République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option :

Par

Mansouri Roumaissa

Titre :

Problèmes bien posés et mal posés

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Radjeh Fouzia	UMKB	Président
Dr.	Rezki Brahim	UMKB	Encadreur
Dr.	Ouaar Fatima	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce humble travail

Grâce à **dieu** le tout puissant, le clément, le miséricordieux, que j'ai atteins ce niveau

Pour présenter ce modeste mémoire.

Je dédie ce modeste travail

À **ma mère** qui ne cesse de m'encourager de par sa présence et ses paroles depuis ma

Tendre enfance.

♡ **Ma mère** ♡ que j'aime plus que tout et qui m'a tous donné, je l'aimerais jusqu'à mon

Dernier souffle.

À la mémoire de ♡ mon cher **père** ♡, parti trop tôt

Que **Dieu** l'accueille dans son vaste **paradis**."Amine"

À **mes frères** et **sœurs** et à tous les membres de la famille "**Mansouri**"

À tous ceux qui ont **contribués** à ma réussite durant mes années d'étude.

À tous **mes amis** sans exception

À tous ceux qui **m'enseignent**, m'apporte de l'aide et me soutiennent de près ou de loin.

REMERCIEMENTS

Avant tout, je remercie **"Allah"** le tout puissant de m'avoir donné le courage durant ces langues années d'étude

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur **Dr.Rezki Brahim** Pour ces conseils et ses orientations qui m'ont été soutenus d'une grande utilité au cous de l'élaboration de mon mémoire.

En suite j'exprime mes plus sincères remerciements au **Dr.Radjeh Fouzia** qui a accepté de présider le jury de ce mémoire et je tiens aussi à exprimer toute ma gratitude au **Dr.Ouaar Fatima** qui a accepté d'être parmi le jury de ce mémoire

Nous tenons aussi à remercier notre chef de département de **Mathématiques** **Dr Hafayed Mokhtar**.

Mes remerciements s'adressent à tous **mes enseignants**.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont encouragés pendant la réalisation de ce travail, **famille**, **collègues et amis**, sans exception.

Merci à tous.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Motivation

Ce travail porte sur les méthodes d'étude des problèmes inverses, et comment les convertir à des problèmes bien et mal-posés, puis quelques techniques de résolution de ces problèmes utilisant la factorisation des matrices.

Organisation du mémoire

La partie principale de ce mémoire est composée de trois chapitres, le mémoire comporte également, un résumé, une introduction (page 1).

Le chapitre 1 est consacré aux études des problèmes inverses et mal pose (définition, proposition,exemples,..)

Dans ce chapitre on donne une rappellé sur l'espaces de Hilbert, les opérateurs, les matrice et lemme propriétés (injectivité, subjectivité, Méthode d'élimination de Gauss,factorisation) la relation entre les problèmes inverses et bien et mal-posés.

Dans le chapitre 2 est réservé au type des problèmes bien et mal-posés et la relation entre eux et comment passer d'un problème mal-posés à autre utilisant propreté de transpose d'une matrice et dans ce chapitre Nous avons abordé Problèmes linéaires des moindres carrés et méthode de projection et certaines des propriétés du dernier problème.

Dans le chapitre 3 compati les transformations d'un problème mal-posés a autre par la transposé d'une matrice et quelques techniques de résolution de deux problèmes mal-posés en même temps (système surdétermine et sous-détermine) concernent l'existence et l'unicité de la solution, Finalement quelques applications de MATLAB, concernant le floutage et de bruitage d'une image

Et on termine par une conclusion (page 44)

Chapitre 1

Problèmes linéaire bien et mal posés

1.1 Notion de base

1.1.1 Espace de Hilbert

Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.1 *Un produit scalaire est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ symétrique et définie positive, c'est-à-dire*

- $\forall (u, v, \omega) \in H^3, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (\alpha u + \beta v, \omega) = \alpha(u, \omega) + \beta(v, \omega)$
- $\forall (u, v) \in H^2, (u, v) = (v, u)$
- $\forall u \in H, (u, u) \geq 0$
- $(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$

On note par : $|u| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$, la norme définie sur H associée au produit scalaire.

Définition 1.1.2 *On appele un espace de Hilbert tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire et complet pour la norme associée.*

1.1.2 Opérateur linéaires dans espaces de Hilbert

Définition 1.1.3 *Un opérateur linéaire et continu A défini de E dans F, est une application linéaire continue de E dans F, c'est-à-dire :*

1. $\forall u \in E, Au \in F;$
2. $\forall (u, \upsilon) \in E \times E, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, A(\alpha u + \beta \upsilon) = \alpha Au + \beta A\upsilon;$
3. $\exists M > 0, u \in E, \|Au\|_F \leq M \|u\|_E .$

Le plus petit nombre M, s'appelle la norme de l'opérateur A :

$$\|A\| = \sup_{u \in E} \frac{\|Au\|_F}{\|u\|_E}$$

Théorème 1.1.1 *(application ouverte). Soit A un opérateur linéaire de E dans F. L'image par A d'un ouvert de E est un ouvert de F. En particulier l'inverse d'un opérateur linéaire continu et bijectif est continu.*

Corollaire 1.1.1 *Soit A un opérateur compact de E dans F, où E et F sont deux espaces de Hilbert qui ne sont pas de dimension finie. Alors A n'est jamais inversible dans $\mathcal{L}(E, F)$.*

Proposition 1.1.1 *On a les relations suivantes (ou X indique l'adhérence de l'ensemble X) :*
– $KerA^\intercal = (ImA)^\perp$ *;*
– $(KerA)^\perp = ImA^\intercal$.

1.1.3 Rappel sur les matrices

Définition 1.1.4 *Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments de $\Bbbk$.*
– *Elle est dite de taille $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.*
– *Les nombres du tableau sont appelés les coefficients de A.*
– *Le coefficient situé à la $i-$ème ligne et à la $j-$ème colonne est noté a_{ij}.*

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \text{ ou } A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \text{ ou } (a_{ij}).$$

Soient A une matrice à m lignes et n colonnes et u un vecteur de $\mathbb{k}^n$, nous définissons $v = Au \in \mathbb{k}^m$ le vecteur dont les composantes sont données par

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j, i = 1, \dots, m \tag{1.1}$$

Et pour B une matrice à n lignes et p colonnes, le produit AB forme une matrice $C \in M_{mp}$ donnée par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \ i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, p.$$

1.1.4 Image d'une matrice

Définition 1.1.5

$$\operatorname{Im} A = \{y \in K^M, \exists x \in K^N \textit{ tel que } Ax = y\}.$$

Comme d'après (1.1) $Ax = y$ *est équivalent à* $y = \sum_{i=1}^{N} x_i a_i$
Ou le vecteur a est la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A, $\operatorname{Im} A$ *est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes a_i :*

$$\operatorname{Im} A = \xi(a_1, a_2, a_3, \dots, a_N).$$

En particulier, l'équation $Ax = b$ *a une solution si et seulement si* $b \in \operatorname{Im} A$. *On appelle rang de* A, *noté* $rg(A)$ *le nombre* $dim(\operatorname{Im} A)$ *c'est le nombre de vecteurs colonnes de* A *linéairement indépendants. Pour que l'application linéaire* g *soit surjective, il faut et il suffit que* $\operatorname{Im} A = K^M$, *c'est-à-dire :*

$$rg(A) = M.$$

1.1.5 Le noyau d'une matrice

Définition 1.1.6

$$\ker A = \{x \in K^N \ \textit{tel que} \ Ax = 0_{k^n}\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de K^N *L'application linéaire* g *est injective si et seulement si* $\ker A = \{0_{k^n}\}$. *L'application* $Ax = b$ *a alors au plus une solution Pour toute matrice* A, *on a*

$$rg(A) + \dim(\ker A) = N.$$

L'équation $Ax = b$ *a une solution et une seule* $\forall b \in K^M$, *si et seulement si* $M = N$ *et* $\dim KerA = 0 \Leftrightarrow rg(A) = N$.

