République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

LAIADHI Lobna

Titre :

Processus de Poisson homogène

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	TOUBA Sounia	UMKB	Président
Dr.	DJABER Ibtissem	UMKB	Encadreur
Dr.	OUANOUGHI Yasmina	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

À mes chers parents

À mes sœurs et mon frère

À toute ma grande famille et toutes mes connaissances

À mes collègues du deuxième Master

À toutes les personnes qui m'ont soutenu à accomplir ce travail

REMERCIEMENTS

Louange à Allah, Seigneur de l'univers, avant tout.

Mes vifs remerciements sont adressés à mon encadreur Madame DJABER Ibtissem (M.A.A à l'université de Biskra) pour ces conseils et ces orientations qui m'ont été d'une grande utilité au cours de l'élaboration de mon mémoire.

Je remercie tous les enseignants qui ont contribués à ma formation.

Je remercie tout particulièrement mes parents pour leurs encouragements et soutien sur tous les aspects et aussi toute ma famille.

Je remercie tous ceux qui ont finalisé ce mémoire soit de près ou de loin.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Les études de phénomènes aléatoires au cours du temps sont aujourd'hui légions, que ce soit dans le domaine de la physique nucléaire, de la biologie cellulaire ou bien encore dans des situations concrètes de la vie courante, comme pour l'étude du congestionnent d'une centrale téléphonique (dépendant du processus des appels téléphoniques qui se produisent à des instants aléatoires).

Les processus de Poisson (du nom du mathématicien français Siméon Denis Poisson (1781-1840)) sont des processus ponctuels, les plus simples à étudier. Nous nous contenterons d'approfondir ceux dits homogènes, c'est-à-dire de paramètre constant : l'apparition d'événements est équilibrée au cours d'une période d'étude (concrètement, on peut imaginer que le nombre de coups de fil au cours d'une journée n'augmente pas brusquement à l'heure du déjeuner), s'opposant ainsi aux processus de Poisson dits inhomogènes.

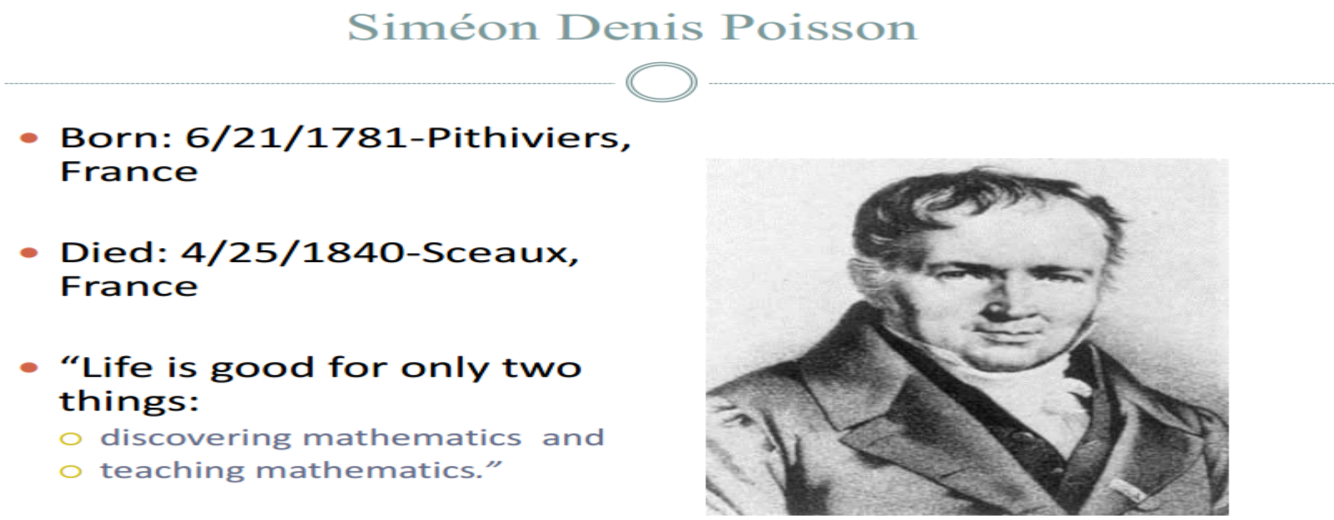
Notre objectif est de présenter le processus de Poisson homogène ainsi que ces propriétés fondamentales, et estimer l'intensité λ par la méthode de maximum de vraisemblance. De plus utilisée le logiciel statistique R pour présenter la notion de trajectoire de ce processus.

Pour cela, notre travail est structuré de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions fondamentales des probabilités et les principaux aspects theorique des processus stochastiques.

Dans le second chapiter, nous présentons quelques définitions et propriétés importantes de processus de Poisson homogéne.

Nous terminera ce travail avec une conclusion. Il a noté que dans tous nous programmes, nous utiliserons le langage R version 2.14.1.



Chapitre 1

Notions de base

Dans ce chapitre on va présenter quelques concepts de base relatifs aux probabilités ainsi qui aux processus stochastiques qui seront nécessaires dans la suite.

1.1 Rappels des probabilités

1.1.1 Fonctions génératrices

Définition 1.1.1 *Soit X une variable aléatoire (v.a) discrète ne prenant que des valeurs entières positives ou nulles. La* ***fonction génératrice des probabilités de la variable*** *X est la fonction*

$$G_X(t) = E\left[t^X\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P\left[X = n\right],$$

définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que l'espérance existe c'est à dire (c-à-d) la série soit absolument convergente). Pour $t \in [-1, 1]$, cette série converge absolument ; la fonction génératrice des probabilités est donc au moins définie dans l'intervalle $[-1, 1]$. Comme son nom l'indique, cette fonction permet de générer les probabilités de la variable X.

Proposition 1.1.1 *La fonction génératrice des probabilités d'une somme de variables in-*

dépendantes à valeurs entières non négatives, définie en tout point t en lequel la fonction génératrice des probabilités de chacune des variables est définie, est le produit des fonctions génératrices des probabilités de ces variables.

Preuve. Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables indépendantes à valeurs entières non négatives et $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Pour t réel tel que $E\left[t^{X_i}\right]$ existe, pour $i = 1, 2, ..., n$,

$$G_Y(t) = E\left[t^Y\right] = E\left[t^{X_1}t^{X_2}...t^{X_n}\right] = E\left[t^{X_1}\right]E\left[t^{X_2}\right]...E\left[t^{X_n}\right] = G_{X_1}(t)\,G_{X_2}(t)\,...G_{X_n}(t),$$

où la troisième égalité est due à l'indépendance des variables. ■

Définition 1.1.2 *Pour tout v.a X, discrète ou continue,* ***la fonction génératrice des moments*** *est définie par*

$$M_X(t) = E\left[\exp(tX)\right] = \begin{cases} \sum_x \exp(tx)\,P\left[X = x\right] & \textit{si } X \textit{ est discrèt,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx)\,f(x)\,dx & \textit{si } X \textit{ est continue et de densité } f. \end{cases}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que l'espérance soit définie. Cette fonction possède des propriétés similaires à la fonction génératrice des probabilités.

Proposition 1.1.2 *La fonction génératrice des moments d'une somme des v.a's indépendantes, définie en tout point t en lequel la fonction génératrice des moments de chacune des variables est définie, est le produit des fonctions génératrices des moments des variables considérées.*

Remarque 1.1.1 *La preuve est similaire à celle de la proposition 1.1.1.*

1.1.2 Quelques lois de distributions

Pour comprendre la suite de ce travail, il sera utile de connaître les définitions et quelques propriétés des lois les plus rencontrées.

Loi exponentielle

Définition 1.1.3 *Une v.a X de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est une variable continue à valeurs positives de densité*

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

On note la loi exponentielle de paramètre λ par $\mathcal{E}(\lambda)$.

La figure (1.1) répresente la densité d'une v.a de la loi exponentielle des paramètres 1, 3 et 5.

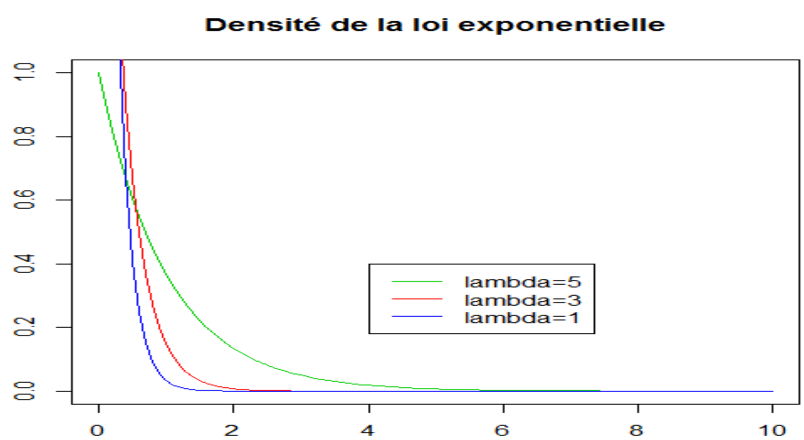


FIG. 1.1 – Densité d'une v.a de la loi exponentielle des paramètres 5, 3 et 1.

Propriété 1.1.1 *Soit X une v.a de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, on a*

1. *Sa fonction de répartition est donnée par :*

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda t) & si\ t \geq 0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

2. *Sa fonction génératrice des moments est*

$$G_X(t) = E[\exp(tX)] = \begin{cases} \infty & si\ t \geq \lambda, \\ \dfrac{\lambda}{\lambda - t} & t < \lambda. \end{cases}$$

3. *Sa moyenne et sa variance sont*

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Preuve.

