

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

DJEGHBAL Hayet

Titre :

Problèmes Inverses dans la Restauration d'Images

Membres du Comité d'Examen :

Dr. BENATIA Fateh	UMKB	Président
Dr. HASSOUNA Houda	UMKB	Encadreur
Dr. KHEIREDDINE Souraya	UMKB	Examinateur

Juin 2018

DÉDICACE

Je dédie ce humble travail :

À mes très chers parents "**Mokhtar, Luisa**" qui m'ont bien élevé, aidé, soutenu et encouragé durant toutes ces années d'études, qu'**ALLAH** les protègent.

À mon grand père et à ma grande mère pour leur tendresse, leurs tendresse ; je leur souhaite une longue vie.

À mes très chers frères : **Zain El Dinne- Achraf- Mohamed Yacine** et **Abed El Ali** pour leurs précieuses aides et leurs merveilleux conseils.

À mes très chères soeurs : **Sara- Khawla- Amira** et **Nadine** pour leurs aides morales et leurs conseils.

À mes oncles et mes tantes "**Laamari- Omar**" et "**Siham- Aida**" et à toute la famille **DJEGHBAL**.

À mes cousins : **Khalil- Khaled- Salim- Maroine- Djaoid-Siham**.

À mon cher ami : **Chine Mohammed Tahar**.

À tout ceux qui m'ont appris à lire une lettre, mes amis : **Noor- Narges- Nasira- Romaisa- Asma- Hager- Amel- Laila- Aicha**.

À tous mes professeurs que j'ai connu durant toutes mes études.

À mes connaissances de proche ou de loin.

À tous ceux que j'aime et me souhaitent la réussite dans toute ma vie.

REMERCIEMENTS

En premier lieu, nous exprimons notre gratitude à Dieu Tout-Puissant pour nous avoir permis d'y parvenir, car sans Lui rien n'est possible.

Tout d'abord, Je tiens à remercier **Docteur Hassouna Houda** pour sa surveillance, son suivi et ses conseils lors de l'enquête de ce mémoire.

Nous tenons aussi à remercier tous les enseignants du département de mathématiques à l'université Mohamed Khider de Biskra.

Nous tenons également à remercier les membres du jury pour leur temps précieux consacré à l'étude de notre mémoire.

Enfin, nous remercions tous ceux qui ont contribué directement ou indirectement aux résultats de ce travail.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	vi
Introduction	1
1 Généralités sur les Images	2
1.1 Définition d'une Image	2
1.2 Définition d'une Image Numérique	3
1.3 Caractéristiques d'une Image Numérique :	4
1.3.1 Pixel	4
1.3.2 Résolution	4
1.3.3 Dimension	4
1.3.4 Bruit	5
1.3.5 Luminance	5
1.3.6 Contours	5
1.3.7 Histogramme	6
1.4 Types d'Images	7
1.4.1 Images binaires (en noir et blanc)	7
1.4.2 Images au niveaux de gris	7

1.4.3	Images en couleurs	8
1.5	Image Bitmap	9
1.6	Image Vectorielle	9
1.7	Les Formats d'Images	10
1.7.1	Le format BMP (Windows BitMaP)	10
1.7.2	Le format TIFF (Tagged Image File Format)	10
1.7.3	Le format JPEG (Joint Photographic Expert Group)	10
1.7.4	Le format GIF (Graphics Interchange Format)	11
1.7.5	Le format PNG (Portable Network Graphic)	11
2	Problèmes Inverses	12
2.1	Définition	12
2.2	Typologie des Problèmes Inverses	13
2.2.1	Problèmes inverses linéaires	13
2.2.2	Problèmes inverses non-linéaires	13
2.3	Problèmes Bien Posés et Problèmes Mal-Posés	13
2.4	Exemple de Problème Inverse	15
2.5	Notion de Problème Bien Posé	16
2.6	Les Méthodes d'Inversion Classiques	17
2.6.1	Méthode des moindres carrés	18
2.6.2	Méthode du maximum de vraisemblance	19
2.7	Problèmes Inverses Mal-Posés en Imagerie	21
2.7.1	Tomographie	21
2.7.2	Restauration d'image	22
3	Problèmes Inverses dans la Restauration d'Image	23
3.1	Restauration d'Image Sans Visibilité	24
3.2	Considérations Générales	25

3.3	Restauration d'Image	26
3.3.1	La restauration d'image (floue, bruitée)	27
3.3.2	Formulation de problème	30
3.4	Application MATLAB	33
	Conclusion	41
	Bibliographie	42
	Annexe A : Abréviations et Notations	44

Table des figures

1.1	Représentation d'image numérique.	3
1.2	Exemple d'histogramme d'une image.	6
1.3	Image binaire.	7
1.4	Images à niveaux de gris	8
1.5	Exemple d'image couleur	8
1.6	Image bitmap	9
3.1	Image originale	23
3.2	Image observée	24

Introduction

La restauration d'image a pour objectif d'améliorer la qualité de l'image (souvent visible). Par exemple, une image susceptible de recevoir de la poussière entraînerait un défaut dans l'image. Lorsque vous obtenez une image, l'appareil photo peut vibrer à un flou. En raison de la perte d'information inhérente au modèle de dégradation, le «problème inverse» s'étend d'instable à faible. Nous avons mentionné dans ce traité les problèmes inverses en général tout en parlant sur l'utilisation de ces derniers dans la restauration d'images floues et d'image bruitées (le problème de débruitage pur).

