *est un point* $m \in Dom(f) \ \ /f(x) > f(m) \ \ \forall x \in Dom(f)$.

pour définir un minimum locale, on remplace $x \in Dom(f)$ par $x \in Dom(f) \cap V_\varepsilon(m)$ où $V_\varepsilon(m)$ est un voisinage de m de rayon ε c.a.d $V_\varepsilon(m) = \{x/ \|x-m\| \leq \varepsilon\}$ pour un $\varepsilon > 0$.

Soit f une fonction convexe de $\mathbb{R}^n$ et m un point où f est sous-différentiable, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point x soit un minimum global d'une fonction convexe est $O \in \partial f(m)$.

Preuve. Conséquence immédiate de la définition d'un sous-gradient

$$f(x) \geq f(m) \Leftrightarrow f(x) \geq f(m) + \langle 0, x - m \rangle .$$

On retrouve dans le cas différentiable la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre : si m minimise f, le gradient de f en m est nul , cette relation est locale alors que tout minimum locale d'une fonction convexe est un minimum global, dans le cas convexe la condition d'optimalité du premier ordre est nécessaire et suffisante observez que la condition du deuxième ordre en tout points car hessien d'une fonction convexe deux fois différentiable est semi-defini positif. ■

Conclusion

Dans ce travail j'ai définie d'abord la fonction convexe et concave puis j'ai donné quelques théorèmes et propriétés qui précisent la convexité et aussi la relation entre la convexité d'une fonction et le sens de variation de sa dérivée et le signe de sa dérivée seconde.
Enfin, j'ai appliqué les fonctions convexes pour demontrer quelques inégalités et pour les utiliser dans le calcul approché de l'integral.
Donc les fonctions convexes et concaves jouent un rõle trés important en mathematique et représentent une source pour les professeurs de maths au secondaire.Ces derniers peuvent les utilisée pour demontrer quelques inegalités en classe de terminal par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \exp x \geq x + 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \ln x \leq x - 1$$

et pour determiner les points d'inflexions et l'allure des courbes des fonctions

Bibliographie

[1] R. T. Rockafellar. (1997). Convex Analysis. Princeton University Press. Princeton. New Jersey.

[2] Walter Rudin. (1991). Functional Analysis. McGraw-Hill.

[3] D Azé. (1997). Eléments d'analyse convexe et variationnelle.

[4] R Temam. (1974). Analyse convexe et problemes variationnellesI Ekeland. Dunod Gauthier-Villars. Paris.

[5] JLWV Jensen. (1906). Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes - Acta mathematica.

[6] GH Hardy. JE Littlewood. G Pólya. Inequalities. (1952). Cambridge'at the University Press.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\mathbb{R}$	:	ensemble des nombres réels
$\langle .,. \rangle$	:	produit scalaire.
C^{∞}	:	l'ensemble des fonctions infiniment continues.
f^{*}	:	fonction conjugée.
f^{**}	:	la conjugée de fonction conjugée.