1. $F(t) = P(X \leq t) = 0$ si $t < 0$ car X est une variable positive et si $t \geq 0$, on a

$$F(t) = \int_0^t f_X(x)\, dx = \int_0^t \lambda \exp(-\lambda x)\, dx = [-\exp(-\lambda x)]_0^t = 1 - \exp(-\lambda x).$$

2. Sa fonction génératrice des moments vérifie

$$\begin{aligned} G_X(t) &= E[\exp(tX)] = \int_0^{+\infty} \lambda \exp(tx) \exp(-\lambda x)\, dx \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda \exp((t-\lambda)x)\, dx = \left[\frac{\lambda}{t-\lambda} \exp((t-\lambda)x) \right]_0^\infty. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

3. On dérivant la fonction génératrice, on obtient :

$$G'_X(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}, \quad G''_X(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3},$$

d'où

$$E[X] = G'_X(0) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{et } Var(X) = G''_X(0) - E[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

■

La loi exponentielle possède une propriété trés particulier dite **l'absence de mémoire**.

Propriété 1.1.2 ***(Absence de mémoire)*** *Soit X une v.a de loi exponentielle, alors pour tout t, $s>0$, on a*

$$P\left(X>s+t/X>t\right)=P\left(X>s\right).$$

Preuve. En effet

$$P\left(X>s+t/X>t\right)=\frac{P\left(X>s+t,X>t\right)}{P\left(X>t\right)}=\frac{P\left(X>s+t\right)}{P\left(X>t\right)}=\frac{\exp\left(-\lambda\left(t+s\right)\right)}{\exp\left(-\lambda t\right)}.$$

Puisque

$$\exp\left(-\lambda\left(t+s\right)\right)=\exp\left(-\lambda s\right)\exp\left(-\lambda t\right),$$

alors

$$P\left(X>s+t/X>t\right)=\exp\left(-\lambda s\right)=P\left(X>s\right).$$

■

Proposition 1.1.3 *Soient $X_1,...,X_n$ des variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, alors la somme de n variables indépendantes de loi exponentielle de même paramètre suit la loi Gamma :*

$$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\Gamma(n,\lambda),$$

où $\Gamma(n,\lambda)$ est la loi Gamma de paramètre n et λ de densité

$$f(x)=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}\exp(-\lambda x)\mathbf{1}_{x\geq 0}(x).$$

Preuve. Par récurrence. Pour $n=1$, on retrouve bien la loi exponentielle, supposons que le résultat est vrai pour n, et cherchons la loi de

$$\sum_{i=1}^{n+1}X_i=\sum_{i=1}^{n}X_i+X_{n+1}.$$

Les variables $\sum_{i=1}^{n} X_i$ et X_{n+1} sont indépendantes, donc la densité vérifie

$$\begin{aligned} f_{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}(x) &= \int_0^{+\infty} f_{X_{n+1}}(x-y) f_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(y)dy \\ &= \int_0^x \lambda \exp(-\lambda(x-y)) \frac{\lambda^n}{(n-1)!} y^{n-1} \exp(-\lambda y)dy \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \exp(-\lambda x) \int_0^x n y^{n-1} dy = \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \exp(-\lambda x) x^n. \end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat. ∎

Remarque 1.1.2 *On déduit de la proposition précédente l'espérance, la variance et la fonction génératrice des moments d'une variable Y de loi Gamma $\Gamma(n, \lambda)$:*

$$E[Y] = \frac{n}{\lambda}, \quad Var(Y) = \frac{n}{\lambda}, \quad G_Y(t) = \begin{cases} \infty & si\ t \geq \lambda \\ (\frac{\lambda}{\lambda - t})^n & si\ t < \lambda. \end{cases}$$

Preuve. En effet, comme les X_i sont indépendantes et de même loi, on a

$$E[Y] = nE[X], \quad Var(Y) = nVar(X) \quad \text{et } G_Y(t) = (G_X(t))^n \ \cdot$$

∎

Loi de Poisson

Définition 1.1.4 *Une v.a X de loi Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est une variable discrète à valeur dans $\mathbb{N}$ de probabilité*

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda).$$

La loi de Poisson de paramètre λ est notée $\mathcal{P}(\lambda)$.

La figure (1.2) répresente la probabilité d'une v.a de loi de Poisson des paramètres 1, 3, 6 et 9.

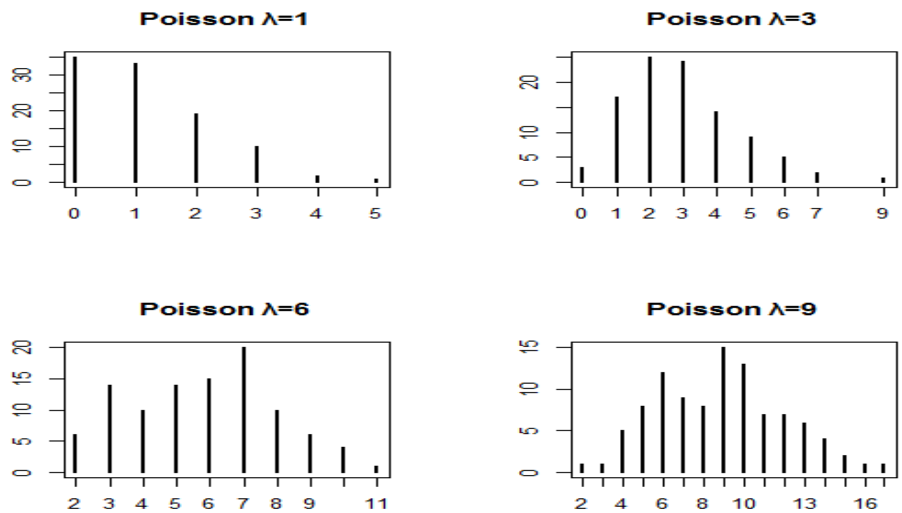


FIG. 1.2 – Probabilité d'une v.a de Poisson des paramètres 1, 3, 6 et 9.

Propriété 1.1.3 *Soit X une v.a de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, on a*

1. Sa fonction génératrice des moments est donnée par :

$$G_X(t) = E\left[\exp(tX)\right] = \exp\left(\lambda(\exp(t) - 1)\right).$$

2. Sa moyenne et sa variance sont :

$$E[X] = \lambda, \quad Var(X) = \lambda.$$

Preuve. On a

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(tk) \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) = \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \exp(t))^k}{k!} = \exp(-\lambda) \exp\left(\lambda \exp(t)\right).$$

On calcule les dérivées de la fonction génératrice :

$$G'_X(t) = \lambda \exp(t) \exp\left(\lambda(\exp(t) - 1)\right),$$

et

$$G''_X(t) = (1 + \lambda \exp(t))\lambda \exp(t) \exp(\lambda(\exp(t) - 1)).$$

D'où

$$E[X] = G'_X(0) = \lambda \quad \text{et } Var(X) = G''_X(0) - E[X]^2 = \lambda.$$

■

Proposition 1.1.4 *La somme de n variables indépendantes de loi Poisson suit encore une loi de Poisson : soient $X_1, ..., X_n$ des variables indépendantes de loi respective $\mathcal{P}(\lambda_i)$, alors*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right).$$

Preuve. On calcule la fonction génératrice de $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et on utilise le fait que la fonction génératrice caractérise la loi, par indépendance des X_i on a

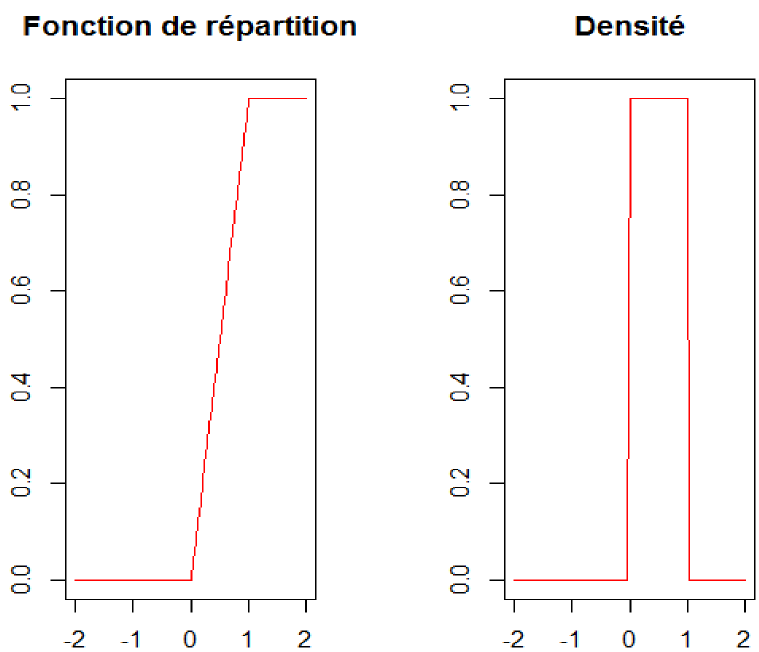
$$\begin{aligned} G_Z(t) &= G_{X_1}(t) \times G_{X_2}(t) \times ... \times G_{X_n}(t) \\ &= \exp(\lambda_1(\exp(t) - 1)) \exp(\lambda_2(\exp(t) - 1)) ... \exp(\lambda_n(\exp(t) - 1)) \\ &= \exp\left((\exp(t) - 1)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right). \end{aligned}$$

■

Loi uniforme

Définition 1.1.5 *On dit que X suit une loi uniforme sur l'intervalle fini $[a, b]$, si sa densité est constante sur $[a, b]$ et nulle à l'extérieur de cet intervalle, soit :*

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$



La loi uniforme sur l'intervalle fini $[a,b]$ *est notée par* $\mathcal{U}([a,b])$.

La figure (??) répresente la fonction de répartition (à gauche) et la densité (à droite) d'une v.a de loi uniforme sur $[0,1]$.

Propriété 1.1.4 *Soit* X *une v.a de loi uniforme* $\mathcal{U}\left([a,b]\right)$, *on a*

1. Sa fonction de répartition est :

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a\leq x\leq b, \\ 1 & \text{si } x>b. \end{cases}$$

2. Sa fonction génératrice des moments est :

$$G_X(t)=\frac{\exp(itb)-\exp(ita)}{it(b-a)}.$$

3. Sa moyenne et sa variance sont :

$$E[X] = \frac{a+b}{2}, \quad Var = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Loi binomiale

Définition 1.1.6 *Une v.a X est de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ si et seulement si elle est à valeurs dans $\{0, 1, ..., n\}$ et*

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Le nombre de fois où, en n expériences identiques et indépendantes, un évènement de probabilité p s'est produit, est une v.a de loi $\mathcal{B}(n,p)$. son graphe est un diagramme en escaliers comme le montre la figure (1.3).