Nous avons mentionné dans le premier chapitre des généralités sur les images et nous avons tout en donnant une définition de l'image et de l'image numérique, ainsi que ses caractéristiques et puis des révélés sur les types d'images et les formats d'images.

Dans le deuxième chapitre, nous avons décrit les bases des problèmes inverses, en les identifiant puis en les classant et en les supposant comme étant des problèmes mal posés.

L'illustration de ces problèmes inverses se fait par des méthodes de réflexion classique.

Le chapitre suivant aura pour objectif d'afficher les problèmes de réflexion dans la restauration d'image.

Dans le dernier chapitre, nous avons décrit la restauration d'image sans visibilité avec des considérations générales, puis nous avons décrit la restauration d'image floue et la restauration d'image bruitée et enfin nous avons exposé la formulation du problème.

Chapitre 1

Généralités sur les Images

L'image est l'un des outils les plus importants que les gens utilisent pour communiquer entre eux. C'est un outil de communication universel qui permet à des personnes de différents âges et de différentes cultures de se comprendre. Dans ce chapitre, nous introduisons des généralités de l'image pour une bonne formulation de la problématique par la suite.

1.1 Définition d'une Image

L'image est une représentation d'une personne ou d'un objet à travers la peinture, la sculpture, le dessin, la photographie, le film,...etc. C'est aussi un ensemble d'informations structurées qui, après affichage sur écran, elle devient significative pour l'œil humain.

Il peut être décrit pour la machine comme une fonction continue de luminosité analogique $J(x; y)$ défini dans un domaine délimité, où x et y sont les coordonnées spatiales d'un point de l'image et j est une fonction de l'intensité de la couleur et de la lumière. Dans cet aspect, l'image est inutilisable par la machine, ce qui nécessite sa numérisation.

1.2 Définition d'une Image Numérique

Une image numérique est une fonction notée f de deux ou trois variables spatiales. Elle est à valeurs dans \mathbb{R}^n , où n est égal à 1 pour des images monochromatiques et égal à 3 pour des images couleurs. Cette fonction sera toujours supposée de carré intégrable sur l'ouvert de visualisation sur lequel elle est définie et appelé écran en bidimensionnel et le volume visuel en tridimensionnel. Cet ouvert sera un rectangle (en bidimensionnel) ou un parallélépipède (en tridimensionnel). Nous le noterons Ω dans toute la suite.

La quasi-totalité du texte traite des images bidimensionnelles.

