République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique


**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**


Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Probabilités**

Par


**BERRICHE Iman**


Titre :

# Théorème de Girsanov et application

SETENU LE $$/06/2018

DEVANT LE

Membres du Comité d'Examen :

| | | | |
|---|---|---|---|
| MCA. | **CHALA Adel** | UMKB | Encadreur |
| MCA. | **GHOUL Abdelhak** | UMKB | président |
| MAA. | **BEROUIS Nassima** | UMKB | Examinateur |

Juin 2018

# Dédicace

*$\mathcal{A}$ homme le plus fort, le plus courageux et le plus important dans mon vie mon père*

**"BERRICHE Mohamed"** *qui ma toujours assistance pour présévérer dans mes études, et je le remercie pour ses efforts et ses sacrifices.*

*$\mathcal{A}$ chère mère, la femme qui sacrifie pour moi tout le temps, le soleil qui éclaire mon chemin et mon vie symbole d'amour elle est toujours dans mon coeur :* ***DjAHRA Djamila****.*

$\mathcal{A}$ mon très cher mari : **AbbASSI Mohamed.**

*$\mathcal{A}$ mes frères :* **Ibrahim, Zohair, Ossama.**

*$\mathcal{A}$ mes étoiles les plus brillantes, mon soeurs qui m'ont m'encouragée :* ***Nabila, Fatima, Somai, Rima, Wiame.***

$\mathcal{A}$ tous la famille de mari.

*$\mathcal{A}$ chères amis*

*Je tiens a remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion de math 2018.*

*Enfin je dédie cette mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.*

# REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont tout premièrement à dieu le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné pour terminer mon travail de recherche.

Je tiens à exprimer mes sincères et chaleureux remerciements à mon encadareur monsieur le docteur **CHALA Adel** , qui m'a suivi et dirigé.

Je voudrais également remercier tous les membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'évaluer ce travail.

Je présente tous mes remerciements aux enseignants du département -MATH- sans exceptions qui ont contribué à ma formation.et à toutes les personnes qui n'ont manqué aucun effort et ont contribué de près et de loin à la réalisation de ce travail par leurs encouragements.

Je remercie toute ma famille pour leur soutien moral et leur aide, ainsi que tous ce qui m'ont soutenu et m'ont aidé tout le long de cette étude et toutes les personnes qui ont contribué directement ou indirectement à ce travail et à tous ceux qui montrés disposés à mes questionnements.

# Table des matières

# Introduction

Un processus stochastique ou processus aléatoire (voir calcul stochastique) ou fonction aléatoire (voir probabilité) représente une évolution, discrète ou à temps continu. En réalité, des sciences de la terre aux sciences humaines. puis nous avons parlé de mouvement brownien, il est observé par le botaniste Robert brown en 1827. Brown observait alors des grains de pollen au microsope. Celles-ci étaient alors sujettes à un mouvement brownien dans le liquide. puis Norbert Wiener donne une définition mathématique en 1923 en construisant une mesure de probabilité sur l'espace des fonctions réelles. Il étudie, la continuité et non-dérivabilité des trajectoires du mouvement brownien. Il définit également l'intégrale de Wiener (l'intégrale par rapport au mouvement brownien).

Dans la théorie des probabilités, le théorème de Girsanov indique comment un processus stochastique change si l'on change de mesure. Ce théorème est particulièrement important dans la théorie des mathématiques financières. Ce type ont été prouvés pour la première fois dans les années 1940 par Cameron-Martin, puis en 1960 par Girsanov. Ce théorème peut être utilisé pour trouver l'unique probabilité risque neutre dans l'application à la finance.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le première chapitre est consacré aux introduction au processus stochastique. Dans le deuxième chapitre est difinit le théorème de Girsanov. Le dernier chapitre on donne l'application au calcul de risque-sensitive par financier.

# Chapitre 1

# Introduction au processus stochastique

L'objectif de ce chapitre, nous rappelons quelques résultats de calcul stochastique utilisés le long de ce mémoire. Ce chapitre est prendre du référence Briand [1].

## 1.1 Tribus $(\sigma - alg\acute{e}bre)$

Soit $\Omega$ un ensemble quelconque.

**Définition 1.1** *Soit $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, est dite une $\sigma$-algébre sur $\Omega$ si :*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. *Stabilité par passage au complémentaire .i.e :* $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$.
3. *Stabilité par union dénombrable .i.e :* $A_1,\ A_2,\ A_3, ...,\ A_n \subset \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Alors on dit que $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace mesurable, et les éléments de $\Omega$ sont appelés les ensembles mesurables.

**Définition 1.2** *Soit $\Omega$ un ensemble. Une mesure de probabilité (ou distribution de probabilité) est une application définie sur une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ de la forme $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ telle que*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

2. *Si $A$ et $B$ sont deux parties disjointes de $\Omega$, alors*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

*Et plus généralement, si $(A_n)$ et une suite de parties deux à deux disjointes de $\Omega$, alors*

$$\mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

*On dit que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilité.*

## 1.2 Processus stochastique

Soit $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^n$.

**Définition 1.3** *On appelle processus stochastique (ou fonction aléatoire) une application $X$ de $\mathbb{T} \times \Omega$ dans $E$, telle que pour $t \in \mathbb{T}$, l'application $\omega \mapsto X(t, \omega) = X_t(\omega)$ est une variable aléatoire, i.e est mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ avec $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ c'est la borélienne dans $\mathbb{R}^n$.*

**Définition 1.4** *(Filtration) Une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de sous tribus de $\mathcal{F}$ .i.e $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $\forall s \leq t$, on dit que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité filtré.*

**Définition 1.5** *(Filtration naturelle) Une filtration est dite naturelle si elle vérifie deux propriétés supplémentaires :*

1. *Les négligeables au sens large sont dans tous les $\mathcal{F}_t$, i.e, si $\mathbb{P}(A) = 0 \Longrightarrow A \in \mathcal{F}_0$.*

2. *La filtration est continue à droite , $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} := \cap_{s\,<\,t} \mathcal{F}_s$.*

**Définition 1.6** *(Processus mesurable) Un processus $X$ est dite mesurable si l'application $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ est mesurable par rapport au tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$.*

**Définition 1.7** *(Processus adapté) Un processus $X$ est dite adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si $X_t$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable, pour tout $t$.*

**Définition 1.8** *(Processus prévisible) On dit qu'un processus est prévisible (pour la filtration $\mathcal{F}_t$) si $X_0$ est $\mathcal{F}_0$–mesurable et $X_t$ est $\mathcal{F}_{t-1}$ mesurable pour chaque $t > 0$.*