1.1.6 Méthode d'élimination de Gauss

Le principe de la méthode est de transformer le système triangulaire supérieur facile à résoudre considérons le système linéaire $Ax = b$ suivant

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_1x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_{11} = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On pose

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}, a_{11} \neq 0, b^1 = b = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

On introduit les multiplicateurs

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, i = 2, \dots, n.$$

On peut éliminer l'inconnue x_i des lignes $i = 2, \dots, n$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)}, i, j = 2, \dots, n \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)}, i = 2, \dots, n \end{cases}$$

On obtient un nouveau système

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

On peut à nouveau transformer ce système de façon à éliminer l'inconnue x lignes $3, \dots n$ on continue avec la même opération on obtient une suite finie de systèmes

$$A^{(h)} x = b^{(h)}, 1 \leq h \leq n$$

Pour $(n \geq 2)$ la matrice $A^{(h)}$ est de la forme

$$A^{(h)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nh}^{(h)} & \dots & a_{nn}^{(h)} \end{bmatrix}$$

Tal que $a_{ii}^{(i)} \neq 0$

Pour $i = 1 \dots h-1$ il est clair que pour $h = n$ on obtient alors le système triangulaire supérieur

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix} = b^{(n)}$$

D'une façon générale pour passer du $h^{\acute{e}me}$ système au $(k+1)^{\acute{e}me}$ système peu $h = 1, 2 \dots n-1$ on suppose que $a_{hh}^{(h)} \neq 0$ et on définit le multiplicateur

$$m_{ih} = \frac{a_{ih}^{(h)}}{a_{hh}^{(h)}}, i = k+1, \dots, n.$$

On pose alors

$$\begin{cases} a_{ij}^{(h+1)} = a_{ij}^{(h)} - m_{ih}^{(h)} a_{hj}^{(h)}, i, j = h+1, \dots, n \\ b_i^{(h+1)} = b_i^{(h)} - m_{ih} b_h^{(h)}, i = h+1, \dots, n \end{cases}$$

Remarque 1.1.1 *Lorsqu'un pivot est nul la méthode Gauss n'est plus applicable*

1.1.7 Factorisation (Décomposition) LU

Le principe de cette méthode est d'écrire la matrice A sous la forme $A = LU$, tal que :

L : est une matrice triangulaire inferieure de diagonal

U : une matrice triangulaire supérieure $u_{ii} \neq 0$ C.-à-d.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{11} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \dots & \dots & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{11} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{11} & \dots & l_{11} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & \dots & u_{11} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & u_{11} \end{bmatrix}$$

Le système $Ax = b$ devient

$$Ax = b \Longleftrightarrow LUx = b \Longleftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

D'après la méthode de Gauss, on peut dire que cette dernière est équivalente à la factorisation LU, $U = A^{(n)}$ et L est la matrice des multiplicateurs

Théorème 1.1.2 *Si une matrice Régulière A d'ordre N possède une factorisation $A = LU$ où L est triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure, alors la factorisation est unique.*

Preuve. Si $A = L_1U_1 = L_2U_2$ où toutes les matrices sont régulières, alors $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$.Notons X cette matrice. Puisque $X = L_2^{-1}L_1$, elle est triangulaire inférieure à diagonale unité, et puisque $X = U_2U_1^{-1}$ elle est triangulaire supérieure. Donc nécessairement $X = I$, c'est-à-dire : $L_1 = L_2$ et $U_1 = U_2$, ce qui prouve que la décomposition est unique.

■

1.1.8 Matrices Par Blocs

Définition 1.1.7 *Une matrice par blocs $M = (M_{ij}), 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$, est une matrice dont les entrées M_{ij} sont des matrices au lieu d'être des scalaires. On doit toute fois respecter les deux règles suivantes :*

- *Toutes les matrices d'une même ligne (M_{ij} avec $1 \leqslant j \leqslant n$) ont le même nombre de lignes,*
- *Toutes les matrices d'une même colonne (M_{ij} avec $1 \leqslant i \leqslant m$) ont le même nombre de colonnes*

Ainsi, il existe des nombres entiers m_i et n_j tels que $M_{ij} \in C^{m_i \times n_j}$.On étend aux matrices par blocs les concepts de matrice diagonale, de matrice triangulaire supérieure ou de matrice triangulaire inférieure :

- *$M = (M_{ij})$ est triangulaire supérieure par blocs si $M_{ij} = 0$ pour $i \succ j$,*
- *M est triangulaire inférieure par blocs si $M_{ij} = 0$ pour $i \prec j$,*
- *M est diagonale par blocs si $M_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.*

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}$$

et où l'on note par 0 le scalaire $0 \in R$ dans M, la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 \\ a \end{pmatrix}$$

où $I_2 \in R^{2\times 2}$ est la matrice identité et $B = (3, 3) \in R^{1\times 2}$.

Le calcul du produit par blocs s'écrit :

$$MN = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AI_2 + 0B \\ 0I_2 + 1B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement qu'il s'agit bien du produit usuel :

$$MN = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.2 Problèmes inverses

Définition 1.2.1 *Dans le livre "Inverse Problèmes", l'auteur introduit la définition d'un problème inverse. Il s'agit d'un problème qui détermine des causes connaissant des effets. Ce problème est l'inverse d'un autre appelé direct qui détermine les effets, les causes étant connues. L'étude des problèmes inverses est difficile et ça est dû à la possibilité d'avoir plusieurs solutions, car des causes différentes mènent aux même effets. Des informations en plus sont nécessaires pour récupérer l'unicité de la solution. Une autre difficulté pratique de l'étude des problèmes inverses est qu'elle demande souvent une bonne connaissance du problème direct, d'où le succès dans la résolution d'un problème inverse repose en général sur des éléments spécifiques à ce problème Il existe toute fois quelques techniques qui possèdent un domaine d'applicabilité étendu. Parmi les domaines dans lesquels les problèmes inverses jouent un rôle important nous pouvons citer :*
l'imagerie médicale (échographie, scanners, rayons X, ...), l'ingénierie pétrolière (Prospection par des méthodes sismiques, magnétiques, identification des perméabilités dans un réservoir ...), l'hydrogéologie (identification des perméabilités hydrauliques) la chimie (détermination des constantes de réaction), le radar (détermination de la forme d'un obstacle), la mécanique quantique (détermination du potentiel), le traitement d'image (restauration

d'images floues).etc.

La plus part des problèmes inverses ne satisfait pas à la définition d'un problème bien-posé, on les appelle problèmes mal-posés.