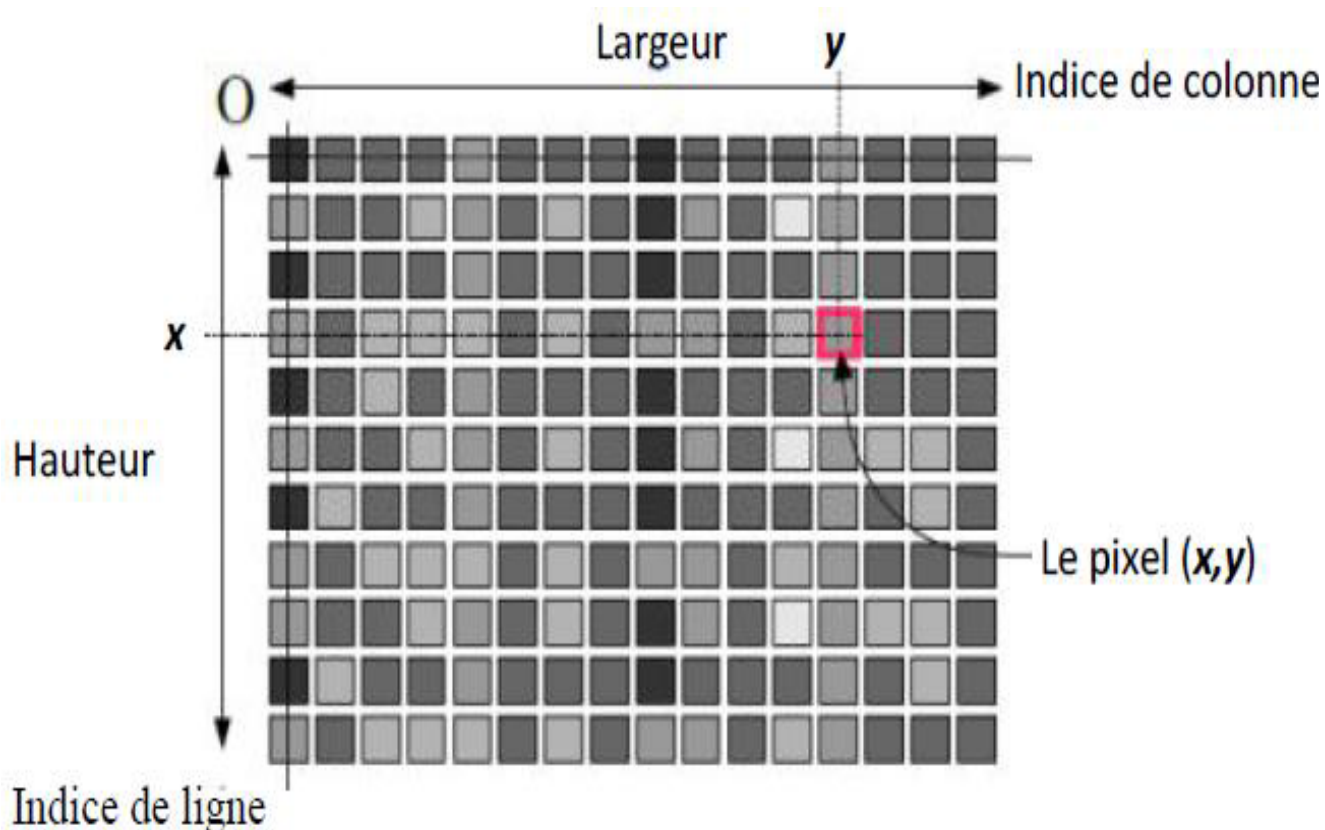


FIG. 1.1 – Représentation d'image numérique.

1.3 Caractéristiques d'une Image Numérique :

L'image est caractérisée par les paramètres suivants :

1.3.1 Pixel

Contraction de l'expression anglaise " Picture Elements " éléments d'image, le pixel est le plus petit point de l'image, c'est une valeur numérique représentative des intensités lumineuses. Si le bit est la plus petite unité d'information que peut traiter un ordinateur, le pixel est le plus petit élément que peuvent manipuler les matériels et logiciels sur l'image. La lettre A, par exemple, peut être affichée comme un groupe de pixels dans la figure ci-dessous.

1.3.2 Résolution

C'est la clarté ou la finesse de détails atteinte par un moniteur ou une imprimante dans la production d'images. Sur les moniteurs d'ordinateurs, la résolution est exprimée en nombre de pixels par unité de mesure (pouce ou centimètre). On utilise aussi le mot résolution pour désigner le nombre total de pixels affichables horizontalement ou verticalement sur un moniteur, plus grand est ce nombre, meilleure est la résolution.

1.3.3 Dimension

C'est la taille de l'image. Cette dernière se présente sous forme de matrice dont les éléments sont des valeurs numériques représentatives des intensités lumineuses (pixels). Le nombre de lignes de cette matrice multiplié par le nombre de colonnes nous donne le nombre total de pixels dans une image.

1.3.4 Bruit

Un bruit (parasite) dans une image est considéré comme un phénomène de brusque variation de l'intensité d'un pixel par rapport à ses voisins, il provient de l'éclairage des dispositifs optiques et électroniques du capteur.

1.3.5 Luminance

C'est le degré de luminosité des points de l'image. Elle est définie aussi comme étant le quotient de l'intensité lumineuse d'une surface par l'aire apparente de cette surface, pour un observateur lointain, le mot luminance est substitué au mot brillance, qui correspond à l'éclat d'un objet. Une bonne luminance se caractérise par :

- Des images lumineuses (brillantes) ;
- Un bon contraste : il faut éviter les images où la gamme de contraste tend vers le blanc ou le noir, ces images entraînent des pertes de détails dans les zones sombres ou lumineuses.
- L'absence de parasites.

1.3.6 Contours

C'est l'opposition marquée entre deux régions d'une image, plus précisément entre les régions sombres et les régions claires de cette image. Le contraste est défini en fonction des luminances de deux zones d'images. Si $L1$ et $L2$ sont les degrés de luminosité respectivement de deux zones voisines $A1$ et $A2$ d'une image, le contraste C est défini par le rapport :

$$C = \frac{L1 - L2}{L1 + L2}$$

1.3.7 Histogramme

L'histogramme des niveaux de gris ou des couleurs d'une image est une fonction qui donne la fréquence d'apparition de chaque niveau de gris (couleur) dans l'image. Pour diminuer l'erreur de quantification, pour comparer deux images obtenues sous des éclairages différents, ou encore pour mesurer certaines propriétés sur une image.

Il permet de donner un grand nombre d'information sur la distribution des niveaux de gris (couleur) et de voir entre quelles bornes est répartie la majorité des niveaux de gris (couleur) dans les cas d'une image trop claire ou d'une image trop foncée.