**Définition 1.9** *(Modification) Soient $X$ et $Y$ deux processus $X$ est une modification de $Y$ si pour tout $t \geq 0$ les variables aléatoires $X_t$ et $Y_t$ sont égales $\mathbb{P}$–p.s. $\forall t \geq 0$, $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$.*

**Définition 1.10** *(Indistinguables) $X$ et $Y$ sont indistinguables si $\mathbb{P}$–p.s, les trajectoires de $X$ et $Y$ sont les mêmes c'est à dire $\mathbb{P}(X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0) = 1$.*

**Remarque 1.1** *Si $X$ et $Y$ sont à trajectoire continues à droit (ou à gauche) et si $X$ est une modification alors $X$ et $Y$ sont indistinguables.*

**Définition 1.11** *(Progressivement mesurable) Un processus $X$ est progressivement mesurable (pour la filtration $\mathcal{F}_t$) si l'application $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ de $[0, t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

**Définition 1.12** *(Processus càd-làg) On dit qu'un processus $X$ est càd-làg (continue à droite, limite à gauche) s'il existe un ensemble $\mathcal{N}$-négligeable $\mathcal{N} \in \mathcal{F}$, tel que : pour tout $\omega \notin \mathcal{N}$ la trajectoire $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue à droite en tout $t > 0$, et admet une limite à gauche en $t > 0$.*

**Définition 1.13** *Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ de $X$ quand $\mathcal{G}$ est l'unique variable aléatoire*

1. *$\mathcal{G}$–mesurable.*
2. *telle que $\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\, d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}$, $\forall A \in \mathcal{G}$.*

   *C'est aussi l'unique variable $\mathcal{G}$–mesurable telle que*

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right)Y\right] = \mathbb{E}\left[XY\right].$$

   *Pour tout variable $Y$, $\mathcal{G}$–mesurable bornée.*

### 1.2.1 Martingale

**Définition 1.14** *Un processus $X$ à valeurs réelles est dite une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ si :*

1. Pour tout $t \geq 0$, $X_t$ est $\mathcal{F}_t$–mesurable.
2. Pour tout $t \geq 0$, $X_t$ est intégrable.
3. Pour tout $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \ \mathcal{F}_s\right] = X_s.$$

Si la dernière condition est remplaçée par $\mathbb{E}\left[X_t \mid \ \mathcal{F}_s\right] \leq X_s$ on dit que $X_t$ est une sur-martingale, et si elle est remplaçée par $\mathbb{E}\left[X_t \mid \ \mathcal{F}_s\right] \geq X_s$ on dit que c'est une sous-martingale.

### 1.2.2 Mouvement brownien

**Définition 1.15** *On appelle mouvement brownien standard un processus stochastique $B$ à valeurs réelles tel que :*

1. *La fonction $t \longmapsto B_t(\omega)$ est $\mathbb{P}$–p.s. Continue.*
2. *Pour $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est indépendant de la tribu $\sigma\left\{B_u,\ u \leq s\right\}$ suit la loi gaussienne centré de variance $t - s$.*
3. *$B_0 = 0$ $\mathbb{P}$–p.s.*

**Définition 1.16** *On appelle mouvement brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ $W = \left(W^1, ..., W^d\right)$ sont des mouvement browniens réels indépendants.*

### 1.2.3 Propriétés du mouvement brownien (Wiener)

**Proposition 1.1** *Si $W$ est un mouvement brownien, et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle, les processus $W_t$, $W_t^2 - t$ et $\exp(\sigma W_t - \sigma^2 \frac{t}{2})$ (Brownien Exponentiel) sont des $\mathcal{F}$–martingales.*

**Preuve.** Pour tout $0 \leq s \leq t$, pour le premier, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[W_t \,|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[W_s \,|\mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[W_t - W_s \,|\mathcal{F}_s\right] \\
&= W_s + \mathbb{E}\left[W_t - W_s\right] \\
&= W_s + 0 \\
&= W_s.
\end{aligned}$$

Pour le deuxième, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[W_t^2 - W_s^2 \,|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\left(W_t - W_s\right)^2 |\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(W_t - W_s\right)^2\right] \\
&= \mathbb{V}ar\left[W_t - W_s\right] \\
&= t - s.
\end{aligned}$$

Et la condition sur le dernier s'obtient grâce à la transformée de laplace d'un gaussienne :

$$\begin{aligned}
E\left(e^{\lambda w_t - \frac{\lambda^2 t}{2}} \mid \ \mathcal{F}_s\right) &= e^{\frac{-\lambda^2 t}{2}} \mathbb{E}\left(e^{\lambda(w_t - w_s)} e^{\lambda w_s} \,|\mathcal{F}_s\right) \\
&= e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} e^{\lambda w_s} \mathbb{E}\left(e^{\lambda(w_t - w_s)}\right) \\
&= e^{\lambda w_s - \frac{\lambda^2 s}{2}}.
\end{aligned}$$

La demontration est terminer. ■

## 1.3 Quelques inégalités classiques

### 1.3.1 Inégalité de Doob

**Théorème 1.1** *Pour $X = (X_t)_{t \geq 0}$ dont les trajectoires sont continue p.s., on a*

$$\forall T \geq 0,\ \forall p > 1,\ \forall \lambda > 0,\ \mathbb{P}\left[\sup_{t \in [0,T]} |X_t| \geq \lambda\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]}{\lambda^p}.$$

### 1.3.2 Inégalité de Hölder

**Lemme 1.1** *Si $p \in [1, +\infty[$, l'exposant conjugué de $p$ est l'unique $q \in [1, +\infty[$, tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,*

$$\int_0^1 |fg| \leq \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

### 1.3.3 Lemme de Fatou

**Théorème 1.2** *Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} > 0$, alors il existe une suite de variable aléatoire positive tel que :*

$$\mathbb{E}\left[\lim\inf_{n\to\infty} T_n\right] \leq \lim\inf_{n\to\infty} \mathbb{E}[T_n].$$

## 1.4 Intégrale stochastique et formule d'Itô

L'objectif de ce paragraphe est de définir $\int_0^t H_s dW_s$. Ceci n'est pas évident car comme nous l'avons rappelé précédemment les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas à variation finie et donc l'intégrale précédente n'est en aucun cas une intégrale de Lebesgue–Stieltjes. Dans toute la suite, on fixe un réel $T$ strictement positif. les processus sont définis pour $t \in [0, T]$, on notera $X$ pour $(X_t)_{t\in[0,T]}$. pour plus des détails voir philipe Briand [1].