La figure (1.3) présente le graphe de probabilité de la loi binomiale des paramètre $n = 10$ et $p = 0.2$.

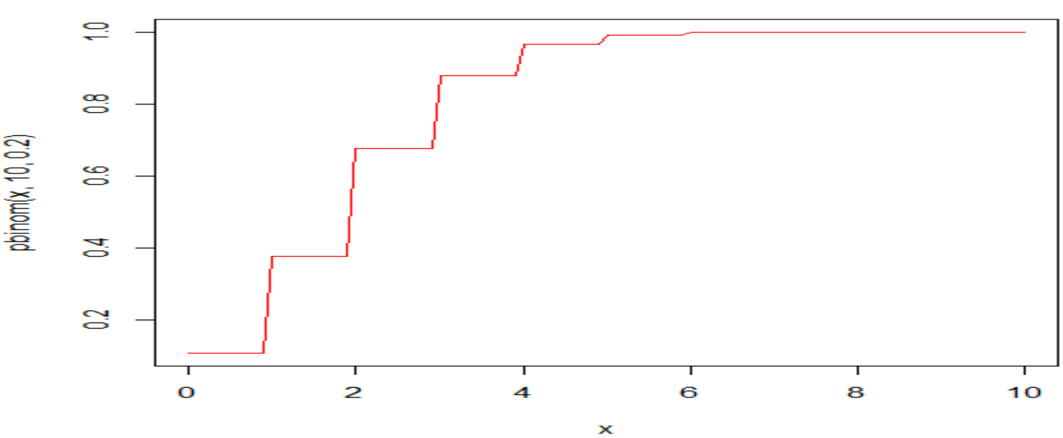


FIG. 1.3 – Probabilité de la loi binomiale des paramètre $n = 10$ et $p = 0.2$.

Proposition 1.1.5 *Soit X une v.a de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$; alors :*

1. Sa fonction génératrice des moments est :

$$G_X(t) = [p\exp(t) + (1-p)]^n.$$

2. Sa moyenne et sa variance sont :

$$E[X] = np, \quad Var = np(1-p).$$

1.2 Introduction aux processus stochastiques

Considérons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, un ensemble d'indices $\mathbb{T}$ et un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.

Définition 1.2.1 *Un processus stochastique est une famille de v.a* $X = (X_t,\ t \in \mathbb{T})$ *définies sur un même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *à valeurs dans un espace mesurable* $(E, \mathcal{E})$ *et indicées par un paramètre* $t \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned} X : \quad \mathbb{T} \times \Omega &\to \quad E \\ (t, \omega) &\to \quad X_t(\omega). \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathbb{T}$ *est l'espace des paramètres, ou espace du temps car le paramètre* $t \in \mathbb{T}$ *est souvent un paramètre temporel. Si* $\mathbb{T}$ *est dénombrable ; on parle de processus stochastique à temps discret et si* $\mathbb{T}$ *est une partie de* $\mathbb{R}$ *; on parle alors de processus stochastique à temps continu. De même pour l'espace* E *des valeurs des v.a* X_t *, appelé espace d'états ; on parle de processus stochastique discret ou continu.*

Remarque 1.2.1 *Un processus stochastique dépend de deux paramètres :* $X_t(\omega)$ *dépend de* t *(en général le temps) et de l'aléatoire* $\omega \in \Omega$.

– *Pour* $t \in \mathbb{T}$ *fixé* $\omega \to X_t(\omega)$ *est une v.a sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

– *Pour un événement* $\omega \in \Omega$ *fixé, la fonction* $t \to X_t(\omega)$ *est appelée trajectoire du processus* .

Exemple 1.2.1 *On considère un processus de Bernoulli, il s'agit d'une suite d'épreuves indépendantes de Bernoulli* $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *pouvant prendre deux valeurs, par exemple* 0 *et* 1 *avec*

$$P(X_t = 1) = p \quad et \; P(X_t = 0) = 1 - p.$$

Cette exemple était un processus en temps discrèt avec un nombre d'états fini, comme le présenter dans la figure (1.4).

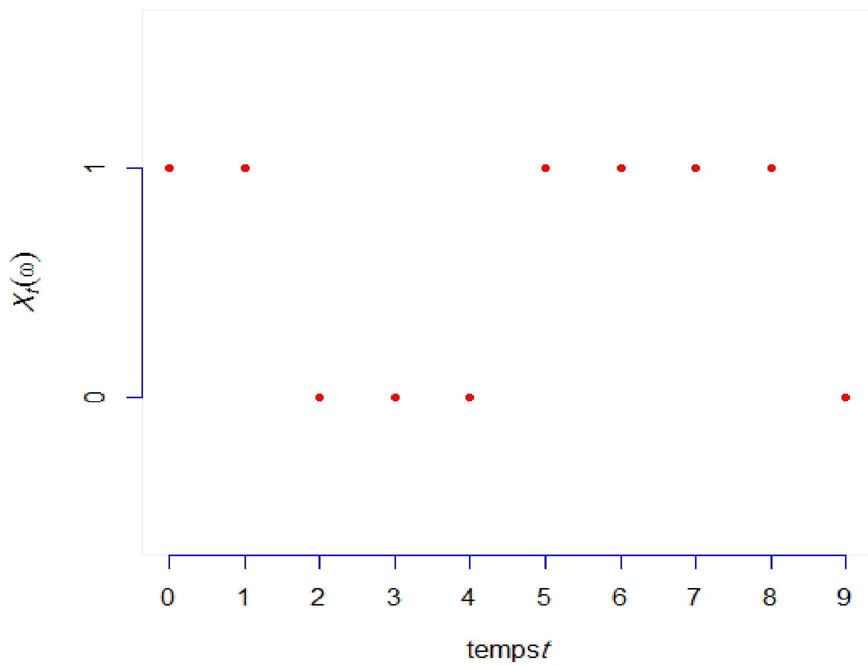


FIG. 1.4 – Trajectoire d'un processus de Bernoulli construit à partir d'une suite de v.a, iid de loi de Bernoulli de paramètre p=0.5.

Exemple 1.2.2 *Considérons maintenant un processus en temps discret à espace d'état* *dénombrable. On pose*

$$X_t = \sum_{k=1}^{t} Y_k.$$

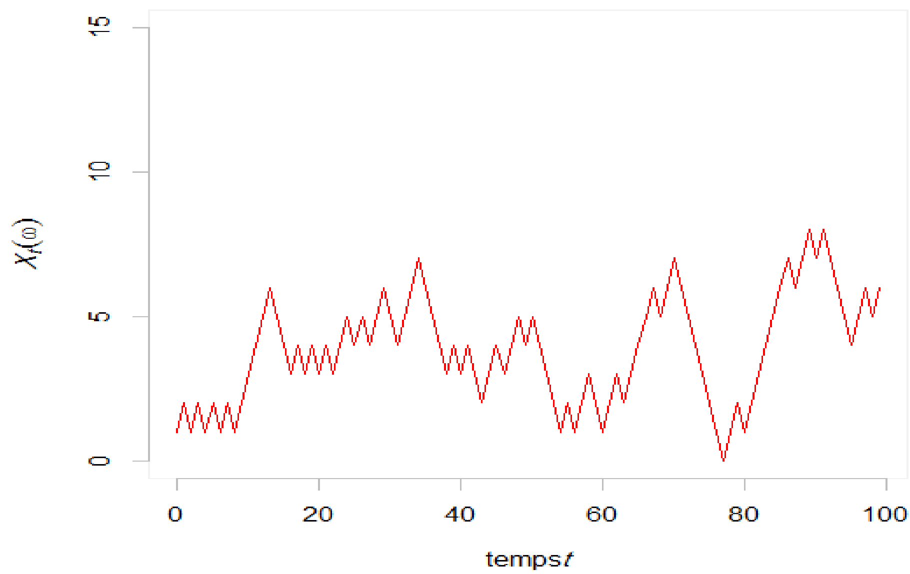


FIG. 1.5 – Trajectoire d'une marche aléatoire $t \to X_t(\omega)$.

Définition 1.2.2 ***(Lois fini-dimensionnelles)*** *Les distributions à dimensions finies du processus stochastique* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *sont les distributions de vecteur* $(X_{t_1}, ..., X_{t_k}), t_1, t_2, ..., t_k \in \mathbb{T}$ *à dimensions finies. Alors la famille des lois des v.a's* $(X_1, X_2, ..., X_k)$ *s'appelle lois fini dimensionnelles ou famille de répartition finie de* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$.

Dans la suite nous nous intéressons aux propriétés suivantes des processus stochastiques.

Définition 1.2.3 ***(Accroissements)*** *Soit un processus stochastique* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *indexé dans un ensemble* $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$. *La v.a* $(X_{t_i} - X_{t_j})$ *où* $t_i < t_j$ *est l'accroissement du processus sur l'intervalle* $[t_i, t_j[$.

Définition 1.2.4 ***(Accroissements stationnaires)*** *Un processus stochastique* $(X_t\ )_{t\in\mathbb{T}}$ *à accroissements stationnaires si* $\forall h>0$ *les v.a's* $(X_{t+h}-X_t)$ *ont la même distributions* $\forall t\in\mathbb{R}^+$.