1.3 Problèmes bien et mal posés (cas linéaire)

Définition 1.3.1 *Dans un livre célèbre, Hadamard* [32] *a introduit dès* 1923 *la notion de problème bien posé.*

Il s'agit d'un problème dont :

– la solution existe i.e. $\operatorname{Im} A = R^M$;

– elle est unique i.e. $\ker A = \{0\}$;

elle dépend continûment des données i.e.

$$\forall (z, z\prime) \in (R^M)^2, \|Z - Z'\| \to 0 \Rightarrow \|\widehat{y}(z) - \widehat{y}(z')\| \to 0.$$

La condition d'existence signifie que tout élément $Z \in R^M$ est une image d'un élément $y \in R^N$. La condition d'unicité implique que l'ensemble des solutions de l'équation $Ay = 0$, où $y \in R^N$, se réduit au singleton nul. La condition de stabilité signifie qu'une petite perturbation sur l'image dégradée engendre une faible variation sur l'image reconstruite. Bien entendu, ces notions doivent être précisées par le choix des espace (et des topologies) dans les quels les données et la solution évoluent. Un problème qui n'est pas bien-posé au sens de la définition précédente est dit mal-posé.

Exemple 1.3.1 *Considérons une fonction* $f \in C^1([0, 1])$, *et* $n \in N$. *Soit*

$$f_n(x) = f(x) + (\frac{1}{n} \sin(n^2 x)).$$

Alors

$$f_n^{'}(x) = f^{'}(x) + n \cos(n^2 x).$$

De simples calculs montrent que

$$\|f - f_n\|^2 = \frac{1}{n}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\sin(2n^2))^{\frac{1}{2}} = 0(\frac{1}{n}).$$

alors que

$$\|f' - f_n'\|^2 = n(\frac{1}{2} + \frac{1}{4n}\sin(2n^2))^{\frac{1}{2}} = 0(n).$$

Ainsi, la différence entre f' *et* $f_n^{'}$ *peut-être arbitrairement grande, alors même que la différence entre* f *et* f_n *est arbitrairement petite. L'opérateur de dérivation (l'inverse de* A*) n'est donc pas continu, au moins avec ce choix des normes. L'instabilité de l'inverse est typique des problèmes mal posés. Une petite perturbation sur les données (ici* f*) peut avoir une influence arbitrairement grande sur le résultat (ici* f'*).*

Exemple 1.3.2 *On considère le système d'équations linéaires suivantes :*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\times 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10^{-5} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

admet la solution $x = [0.5\ 0.5\ 0.5]^\intercal$*. Supposons qu'il existe une petite perturbation dans le troisième élément des données indiquées. Tel que* $\delta = [0\ 0\ 10^{-2}]^\intercal$*, Alors la solution sera après la perturbation de vient* $x = [0.5\ 0.5\ 500.5]^\intercal$*.*

Puisque le problème est généralement mal poses, Allos une petite perturbation dans les donnés, produit un grand changement dans la solution, donc pour éviter celle perturbation (instabilité de la solution)

On doit résidu

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Ou lieu de résidu de problème (1.2)*.*

Après la régularisation du problème. La solution est $x = [0.5\ 0.5\ 0.005]^{\intercal}$*, Appris la perturbation des donnes la solution sera* $x = [0.5\ 0.5\ 5.005]^{\intercal}$*.*

Chapitre 2

Types de problèmes mal-posés

2.1 Système Surdéterminés et Sous-déterminés

Nous considérons ici un système d'équations linéaires $Ax = b$ avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ où le nombre n d'inconnues et nombre m d'équations. Deux cas sont à considérer :

- On dit des systèmes surdéterminés si $(m > n)$ le nombre d'équations est plus grand que celui des indéterminées. En général, un système surdéterminé n'a pas de solution.
- On dit des systèmes sous-déterminés si $(m < n)$ où le nombre d'équations est plus petit que celui des inconnues. En général, ce système admet une infinité de solutions.

2.2 Problèmes linéaires des moindres carrés et méthode de projection

2.2.1 Construction de problème de moindre carré

Le problème de moindres carrés linéaires est définie par, supposons qu'on a N points de données $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{N}$, et un ensemble de M fonctions linéaires indépendantes donnés par $\{f_i(x)\}_{j=1}^{M}$.

On veut trouver M coefficients $\{c_j\}$ de sorte que la fonction $f(x)$ donnée par :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{M} c_j f_j(x) \tag{2.1}$$

Minimise la quantité

$$E(c_1, c_2, c_2, \ldots, c_M) = \sum_{k=1}^{N} [f(x_k) - y_k]^2 = \sum_{k=1}^{N} \left[\sum_{j=1}^{M} c_j f_j(x_k) - y_k \right]^2 \tag{2.2}$$

Pour que E être minimisé, il est nécessaire que chacun des dérivées partielles doivent être nulles (i.e. $\frac{\partial E_i}{\partial c_i} = 0$) pour $i = 1, 2, \ldots, M$ equivalent à de sorte que :

$$\sum_{k=1}^{N} \left[\sum_{j=1}^{M} c_j f_j(x_k) - y_k \right] f_i(x_k) = 0 \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, M \tag{2.3}$$

Le commutateur de l'ordre des sommes dans (2.3) donnent un système $M \times N$ d'équations linéaires où les inconnus sont $\{c_j\}$ qui s'appellent.

$$\sum_{k=1}^{N} \left[\sum_{j=1}^{M} c_j f_j(x_k) \right] f_i(x_k) - \sum_{k=1}^{N} y_k f_i(x_k) = 0 \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, M$$

Alors

$$\sum_{j=1}^{M} \left[\sum_{k=1}^{N} f_i(x_k).f_j(x_k) \right] c_j = \sum_{k=1}^{N} f_i(x_k) y_k \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, M \tag{2.4}$$

2.2.2 Forme matricielle

Bien que (2.4) soit un système d'équations de N dans M inconnues, il faut être pour que les calculs ne soient pas effectués lors de l'écriture du système en notation matricielle.

L'idée est d'écrire les matrices A et $A^\intercal$ comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_M(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_M(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(x_N) & f_2(x_N) & \dots & f_M(x_N) \end{bmatrix}, A^\intercal = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_N) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_M(x_1) & f_M(x_2) & \dots & f_M(x_N) \end{bmatrix}$$

considérons le produit de $A^\intercal$ et le vecteur colonne Y :

$$A^\intercal Y = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_N) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_M(x_1) & f_M(x_2) & \dots & f_M(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

l'élément dans la $i^{éme}$ du produit $A^\intercal Y$ in (2.5) est le même que l'élément $i^{éme}$ dans le vecteur colonne dans l'équation (2.4), c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{N} f_i(x_k) y_k = (\text{rangée}_\text{i}\ A^\intercal.(y_1, y_2, \dots, y_N)^\intercal)$$

Maintenant, considérons le produit $A^\intercal A$ qui est une matrice $M \times M$:

$$A^\intercal A = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_N) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_M(x_1) & f_M(x_2) & \dots & f_M(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_M(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_M(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(x_N) & f_2(x_N) & \dots & f_M(x_N) \end{bmatrix}$$

L'élément de la $i^{\text{ème}}$ lignes et la $j^{\text{ème}}$ colonnes de $A^\intercal A$ est le coefficient de c_j dans la $i^{\text{ème}}$ lignes dans l'équation (2.4)

C'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{N} f_i(x_k).f_j(x_k) = f_i(x_1).f_j(x_1) + f_i(x_2).f_j(x_2) + \ldots + f_i(x_N).f_j(x_N)$$

Quand M est petit, Un simple calcul efficace nous conduisant à calculer les coefficients linéaires de moindres carrés de 2.1 est de réarrange A et de calculer $A^{\intercal}A$ et $A^{\intercal}Y$, puis de résoudre un système linéaire :

$$A^{\intercal}AC = A^{\intercal}Y$$

Pour le coefficient vecteur C.