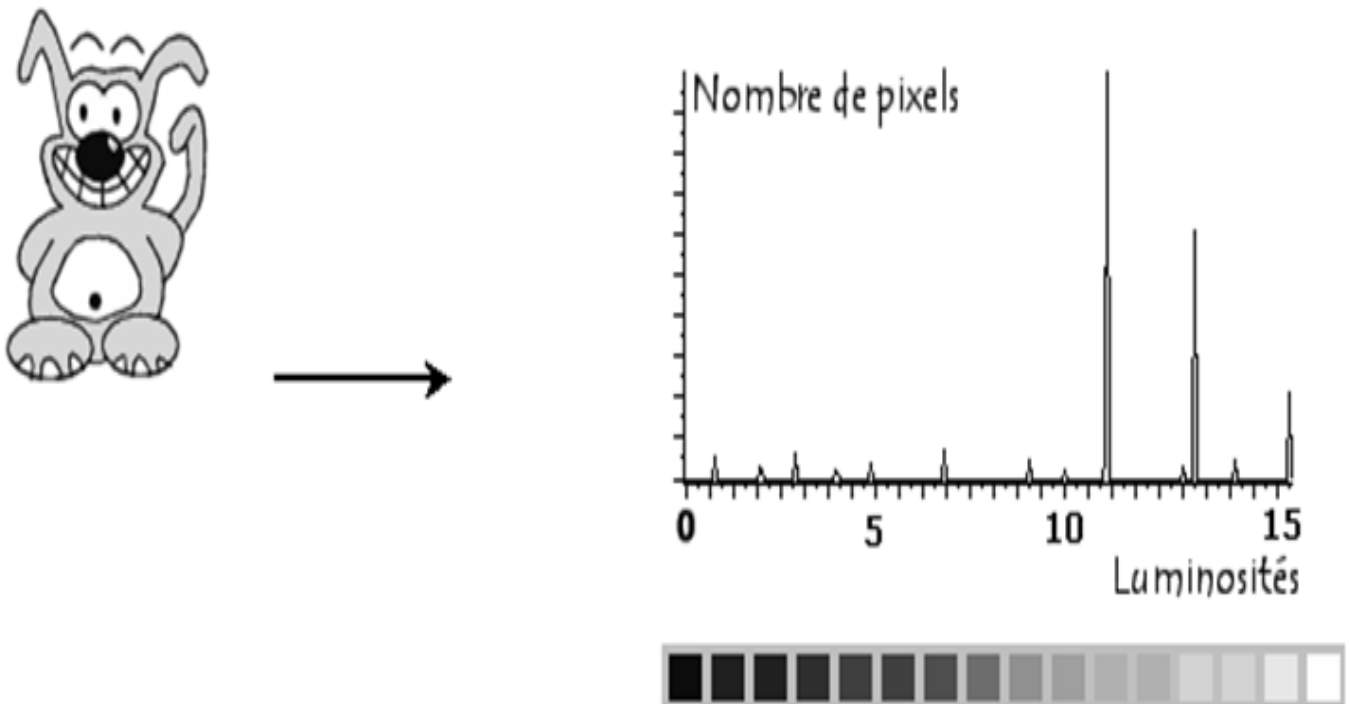


FIG. 1.2 – Exemple d'histogramme d'une image.

1.4 Types d'Images

1.4.1 Images binaires (en noir et blanc)

Les images binaires sont les plus simples. (dont les pixels ne peuvent avoir que les valeurs 0 et 1). Le 0 correspond à un pixel noir et 1 à un pixel blanc. Le niveau de gris est donc codé sur un seul bit.



FIG. 1.3 – Image binaire.

1.4.2 Images au niveaux de gris

Le niveau de gris est la valeur de l'intensité lumineuse en un point. La couleur du pixel peut prendre des valeurs allant du noir au blanc en passant par un nombre fini de niveaux intermédiaires. Donc pour représenter les images à niveaux de gris, on peut attribuer à chaque pixel de l'image une valeur correspondant à la quantité de lumière renvoyée. Cette valeur peut être comprise par exemple entre 0 et 255. Chaque pixel n'est donc plus représenté par un bit, mais par un octet. Pour cela, il faut que le matériel utilisé pour afficher l'image soit capable de produire les différents niveaux de gris correspondant.

Le nombre de niveaux de gris dépend du nombre de bits utilisés pour décrire la " couleur "

de chaque pixel de l'image. Plus ce nombre est important, plus les niveaux possibles sont nombreux.



FIG. 1.4 – Images à niveaux de gris

1.4.3 Images en couleurs

Même s'il est parfois utile de pouvoir représenter des images en noir et blanc, les applications multimédias utilisent le plus souvent des images en couleurs. La représentation des couleurs s'effectue de la même manière que les images monochromes avec cependant quelques particularités. En effet, il faut tout d'abord choisir un modèle de représentation. On peut représenter les couleurs à l'aide de leurs composantes primaires. Les systèmes émettant de la lumière (écrans d'ordinateurs,...) sont basés sur le principe de la synthèse additive : les couleurs sont composées d'un mélange de rouge, vert et bleu (modèle R.V.B.).



FIG. 1.5 – Exemple d'image couleur

1.5 Image Bitmap

Une image bitmap (voir la **Figure 1.6**) est un modèle d'image au point. Le plus universel système de codage consiste à décomposer la représentation graphique, l'image, nombre de points élémentaires caractérisés par leurs coordonnées spatiales et leur couleur.