**Définition 1.17** *On appelle processus élémentaire $H = (H_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus de la forme :*

$$H_t = \phi_0 \mathbf{1}_0(t) + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \mathbf{1}_{]t_{i-1}, t_i[}(t),$$

*où $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_p = T$, $\phi_0$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$–mesurable bornée, pour $i = 1, ..., p$, $\phi_i$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$–mesurable et bornée.*

**Définition 1.18** *(Processus d'Itô) On appelle processus d'Itô un processus $X$ à valeurs réelles tel que : $\mathbb{P}$–p.s. $\forall 0 \leq t \leq T$*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s, \tag{1.1}$$

*où* $X_0$ *est* $\mathcal{F}_0-$*mesurable,* $K$ *et* $H$ *sont deux processus progressivement mesurable vérifiant les condition,* $\mathbb{P}$*–p.s :*

$$\int_0^T \mid K_s \mid ds < +\infty \ \ et \ \int_0^T \mid H_s \mid^2 ds < +\infty.$$

**Proposition 1.2** *(Intégration par partie) Si* $X$ *et* $Y$ *sont deux processus d'Itô definits dans* $(1.1)$, *alors*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s d_s + \langle X, Y \rangle_t ,$$

*où* $\langle X, Y \rangle$ *est le crochet stochastique.*

**Théorème 1.3** *(Formule d'Itô) Soient* $(t, x) \longmapsto f(t, x)$ *une fonction réelle deux fois différentiable en* $x$ *et une fois différentiable en* $t$ *et* $X$ *un processus d'Itô on a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s'(s, X_s)\, ds + \int_0^t f_x'(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}^{(2)}(s, X_s)\, d\langle X, X \rangle_s$$

## 1.5 Equation différentielles stochastiques

**Notation 1** *On considère un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , *et on se donne* $W$ *un mouvement brownien* $d-$*dimensionnel* $(d \geq 1)$ *sur cet espace. Soit* $Z$ *une variable aléatoire quelconque. Soit* $T$ *un réel strictement positif,* $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ *et* $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times d}$ *des fonctions mesurables. On cherche à résoudre l'équation différentielle stochastique(EDS)*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t, \\ X_0 = Z, \end{cases} \tag{1.2}$$

*ce qui, en terme intégrale s'écrit :*

$$X_t^i = Z^i + \int_0^t b^i(s, X_s)\, ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)\, dW_s^j, \ \ 1 \leq i \leq n,$$

*où* $b(t,X_t) = (b_i(t,X_t))_{1\leq i\leq n}$ *est appelé dérive ou drift et* $\sigma(t,X_t) = (\sigma_{ij}(t,X_t))_{1\leq i,j\leq n}$ *est appelé terme de diffusion.*

***Définition 1.19*** *Une solution faible de L'EDS* (1.2) *est la donnée d'un triplet* $(X,W)$, $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *et* $(\mathcal{F}_t)$ *où :*

1. $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *est un espace de probabilité, et* $(\mathcal{F}_t)$ *est une filtration de cet espace.*
2. $W$ *est un mouvement brownien en dimension d, tel que* $(W_t)$ *est une martingale relativement à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$.
3. $X_t$ *est un processus adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$.
4. *On a* $\mathbb{P}$*–p.s.*
$$X_t = Z + \int_0^t b(s,X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dW_s.$$

***Définition 1.20*** *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *est appelé une solution forte de L'EDS* (1.2) *avec condition initiale* $X_0$ *si :*

1. $X$ *est processus continue et progressivement mesurable.*
2. $\mathbb{P}$*–p.s.*
$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T |b(X_s,s)|\,ds < +\infty\right\} = \mathbb{P}\left\{\int_0^T \|\sigma(X_s,s)\|^2\,ds < +\infty\right\} = 1,$$
*où* $\|\sigma\| = trace(\sigma\sigma^*)$.
3. $\mathbb{P}$*–p.s., on a :*
$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s,s)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s,s)\,dW_s,\ 0\leq t\leq T.$$

Avant de montrer l'existence de solution forte, il faut enoncer une lemme qui joue une rôle très importante dans EDS.

**Lemme 1.2** *(Lemme de Gronwall) Soit* $T>0$ *et* $g$ *une fonction positive mesurable bornée telle que*
$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)\,ds,\ \forall t\leq T,$$

*où $a$ et $b$ sont des constantes positive. Alors*

$$g(t) \leq ae^{bt},\ \forall t \leq T.$$

**Preuve.** Par itération de la condition sur $g$ sous intégrale, on écrit :

$$\begin{aligned}
g(t) &\leq a + b\int_0^t \left(a + b\int_0^s g(u)\,du\right) ds \\
&\leq a + abt + b^2 \int_{0\leq u\leq s\leq t} g(u)\,ds \\
&\leq a + abt + b^2 \int_{0\leq u\leq s\leq t} \left(a + b\int_0^u g(v)\,dv\right) duds \\
&\leq a + abt + ab^2 \int_{0\leq u\leq s\leq t} duds + b^3 \int_0^t \int_0^s \int_0^u g(v)\,dvduds \\
&\leq a + abt + a\frac{b^2t^2}{2} + b^3 \int_0^t \int_0^s \int_0^u g(v)\,dvduds \\
&\vdots \\
&\leq a + abt + a\frac{b^2t^2}{2} + a\frac{b^3t^3}{3!} + ... = ae^{bt}.
\end{aligned}$$

La demonstration est terminer. ■

**Notation 2** *On notera $S^2$ l'espace vectoriel formé des processus $X$, progressivement mesurable, à valeur dans $\mathbb{R}^n$, tels que :*

$$\|X\|_{S^2}^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\right] < \infty,$$

*et $S_c^2$ le sous-espace formé par les processus continus.*

### 1.5.1 Existence et unicité de la solution forte

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur $b$ et $\sigma$ pour avoir un résultat d'existence et d'unicité pour l'EDS $(1.2)$.

**Théorème 1.4** *Soient $b$ et $\sigma$ deux fonctions boréliennes uniformément continues en $x$ et lipschitziennes. On suppose qu'il existe une constante $K$ telle que, $\forall t \in [0,T]$, $x$, $y \in \mathbb{R}^n$.*

1. *Condition de lipschitz en espace, uniforme en temps*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K|x-y|.$$

2. *Croissance linéaire :*

$$|b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \leq K(1+|x|).$$

3. $\mathbb{E}[|\ z\ |^2] < +\infty.$

*Alors l'EDS* (1.2) *possède une unique solution* $X_t$, *tel que*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |\ X_t\ |^2\right] < +\infty.$$

**Preuve.** Soit $X \in S_c^2$, posons pour tout $t \in [0,T]$,

$$\Phi(X_t) = Z + \int_0^t b(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s.$$

le processus $\Phi(X)$ est bien défini et continu, si $X \in S_c^2$. Si $X$ et $Y$ sont deux éléments de $S_c^2$, $\forall 0 \leq t \leq u \leq T$, comme $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$. Alors

$$|\Phi(X_t) - \Phi(Y_t)|^2 \leq 2 \sup_{0\leq u\leq t}\left|\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))ds\right|^2 + 2\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dW_s\right|^2.$$