2.2.3 Forme polynomial

Lorsque la méthode ci-dessus est adaptée pour utiliser la fonction $\{f_j(x) = x\}$ et l'index des plages de sommation de $j = 1 \ldots M + 1$, la fonction $f(x)$ définie dans (2.1) et un polynôme de degré M :

$$f(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots + c_{M+1}x^M$$

Nous montrons maintenant comment trouver la parabole à manipuler.

$$\text{Si : } M = 1 \text{ et } c = a, i = 1, \ldots, m + 1$$

Comme nous le savons, un segment de droite peut être exprimée sous la forme suivante :

$$f(x) = y = a_0 + a_1x$$

Les formules que nous allons dériver seront un ensemble d'équations simultanées pour les paramètres arbitraires a_0 et a_1.

D'exister pour visualiser le processus, voir fig (2.1)

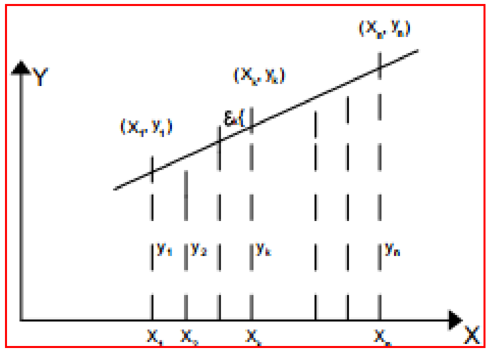

FIG. 2.1 – Fig(2.1)

On remarque toujours que le nombre le point de données est supérieure que le nombre se coefficient de la fonction si non, l'errer s'annule.

La différence entre ces deux valeurs est l'erreur d'calcule au point $k^{éme}$:

$$\varepsilon_k = y_k - (a_0 + a_1 x_k)$$

Est l'erreur au point (x_k, y_k).

Si nous additionnons maintenant les cases de toutes les erreurs aux points de données, nous obtiendrons l'erreur totale la calculé :

$$E = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 = \sum_{k=1}^{n} [y_k - (a_0 + a_1 x_k)]^2$$

Remarque 2.2.1 *Les erreurs ont carré pour éliminer l'annulation possible.*

Pour trouver ce que nous considérons E comme une fonction de a_0 et a_1 doit neutre les dérivés partielles égale à zéro :

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = -2 \sum_{k=1}^{n} [y_k - (a_0 + a_1 x_k)] = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = -2 \sum_{k=1}^{n} [y_k - (a_0 + a_1 x_k)] \, x_i = 0, i = 1, 2.$$

diviser chacune des équations par (-2) et réarranger les termes on trouve :

$$na_0 + a_1 \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k \tag{2.6}$$

$$a_0 \sum_{k=1}^{n} x_k + a_1 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \tag{2.7}$$

les équations (2.5) et (2.6) sont deux équations algébriques simultanées pour les deux paramètres a_0 et a_1. Si nous introduisons la notation matricielle (2.5) et (2.6) On peut s'écrire sons la forme :

$$[A](a) = (b) \tag{2.8}$$

Où

$$A = \begin{bmatrix} n & \sum_{k=1}^{n} x_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k & \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \end{bmatrix}, (a) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, (b) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} y_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{pmatrix}$$

Puisque pour tout vecteur non nul $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ nous avons :

$$C^{\mathsf{T}} A C = c_1 \left(nc_1 + c_2 \sum_{k=1}^{n} x_k \right) + c_2 \left(c_1 \sum_{k=1}^{n} x_k + c_2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)$$

$$= nc_1^2 + 2c_1 c_2 \sum_{k=1}^{n} x_k + c_2^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (c_1 + c_2 x_k)^2 \geq 0$$

Par conséquent A est définie positive, et elle non-singulier, puis la solution à (2.8) Existent et il est

$$(a) = [A]^{-1} (b) \tag{2.9}$$

Ainsi, en savoir les points de données tous les termes dans $[A]$ et (b) peuvent être calculés, et donc (a) est déterminé.

C'est la méthode de moindres carrés, et il peut être généralisé pour s'adapter à un polynôme de n'importe quel ordre.

Dans le cas général, on peut vouloir adapter une courbe $m^{éme}$-ordre aux points de données n-donnés (x_k, y_k), c'est-à-dire :

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

Par la mémé méthode de dérivation, on peut être démontré que le résultat général (2.8) où :

$$A = \begin{bmatrix} n & \sum_{k=1}^{n} x_k & \sum_{k=1}^{n} x_k^2 & \ldots & \sum_{k=1}^{n} x_k^m \\ \sum_{k=1}^{n} x_k & \sum_{k=1}^{n} x_k^2 & \sum_{k=1}^{n} x_k^3 & \ldots & \sum_{k=1}^{n} x_k^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} x_k^m & \sum_{k=1}^{n} x_k^{m+1} & \sum_{k=1}^{n} x_k^{m+2} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} x_k^{2m} \end{bmatrix} = (a_{ij})$$

Où

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_k^{i+j-2}$$

Nous avons pour tout vecteur non nul $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\intercal$

$$C^\intercal A C = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k x_j^{k-1} \right)^2 \geq 0$$

et donc A est définie positive et non-singulier $A = (a_{ij}), a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_k^{i+j-2}$

Et alors

$$(a) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, (b) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} y_k \\ \sum_{k=1}^{n} y_k x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} y_k x_k^m \end{pmatrix}$$

$(a) = [A]^{-1}(b)$ la même formule en 2.9

C'est-à-dire : donner un ensemble de points de données pour lesquels on veut s'adapter à une courbe avec une erreur minimale, il suffit de calculer les matrices $[A]$ et (b).

Exemple 2.2.1 *Supposons que nous avons un ensemble de points de données*

$\{(0, 0.99), (1, 0.03), (2, -1.02), (3, -1.94), (4, -3.04)\}$

Trouver les coefficients de polynôme de minimise.

Solution 2.2.1 *Si nous examinons ces données, nous pouvons observer qu'elles suivent une relation quelque peu linéaire. Ainsi, de cette observation, nous cherchons à déterminer les coefficients de :*

$$y = a_0 + a_1 x$$

par la méthode de moindres carrés :

$$[A](a) = (b) \text{ avec } A = \begin{bmatrix} n & \sum_{k=1}^{n} x_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k & \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \end{bmatrix}, (a) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, (b) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} y_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{pmatrix}$$

D'où

$$[A](a) = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.98 \\ -19.98 \end{pmatrix} = (b)$$

Donc

$$(a) = [A]^{-1}(b)$$

C'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -4.98 \\ -19.98 \end{pmatrix}$$

$$\textit{et on trouve} \begin{cases} a_0 = 1.01 \\ a_1 = -1.003 \end{cases}$$

Il est intéressant de ne pas ce qui se passe quand un polynôme d'ordre supérieur est calcul aux données ci-dessus.