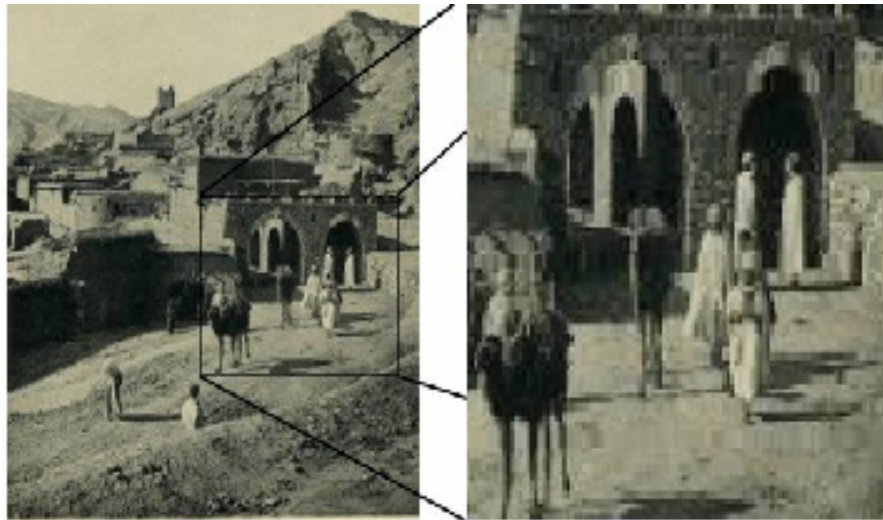


FIG. 1.6 – Image bitmap

1.6 Image Vectorielle

Dans une image vectorielle, les données sont représentées par des formes géométriques simples qui sont décrits d'un point de vue mathématique. Il s'agit de représenter les données d'images par des formules géométriques qui pourront être décrites de manière mathématique. En d'autres termes, mémoriser la séquence d'opérations menant au **tracé** est stockée dans le cas d'une image vectorielle, puis il stocke une mosaïque de point élémentaire dans le cas d'une image tramée.

Ces images présentent deux avantages : elles occupent peu d'espace mémoire et peuvent être redimensionnées sans perte d'information.

1.7 Les Formats d'Images

A l'instar des fichiers musicaux ou vidéo, les fichiers images disposent eux aussi de plusieurs formats. Les 5 formats que je vais détailler, qui sont également les plus utilisés, sont BMP, TIFF, JPEG ou JPG, GIF et PNG.

1.7.1 Le format BMP (Windows BitMaP)

Le format BMP est un des premiers formats d'image utilisé sous Windows. Il est un des seul format à ne pas utiliser. Cette technologie à pour principal avantage la qualité des images fournies : pas de compression = pas de perte de qualité. Revers de la médaille : ne pas compresser le fichier donne des fichiers de grande taille, impossible a afficher sur internet pour un utilisateur ayant une connexion bas débit.

1.7.2 Le format TIFF (Tagged Image File Format)

Ce format est orienté vers les professionnels (imprimeurs, publicitaires...) car il a l'avantage d'être reconnu sur tous types de système d'exploitation : Windows, Mac, Linux, Unix ..., Il permet d'obtenir une image de très bonne qualité, mais sa taille reste volumineuse, même si elle est inférieure à celle des fichier BMP.

1.7.3 Le format JPEG (Joint Photographic Expert Group)

Ce format offre des taux de compression inégalés, même si la qualité de l'image s'en ressent au fur et à mesure que vous augmentez la compression. Avec des taux de compression élevés donnant lieu à des fichiers images de petite taille, ce format est devenu le standard des formats d'image sur internet. En effet, des fichiers de petites tailles seront chargés rapidement, même par une connexion bas débit.

1.7.4 Le format GIF (Graphics Interchange Format)

Ce format est l'autre standard d'internet. Les fichiers GIF sont de petites tailles, ce qui est dû au fait que ces images ne peuvent enregistrer que 256 couleurs : le plus gros avantage du format est lié à son plus gros inconvénient. Le format GIF permet également la création d'animations et de détourage.

1.7.5 Le format PNG (Portable Network Graphic)

C'est le format appelé à devenir le futur standard internet. Comme le GIF il permet le détourage des images, mais là où le format GIF enregistre 256 couleurs, le PNG en retient 16.7 MILLIONS ce qui offre une image parfaite, avec un excellent rendu des nuances et des dégradés. La taille des fichiers reste raisonnable, et, technologie dont ce format est le seul à disposer, il permet la compression sans perte de donnée ! C'est donc le format en devenir.

Chapitre 2

Problèmes Inverses

Cette chapitre est une initiation aux problèmes inverses. Son objectif est d'expliquer au lecteur ses principes généraux, de montrer son large panel d'applications ainsi que de présenter ses méthodes de résolution les plus courantes.

2.1 Définition

Un problème inverse est une situation dans laquelle on tente de déterminer les causes d'un phénomène à partir des observations expérimentales de ses effets. La résolution du problème inverse passe en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à approximer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures. Cette résolution peut se faire par simulation numérique ou de façon analytique. La résolution mathématique est rendue difficile par le fait que les problèmes inverses sont en général des problèmes mal posés, c'est-à-dire que les seules observations expérimentales ne suffisent pas à déterminer parfaitement tous les paramètres du modèle. Il est donc nécessaire d'ajouter des contraintes ou de l'a priori qui permettent de réduire l'espace des possibilités de façon à aboutir à une solution unique.

On retrouve des problèmes inverses dans de nombreux domaines scientifiques, en particulier dans l'étude de systèmes complexes pour lesquels on a accès qu'à un petit nombre de mesures.