En utilisant les propriétés de l'intégrale stochastique, il vient que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Phi(X_t) - \Phi(Y_t)|^2\right] \leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^u |b(s,X_s) - b(s,Y_s)|\,ds\right)^2\right] + 8\mathbb{E}\left[\int_0^u \|\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)\|^2\,ds\right].$$

L'inégalité de Hölder donne alors la majoration

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} \mid \Phi\left(X_t\right)-\Phi\left(Y_t\right)\mid^2\right] \leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^u \mid b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\mid^2 ds\right] + 8\mathbb{E}\left[\int_0^u \parallel \sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\parallel^2 ds\right].$$

Comme les fonction $b$ et $\sigma$ sont Lipschitz en espace, on obtient, pour $\forall u \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} \left|\Phi\left(X_t\right)-\Phi\left(Y_t\right)\right|^2\right] \leq 2K^2\left(T+4\right)\mathbb{E}\left[\int_0 \sup_{0\leq t\leq s}^u \left|X_t-Y_t\right|^2 ds\right]. \tag{1.3}$$

De plus, notant 0 le processus nul, on a comme $(a+b+c)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$,

$$\left|\Phi\left(0\right)_t\right|^2 \leq 3Z^2 + 3\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t b\left(s,0\right)ds\right|^2 + 3\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \sigma(s,0)dW_s\right|^2,$$

d'où l'on tire en utilisant l'inégalité de Doob et croissance linéaire de $b$ et $\sigma$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\Phi\left(0\right)_t\right|^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}\left[Z^2\right]+K^2T^2+4K^2T\right). \tag{1.4}$$

Les estimations (1.3) et (1.4) montrent alors que le processus $\Phi\left(X\right)$ appartient à $S_c^2$ dès que $X$ appartient à $S_c^2$. On définit alors par récurrence une suite de processus de $S_c^2$, en posant pour $n \geq 0$ $X_0 = 0$ et $X^{n+1} = \Phi\left(X^n\right)$. On obtient à l'aide de la formule (1.3), pour tout $n \geq 0$, notant $C$ à la place de $2K^2\left(T+4\right)$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right] \leq \frac{C^nT^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right],$$

soit encore, notant $D$ la majorant de l'inégalité (1.4)

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right] \leq D\frac{C^nT^n}{n!}.$$

Il résultat de cette dernière inégalité que

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{L^1} &\leq \sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{L^2}\\ &\leq \sqrt{D}\sum_{n\geq 0}\frac{(CT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}\\ &< +\infty.\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum_n \sup_t \left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|$ converge $\mathbb{P}$–p.s, et donc, $\mathbb{P}$–p.s., $X^n$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus $X$ continu. De plus $X\in S_c^2$ puisque la convergence a lieu dans $S^2$–voir l'inégalité précédente. On vérifie que $X$ est solution de l'EDS (1.2) en passant à la limite dans la définition $X^{n+1}=\Phi\left(X^n\right)$. Si $X$ et $Y$ sont deux solution de l'EDS (1.2) dans $S_c^2$ alors $X=\Phi\left(X\right)$ et $Y=\Phi\left(Y\right)$. L'inégalité (1.3) donne alors, pour tout $u\in[0,T]$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|X_t-Y_t\right|^2\right]\leq 2K^2\left(T+4\right)\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s}\left|X_t-Y_t\right|^2\right]ds,$$

et le lemme de Gronwall montre que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t-Y_t\right|^2\right]=0,$$

ce qui prouve que $X$ et $Y$ sont indistinguables. Pour montrer l'unicité des solutions de l'EDS $(1.2)$, nous devons montrer que toute solution appartient à $S_c^2$, c.à.d. comme toute solution est continue par définition, appartient à $S_c^2$. Pour cela, considérons le temps d'arrêt

$$\tau_n=\inf\left\{t\in[0,T],\left|X_t\right|>n\right\}.$$

Si $u\in[0,t]$, on a

$$\begin{aligned}\left|X_{u\wedge\tau_n}\right|^2 &\leq 3(\left|Z\right|^2\\ &\quad+\sup_{0\leq u\leq t}\left|\int_0^{u\wedge\tau_n} b\left(s,X_s\right)ds\right|^2+\sup_{0\leq u\leq t}\left|\int_0^{u\wedge\tau_n}\sigma\left(s,X_s\right)dW_s\right|^2).\end{aligned}$$

Il vient alors,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n} \mid X_u \mid^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}\left[\mid Z\mid^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} \mid b\left(s, X_s\right) \mid ds\right)^2\right]\right.$$
$$\left. +4\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n} \|\sigma\left(s, X_s\right)\|^2\, ds\right]\right),$$

et utilisant la croissance linéaire de $b$ et $\sigma$, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n} |X_u|^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}\left[\left|Z^2\right|\right] + 2K^2T^2 + 8K^2T\right.$$
$$\left. + \left(2K^2T + 8K^2\right)\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq s\wedge\tau_n} |X_u|^2\right]\right).$$

En appliquant le lemme de Gronwall à la fonction $t \longmapsto \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n} |X_u|^2\right]$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq T\wedge\tau_n} |X_u|^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}\left[|Z|^2\right] + 2K^2T^2 + 8K^2T\right)\exp\left\{3\left(2K^2T + 8K^2\right)T\right\},$$

et le lemme de Fatou donne

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq T} |X_u|^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}\left[|Z|^2\right] + 2K^2T^2 + 8K^2T\right)\exp\left\{3\left(2K^2T + 8K^2\right)T\right\}.$$

Ceci implique l'unicité des solutions de l'EDS(1.2). ■

# Chapitre 2

# Théorèmes de Girsanov

l'objectif de ce chapitre est de définir le changement de probabilité par le théorème de Girsanov. Ce partie est actuallement prendre du polycopie de Monique Jeanblanc [4]

## 2.1 Mesures absolument continues

### 2.1.1 Fonctionnelles continues sur l'espace $L^2$

Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et $\mu$ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On définit un produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ par la formule

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} fg d\mu, \text{ avec } f,\ g \in L^2(\mathbb{R}, \mu).$$

Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$, l'application $g \longmapsto \langle f, g \rangle$ est une fonction linéaire continue. Le théorème suivant établit l'assertion réciproque.

**Théorème 2.1** *Soit $F : L^2(\mathbb{R}, \mu) \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle continue. Alors il existe une unique fonction $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ telle que*

$$F(g) = \langle f, g \rangle, \text{ pour tout } g \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$$

## 2.2 Transformation la mesure

**Théorème 2.2** *(Théorème de Radon–Nikodym) Soient* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable et* $\mu$, $\nu$ *deux mesures* $\sigma-$*finies sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ . *Si* $\nu$ *est absolument continu par rapport à* $\mu$, *il existe une application* $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^+$ $\mathcal{F}-$*mesurable tell que* $\nu(A) = \int_A f d\mu$, $\forall A \in \mathcal{F}$. *S'il existe une autre application* $g$ *tell que* $\nu(A) = \int_A g d\mu$, *alors* $f = g\mu-$*presque partout.*

## 2.3 Changement des probabilités

Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ .

**Proposition 2.1** *On suppose que* $\mathbb{P}$ *et* $\mathbb{Q}$ *sont équivalentes. Alors il existe* $(Z_t,\ t \leq T)$ $\mathcal{F}_t^{\mathbb{P}}-$*martingale strictement positive telle que* $\mathbb{Q} = Z_T\mathbb{P}$ *sur* $\mathcal{F}_T$ *et* $\mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_t} = Z_t\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}$, *c'est–à–dire telle que* $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_tX)$ *pour tout variable* $X$ *est* $\mathbb{Q}-$*intégrable* $\mathcal{F}_t-$*mesurable pour* $t \leq T$, *de plus,* $Z_0 = 1$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t) = 1$, $\forall t \leq T$.

**Preuve.** Si la restriction de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ à $\mathcal{F}_T$ sont équivalentes, il existe une variable aléatoire $Z_T$ est $\mathcal{F}_T$ –mesurable telle que $\mathbb{Q} = Z_T\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$ théorème de Radon–Nikodym 2.2. On dit que $Z_T$ est la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ et $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_TX)$ pour toute variable $X$ est $\mathcal{F}_T-$mesurable et $\mathbb{Q}-$intégrable. En particulier, $Z_T$ est strictement positive et $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T) = 1$. Soit $Z_T = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T |\mathcal{F}_t)$ par construction $(Z_t,\ t \leq T)$ est une martingale et est la densité $\mathcal{F}_t-$mesurable de Radon–Nikodym de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t$. En effet, si $X$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable et $\mathbb{Q}$ intégrable

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_TX) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(XZ_T |\mathcal{F}_t)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[X\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T |\mathcal{F}_t)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(XZ_t).
\end{aligned}$$

■

**Remarque 2.1** *La condition* $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T f^2(t)\,dt\right\}\right] < +\infty$ *est suffisante et non nécessaire, appelée condition de Novikov, avec* $Z_T$ *est un variable positive et* $\mathbb{E}[Z_T] = 1$.

**Théorème 2.3** *(La caractérisation de Lévy du mouvement brownien) Soit* $X(t) = (X_1(t), ..., X_n(t))$ *un processus stochastique continu dans un espace de probabilité à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$*. Puis les conditions suivantes sont équivalentes :*

*a)* $X(t)$ *est un mouvement brownien par rapport à* $\mathbb{Q}$ *la loi de* $X(t)$ *par rapport à* $\mathbb{Q}$ *est la même que la loi d'un mouvement brownien* $n$*–dimensionnel.*

*b) (i)* $X(t) = (X_1(t), ..., X_n(t))$ *est un martingale par rapport à* $\mathbb{Q}$*,*

*(ii)* $X_i(t)X_j(t) - \delta_{ij}t$ *est un martingale par rapport à* $\mathbb{Q}$ *pour tout* $i, j \in \{1, ..., n\}$, *avec* $\delta_{ij}$ *est la mesure de Dirac, i.e.*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \;\; si\; i = j \\ 0 \;\; si\; i \neq j \end{cases}$$

## 2.4 Théorème de Girsanov

**Théorème 2.4** *(Théorème de Girsanov I) Soit* $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ *un processus d'Itô de la forme*

$$\begin{cases} dY(t) = a(t,\omega)\,dt + dW(t)\,; \;\; t \leq T \\ Y_0 = 0, \end{cases}$$

*où* $T \leq +\infty$ *est une constante donnée, et* $W(t)$ *est un mouvement brownien* $n$*–dimensions nous mettons*

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t a(s,\omega)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t a^2(s,\omega)ds\right), \;\; t \leq T.$$

*Supposons que* $a(s,\omega)$ *satisfait la condition de Novikov :*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T a^2(s,\omega)\,ds\right)\right] < +\infty, \tag{2.1}$$

*où* $\mathbb{E} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ *est l'espérance par rapport à* $\mathbb{P}$*, définie la mesure* $\mathbb{Q}$ *dans* $\left(\Omega, \mathcal{F}_T^{(n)}\right)$ *par*

$$d\mathbb{Q}(\omega) = Z_T(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega).$$

*Alors $Y(t)$ est un mouvement brownien $n$–dimension par rapport à la loi de probabilité $\mathbb{Q}$. pour $t \leq T$.*

**Preuve.** Pour simplifier, nous supposons que $a(s,\omega)$ est borné. Au vu du théorème 2.3 nous devons vérifier que

(i) $Y(t) = (Y_1(t), ..., Y_n(t))$ est une martingale par rapport à $\mathbb{Q}$.

(ii) $Y_i(t) Y_j(t) - \delta_{ij} t$ est une martingale par rapport à $\mathbb{Q}$, pour tous $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Pour vérifier(i) on met $K(t) = Z_t Y(t)$, et on utilise la formule d'Itô pour obtenir

$$\begin{aligned}
dK_i(t) &= Z_t dY_i(t) + Y_i(t) dZ_t + dY_i(t) dZ_t \\
&= Z_t (a_i(t) dt + dW_i(t)) + Y_i(t) Z_t (\sum_{k=1}^{n} -a_k(t) dW_k(t)) \\
&+ (dW_i(t))(-Z_t \sum_{k=1}^{n} a_k(t) dW_k(t)) \\
&= Z_t \left( dW_i(t) - Y_i(t) \sum_{k=1}^{n} a_k(t) dW_k(t) \right) \\
&= Z_t \gamma^{(i)}(t) dW(t),
\end{aligned}$$

où $\gamma^{(i)}(t) = (\gamma_1^{(i)}(t), ..., \gamma_n^{(i)}(t))$, avec

$$\gamma_j^{(i)} = \begin{cases} -Y_i(t) a_j(t) \text{ si } j \neq i, \\ 1 - Y_i(t) a_i(t) \text{ si } j = i. \end{cases}$$

Donc $K_i(t)$ est une martingale par rapport à $\mathbb{P}$, donc par définition 1.13 nous obtenons, pour $t > s$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y_i(t) | \mathcal{F}_s] = \frac{\mathbb{E}[Z_t Y_i(t) | \mathcal{F}_s]}{\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s]} = \frac{\mathbb{E}[K_i(t) | \mathcal{F}_s]}{Z_s} = \frac{\mathbb{E}[K_i(s)]}{Z_s} = Y_i(s),$$

qui montrent que $Y_i(t)$ est une martingale par rapport à $\mathbb{Q}$. cela preuve (i). la preuve de (ii) est similaire. La demonstration est terminer. ■

**Notation 3** *$\mathcal{W}_{\mathcal{H}}(S,T)$ dénote la classe de processus $f(t,\omega) \in \mathbb{R}$ satisfait :*

1. $(t,\omega) \mapsto f(t,\omega)$ est $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$–mesurable où $\mathcal{B}$ dénote la borélienne $\sigma$–algébre sur $[0,\infty]$.