Encore une fois, nous appliquons la méthode de moindres-carrés pour trouver les coefficients pour :

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Et on a

$$[A](a) = (b)$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} n & \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 \\ \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 & \sum_{k=1}^n x_k^4 \end{bmatrix}, (a) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, (b) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n y_k \\ \sum_{k=1}^n y_k x_k \\ \sum_{k=1}^n y_k x_k^2 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire

$$[A](a) = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.98 \\ -19.99 \\ -70.15 \end{pmatrix} = (b)$$

donc

$$(a) = [A]^{-1}(b)$$

Nous trouvons

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{31}{35} & -\frac{27}{35} & \frac{1}{7} \\ -\frac{27}{35} & \frac{87}{70} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{14} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -4.98 \\ -19.99 \\ -70.15 \end{pmatrix}$$

$$\textit{Et par suite nous trouvons} \begin{cases} a_0 = 0.98857 \\ a_1 = -0.96014 \\ a_2 = -0.01071 \end{cases}$$

On générale ou polynôme de degré suppurer :

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

On a

$$[A](a) = (b)$$

Et nous trouvons que

$$A = \begin{pmatrix} n & \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 \\ \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 & \sum_{k=1}^n x_k^4 \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 & \sum_{k=1}^n x_k^4 & \sum_{k=1}^n x_k^5 \\ \sum_{k=1}^n x_k^3 & \sum_{k=1}^n x_k^4 & \sum_{k=1}^n x_k^5 & \sum_{k=1}^n x_k^6 \end{pmatrix}, (a) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, (b) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n y_k \\ \sum_{k=1}^n y_k x_k \\ \sum_{k=1}^n y_k x_k^2 \\ \sum_{k=1}^n y_k x_k^3 \end{pmatrix}$$

Par suite

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 30 & 100 \\ 10 & 30 & 100 & 354 \\ 30 & 100 & 354 & 1300 \\ 100 & 354 & 1300 & 4890 \end{pmatrix}, (a) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, (b) = \begin{pmatrix} -4.98 \\ -19.99 \\ -70.15 \\ -255.07 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{69}{70} & -\frac{125}{84} & \frac{9}{14} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{125}{84} & \frac{3215}{504} & -\frac{325}{84} & \frac{43}{72} \\ \frac{9}{14} & -\frac{325}{84} & \frac{18}{7} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{1}{12} & \frac{43}{72} & -\frac{5}{12} & \frac{5}{72} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -4.98 \\ -19.99 \\ -70.15 \\ -255.07 \end{pmatrix}$$

$$\textit{Donne le résultat} \begin{cases} a_0 = 0.99756 \\ a_1 = -1.02464 \\ a_2 = 0.03428 \\ a_3 = -0.0075 \end{cases}$$

On remarque après la comparons les résultats des coefficients dans chacun de ces trois cas, On peut conclure que les coefficients que les coefficients de deuxième et troisième termes de l'ordre sont faibles par rapport aux coefficients constants et linéaires. Cela montre que dans Le cas de linéaire des données perturbent fortement les résultats.

L'implication est que même par un polynôme d'ordre supérieur est calcul à l'ensemble des données, la méthode de moindres carrés trouve les coefficients des termes dominants pour bouleverser la trajectoire dominant des données. À partir des dérivations ci-dessus, il devrait être clair que dominent la perturbation des données.

2.3 Propriétés mathématiques des problèmes de moindres carrés

Étant donné $\widehat{z} \in F$, nous cherchons $\widehat{x} \in E$ solution de :

$$A\widehat{x} = \widehat{z} \tag{2.10}$$

Revenons dans ce cas particulier sur la discussion du chapitre 1 concernant les problèmes bien et mal posés

– l'opérateur A peut ne pas être surjectif ;

– il peut ne pas être injectif ;

– si un inverse existe, il peut ne pas être continu.

Théorème 2.3.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$, E et F deux espaces de Hilbert. Supposons que A soit injectif, et notons $A^{-1} : ImA \to E$ l'inverse de A. On a :*

$$\operatorname{Im} A \text{ fermé} \Longleftrightarrow A^{-1} \text{ est continu.}$$

Preuve. " $\Rightarrow$ " Dans ce cas $W = ImA$ est un espace de Hilbert (il est immédiat que W est un espace préhilbertien, et il est complet parce qu'il est fermé). L'opérateur $\tilde{A} : E \to W$, $\tilde{A}u = Au$ pour $u \in E$ est un opérateur linéaire continu et bijectif. Une conséquence classique du théorème de l'application ouverte (Théorème 1.1.1) est que $\tilde{A}^{-1}$ est continu. Il en est donc de même pour A^{-1}.

" $\Leftarrow$ " Puisque A^{-1} est continu, et que $E = ImA^{-1}$ est fermé, $ImA = (A^{-1})^{-1}(E)$ est fermé dans F. ■

l'opérateur A pourra ou non être injectif, mais la situation générale sera que ImA n'est pas fermée ((Corollaire 1.1.1) montre que si A est compact, A n'a pas d'inverse continu, et dans ce cas ImA ne sera pas fermé).

Le problème (2.10) n'a de solution que pour $\widehat{z} \in ImA$. Si $\widehat{z} \notin ImA$ le système (2.10) n'a de solution au sens strict alors on cherche une solution au sens de moindres carrés nous remplaçons donc (2.10) par :

$$\min_{x \in E} \frac{1}{2} \|Ax - \widehat{z}\|_F^2 \tag{2.11}$$

Théorème 2.3.2 *Soit* $A \in \mathcal{L}(E, F), E, F$ *deux espaces de Hilbert, et soit* $\widehat{z} \in F$. *Un élément* $\widehat{x} \in E$ *est une solution de* (2.11) *si et seulement si :*

$$A^{\intercal} A \widehat{x} = A^{\intercal} \widehat{z} \tag{2.12}$$

Cette équation est dite équation normale.

Preuve. " $\Rightarrow$ " Soit x vérifiant (2.12) On a pour tout $y \in E$:

$$\widehat{z} - Ay = \widehat{z} - Ax + A(x - y).$$

L'équation normale (2.12) implique que les deux termes de la somme sont orthogonaux (le résidu $\widehat{z} - Ax$ est orthogonal a l'imae de A). Le théorème de Pythagore implique :

$$\|\widehat{z} - Ay\|_F^2 = \|\widehat{z} - Ax\|_F^2 + \|A(x - y)\|_F^2 \geq \|\widehat{z} - Ax\|_F^2 .$$

x est donc bien solution de (2.11).