2.2 Typologie des Problèmes Inverses

2.2.1 Problèmes inverses linéaires

Un problème inverse linéaire peut être décrit par une équation de la forme suivante :

$$m = G \times p ,$$

où m représente les mesures effectuées, p représente les valeurs des paramètres du phénomène et G est un opérateur linéaire qui représente la relation entre les mesures et les paramètres du modèle.

2.2.2 Problèmes inverses non-linéaires

Dans les problèmes inverses non-linéaires la relation entre les observations et les paramètres du modèle est plus complexe. On peut écrire cette relation sous la forme :

$$m = G(p) ,$$

où cette fois, l'opérateur G est non-linéaire.

2.3 Problèmes Bien Posés et Problèmes Mal-Posés

Dans un livre célèbre, [[8]] la notion de problème bien posé. Il s'agit d'un problème dont :

- la solution existe.
- elle est unique,

– elle dépend continûment des données.

Bien entendu, ces notions doivent être précisées par le choix des espaces (et des topologies) dans lesquels les données et la solution évoluent.

Dans ce même livre Hadamard laissait entendre (et c'était une opinion répandue jusqu'à récemment) que seul un problème bien posé pouvait modéliser correctement un phénomène physique. Après tout, ces trois conditions semblent très naturelles. En fait, nous verrons que les problèmes inverses ne vérifient souvent pas l'une ou l'autre de ces conditions, voire les trois ensembles. Après réflexion, cela n'est pas si surprenant :

– Un modèle physique étant fixé, les données expérimentales dont on dispose sont en général bruitées, et rien ne garantit que de telles données proviennent de ce modèle, même pour un autre jeu de paramètres.

– Si une solution existe, il est parfaitement concevable (et nous le verrons sur des exemples) que des paramètres différents conduisent aux mêmes observations.

– Le fait que la solution d'un problème inverse puisse ne pas exister n'est pas une difficulté sérieuse. Il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution (procédé classique en mathématique).

– La non-unicité est un problème plus sérieux. Si un problème a plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir entre elles. Pour cela, il faut disposer d'informations supplémentaires (une information a priori).

– Le manque de continuité est sans doute le plus problématique, en particulier en vue d'une résolution approchée ou numérique. Cela veut dire qu'il ne sera pas possible (indépendamment de la méthode numérique) d'approcher de façon satisfaisante la solution du problème inverse, puisque les données disponibles seront bruitées donc proches, mais différentes, des données «réelles».

Un problème qui n'est pas bien posé au sens de la définition ci-dessus est dit « mal posé ». Nous allons en voir un exemple qui, bien que très simple, illustre les difficultés que l'on peut rencontrer dans des situations plus générales.

2.4 Exemple de Problème Inverse

Nous présentons dans ce qui suit quelques exemples «concrets» de problèmes inverses, tels qui interviennent dans les sciences de l'ingénieur. Cette liste est loin d'être exhaustive. Parmi les domaines dans lesquels les problèmes inverses jouent un rôle important, nous pouvons citer :

- l'imagerie médicale (échographie, scanners, rayons X , etc.).
- l'ingénierie pétrolière (prospection par des méthodes sismiques, magnétiques, identification des perméabilités dans un réservoir, etc.).
- l'hydrogéologie (identification des perméabilités hydrauliques).
- la chimie (détermination des constantes de réaction).
- le radar (détermination de la forme d'un obstacle).
- l'acoustique sous-marine (même objectif!).
- la mécanique quantique (détermination du potentiel).
- le traitement d'image (restauration d'images floues).

Du point de vue mathématique, ces problèmes se répartissent en deux grands groupes :

- les problèmes linéaires (échographie, traitement d'image, etc.), qui se ramènent à la résolution d'une équation intégrale de première espèce.
- les problèmes non linéaires, qui sont le plus souvent des questions d'estimation de paramètres dans des équations différentielles ou aux dérivées partielles.

La seconde catégorie peut elle-même se subdiviser en deux sous-catégories selon que le paramètre que l'on cherche à estimer est un vecteur (donc de dimension finie), où une fonction. Le second cas est évidemment plus difficile que le premier, puisqu'il faut en particulier décider de la paramétrisation de cette fonction, avant de résoudre numériquement le problème en dimension finie.

2.5 Notion de Problème Bien Posé

Appelons o la grandeur physique d'intérêt, qu'on appellera dans la suite l'« objet » observé (phase aberrante dans le cas d'un analyseur de front d'onde, distribution de luminance de l'objet astrophysique observé dans le cas d'une image au plan focal d'un télescope, spectre d'un objet dans le cas d'un spectrographe...). Appelons i les données mesurées (pentes de Hartmann-Shack, image, spectre mesuré...). Considérons pour l'instant que o et i sont des grandeurs continues, c'est-à-dire des fonctions (de l'espace ou du temps) appartenant à des espaces de Hilbert notés respectivement X et Y .

Le modèle direct, déduit de la Physique, permet de calculer un modèle des données pour un objet connu. C'est celui utilisé dans une simulation de données :

$$i = H(o). \tag{2.1}$$

Nous nous limitons ici à un modèle direct linéaire, c'est-à-dire :

$$i = Ho, \tag{2.2}$$

où H est un opérateur linéaire continu de X dans Y . C'est dans ce cadre que Hadamard a introduit le concept de problème bien posé.