2. $f(t,\omega)$ est $\mathcal{F}_t$ adapté.
3. $\mathbb{E}\left[\int_S^T f^2(t,\omega)\,dt\right] < \infty$.

**Théorème 2.5** *(Théorème de Girsanov II ) Soit $Y(t) \in \mathbb{R}^n$, un processus d'Itô de la forme*

$$dY(t) = \beta(t,\omega)\,dt + \theta(t,\omega)\,dW_t,\ \ t \leq T, \tag{2.2}$$

*Où $W_t \in \mathbb{R}^m$, $\beta(t,\omega) \in \mathbb{R}^n$ et $\theta(t,\omega) \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Supposons qu'il existe des processus $u(t,\omega) \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^m$ et $\alpha(t,\omega) \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^n$ tels que :*

$$\theta(t,\omega)\,u(t,\omega) = \beta(t,\omega) - \alpha(t,\omega). \tag{2.3}$$

*Et supposons que vous satisfait la condition de Novikov.*

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T u^2(s,\omega)\,ds\right)\right] < +\infty,$$

*mettre*

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t u(s,\omega)\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t u^2(s,\omega)\,ds\right),\ \ t \leq T, \tag{2.4}$$

*et*

$$d\mathbb{Q}(\omega) = Z_T(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega),\ \ sur\ \mathcal{F}_T^{(m)}. \tag{2.5}$$

*Alors*

$$\widetilde{W}(t) = \int_0^t u(s,\omega)\,ds + W(t),\ \ t \leq T, \tag{2.6}$$

*est une mouvement brownien par rapport à $\mathbb{Q}$ et en termes de $\widetilde{W}(t)$, le processus $Y(t)$ à la représentation intégrale stochastique*

$$dY(t) = \alpha(t,\omega)\,dt + \theta(t,\omega)\,d\widetilde{W}(t).$$

***Preuve.*** *Il suit le théorème de Girsanov 2.4, que $\widetilde{W}(t)$ est un mouvement brownien par* *rapport à $\mathbb{Q}$. Donc, remplaçant (2.6) à (2.2) nous obtenons, par (2.3)*

$$\begin{aligned} dY(t) &= \beta(t,\omega)\,dt + \theta(t,\omega)\left(d\widetilde{W}(t) - u(t,\omega)\,dt\right) \\ &= [\beta(t,\omega) - \theta(t,\omega)\,u(t,\omega)]\,dt + \theta(t,\omega)\,d\widetilde{W}(t) \\ &= \alpha(t,\omega)\,dt + \theta(t,\omega)\,d\widetilde{W}(t). \end{aligned}$$

*La demonstration est terminer.*

***Théorème 2.6*** *(Théorème de Girsanov III) Soit $X(t) = X^x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $Y(t) = Y^x(t) \in \mathbb{R}^n$ une diffusion d'Itô et un processus d'Itô, respectivement, des formes*

$$dX(t) = b(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dW(t)\,;\ t \leq T,\ X(0) = x,$$

$$dY(t) = [\gamma(t,\omega) + b(Y(t))]\,dt + \sigma(Y(t))\,dW(t)\,;\ t \leq T,\ Y(0) = x,$$

*où la fonction $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ satisfaire la condition du théorème existence et unicité et $\gamma(t,\omega) \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe un processus $u(t,\omega) \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^m$ tel que*

$$\sigma(Y(t))\,u(t,\omega) = \gamma(t,\omega),$$

*et supposons que vous satisfait la condition de Novikov*

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T u^2(s,\omega)\,ds\right)\right] < +\infty,$$

*définie $Z_t$, $\mathbb{Q}$ et $\widetilde{W}(t)$ comme dans (2.4), (2.5) et (2.6), alors*

$$dY(t) = b(Y(t))\,dt + \sigma(Y(t))\,d\widetilde{W}(t). \tag{2.7}$$

*En effet, la loi $\mathbb{Q}$ de $Y^x(t)$ est la même loi $\mathbb{P}$ de $X^x(t)\,;\ t \leq T$.*

■

**Preuve.** La représentation (2.7) suit en appliquant le théorème de Girsanov 2.5, au cas :

$$\theta(t,\omega) = \sigma(Y(t)), \ \beta(t,\omega) = \gamma(t,\omega) + b(Y(t)), \ \alpha(t,\omega) = b(Y(t)).$$

Alors la loi $\mathbb{Q}$ de $Y^x(t)$ est la même loi $\mathbb{P}$ de $X^x(t)$ ; $t \leq T$, on conclure que découle de l'unicité faible des solution de l'équation différentielle stochastique EDS. La demonstration est terminer. ■

# Chapitre 3

# Application au calcul de fonction de performence de type risque–sensitive

l'objectif de ce chapitre, nous appliquons le théorème de Girsanov à la finance, ce chapitre est accualement prendre à partir du chapitre 03 du livre Equation Differentielle Stochastique : Basique et Application [3].

## 3.1 Marché financier de la sensibilité au risque

Nous avons modélisé la dynamique de l'onduleur avec le processus de diffusion comme EDS suivant

$$dx\left(t\right)=b\left(t,x\left(t\right)\right)dt+\Lambda dW\left(t\right)\ \text{ et } x_0=x. \tag{3.1}$$

Nous considérons un marché financier avec deux actifs (titres) peuvent être des choix d'investissement, le premier est suas risque est appelé aussi suas (dépôt en devises étrangères par exemple) dont le prix $S_0\left(t\right)$ à l'instant $t$ est donné par

$$\frac{dS_0\left(t\right)}{S_0\left(t\right)}=r\left(t,x(t)\right)dt.$$

Le deuxième actif risqué est appelé stock, dont le prix $S_1(t)$ à l'instant $t$ est donné par

$$\frac{dS_1(t)}{S_1(t)} = \mu(t, x(t))\, dt + \sigma(t, x(t))\, dW(t),$$

où $r(t, x(t))$ est le taux d'intérêt de la fonction d'obligation, $\sigma(t, x(t))$ est le taux de volatilité du cours de l'action et $\mu(t, x(t))$ est appelé le taux de rendement attendu. Considérons maintenant un investisseur qui investit dans le suas–risque (dépôt en devises étrangères par exemple) et dans le stock, et dont les décisions ne peuvent affectu les prix sur le marché financier.