" $\Leftarrow$ " Soit x tel que $A^{\intercal}(\widehat{z} - Ax) = w \neq 0$. Choisissons $y = x + \varepsilon w$, avec $\varepsilon > 0$. On a alors :

$$\|\widehat{z} - Ay\|_F^2 = (\widehat{z} - Ay, \widehat{z} - Ay) = \|\widehat{z} - Ax\|_F^2 - 2\varepsilon(\widehat{z} - Ax, w) + \|Aw\|_F^2 < \|\widehat{z} - Ax\|_F^2$$

puisque $\|Aw\|_F \leq \frac{2}{\varepsilon} \|w\|_E$ (A continue), si ε est suffisamment petit. x n'est donc pas solution de (2.11). $\blacksquare$

Remarque 2.3.1 *L'équation normale* (2.12) *se réécrit :*

$$A^{\intercal}(A\widehat{x} - \widehat{z}) = 0.$$

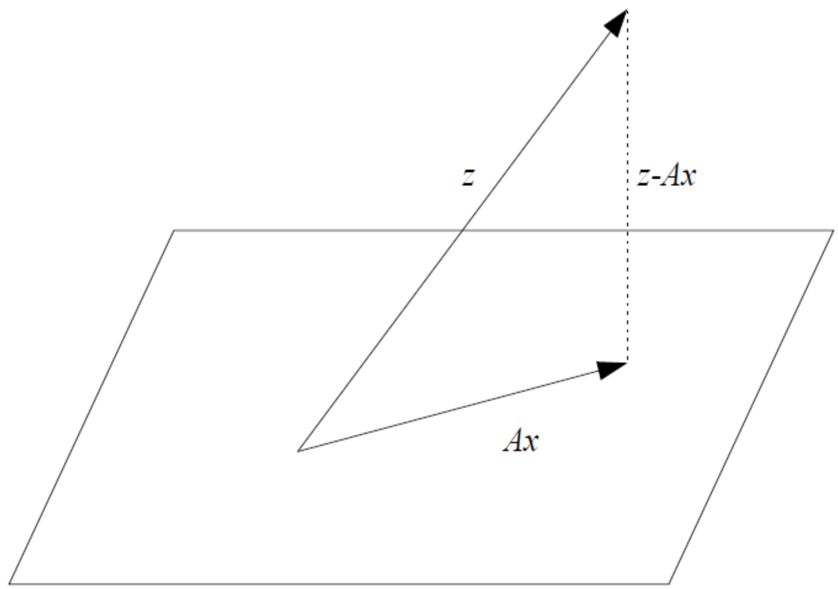

FIG. 2.2 – Illustration gèomètrique des moindres carrès

ce qui exprime simplement que le résidu $\widehat{z} - A\widehat{x}$ est dans le noyau de $A^{\intercal}$, c'est-à-dire orthogonal à (la fermeture de) l'image de A (Proposition 1.1.1). Ceci conduit à l'illustration géométrique bien connue :

La solution du problème de moindres carrés est telle que Ax est la projection de $\widehat{z}$ sur l'image de A.

Notons que nous n'avons pour l'instant évoqué ni l'existence, ni l'unicité, pour les solutions de (2.11) ou de (2.12). Nous avons simplement montré l'équivalence des deux problèmes. L'unicité est évidemment liée à l'injectivité de A, comme le précise le résultat suivant.

Lemme 2.3.1 *La solution du problème* (2.11) *est unique si, et seulement si, l'opérateur A est injectif.*

Preuve. Notons tout d'abord que $KerA^{\intercal}A = KerA$. Un sens est évident. Pour l'autre, nous avons :

$A^{\intercal}Ax = 0 \Rightarrow (A^{\intercal}Ax, x) = 0 \Rightarrow (Ax, Ax)_F = \|Ax\|_F = 0 \Rightarrow Ax = 0$

Par conséquent, A et $A^{\intercal}A$ sont injectifs en même temps, ce qui donne le résultat. ■

Chapitre 3

Méthodes pour resoudu problèmes lineaire mal-posés

Lemme 3.0.2 *Si V et U sont deux vecteurs orthogonaux, alors $V+U$ est plus long que U. Si elles ne sont pas orthogonaux, alors pour certains ε, $U+\varepsilon V$ est plus court que U.*

Preuve. $\|U+\varepsilon V\|^2 = (U+\varepsilon V)(U+\varepsilon V) = \|U\|^2 + \varepsilon^2 \|V\|^2 + 2\varepsilon \operatorname{Re}\{U^\intercal V\}$
Si $U^\intercal V = 0$, alors $U+V$ est plus long que U puisque $\|V\|^2$ est une quantité positive.
Sinon, si : $c = 2\operatorname{Re}\{U^\intercal V\}$, $\|U+\varepsilon V\|^2 = \|U\|^2 + \varepsilon(c+\varepsilon\|V\|^2)$
soit $\varepsilon c < 0$ et ε est assez petit, donc $c+\varepsilon\|V\|^2$ a le même signe de c donc $U+\varepsilon V$ est plus court que U. ■

Théorème 3.0.3 *Le vecteur "résiduel" $r = Ax - b$ est plus court lorsque $A^\intercal r = 0$, en d'autres poit x est la solution unique de probleme de moindre-carrés de $Ax = b$ si et seulement si elle est une solution de, $A^\intercal Ax = A^\intercal b$.*

Preuve. Supposons que x_0 produise le résidu $r_0 = Ax_0 - b$ de longueur minimale, $x_0 + \varepsilon w$ produisent le résidu $r_0 + \varepsilon Aw$, qui est d'après le lemme (3.0.2) est plus court pour quelques petits ε que r_0 et Aw sont orthogonales.Ainsi, pour un résidu minimal, nous devons avoir :

$$(Aw)^\intercal r_0 = w^\intercal A^\intercal r_0 = 0$$

Pour chaque w seulement possible si $A^{\intercal}r_0 = 0$ qui est $A^{\intercal}Ax_0 = A^{\intercal}b$. ■

Théorème 3.0.4 *A^+B est la solution minimal de problème linéaire de "moindres-carrés" $Ax = b$ Notez que si A de rang maximales egale nombres de lignes, A^+B est la solution minimale (système sous-determiné), et si A de rang maximale egale nombres de colonne, A^+B est la solution unique "les moindres-carrés".*

Preuve. Soit $Ax = v$ et posons $A = BC$ une factorisation de A.
Soit x produire un résiduel minimum de sorte que par (Théorème (3.0.2)), $A^{\intercal}Ax = A^{\intercal}v$ ou $C^{\intercal}B^{\intercal}BCx = C^{\intercal}B^{\intercal}v$ multiplier par $C \implies (B^{\intercal}B)Cx = B^{\intercal}v$ ou $Cx = v_0 = B^+v$ une solution à $Cx = v_0$ est $x_0 = C^{\intercal}(CC^{\intercal})^{-1}v_0$. Donc, chaque solution a la forme $x_0 + y$, pour tout vecteur y tel que $Cy = 0 \Longrightarrow x_0, y$ sont orthogonaux et donc que x_0 est la solution minimale de $Cx = v_0$, $x_0 = C^+B^+v = A^+v$ et donc A^+v est nécessaire la plus courte "moindre-carrés" solution de $Ax = v$. ■