À titre d'exemple et pour fixer les idées, dans le cas où ce modèle direct est linéaire et invariant par translation, H est un opérateur de convolution, et il existe une fonction h appelée réponse impulsionnelle (RI) ou fonction d'étalement de point (FEP) telle que

$$i = Ho = h \star o. \tag{2.3}$$

On cherche à inverser l'équation (2.2) c'est-à-dire à trouver o pour i donné. On dit que le problème est bien posé (au sens de Hadamard) si la solution o vérifie à la fois les conditions habituelles d'existence et d'unicité mais aussi la condition moins classique de

stabilité, c'est-à-dire si la solution dépend continûment des données i . En d'autres termes, une petite variation des données – en pratique, une autre réalisation du bruit aléatoire – ne doit entraîner qu'une petite variation de la solution.

2.6 Les Méthodes d'Inversion Classiques

Dans ce qui suit, nous considérons que les données, qui ont été numérisées, sont discrètes, finies et rassemblées dans un vecteur i . En imagerie, pour une image de taille $M \times M$, i est un vecteur de taille M^2 qui concatène les lignes ou les colonnes de l'image. Notons que cette concaténation n'est pas à faire dans le calcul, nous l'utilisons ici d'un point de vue conceptuel. La première étape de la résolution du problème inverse consiste à discrétiser également l'objet recherché o en le décomposant sur une base finie (base de pixels ou de sinus cardinaux pour une image, base de polynômes de Zernike pour une phase aberrante). Le modèle qui relie o à i est donc une approximation du modèle direct continu des équations (2.1) ou (2.2), En y incorporant explicitement les incertitudes de mesures sous forme d'un bruit additif b (vecteur composé de variables aléatoires) il s'écrit :

$$i = H(o) + b \quad (2.4)$$

dans le cas général et

$$i = Ho + b \quad (2.5)$$

Dans le cas linéaire, H étant une matrice. Dans le cas particulier où H représente une convolution discrète, le modèle direct s'écrit :

$$i = h \star o + b, \quad (2.6)$$

où h est la réponse impulsionnelle du système et \star désigne la convolution discrète. Notons

que, dans le cas d'un bruit de photons, le bruit n'est pas additif, au sens où il dépend des mesures non bruitées Ho : la notation de l'équation (2.4) est alors quelque peu abusive.

Des données à la connaissance de l'objet : le problème inverse.

2.6.1 Méthode des moindres carrés

La méthode la plus universellement utilisée pour estimer des paramètres o à partir de données i est la méthode des moindres carrés. Cette méthode consiste à rechercher \hat{o}_{MC} qui minimise l'écart, en moyenne quadratique, entre les données i et le modèle de données $H(o)$:

$$\hat{o}_{MC} = \arg \min_o \| i - H(o) \|^2, \quad (2.7)$$

où $\arg \min$ signifie argument du minimum et $\| \cdot \|$ désigne la norme Euclidienne. Cette méthode a été publiée pour la première fois, et vraisemblablement découverte par Gauss quelques années plus tôt mais sans être publiée – voir [4] pour une analyse détaillée de cette fameuse querelle. Legendre utilisa la méthode des moindres carrés pour estimer l'ellipticité de la Terre à partir de mesures d'arc, dans le but de définir le mètre. Dans le cas où le modèle des mesures est linéaire et donné par (2.8), la solution est analytique et s'obtient en annulant le gradient du critère (2.7) :

$$H^t H_{\hat{o}_{MC}} = H^t i. \quad (2.8)$$

Si $H^t H$ est inversible – i.e., si le rang de la matrice H est égal à la dimension du vecteur inconnu o – alors la solution est unique et s'exprime comme :

$$\hat{o}_{MC} = (H^t H)^{-1} H^t i. \quad (2.9)$$

Sinon, comme en dimension infinie, il existe une infinité de solutions mais une seule de ces solutions est de norme minimale. C'est l'inverse généralisé, que l'on note $H^t i$.

2.6.2 Méthode du maximum de vraisemblance

Dans la méthode des moindres carrés, le choix d'une mesure quadratique de l'écart entre données i et modèle de données $H(o)$ n'est pas justifié, si ce n'est par le fait que l'on peut mener analytiquement le calcul de la solution. En outre, cette méthode n'utilise aucunement notre éventuelle connaissance des propriétés statistiques du bruit. Or cette information sur le bruit permet d'interpréter la méthode des moindres carrés et surtout de l'étendre.