Définition 1.2.5 ***(Accroissements indépendantes)*** *Un processus stochastique est dit à accroissement indépendant lorsque pour tout* k *et tout* $0\leq t_1\leq t_2\leq ...\leq t_k<\infty$, *les variables* $X_{t_1}-X_{t_0},...,X_{t_k}-X_{t_{k-1}}$ *sont indépendantes.*

Définition 1.2.6 ***(Processus continue)*** *Un processus stochastique* $(X_t\ )_{t\in\mathbb{T}}$ *est continue en probabilité au point* t *si*

$$P(\,|X_{t+h}-X_t|>\epsilon)\longrightarrow 0 \quad si \quad h\rightarrow 0.$$

Cette condition exprime que la probabilité qu'une trajectoire soit discontinue en t *nulle.*

Définition 1.2.7 ***(Continuité locale)*** *On dit qu'un processus stochastique est localement continu en probabilité, si pour tout* $t\geq 0$ *; on a*

$$\lim_{h\rightarrow 0}P(X_{t+h}-X_t\geq 1)=0.$$

Définition 1.2.8 ***(Processus càdlàg)*** *Le processus stochastique* $(X_t\ )_{t\in\mathbb{T}}$ *est dit continu à droite avec limite à gauche (càdlàg) s'il a des trajectoires continues à droite et ont des limites à gauche presque sûres.*

Voici des conceptes utiles en théorie des processus stochastique, ce sont les fonctions moyenne,variance et covariance.

Définition 1.2.9 ***(Fonction moyenne)*** *Pour un processus stochastique* $(X_t\ )_{t\in\mathbb{T}}$, *la moyenne est une fonction donné par*

$$E[X_t]=\mu_t,\quad t\in\mathbb{T}.$$

Remarque 1.2.2 *On dit que le processus est centré si*

$$E[X_t] = 0, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Définition 1.2.10 *(**Fonction variance**) La variance d'un processus stochastique $(X_t\ )_{t\in\mathbb{T}}$ est donné par*

$$Var(X_t) = \sigma_t^2 = E[(X_t - E[X_t])^2], \quad t \in \mathbb{T}.$$

Définition 1.2.11 *(**Fonction covariance**) La fonction d'autocovariance est :*

$$\begin{aligned} Cov(X_s, X_t) &= E[(X_s - E[X_s])(X_t - E[X_t])] \\ &= E(X_s - X_t) - E[X_s]E[X_t]. \end{aligned}$$

On va étudier ici un processus stochastique discrèt à temps continue qui porte le nom de processus de comptage.

De nombreux phénomènes aléatoires se manifestent par des "arrivées" survenant une par une à des instants aléatoires successifs par exemples : arrivées de clients à un guicet, accurrence d'accidents dans une ville, panne de machines dans une usine...

Ces phénomènes peuvent se définie par :

le processus $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ appelé processus des temps d'accurrence où la v.a T_n est "le temps d'accurrence de $n^{ième}$ événement" quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

Un autre processus peut être associe au processus des temps d'accurrence, le processus des temps d'inter-arrivées $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ ou la v.a S_n est "le temps d'attente entre les $(n-1)^{ième}$ et $n^{ième}$ accurrence" :

$$S_n = T_n - T_{n-1}.$$

Mais on peut aussi le faire à partir de processus de comptage $\{N(t) : t > 0\}$.

Définition 1.2.12 *(**Processus de comptage**) Désignons par $N(t)$ $(t > 0)$ le nombre de sauts se produisant dans l'intervalle de temps $[0, t]$ et supposons que $N(0) = 0$. Le* *processus* $\{N(t) : t > 0\}$ *est appelé processus de comptage (voir la figure* (1.6)*).*

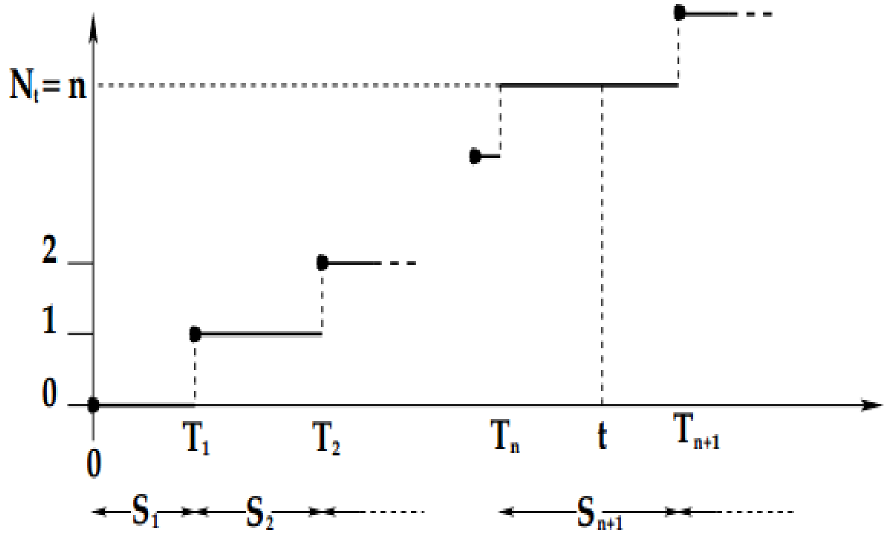


FIG. 1.6 – Processus de comptage et processus associés.

Tout processus de comptage vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout $t \geq 0$ le nombre $N(t)$ est à valeurs entières positives.
2. La fonction $t \to N(t)$ est croissante.
3. Pour tout couple (s, t) $(0 < s < t)$, la différence $N(t) - N(s)$ représente le nombre de sauts se produisant dans l'intervalle de temps $]s, t]$.

Notons que la donnée de $\{N_t : t \geq 0\}$ est équivalente à celle de la suite $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ et que l'on a les relation :

- $\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$
- $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$
- $\{N_s < n \leq N_t\} = \{s < T_n \leq t\}$
- $N_t = \sup \{n, T_n \leq t\}$

Remarque 1.2.3 *Les trajectoires* $t \to N_t(\omega)$ *sont continues à droite et limitées à gauche.*

Chapitre 2

Processus de Poisson homogène

Le processus de Poisson sur la droite est un processus à temps continu et à valeurs entières positives. On dit encore que c'est un processus de comptage, que l'on note par $\{N(t)$: pour $t > 0\}$. Il s'agit d'étudier le nombre aléatoire $N(t)$ de certains événements qui se produisent dans un intervalle de temps $[0, t]$ donné. Sa grande popularité dans les applications vient notamment du fait que beaucoup de calculs le concernant sont explicites.

2.1 Définitions

Une premiére définition de processus de Poisson homogène est la suivante :

Définition 2.1.1 ***(Processus de Poisson)*** *Un processus de comptage $\{N(t), t > 0\}$ est appelé processus de Poisson, d'intensité $\lambda > 0$, s'il vérifie les propriétés suivantes :*

a) $N(0) = 0$;

b) le processus est à accroissements indépendants ;

c) le nombre de tops se produisant dans un intervalle de temps de longueur $t > 0$ suit la loi de Poisson de paramètre λt, c-à-d, pour tout $s > 0$ et tout $t > 0$, on a :

$$P\{N(s+t) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}(n \geq 0).$$

Remarque 2.1.1 *Ce paramètre λ est appelé l'intensité du processus de Poisson $\{N_t : t \geq 0\}$.Il est égal au nombre moyen d'évenements qui se produisent pendant un intervalle de temps de longueur unité ie :*

$$E[N_{t+1} - N_t] = \lambda.$$

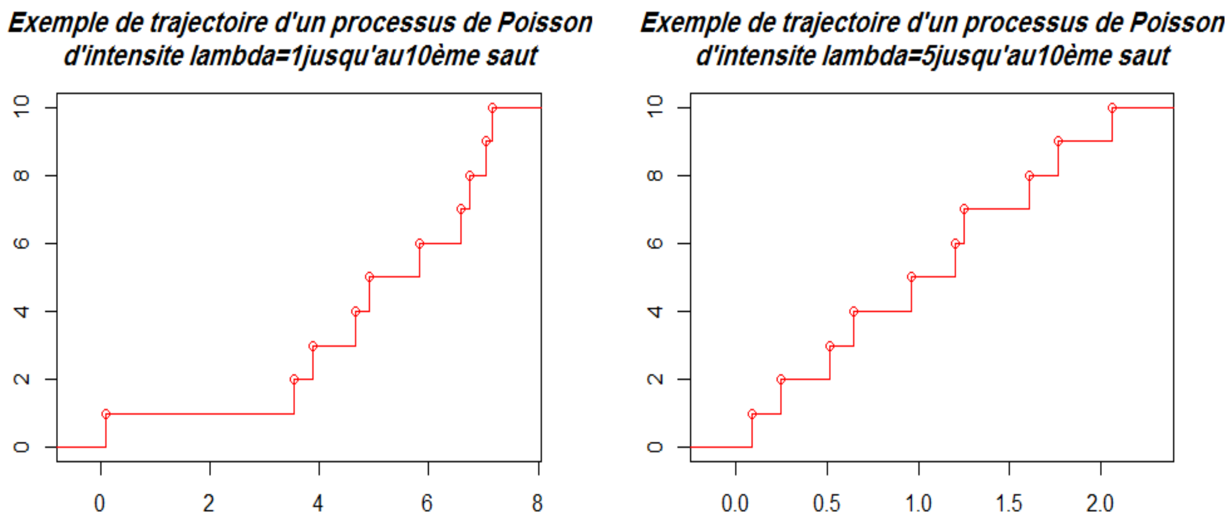


FIG. 2.1 – Trajectoires d'un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$ et $\lambda = 5$.

Une définition alternative est la suivante :

Définition 2.1.2 *Un processus de comptage $\{N(t), t > 0\}$ est appelé processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ si :*

i) $N(0) = 0$;

ii) le processus est à accroissements indépendants, et stationnaires ;

iii) $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$ pour $h \to 0$;

iv) $P(N(h) \geq 2) = o(h)$ pour $h \to 0$.