3.1 Quelques méthodes pour résoudre un problème linéaire de moindres carrés et un système d'équations linéaires

Dans cette section, nous allons présenter une méthode pour résoudre un problème linéaire de moindres carrés $Ax = b$ où $A_{m\times n}$ $(m > n)$ de $rang(n)$ résoudre un système de n équations et m variables, $Ax = b$ tel que le système a infiniment de nombreuses solutions et nous allons trouver une solution particulière $\bar{x}$ (norme-solution minimale) au système $A^{\intercal}x = b$ satisfaisant à la condition :

$$\|\bar{x}\|_2 = \min \|x\|_2 \text{ tel que } A^Tx = b$$

3.1.1 Méthode proposée

Soient les problèmes :

$$\min_{x} \|b - Ax\|_2 \tag{3.1}$$

Et

$$\min \|x\|_2 \ \text{ tq } A^{\intercal}x = b \tag{3.2}$$

A est une matrice de type $(m \times n)$ et de $rang(n)$ $(m > n)$

Nous utilisons la formulation du système Composé :

$$\begin{cases} r + Ax = b \\ A^{\intercal}x = b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} I & A \\ A^{\intercal} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Pour le problème de moindres carrés $c_1 = b$ et $c_2 = 0$ et la solution est donnée par x_2. Pour la solution de norme minimale $c_1 = 0$ et $c_2 = b$, et la solution est donnée par x_1. Dans les deux cas, nous allons utiliser la factorisation LU de A, de sorte que, si A factorise les deux matrices A_1 et A_2, où A_1 est une matrice non-singulière $n \times n$, la factorisation peut être écrite comme

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} U. \tag{3.4}$$

Système surdéterminé

Soit $Ax = b, A_{m\times n}(m > n)$ un système linéaire

On suppose

$$r = b - Ax \tag{3.5}$$

Alors

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} x \tag{3.6}$$

Ainsi par (Théorème (3.0.2)) r est le plus petite si et seulement si $r \epsilon N(A^\intercal)$ alors :

$$\begin{pmatrix} A_1^\intercal & A_2^\intercal \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{3.7}$$

Donc

$$r_1 = b_1 - A_1 x \tag{3.8}$$

$$r_2 = b_2 - A_2 x \tag{3.9}$$

$$A_1^\intercal r_1 + A_2^\intercal r_2 = 0 \tag{3.10}$$

$$r_1 = -A_1^{-\intercal} A_2^\intercal r_2 = -(L_1 U)^{-\intercal} (L_2 U)^\intercal r_2 = -L_1^{-\intercal} L_2^\intercal r_2 \tag{3.11}$$

D'après (3.8) on a

$$x = A_1^{-1} b_1 - A_1^{-1} r_1 \tag{3.12}$$

Substitut (3.12) dans l'équation (3.9) que nous obtenons

$$r_2 = b_2 - A_2 A_1^{-1} b_1 - A_2 A_1^{-1} r_1$$

Mais

$$r_1 = -A_1^{-\intercal} A_2^\intercal r_2 \tag{3.13}$$

Donc

$$r_2 = b_2 - A_2 A_1^{-1} b_1 - A_2 A_1^{-1} A_1^{-\intercal} A_2^{\intercal} r_2$$

$$\left(I + A_2 A_1^{-1} A_1^{-\intercal} A_2^{\intercal}\right) r_2 = b_2 - A_2 A_1^{-1} b_1$$

$$S r_2 = b_2 - J b_1 \tag{3.14}$$

Où

$$J = A_2 A_1^{-1} = L_2 L_1^{-1} \tag{3.15}$$

Et

$$S = I + J J^{\intercal} \tag{3.16}$$

Ainsi, la solution du problème moindres carrés (3.1) est alors trouvée en utilisant la factorisation de A comme suit :

De (3.8) nous avons

$$A_1 x = b_1 - r_1$$

Utilisant (3.13) on trouve

$$A_1 x = b_1 - (-A_1^{-\intercal} A_2^{\intercal}) r_2$$

Alors

$$A_1 x = b_1 - J^{\intercal} r_2 \tag{3.17}$$

Donc

$$x = A_1^{-1}b_1 - A_1^{-1}J^\intercal r_2 \tag{3.18}$$

est la solution de (3.1)

Systèmes sous-déterminé

De (3.3) et d'après la décomposition de matrice A nous avons

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & A_1 \\ 0 & 1 & A_2 \\ A_1^\intercal & A_2^\intercal & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$$

Alors

$$\begin{cases} x_1 + A_1 r = 0 \\ x_2 + A_2 r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$x + Ar = 0 \Rightarrow x = -Ar \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} r$$

Et

$$x_1 = -A_1 r \tag{3.19}$$

$$x_2 = -A_2 r \tag{3.20}$$

De (3.2) on trouve

$$A_1^\intercal x_1 + A_2^\intercal x_2 = b \tag{3.21}$$

$$A_2^\intercal x_2 = b - A_1^\intercal x_1 \tag{3.22}$$

De (3.19) et (3.20) no obtient

$$x_2 = A_2 A_1^{-1} x_1 = L_2 L_1^{-1} x_1 \tag{3.23}$$

Ainsi de (3.22) et (3.23) on obtient

$$x_2 = J(A_1^{-\intercal} b - J^\intercal x_2)$$

$$x_2 = J(A_1^{-\intercal} b) - JJ^\intercal x_2$$

$$Sx_2 = J(A_1^{-\intercal} b) \tag{3.24}$$

Où J et S ont definis respectivement dans (3.16) et (3.17)

La solution du système sous-déterminé (3.2) est alors donnée

De (3.22) par

$$x_1 = A_1^{-\intercal} b - A_1^\intercal A_2^{-\intercal} x_2 = A_1^{-\intercal} b - L_1^{-\intercal} L_2^\intercal x_2$$

Et

$$x_1 = A_1^{-\intercal} b - J^\intercal x_2. \tag{3.25}$$

Ainsi, nous pouvons résoudre le système sous-déterminé un problème réduit de dimension $(m-n)$ (que nous avons supposé petit) et un ensemble d'équations linéaires de l'ordre n pour lequel nous avons calculé la factorisation LU. En outre, nous pouvons à nouveau contrôler la stabilité par pivotement dans la factorisation(3.4)

Exemple 3.1.1 *Trouver la solution du problème de moindres carrés $Ax = b$ où*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ et\ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Et la solution particulière (solution de norme minimale) du problème :

$$\min \|x\|_2\,,\ \ tq\ \grave{a}\ A^{\intercal}x = b$$

Où

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Solution 3.1.1

$$Soit\ A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}\ \ O\grave{u}\ A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ Et\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d'aprés (3.15) *nous avons*

$$J = A_2 A_1^{-1} = L_2 L_1^{-1}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$J = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Et par (3.16) *nous avons*

$$S = I + JJ^{\intercal}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Ainsi par (3.14)

$$Sr_2 = b_2 - Jb_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Sr_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r_2 = S^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{15} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{2}{15} \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Et par (3.17)

$$A_1 x = b_1 + J^{\intercal} r_2 \text{ alors } x = A_1^{-1} b_1 + A_1^{-1} J^{\intercal} r_2$$

$$x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} + \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -8 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -28 \\ 20 \\ 52 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -14 \\ 10 \\ 26 \end{bmatrix}$$

est la solution du probleme de moindres carrés

Pour la solution particulière

Nous avons $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$

De (3.24) *nous avons*

$$Sx_2 = J(A_1^{-\intercal} b)$$

$$Sx_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$Sx_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 \\ 26 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Et

$$x_2 = \frac{2}{15}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 13 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 \\ 39 \end{bmatrix}$$