Nous notons ici que $W(t)$ est le mouvement brownien donné dans l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$.

**Définition 3.1** *(Self–Financial) Il n'y a pas d'injection et pas de retrait de fonds sur* $[0, T]$.

Nous supposons aussi que notre marché doit auto financé, nous désignons par $V(t)$ le montant de la richesse de l'investisseur, et $u(t)$ est le proportion de la richesse investie dans le stock au temps $t$, alors

$$\pi(t) = u(t)\, V(t)$$

est le montant du stock et

$$(1 - u(t))\, V(t)$$

est le montant dans le lien, ce qui signifie que l'investisseur a

$$V(t) - u(t)V(t) = V(t) - \pi(t)$$

économies en banque. Puis la dynamique de la richesse de l'investisseur qui veut investir dans le marché financier a la suite de

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = (V(t) - \pi(t))\, \frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + \pi(t) \frac{dS_1(t)}{S_1(t)}.$$

Honnêtement, la richesse de l'investisseur est décrite par

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = (V(t) - \pi(t))r(t, x(t))dt + \pi(t)\left(\mu(t, x(t))dt + \sigma(t, x(t))dW(t)\right) \tag{3.2}$$

$$= (V(t) - \pi(t))r(t, x(t))dt + \pi(t)\,\mu(t, x(t))\,dt + \pi(t)\,\sigma(t, x(t))\,dW(t) \tag{3.3}$$

$$= V(t)r(t, x(t))dt - \pi(t)\,r(t, x(t))dt + \pi(t)\,\mu(t, x(t))\,dt + \pi(t)\,\sigma(t, x(t))\,dW(t)$$

$$= \{V(t)r(t, x(t)) + (\mu(t, x(t)) - r(t, x(t)))\pi(t)\}\,dt + \pi(t)\,\sigma(t, x(t))\,dW(t).$$

**Définition 3.2** *Une stratégie $\pi$ est dite admissible si elle est de carré intégrable $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ −adapté des valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que (3.2) a une solution forte $(V(t))_{t\in[0,T]}$ qui satisfait*

$$\mathbb{E}\int_0^T |V(t)| < \infty,$$

*l'ensemble de toute les stratégies admissibles sont désignés par $\mathcal{U}_{ad}$. L'investisseur veut maximiser son utilité attendue (type HARA) sur l'ensemble $\mathcal{U}_{ad}$ dans un certain temps terminal $T > 0$*

$$J(\pi(.)) = \frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left(V^{\theta}(T)\right). \tag{3.4}$$

*En choisissant une stratégie de choix de portfeulle appropriée $\pi(.)$, où l'exposant $\theta > 0$ est appelé paramètre le risque sensible. Si on met $\theta = 1$ l'utilité (3.4) ramenée au cas de risque–naturel habituel, l'espérance sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ est notée par $\mathbb{E}$.*

**Lemme 3.1** *On peut réécrire l'espérance $\mathbb{E}\left(V^{\theta}(T)\right)$ dans (3.4) en terme de l'exponentielle attendue de critère intégrale*

$$J(\pi(.)) = \frac{1}{\theta}V^{\theta}(0)\,\widetilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left(\theta\int_0^T h(t, x(t), \pi(t))dt\right)\right],$$

*où $\widetilde{\mathbb{E}}$ est la nouvelle espérance par rapport à la mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$.*

**Preuve.** Appliquer la formule d'Itô à la valeur logarithmique de richesse

$$\ln V^{\theta}(t) = \theta\ln V(t) = \theta f(t, V(t)).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\theta d\left(f\left(t,V\left(t\right)\right)\right) = \theta d\left(\ln V\left(t\right)\right) &= \theta\frac{\partial f}{\partial t}\left(t,V\left(t\right)\right)dt+\theta\frac{\partial f}{\partial x}\left(t,V\left(t\right)\right)dV\left(t\right)\\ &+\theta\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(t,V\left(t\right)\right)\left\langle dV\left(t\right),dV\left(t\right)\right\rangle\\ &=\theta\frac{1}{V\left(t\right)}dV\left(t\right)+\theta\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{V^2\left(t\right)}\right)\pi^2\left(t\right)\sigma^2\left(t,x_t\right)V^2\left(t\right)dt\\ &=\theta\left\{V\left(t\right)r\left(t,x\left(t\right)\right)+\left(\mu\left(t,x\left(t\right)\right)-r\left(t,x\left(t\right)\right)\right)\pi\left(t\right)\right\}dt\\ &+\pi\left(t\right)\sigma\left(t,x\left(t\right)\right)dW\left(t\right)-\frac{1}{2}\theta\pi^2\left(t\right)\sigma^2\left(t,x\left(t\right)\right)dt.\end{aligned}$$

Puis en prenant intégrale de zéro à $T$ par rapport au temps $t$, on obtient

$$\begin{aligned}J\left(\pi\left(.\right)\right) &= \frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left(V^\theta\left(T\right)\right)\\ &=\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[\exp\left(\ln V^\theta\left(T\right)\right)\right]\\ &=\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\ln V\left(T\right)\right)\right]\\ &=\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\Bigg[\exp\Bigg(\theta f\left(V\left(0\right)\right)+\theta\int_0^T\left\{V\left(t\right)r\left(t,x\left(t\right)\right)+\left(\mu\left(t,x\left(t\right)\right)-r\left(t,x\left(t\right)\right)\right)\pi\left(t\right)\right\}dt\\ &+\theta\int_0^T\pi\left(t\right)\sigma\left(t,x\left(t\right)\right)dW\left(t\right)-\frac{1}{2}\theta\int_0^T\pi^2(t)\sigma^2\left(t,x\left(t\right)\right)dt\Bigg)\Bigg]\\ &=\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\Bigg[\exp\Bigg(\ln V^\theta\left(0\right)+\theta\int_0^T\left\{V\left(t\right)r\left(t,x\left(t\right)\right)+\left(\mu\left(t,x\left(t\right)\right)-r\left(t,x\left(t\right)\right)\right)\pi\left(t\right)\right\}dt\\ &+\theta\int_0^T\pi\left(t\right)\sigma\left(t,x\left(t\right)\right)dW\left(t\right)-\frac{1}{2}\theta\int_0^T\pi^2(t)\sigma^2\left(t,x\left(t\right)\right)dt\Bigg)\Bigg]\\ &=\frac{1}{\theta}\exp(\ln V^\theta\left(0\right))\mathbb{E}\Bigg[\exp\Bigg(\theta\int_0^T\left\{V\left(t\right)r\left(t,x\left(t\right)\right)+\left(\mu\left(t,x\left(t\right)\right)-r\left(t,x\left(t\right)\right)\right)\pi\left(t\right)\right\}dt\\ &+\theta\int_0^T\pi\left(t\right)\sigma\left(t,x\left(t\right)\right)dW\left(t\right)-\frac{1}{2}\theta\int_0^T\pi^2(t)\sigma^2\left(t,x\left(t\right)\right)dt\Bigg)\Bigg].\end{aligned}$$