Rappel : $o(.)$ est une fonction telle que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

Théorème 2.1.1 *Les deux définitions (2.1.1) et (2.1.2) sont équivalentes.*

Preuve. (1⇒2)

Soit $\{N(t),\, t > 0\}$ défini par la définition 2.1.1 et montrons qu'il vérifie les propriétés de la définition 2.1.2.

i) C'est a).

ii) On sait que le processus est à accroissements indépendants par b), et le processus est à accroissements stationnaires car on voit bien que seule la longueur de l'intervalle t intervient dans c).

iii) On fait un développement limité pour $h \to 0$:

$$\begin{aligned} P(N(h) = 1) &= \lambda h \exp(-\lambda h) \quad \text{d'aprés c)} \\ &= \lambda h (1 + o(1)) \quad (\text{développement limité de } \exp(-\lambda h) \text{ pour } h \to 0) \\ &= \lambda h + o(h). \end{aligned}$$

iv) On a, pour h au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} P(N(h) \geq 2) &= \sum_{k \geq 2} P(N(h) = k) \\ &= \sum_{k \geq 2} \exp(-\lambda h) \frac{(\lambda h)^k}{k!} \qquad \text{(d'aprés c))} \\ &= \exp(-\lambda h) \left(\sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda h)^k}{k!} - 1 - \lambda h \right) \qquad \text{(on somme sur } \mathbb{N} \text{ puis on retire les deux premiers termes)} \end{aligned}$$

$$= \exp(-\lambda h)(\exp(\lambda h) - 1 - \lambda h)$$

$$= 1 - \exp(-\lambda h)(1 + \lambda h)$$

$$= 1 - (1 - \lambda h + o(h))(1 + \lambda h) \quad \text{(développement limité de } \exp(-\lambda h), \text{ pour } h \to 0)$$

$$= 1 - 1 - \lambda h + \lambda h + o(h)$$

$$= o(h).$$

$(2 \Rightarrow 1)$

Réciproquement, considérons $\{N(t),\, t > 0\}$ défini par la définition 2.1.2.Montrons qu'il vérifie les propriétés de la définition 2.1.1.

a) C'est i).

b) C'est d'aprés ii).

c) Pour montrer qu'une variable aléatoire $N(t)$ vérifiant la définition 2.1.2 suit une loi de Poisson, nous utiliserons le fait que la transformée de Laplace caractérise la loi.

Tout d'abord, calculons la transformée de Laplace d'une loi de Poisson. Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi Poisson de paramètre $\lambda t > 0$.On a alors $\forall u \geq 0$:

$$\begin{aligned} E\left[\exp(-uX)\right] &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \exp(-un) P(X = n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \exp(-un) \exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= \exp(-\lambda t) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(\lambda t \exp(-u))^n}{n!} \\ &= \exp(-\lambda t) \exp(\lambda t \exp(-u)) \\ &= \exp(\lambda t(\exp(-u) - 1)). \end{aligned}$$

Soit $N(t)$ vérifiant la définition 2.1.2.Calculons sa transformée de Laplace : fixons $u \geq 0$ et définissons $g(t) = E[\exp(-uN(t))]$.

– $\forall h > 0$ on calcule :

$$\begin{aligned}
g(t+h) &= E[\exp(-uN(t+h))] \\
&= E\left[\exp(-uN(t))\exp(-u(N(t+h)-N(t)))\right] \\
&= E[\exp(-uN(t))]E\left[\exp(-u(N(t+h)-N(t)))\right] && \text{(accroissements indépendants)} \\
&= g(t)E\left[\exp(-u(N(h)-N(0)))\right] && \text{(accroissements stationnaires)} \\
&= g(t)E\left[\exp(-uN(h))\right] && (\text{car } N(0)=0).
\end{aligned}$$

En outre, par iii) on a

$$P(N(h)=1) = \lambda h + o(h) \quad \text{pour } h \to 0,$$

et, par iv) on a

$$P(N(h) \geq 2) = o(h) \quad \text{pour } h \to 0,$$

d'où :

$$\begin{aligned}
P(N(h)=0) &= 1 - P(N(h) \geq 1) \\
&= 1 - [P(N(h)=1) + P(N(h) \geq 2)] \\
&= 1 - \lambda h + o(h).
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}
E[\exp(-uN(h))] &= \sum_{n \geq 0} \exp(-un)P(N(h)=n) \\
&= P(N(h)=0) + \exp(-u)P(N(h)=1) + \sum_{n \geq 2} \exp(-un)P(N(h)=n).
\end{aligned}$$

Or,

$$\forall n \geq 2 \quad P(N(h) \geq 2) = \sum_{k \geq 2} P(N(h)=k) \geq P(N(h)=n).$$

D'où on a :

$$\begin{aligned} E[\exp(-uN(h))] &\leq 1-\lambda h+o(h)+\exp(-u(\lambda h+o(h)))+\left(\sum_{n\geq 0}\exp(-un)\right)P(N(h)\geq 2) \\ &= 1-\lambda h+o(h)+\exp(-u(\lambda h+o(h)))+\left(\sum_{n\geq 0}\exp(-un)\right)o(h) \\ &= 1-\lambda h(1-\exp(-u))+o(h). \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$g(t+h)=g(t)[1-\lambda h(1-\exp(-u))+o(h)].$$

– En procédant de même que dans le cas $h>0$, $]0,t+h]$ et $]t+h,t]$ étant disjoints, on obtient :

$$\forall h<0,\quad g(t)=g(t+h)E\left[\exp(-uN(-h))\right] \quad \text{ie} \quad g(t+h)=\frac{g(t)}{E\left[\exp(-uN(-h))\right]}.$$

Or d'après 2.1,on a :

$$\frac{1}{E[\exp(-uN(-h))]}=\frac{1}{1+\lambda h(1-\exp(-u))+o(h)}=1-\lambda h(1-\exp(-u))+o(h).$$

Ainsi, on obtient

$$g(t+h)=g(t)\left[1-\lambda h(1-\exp(-u))+o(h)\right] \quad \text{(comme pour le cas } h>0\text{)}.$$

Finalement,$\forall h\in\mathbb{R}^{\star}$, h petit,

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\lambda g(t)(\exp(-u)-1)+\frac{1}{h}o(h),$$

donc la limite existe quand $h\to 0$. Ainsi g est dérivable et

$$g\prime(t)=\lambda g(t)(\exp(-u)-1).$$

En outre, $\forall t \geq 0, g(t) > 0$ d'où

$$\frac{g\prime(t)}{g(t)} = \lambda\left(\exp(-u) - 1\right),$$

c'est à dire en intégrant :

$$\ln(|g(t)|) = \lambda t\left(\exp(-u) - 1\right) + c \quad \text{avec } c \in \mathbb{R},$$

or $g(0) = 1$ d'où $c = 0$.Ainsi on a :

$$g(t) = \exp(\lambda t(\exp(-u) - 1)).$$

On reconnaît la transformée de Laplace d'une loi de Poisson. On en déduit que $N(t)$ suit une loi de Poisson, d'où c).

■

2.2 Lois des inter-arrivées et des arrivées

2.2.1 Loi des inter-arrivées

Etant donné un processus ponctuel $(T_n)_{n\geq 0}$, on définit la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ des inter-arrivées par :

$$S_n = T_n - T_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

La v.a. réelle S_n représente l'intervalle de temps entre deux arrivées de tops consécutives.On a alors :

Théorème 2.2.1 *Si $\{N(t),\ t \geq 0\}$ est un processus de Poisson (homogène) d'intensité $\lambda > 0$ associé à un processus ponctuel $(T_n)_{n\geq 0}$, alors la suite des inter-arrivées $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ.*

Preuve. Soit X, le temps d'attente avant que le premier événement survienne. Pour tout nombre réel positif x,

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= 1 - P(X > x) \\ &= 1 - P(N(x) = 0) \\ &= 1 - \exp(-\lambda x). \end{aligned}$$

Plus généralement,

$$\begin{aligned} P(T_n - T_{n-1} \leq t) &= 1 - P(T_n - T_{n-1} > t) \\ &= 1 - P(N(T_{n-1} + t) - N(T_{n-1}) = 0) \\ &= 1 - P(N(t) = 0) \\ &= 1 - \exp(-\lambda t). \end{aligned}$$

Donc S_n suit une loi exponentielle. ■

2.2.2 Loi des arrivées

Théorème 2.2.2 *Soit $\{N(t),\, t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ, on sait que les inter-arrivées $(S_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes et exponentielles de paramètre λ. On peut en déduire la loi des arrivées, c-à-d de la suite $(T_n)_{n\geq 0}$. Pour $n \geq 1$, la v.a. $T_n = S_1 + ... + S_n$ suit une loi gamma, elle a pour densité sur $\mathbb{R}^+$:*

$$f_{T_n}(s) = \frac{\lambda}{(n-1)!}(\lambda s)^{n-1} \exp(-\lambda s).$$

Preuve. T_n est une somme de n v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Manifestement, T_1 suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, et celle-ci coïncide avec la loi Gamma $\Gamma(\lambda, 1)$. On procède par récurrence.

Supposons l'énoncé vrai pour T_n. On a alors,

$$\begin{aligned} f_{T_{n+1}}(s) &= f_{T_n+S_{n+1}}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{T_n}(u) f_{S_{n+1}}(s-u)du \\ &= \int_0^s \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n u^{n-1}\exp(-\lambda u)\lambda\exp(-\lambda(s-u))du \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\exp(-\lambda s)\int_0^s u^{n-1}du \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\exp(-\lambda s)s^n. \end{aligned}$$

■

Définition 2.2.1 ***(Définition du processus de Poisson à l'aide des temps inter-arrivées).*** *On considère $(S_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes, de loi exponentielle de paramètre λ. On définit $T_0 = 0$ et on pose*

$$T_n = S_1 + S_2 + ... + S_n.$$

Alors le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ définit par

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{T_n \leq t} = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}.$$

est un processus de Poisson d'intensit λ.