D'aprés (3.25) *nous avons*

$$x_1 = A_1^{-\intercal} b - J^\intercal x_2$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 \\ \\ 39 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} - \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 34 \\ 44 \\ 78 \end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 26 \\ 46 \\ 42 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 13 \\ 23 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \textit{ est la solution particulière.}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 13 \\ 23 \\ 21 \\ 5 \\ 39 \end{bmatrix}.$$

3.2 Application sous MATLAB

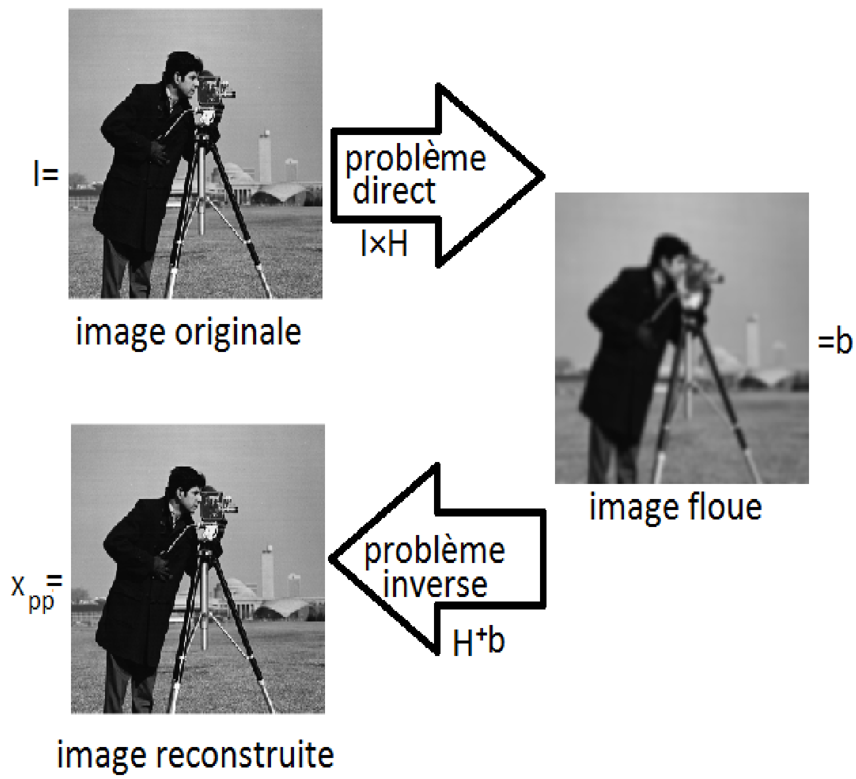

FIG. 3.1 – schéma de programme

3.2.1 Programme

```
nn=31;
for i = 1 :nn
for j = 1 :nn
if abs(i-j) <= 7
w(i,j) = 1./13;
else
w(i,j) = 0;
```

```
end
end
end
h=w;
%GG = im2double(imread('text.png'));
%GG = im2double(imread('trees.tif'));
%GG = im2double(imread('eight.tif'));
GG = im2double(imread('cameraman.tif'));
I = GG(50 : 80 , 120 : 150);
%h=tpToep(31);
II=h*I*h';
subplot(2, 2, 2), imshow(II), title('image floue')
II = II( :);
subplot(2, 2, 3), imshow(I), title('Image originale')
H = kron(h,h);
I = I( :);% vectorisation of image
II = H*I;
x=lsqr(H,II,.00000000001,10000);
ori = vec2mat(x,32)'; % "matrialisé" le vecteur image x trouvé
subplot(2, 2, 1), imshow(ori), title('Images correspondant à calculer par La méthode moindre carré')
% subplot(2, 2, 4), imshow(y), title('gmres calculed image')
z1 = inv(H);
z1*H;
z = z1*II;
z = vec2mat(z,32)';
subplot(2, 2, 4), imshow(z), title('Image calculer par La méthode inverse')
```

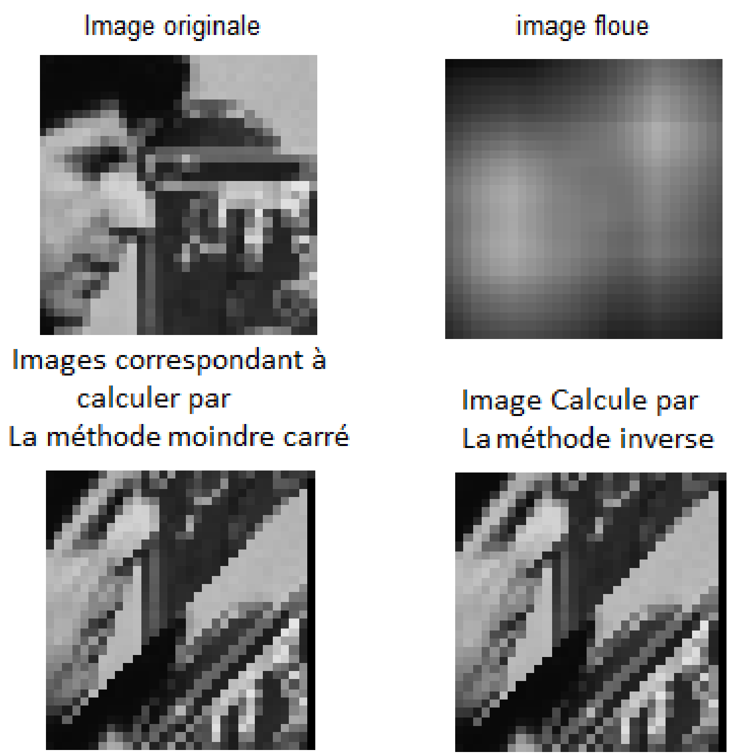

FIG. 3.2 – résultat de programme

Conclusion

Nous avens essaye de cloner une définition du problème inverse, puis la relation entre le problème inverse et les problèmes bien et mal-posés. La sujet décrit essentiellement la transformation d'un problème mal-posé à autre problème mal-posé utilisant la propreté de transposé d'une matrice, et on résoudre les deux problèmes en même tempe, appliquent la décomposition des matrice (LU)

Nous espérons que ce travail contribue a éclairai quelque méthodes d'analyse numérique, concernant la résolution des problèmes inverse en générale et les problèmes mal-posés en particulier

Bibliographie

[1] Brezis, H. (1983). Analyse fonctionnelle. Théorie et applications [Theory and applications]. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree].

[2] Leon, S. J. (1980). Linear algebra with applications ($pp.71-74$). New York : Macmillan.

[3] Lascaux, P., & Théodor, R. (1986). Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur ($Vol.2, pp.\ 508-509$). Paris : Masson.

[4] Lascaux, P., & Théodor, R. (1986). Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur ($Vol.2, pp.\ 508-509$). Paris : Masson.

[5] Lipschutz, S., Lipson, M., & Gosso, J. P. T. Algèbre linéaire : rappel de cours et exercices corrigés.

[6] Lawson, C. L., & Hanson, R. J. (1995). Solving least squares problems (Vol. 15). Siam

[7] Morris, A. O. (1982). Linear Algebra : an introduction ($Vol.9$). Van Nostrand Reinhold Company.

[8] J. B. Keller. Inverse problems. Amer. Math. Monthly,83 : $107-118, 1976$