Alors, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
J(\pi(.)) &= \frac{1}{\theta} V^{\theta}(0)\, \mathbb{E}\left[\exp\left(\theta \int_0^T \{V(t)\, r(t,x(t)) + (\mu(t,x(t)) - r(t,x(t)))\,\pi(t)\}\, dt\right.\right. \\
&\quad + \theta \int_0^T \pi(t)\,\sigma(t,x(t))\, dW(t) - \frac{1}{2}\theta \int_0^T \pi^2(t)\sigma^2(t,x(t))\, dt \\
&\quad \left.\left. - \frac{1}{2}\theta^2 \int_0^T \pi^2(t)\,\sigma^2(t,x(t))\, dt + \frac{1}{2}\theta^2 \int_0^T \pi^2(t)\,\sigma^2(t,x(t))\, dt\right)\right] \\
&= \frac{1}{\theta} V^{\theta}(0)\, \mathbb{E}\left[\exp\left\{\left(-\frac{1}{2}\theta^2 \int_0^T \pi^2(t)\sigma^2(t,x(t))\, dt + \theta \int_0^T \pi(t)\,\sigma(t,x(t))\, dW(t)\right)\right.\right. \\
&\quad - \frac{1}{2}\theta \int_0^T \pi^2(t)\sigma^2(t,x(t))\, dt + \frac{1}{2}\theta^2 \int_0^T \pi^2(t)\,\sigma^2(t,x(t))\, dt \\
&\quad \left.\left. + \theta \int_0^T \{V(t)\, r(t,x(t)) + (\mu(t,x(t)) - r(t,x(t)))\,\pi(t)\}\, dt\right\}\right] \\
&= \frac{1}{\theta} V^{\theta}(0)\, \mathbb{E}\left[I \times II\right],
\end{aligned}
$$

où

$$
I = \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2 \int_0^T \pi^2(t)\sigma^2(t,x(t))\, dt + \theta \int_0^T \pi(t)\,\sigma(t,x(t))\, dW(t)\right),
$$

$$
\begin{aligned}
II &= \exp\left(-\frac{1}{2}\theta \int_0^T \pi^2(t)\sigma^2(t,x(t))\, dt + \frac{1}{2}\theta^2 \int_0^T \pi^2(t)\sigma^2(t,x(t))\, dt\right. \\
&\quad \left. + \theta \int_0^T \{V(t)\, r(t,x(t)) + (\mu(t,x(t)) - r(t,x(t)))\,\pi(t)\}\, dt\right) \\
&= \exp\left(\theta \int_0^T -\frac{1}{2}(\theta - 1)\,\pi^2(t)\,\sigma^2(t,x(t))\, dt + \theta \int_0^T \{V(t)\, r(t,x(t))\right. \\
&\quad + (\mu(t,x(t)) - r(t,x(t)))\,\pi(t)\, dt\}) \\
&= \exp\left(\theta \int_0^T h(t,x(t),\pi(t))\, dt\right),
\end{aligned}
$$

où

$$
h(t,x(t),\pi(t)) = -\frac{1}{2}(\theta - 1)\,\pi^2(t)\,\sigma^2(t,x_t) + V(t)\, r(t,x_t) + (\mu(t,x_t) - r(t,x_t))\,\pi(t).
$$

En vertu de condition de Novikov (2.1) du théorème de girsanov, 2.4, nous obtenons

$$\mathbb{E}\left(\exp \alpha \pi^2 (t)\right) \leq C. \tag{3.5}$$

En appliquant la transformation de Girsanov (voir le théorème de girsanov 2.4), l'expression intégrale stochastique peut être différé, et selon la condition (3.5), nous obtenons

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2 \int_0^T \pi^2 (t) \sigma^2 (t, x_t) \, dt + \theta \int_0^T \pi (t) \sigma (t, x_t) \, dW (t)\right),$$

pour certaines constantes $\alpha$, $C$ sont positifs. Alors

$$\begin{aligned}
J(\pi(.)) &= \frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left(V^\theta (T)\right) \\
&= \frac{1}{\theta} V^\theta (0) \, \mathbb{E}\left[I \times II\right] \\
&= \frac{1}{\theta} V^\theta (0) \left[\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \exp\left(\theta \int_0^T h(t, x(t), \pi(t)) dt\right)\right] \\
&= \frac{1}{\theta} V^\theta (0) \, \widetilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left(\theta \int_0^T h(t, x(t), \pi(t)) dt\right)\right].
\end{aligned}$$

$\widetilde{\mathbb{E}}$ est un nouvel espérance en ce qui concerne la mesure $\widetilde{\mathbb{P}}$ de probabilité, et nous notons par

$$\widetilde{W}(t) = W(t) - \theta \int_0^t \pi(s) \sigma(s, x(s)) \, ds,$$

est un mouvement brownien standard en vertu de la mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$. En conclusion, pour evry $0 \leq s \leq t \leq T$, notre dynamique (3.1) satisfait le EDS suivante :

$$\begin{aligned}
dx(t) &= b(t, x(t)) \, dt + \Lambda dW(t) \\
&= b(t, x(t)) \, dt + \Lambda d\left(\widetilde{W}(t) + \theta \int_0^t \pi(s) \sigma(s, x(s)) \, ds\right) \\
&= b(t, x(t)) \, dt + \Lambda d\widetilde{W}(t) + \Lambda\theta\pi(t) \sigma(t, x(t)) \, dt \\
&= \left(b(t, x(t)) + \Lambda\theta\pi(t) \sigma(t, x(t))\right) dt + \Lambda d\widetilde{W}(t)
\end{aligned}$$

La demonstration est terminer. ■

# Bibliographie


[1] Philip Briand : Equation Différentielle Stochastique Rétrograds, Cours, Mars 2001.

[2] Nils Berglund : Martingales Et Calcul Stochastique. Mastre 2 Recherche De Mathématique Université D'Orléans Version De Janvier 2012.

[3] Adel Chala , Dahbia Hafayedy and Rania Khallout : The Use of Girsanov's Theorem to Describe the Risk-Sensitive Problem and Application to Optimal Control. Stochastic Differential Equations : Basics and Applications. Nova Edition 2018.

[4] Monique Jeanblanc : Cours De Calcul Stochastique. Mastre 2IF Every, Semptembre 2006.

[5] Brent ∅ksendal : Stochastique Differential Equations, An Introduction With Application, Fifth Edition, Corrected Printing, Springer–Verlag Heidelberg NewYork.