Remarque 2.2.1 *Les trois définitions (2.1.1), (2.1.2) et (2.2.1) sont équivalentes.*

2.3 Propriétés du processus de Poisson

Le nom de processus de Poisson est justifié par le théorème suivante :

Théorème 2.3.1 *Pour tout nombre réel $t > 0$, la v.a $N(t)$ est de loi de Poisson de* *paramètre λt, c-à-d que pour tout entier n non négatif,*

$$P(N(t) = n) = \exp(-\lambda t)\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Preuve. Puisque $N(t) = n \Leftrightarrow T_n \leq t < T_{n+1}$,on a immédiatement

$$\begin{aligned} P\left(N(t) = n\right) = \quad & P\left(T_n \leq t < T_{n+1}\right) = P\left(T_{n+1} > t\right) - P\left(T_n > t\right) \\ &= \frac{\lambda^n}{n!}\int_t^\infty \left(x^n \lambda \exp(-\lambda x) - n x^{n-1} \exp(-\lambda x)\right) dx \\ &= \frac{\lambda^n}{n!}\int_t^\infty \frac{d}{dx}\left(-x^n \exp(-\lambda x)\right) dx \\ &= \exp(-\lambda t)\frac{(\lambda t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

■

Propriété 2.3.1 *Un processus de Poisson est localement continu en probabilité.*

Preuve. *Puisqu'un processus de Poisson est à accroissements stationnâmes, on a*

$$\begin{aligned} P\{N(t+h) - N(t) \geq 1\} \quad &= P\{N(h) - N(0) \geq 1\} = P\{N(h) \geq 1\} \\ &= 1 - P\{N(h) = 0\} = 1 - \exp(-\lambda h) \to 0, \end{aligned}$$

lorsque h tend vers 0. ■

Les expressions des fonctions moyenne et covariance du processus de Poisson homogène sont données par la proposition suivante

Proposition 2.3.1 *Soit $\{N(t),\, t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ, pour tous $t, s \geq 0$*

$$E[N(t)] = Var[N(t)] = \lambda t \quad et\; Cov[N(t), N(s)] = \lambda \min(s,t).$$

Preuve. $N(t)$ suit la loi de Poisson de paramètre λt alors le résultat de l'espérance immédiat. Notons de plus que

$$Var[N(t)] = Cov[N(t), N(t)] = \lambda \min(t, t) = \lambda t.$$

Pour le reste du calcule, on a

$$N(t)N(s) = \frac{(N(t))^2 + (N(s))^2 - (N(t) - N(s))^2}{2}, \forall s < t.$$

Prenons alors $s < t$,

$$\begin{aligned}
Cov[N(t), N(s)] &= E[(N(t) - E[N(t)])(N(s) - E[N(s)])] \\
&= E[(N(t) - \lambda t)(N(s) - \lambda s)] \\
&= \frac{E[(N(t))^2] + E[(N(s))^2] - E[(N(t) - N(s))^2]}{2} - \lambda^2 ts \\
&= \frac{Var[N(t)] + (E[N(t)])^2 + Var[N(s)]}{2} \\
&\quad + \frac{(E[N(s)])^2 - Var[N(t) - N(s)] - (E[N(t) - N(s)])^2}{2} - \lambda^2 ts \\
&= \frac{\lambda t + (\lambda t)^2 + \lambda s + (\lambda s)^2 - \lambda(t - s) - \lambda^2 (t - s)^2}{2} - \lambda^2 ts \\
&= \lambda s = \lambda \min(s, t).
\end{aligned}$$

Car $s < t$. ■

2.4 Propriétés supplémentaires

2.4.1 Somme de deux processus de Poisson

Considérons deux processus de Poisson indépendants et on cherche la loi de la somme de ces deux

processus. On sait déjà que la somme de variables de Poisson indépendante suit une loi de Poisson. Il en

est de même pour les processus de Poisson.

Proposition 2.4.1 ***(Somme de deux processus de Poisson)*** *Considérons deux processus de Poisson $(N^1(t))_{t\geq 0}$ et $(N^2(t))_{t\geq 0}$ indépendants d'intensité respective $\lambda_1$et λ_2. Alors le processus $N(t) = N^1(t) + N^2(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda_1 + \lambda_2$.*

Preuve. On considère le processus

$$N(t) = N^1(t) + N^2(t).$$

On a $N(0) = 0$. Par ailleurs, si $t, s > 0$, alors

$$N(t+s) - N(s) = (N^1(t+s) - N^1(s)) + (N^2(t+s) - N^2(s)).$$

N^1 est un processus de Poisson, par conséquent $N^1(t+s) - N^1(s)$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda_1 t)$ et est indépendant de $N^1(s)$. De même $N^2(t+s) - N^2(s)$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda_2 t)$ et est indépendant de $N^2(s)$. Les processus N^1 et N^2 étant indépendants, obtient que $N(t+s) - N(s)$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 t + \lambda_2 t)$ et est indépendant de $N(s) = N^1(s) + N^2(s)$. ■

Exemple 2.4.1 *Considérons une compagnie d'assurance qui a une branche assurance automobile et une branche assurance habitation. On peut modéliser les instants d'arrivée des sinistres à l'aide de processus de Poisson indépendants pour chacune des branches, d'intensité λ_a pour la branche automobile et d'intensité λ_h pour la branche habitation. Au final, pour la compagnie les instants d'arrivée d'un sinistre sont les temps d'arrivée d'un processus de Poisson d'intensité $\lambda_a + \lambda_h$.*

2.4.2 Décomposition d'un processus de Poisson

On va maintenant voir que si on décompose un processus de Poisson selon des classes, on obtient alors plusieurs processus de Poisson.On considère un processus de Poisson $(N(t))_{t\geq 0}$ de paramètre λ permettant de comptabiliser des événements liés à une population. Les individus de cette population peuvent être soit du type I soit du type II. Par exemple : soit de sexe masculin, soit de sexe féminin si on regarde les visiteurs dans un musée, ou soit des sinistres “habitation” soit des sinistres “automobile” si on considère une compagnie d'assurance. On suppose que la proportion d'individus de type I est égale à p (la proportion d'individus de type II est par conséquent $(1-p)$). On note $N^1(t)$ le nombre de sauts de type I intervenus dans l'intervalle de temps $[0,t]$ et $N^2(t)$ le nombre de sauts de type II intervenus dans l'intervalle $[0,t]$.On a par conséquent

$$N(t) = N^1(t) + N^2(t).$$

Proposition 2.4.2 ***(Décomposition d'un processus de Poisson)*** *Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre λ permettant de comptabiliser une population divisée en deux classes. La proportion d'individus dans la première classe est égale à p et la proportion d'individus dans la seconde classes est $(1-p)$.Les processus $(N^1(t))_{t\geq 0}$ et $(N^2(t))_{t\geq 0}$ obtenu en séparant les sauts par rapport à chaque classe sont des processus de Poisson indépendants d'intensité respective $p\lambda$ et $(1-p)\lambda$.*

Remarque 2.4.1 *Cette proposition se généralise facilement lorsque qu'on découpe la population en k sous groupes qui sont distribués selon les proportions $p_1, p_2, ..., p_k$ $\left(\sum_{i=1}^{k} p_i = 1\right)$.*

Preuve. Montrons que N^1 et N^2 sont des processus de Poisson au sens de la première définition. On a de façon évidente que $N^1(0) = N^2(0) = 0$, car $N(0) = 0$.Cherchons la loi jointe de $(N^1(t), N^2(t))$: soit $n, k \in \mathbb{N}$ et $t > 0$ fixés, on a

$$\begin{aligned} P(N^1(t) = n, N^2(t) = k) &= P(N(t) = n + k \text{ dont } n \text{ sauts sont de type } I \text{ et } k \text{ de type } II) \\ &= C_{n+k}^{n} p^n (1-p)^k \frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!} \exp(-\lambda) \\ &= \frac{(p\lambda)^n}{n!} \exp(-p\lambda) \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!} \exp(-(1-p)\lambda). \end{aligned}$$

Par conséquent $N^1(t)$ et $N^2(t)$ sont indépendants et suivent respectivement les lois de Poisson $\mathcal{P}(p\lambda)$ et $\mathcal{P}((1-p)\lambda)$. Étudions les accroissements de N^1 (le raisonnement est identique pour N^2). Soient $t, s \geq 0$, $N^1(t+s) - N^1(s)$ correspond au nombre de sauts du type I du processus N. Comme N a des accroissements indépendants, les sauts de type I de N sur $[s, t+s]$ sont indépendants de tous les sauts intervenus avant l'instant s, et donc indépendant de ceux de type I avant l'instant s. Donc N^1 a des accroissements indépendants. On montre que les accroissements sont stationnaires de la même façon que précédemment en calculant

$$P(N^1(t+s) - N^1(s) = n, N^2(t+s) - N^2(s) = k) \text{ pour tout } s, t \geq 0 \text{ et } k, n \in \mathbb{N}.$$

■

Exemple 2.4.2 *On considère une compagnie d'assurance qui s'occupe d'assurance habitation et assurance automobile. On suppose que sa proportion de contrat automobile est égal à* $3/4$. *On suppose que les sinistres arrivent selon un processus de Poisson d'intensité* 10 *par mois. Le probabilité de ne pas avoir de sinistre habitation pendant* 3 *mois peut être calculé de la manière suivante. Le nombre de sinistre habitation est un processus de Poisson de paramètre* $1/4 \times 10 = 2.5$ *par mois. Par conséquent la probabilité de ne pas avoir de sinistre habitation pendant trois mois est égale à*

$$P(\textit{pas desinistre habitation pendant } 3 \textit{ mois}) = P(T_1^h > 3) = \exp(-3 \times 2.5) \simeq 5.53 \times 10^{-4}.$$

où T_1^h *représente le premier instant où un sinistre habitation intervient.*

2.4.3 Loi conditionnelle

Soit $U_1, ..., U_n, ...$ des v.a's indépendantes et uniformément distribuées sur un intervalle de temps fini et fixé $[0, t]$. Soit $S_1, ..., S_n, ...$les instants de sauts d'un processus de Poisson homogène d'intensité λ.

Théorème 2.4.1 *Conditionnellement à* $\{N(t) = n\}$*, l'ensemble des instants de sauts* $\{S_1, ..., S_n\}$ *a la même loi que* $\{U_1, ..., U_n\}$*.En d'autres termes, le vecteur aléatoire* $(S_1, ..., S_n)$ *a la même loi que* $n^{éme}$ *statistique d'ordre sur* $[0, t]$*, i.e. sa densité est donnée pour* $0 \leq T_1 \leq ... \leq T_n \leq t$ *par*

$$g_{(S_1,...,S_n)}(T_1, ..., T_n) = \frac{1}{\frac{t^n}{n!}} = \frac{n!}{t^n}.$$

Rappelons que si $U_1, ..., U_n$ *sont des variables indépendantes uniformement distribuées sur* $[0, t]$*, les* $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ *définis à partir des* U_i *en les rangeant par ordre croissant forment la* $n^{éme}$ *statistique d'ordre sur* $[0, t]$*. Les* U_i *ont pour densité jointe*

$$g_{(U_1,...,U_n)}(T_1, ..., T_n) = \frac{1}{t^n} \mathbf{1}_{\{\forall i, 0 \leq T_i \leq t\}},$$

alors que les V_i *ont pour densité*

$$g_{(V_1,...,V_n)}(T_1, ..., T_n) = \frac{n!}{t^n} \mathbf{1}_{\{0 \leq T_1 \leq ... \leq T_n \leq t\}}.$$

Ce résultat est trés utile en simulation. En effet quand on veut simuler un processus de Poisson jusqu'à

l'instant t. Le nombre de sauts sur cet intervalle de temps suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$. On simule par

conséquent $N \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, puis on simule N variables uniforme sur $[0, t]$ que l'on ordonne par ordre croissant

pour avoir les instants de sauts de notre processus.

En **R**, cela donne le programme suivant :

Longueur de l'intervalle de temps.

$T = 30$

Intensite du parametre de Poisson.

lambda=0.3

Simulation du nombre de sauts N sur l'intervalle $[0, T]$.

N=rpois(1,lambda*T)

Simulation de N variables uniforme sur $[0, T]$ independantes.

U=runif(N,min=0,max=T)

Ordonnement des variables uniformes par ordre croissant

X=sort(U)

Dessin d'une realisation du processus de Poisson sur l'intervalle $[0, T]$..

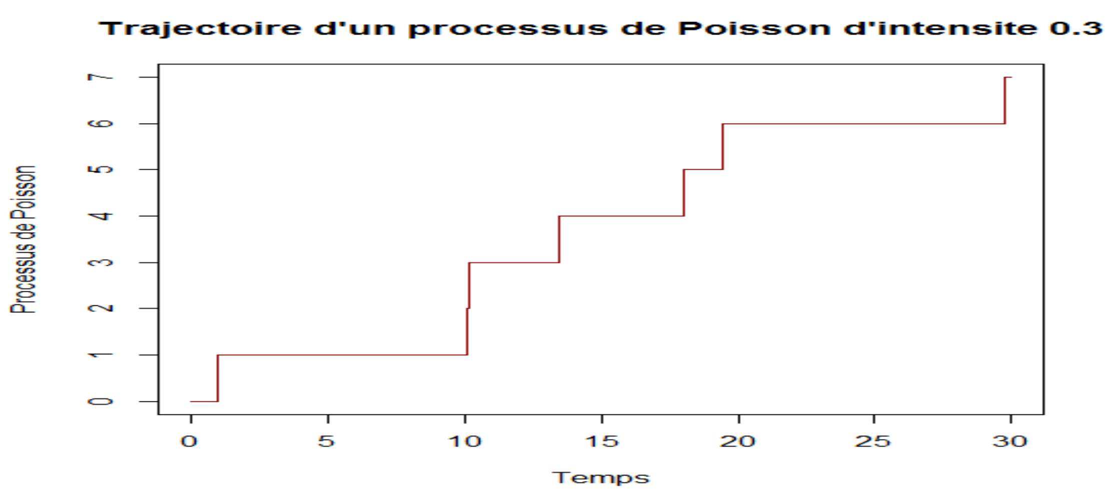
plot(c($0, X, T$),c($0 : N, N$),type="s",col="dark red",

xlab="Temps",ylab="Processus de Poisson",

main="Trajectoire d'un processus de Poisson d'intensite 0.3")

dev.off()

Voici le résultat :



Théorème 2.4.2 *Soit* $(N(t))_{t\geq 0}$ *un processus de Poisson homogène. Pour* $s < t$ *et pour tous* $0 \leq m \leq n$, *la loi de* $N(s)$ *sachant que* $N(t) = n$ *est une loi binômiale de paramètres*

$(n, \frac{s}{t})$:

$$P(N(s) = m/N(t) = n) = C_n^m (\frac{s}{t})^m (1 - \frac{s}{t})^{n-m}.$$

Preuve.

$$P^{[N(t)=n]}\left([N(s)=k]\right) = \frac{P\left([N(s)=k] \cap [N(t)=n]\right)}{P\left([N(t)=n]\right)}$$

$$= \frac{P\left([N(s)=k] \cap [N(t)-N(s)=n-k]\right)}{P\left([N(t)=n]\right)}$$

$$= \frac{P\left([N(s)=k]\right) P\left([N(t)-N(s)=n-k]\right)}{P\left([N(t)=n]\right)}$$

$$= \frac{P\left([N(s)=k]\right) P\left([N(t-s)=n-k]\right)}{P\left([N(t)=n]\right)}$$

$$= \frac{\exp\left(-\lambda s\right) \frac{(\lambda s)^k}{k!} \exp\left(-\lambda\left(t-s\right)\right) \frac{\left(\lambda\left(t-s\right)\right)^k}{(n-k)!}}{\exp\left(-\lambda t\right) \frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= C_n^k \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}.$$

■

2.5 Comportement asymptotique

Soit à nouveau $\{N_t, t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ. On a :

$$E[N_t] = \lambda t, \quad Var[N_t] = \lambda t.$$

Proposition 2.5.1 *Soit $\{N_t, t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ. Alors*

$$\frac{N_t}{t} \to \lambda \text{ p.s., quand } t \to \infty.$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que

$$N_n = \sum_{1 \leq i \leq n} [N_i - N_{i-1}]$$

est la somme de n v.a's indépendantes, de même loi de Poisson de paramètre λ (donc intégrable). Il résulte donc de la loi forte des grands nombres que

$$\frac{N_n}{n} \to \lambda \text{ p.s., quand } n \to \infty.$$

Or, avec la notation $[t]$ =partie entière de t,

$$\frac{N_t}{t} = \frac{N_{[t]}}{[t]} \times \frac{[t]}{t} + \frac{N_t - N_{[t]}}{t}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\sup_{n<t<n+1} \frac{N_t - N_n}{n} \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

Or si

$$\begin{aligned} \xi_n &= \sup_{n<t<n+1} N_t - N_n, \\ &= N_{n+1} - N_n, \end{aligned}$$

les $\{\xi_n\}$ sont i.i.d. et intégrables. Donc

$$\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} \to \lambda \text{ p.s.},$$

d'où

$$\frac{\xi_n}{n} \to 0 \text{ p.s.}$$

■

On a un "théorème de la limite centrale" :

Proposition 2.5.2 *Soit* $\{N_t, t \geq 0\}$ *un processus de Poisson d'intensité* λ. *Alors*

$$\frac{N_t - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} \to Z \text{ en loi, quand } t \to \infty.$$

où Z *est une v.a.r de loi gaussienne centrée réduite (i.e. d'espérance* 0 *et de variance* 1*).*

Preuve. On raisonne comme dans la preuve précédente.

$$\frac{N_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}} \to Z \text{ en loi, quand } n \to \infty,$$

d'après le théorème de la limite centrale "classique". Et

$$\frac{N_t - N_{[t]}}{\sqrt{\lambda [t]}} \leq \frac{\xi_{[t]}}{\sqrt{\lambda [t]}},$$

qui tend en probabilité vers zéro quand $t \to \infty$ puisque

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{\lambda n}} > \epsilon\right) &= P\left(\xi_n > \epsilon\sqrt{\lambda n}\right) \\ &= P\left(\xi_1 > \epsilon\sqrt{\lambda n}\right) \\ &\to 0, \text{ quand } n \to \infty. \end{aligned}$$

Donc a fortiori $\dfrac{N_t - N_{[t]}}{\sqrt{\lambda [t]}} \to 0$ en probabilité quand $t \to \infty$. Finalement :

$$\frac{N_t - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} = \frac{N_{[t]} - \lambda [t]}{\sqrt{\lambda [t]}} \times \sqrt{\frac{[t]}{t}} + \frac{N_t - N_{[t]}}{\sqrt{\lambda t}} \times \sqrt{\frac{[t]}{t}} + \sqrt{\lambda}\frac{[t] - t}{\sqrt{t}},$$

et on sait que si $X_n \to X$ en loi, $Y_n \to 0$ en probabilité, alors

$$X_n + Y_n \to X \text{ en loi.}$$

■

2.6 Estimation de l'intensite par la méthode du maximum de vraisemblance (MV)

Pour estimer l'intensité d'un processus de Poisson homogène, on peut envisager deux cas différents, menant à deux estimateurs différents.
Soit un processus de Poisson $\{N(t) : t \geq 0\}$, de l'intensité λ inconnue. On se propose d'estimer cette intensité à partir d'observations.

♦ Le processus est observé jusqu'à l'instant $t > 0$.

On dispose alors des données suivantes :

- n, le nombre de sauts dans $[0, t]$;
- Les instants $T_1, ..., T_n$ $(0 < T_1 < T_2 < ... < T_n < t)$, où se sont produits les n sauts consécutifs dans $[0, t]$.La vraisemblance de ces observations est donnée par

$$\begin{aligned} L(n, T_1, ..., T_n; \lambda) &= P\{N(t) = n\}\, g(T_1, ..., T_n / N(t) = n) \\ &= \exp(-\lambda t)\frac{(\lambda t)^n}{n!}\frac{n!}{t^n} = \lambda^n \exp(-\lambda t) \ (0 < T_1 < T_2 < ... < T_n < t), \end{aligned}$$

d'où

$$\log L = n \log \lambda - \lambda t,$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log L = \frac{n}{\lambda} - t = 0 \implies \hat{\lambda} = \frac{n}{t}.$$

Ainsi l'estimation par le maximum de vraisemblance est donné par

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{t}.$$

L'estimateur correspondant est obtenu en remplaçant n par $N(t)$:

$$\hat{\lambda} = \frac{N(t)}{t}.$$

Proposition 2.6.1 *L'estimateur $\hat{\lambda}$ est non biaisé, exhaustif et complet.*

Preuve. En effet,

$$E[\hat{\lambda}] = \frac{1}{t}E[N(t)] = \frac{1}{t}\lambda t = \lambda.$$

Comme la vraisemblance $L(T_1, ..., T_n; \lambda)$ est de la forme $\lambda^n \exp(-\lambda t)$, l'estimateur est bien exhaustif. Enfin, comme $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt et que la loi de Poisson est complète, l'estimateur $\hat{\lambda}$ est complet. ■

Puisque $\hat{\lambda}$ est non-biaisé, exhaustif, complet, c'est l'unique estimateur non-biaisé de variance minimum de λ.

♦ Le processus est observé jusqu'à $n^{ième}$ saut.

Nous disposons alors de la donnée des instants $T_1, ..., T_n$ des apparitions des sauts.
La vraisemblance est donnée par :

$$L(T_1, ..., T_n; \lambda) = \lambda \exp(-\lambda T_1)...\lambda \exp(-\lambda T_n) = \lambda^n \exp(-\lambda(T_1 + ... + T_n))$$
$$\log L = n \log \lambda - \lambda(T_1 + ... + T_n);$$

par suite,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log L = \frac{n}{\lambda} - (T_1 + ... + T_n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{n}{T_1 + ... + T_n}.$$

En posant $S_n = T_1 + ... + T_n$,instant d'arrivée du $n^{ième}$ saut, on voit que l'estimateur correspondant est

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{S_n}.$$

Conclusion

Le processus de Poisson est un processus de comptage stochastique qui se produit naturellement dans les situations de la vie quotidienne où il y a une grande population d'individus qui, plus ou moins indépendamment les uns des autres, ont une faible probabilité de contribuer au compte dans le prochain petit intervalle de temps. Le Processus de Poisson a de belles propriétés mathématiques qui en font un très puissant outil de modélisation et d'analyse stochastiques.

Dans ce travail, nous avons étudié le processus de Poisson homogène ainsi que ces propriétés fondamentales, et estimer l'intensité λ par la méthode de maximum de vraisemblance.

Bibliographie

[1] Brémaud, P. (2012). An introduction to probabilistic modeling. Springer Science & Business Media.

[2] Caumel, Y. (2011). Probabilités et processus stochastiques. Springer.

[3] Dodge, Y., & Melfi, G. (2008). Premiers pas en simulation. Springer Science & Business Media.

[4] Foata, D., & Fuchs, A. (2002). Processus stochastiques : processus de Poisson, chaînes de Markov et martingales : cours et exercices corrigés. Dunod.

[5] Gaudoin, O. (2009). Principes et Méthodes Statistiques. Ensimag-2ème année. INP Grenoble. Lien : *https ://www-ljk.imag.fr/membres/Olivier.Gaudoin/PMS.pdf.*

[6] Guidoum, A. (2012). Conception d'un Pro logiciel interactif sous R pour la simulation de processus de diffusion (Doctoral dissertation, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene).

[7] Hsu, H. P. (1996). Theory and problems of probability, random variables, and random processes (p. 77). New York : McGraw-hill.

[8] Lebarbier, E., & Robin, S. (2007). Processus de Poisson Processus de Naissances et Morts.

[9] Lejeune, M. (2010). Statistique : la théorie et ses applications. Springer, Paris.

[10] Lessard, S. (2014). Processus stochastiques : cours et exercices corrigés. Ellipses.

[11] Ross, S. M. (2014). Introduction to probability models. Academic press.

[12] Tassi, P., & Legait, S. (1990). Théorie des probabilités en vue des applications statistiques. Editions Technip.

[13] Veysseyre, R. (2006). Aide-mémoire Statistique et probabilités pour l'ingénieur, Dunod. Détection CFCAR en Milieux Non-Gaussiens Corrélés.Boulay, J-P. (2010). Statistique mathématique : Applications commentées. Ellipses, Paris.

Annexe A : Logiciel *R*

Le langage **R** est un logiciel dans lequel de nombreuses techniques statistiques, il comporte des moyens qui rendent possible la manipulation des données, les représentations graphiques et les calculs. Dans ce mémoire on va donner les représentations graphiques des quelques lois des probabilités et on va simuler quelques processus stochastiques.

2.7 lois des probabilités et processus stochastiques

2.7.1 lois des probabilités

Loi exponentielle

```
> curve(dexp(x,rate=1),from=0,to=10,xlab="",ylab="",main="Densité de la loi exponentielle",col=3)
> curve(dexp(x,rate=3),from=0,to=10,add=T,col=2)
> curve(dexp(x,rate=5),from=0,to=10,add=T,col=4)
> legend(x=4,y=0.4,legend=c("lambda=5","lambda=3","lambda=1"),col=c(3,2,4),lty=1)
```

Loi de Poisson

```
> par(mfrow=c(2,2))
> plot(table(rpois(100,1)),type="h",lwd=2,xlab="",ylab="",main="Poisson λ=1")
> plot(table(rpois(100,3)),type="h",lwd=2,xlab="",ylab="",main="Poisson λ=3")
> plot(table(rpois(100,6)),type="h",lwd=2,xlab="",ylab="",main="Poisson λ=6")
```

> plot(table(rpois(100,9)),type="h",lwd=2,xlab="",ylab="",main="Poisson λ=9")

Loi binomiale

curve(pbinom(x,10,0.2),from=0,to=10,col=2)

Loi uniforme

> par(mfrow=c(1,2))

> curve(punif(x),xlab="",from=-2,to=2,ylab="",col=2,main="Fonction de répartition")

> curve(dunif(x),xlab="",from=-2,to=2,ylab="",col=2,main="Densité")

2.7.2 processus stochastiques

processus de Bernoulli

Le processus X_t défini par la figure (1.4) se simule de la facon suivante :

> proba=0.5 # probabilité de succès

> N=10 # nombre d'instants

> X=rbinom(N,1,proba) # valeurs du processus (Bernoulli).

Et le graphique de la Figure ()

> plot(0 :(N-1),X,type="p",col=2,xlab=expression(paste("temps",italic(t))),

ylab=expression(italic(X[t](omega))),

ylim=c(-0.6,1.6),xaxt="n",yaxt="n",pch=20,axes=FALSE)

> box(col="gray95")

> axis(1,0 :(N-1),col=4)

> axis(2,0 :1,col=4)

Marche aléatoire

Le processus X_t défini par la figure (1.5) se simule de la façon suivante :

> proba=0.5 # probabilité p

```
> N=100 # nombre d'instants
> Tsauts=0 :(N-1) # instants de sauts
> Sauts=cumsum(2*(rbinom(N,1,proba)-0.5)) # valeurs du processus.
```

Et le graphique de la figure (1.5) et obtenu ainsi :

```
> plot(Tsauts,Sauts,type="l",axes=FALSE,col=2,
xlab=expression(paste("temps",italic(t))),
ylab=expression(italic(X[t](omega))),ylim=c(0,15))
> box(col="gray95")
> axis(1,col="grey")
> axis(2,col="grey")
```

Processus de Poisson

La simulation du processus de Poisson se fait de la facon suivante :

```
> par(mfrow=c(1,2)) # diviser la fenêtre graphique en un ligne et 2 colonnes.
> NSaut=function(n,lambda){cumsum(rexp(n,lambda))}
> n=10
> lambda=1
> t=NSaut(n,lambda)
> y=seq(0,n,by=1)
> F=stepfun(t,y) # renvoie une fonction en escalier.
```

Et le graphique de la figure (2.1) est obtenu ainsi :

```
> plot(F,ann=FALSE,col="2")
> title(main=paste("Exemple de trajectoire d'un processus de Poisson",
"\nd'intensite lambda=",lambda,"jusqu'au",n,"ème saut",sep=""),col.main="black"
,font.main=4) # désingner le titre de ce graphe.
> title(xlab="temps").
> lambda=5
```

```
> t=NSaut(n,lambda)
> y=seq(0,n,by=1)
> F=stepfun(t,y) # renvoie une fonction en escalier.
> plot(F,ann=FALSE,col="2")
> title(main=paste("Exemple de trajectoire d’un processus de Poisson",
"\nd’intensite lambda=",lambda,"jusqu’au",n,"ème saut",sep=""),col.main="black",
font.main=4) # désingner le titre de ce graphe.
> title(xlab="temps").
```

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abrévariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\mathcal{B}(n,p)$	Loi binomiale de paramètre n et p.
c-à-d	C'est à dire.
càdlàg	continue à droite avec limite à gauche.
Cov	Fonction d'autocovariance.
$\mathcal{E}(\lambda)$	Loi exponentielle de paramètre λ.
$E[X]$	Espérance mathématique de X.
exp	Fonction exponentielle.
F	Fonction de répartition.
f	Densité de probabilité.
G_X	Fonction génératrice des probabilités de la variable X.
iid	Indépendantes identiquement distribuées.
L	Fonction vraisemblance.
log	Fonction logarithme.
M_X	Fonction génératrice des moments.
N	Processus de comptage.
$\mathcal{P}(\lambda)$	Loi de Poisson de paramètre λ.

S_n	Processus des temps d'inter-arrivées.
$\mathbb{T}$	Ensemble d'indices.
T_n	Temps d'accurrencede $n^{ième}$ événement.
$\mathcal{U}([a,b])$	Loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$.
v.a	Variable aléatoire.
$Var(X)$	Variance mathématique de X.
$(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$	Processus stochastique.
X	Population.
$(X_1, X_2..., X_n)$	Échantillon de taille n de X.
$\Gamma(n,\lambda)$	Loi Gamma de paramètre n et λ.
$\mathbf{1}_A$	Fonction indicatrice de l'ensemble A.
C_n^m	Combinaison