Modélisons les incertitudes de mesure b comme un bruit de loi de probabilité $p_b(b)$. D'après l'équation (2.4), la loi des données i conditionnellement à l'objet, c'est-à-dire à objet o donné (supposé connu), est alors :

$$p(i|o) = p_b(i - H(o)). \quad (2.10)$$

L'équation (2.10) permet de tirer des réalisations de données bruitées connaissant l'objet, c'est-à-dire de simuler des données. Dans un problème inverse au contraire, on n'a qu'une réalisation des données (celles effectivement mesurées) et on cherche à estimer l'objet. La méthode du maximum de vraisemblance (MV) consiste justement à renverser le point de vue sur $p(i/o)$ en considérant o comme une variable, i fixe égal aux données, et à rechercher l'objet o qui maximise $p(i/o)$. La quantité $p(i/o)$ vue comme une fonction de o est alors appelée la vraisemblance des données, et l'objet \hat{o}_{MV} qui la maximise est celui qui rend les données effectivement observées les plus probables :

$$\hat{o}_{MV} = \arg \max_o p(i/o). \quad (2.11)$$

Le modèle de bruit le plus utilisé est sans conteste le modèle gaussien centré (c'est-à-dire de moyenne nulle) caractérisé par sa matrice de covariance C_b :

$$p(i/o) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} [i - H(o)]^t C_b^{-1} [i - H(o)] \right\}. \quad (2.12)$$

Le bruit est dit blanc si sa matrice de covariance est diagonale. Si de plus cette matrice est proportionnelle à l'identité alors le bruit est dit blanc stationnaire ou homogène. Le bruit de lecture d'un détecteur CCD est souvent modélisé par un tel bruit gaussien centré stationnaire. Le bruit de photons est blanc mais suit, lui, une loi de Poisson, dont on peut montrer qu'à fort flux elle tend vers une loi gaussienne non stationnaire de variance égale au signal détecté en chaque pixel.

La maximisation de la vraisemblance est évidemment équivalente à la minimisation d'un critère défini comme l'opposé du logarithme de celle-ci et appelé anti-log-vraisemblance :

$$J_i(o) = -\ln p(i/o). \quad (2.13)$$

Dans le cas d'un bruit gaussien, l'anti-log-vraisemblance s'écrit :

$$J_i(o) = \frac{1}{2} [i - H(o)]^t C_b^{-1} [i - H(o)]. \quad (2.14)$$

Si en outre le bruit est blanc, alors :

$$J_i(o) = \frac{1}{2} \sum \frac{|i(k) - H(o)(k)|^2}{\sigma_b^2(k)}, \quad (2.15)$$

Des données à la connaissance de l'objet : le problème inverse

où les $\sigma_b^2(k)$ sont les éléments de la diagonale de C_b . $J_i(o)$ est un critère dit de moindres carrés pondérés. Si le bruit est de plus stationnaire de variance σ_b^2 alors

$$J_i(o) = 1/(2\sigma_b^2) \| i - H(o) \|^2 \quad (2.16)$$

Est exactement le critère de moindres carrés, dits ordinaires par opposition à pondérés, du paragraphe précédent.

La méthode des moindres carrés peut donc s'interpréter comme un maximum de vraisemblance si le bruit est blanc gaussien stationnaire. Inversement, si la loi du bruit est

connue mais est différente, le maximum de vraisemblance permet de prendre en compte cette connaissance sur le bruit et généralise alors les moindres carrés.

2.7 Problèmes Inverses Mal-Posés en Imagerie

2.7.1 Tomographie

Regardons de manière simplifiée comment fonctionne la tomographie à Rayons X . L'objet à analyser est décomposé de manière théorique en "pixels". Il est donc divisé en m lignes et n colonnes, ce qui fait $m \times n$ pixels, tous caractérisés par un coefficient d'atténuation du rayon X . Le but est de retrouver ces coefficients. En envoyant un faisceau de rayons X sur l'objet dans une direction précise, par exemple le long des lignes, chacun des m détecteurs mesure l'intensité après propagation du rayon le long des lignes, i.e. après avoir traversé n pixels. Nous avons ainsi m mesures. La même opération est réalisée n fois avec des angles différents. Nous obtenons $m \times n$ mesures dépendant de nos $m \times n$ coefficients d'atténuation à trouver. C'est un problème inverse.

De manière tout à fait générale et théorique, le but de la tomographie est de reconstruire une fonction f à partir des observations de ses intégrales sur des hyperplans. Ce problème de reconstruction apparaît dans de nombreux domaines, de l'imagerie médicale à la théorie du radar, en passant par la géophysique. L'un des premiers cas où ce principe est apparu est la radiologie par utilisation de rayons- X . Le principal outil mathématique utilisé pour la tomographie est la transformation de Radon, qui à une fonction f fait correspondre les intégrales sur des hyperplans. La transformée de Radon d'une fonction f est définie par

$$Rf(s, u) = \int_{\omega: \langle \omega, s \rangle = u} f(\omega) d\omega,$$

où $u \in \mathbb{R}$, $s \in S^{d-1}$ est la sphère unité et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire de \mathbb{R}^d . Ainsi, $Rf(s, u)$ est l'intégrale sur l'hyperplan défini par (s, u) . La tomographie est un problème inverse

mal-posé où l'opérateur à inverser est la transformation de Radon. Notons qu'il existe de très nombreux modèles différents, qui dépendent du domaine considéré et de la complexité désirée dans la modélisation.

2.7.2 Restauration d'image

Les images numériques obtenues sont souvent dégradées par un bruit additif et un opérateur (flou). L'opérateur de flou donne une image observée y , modélisée par une convolution discrète bidimensionnelle $y(i, j) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} x(k, l)h((i - k)_{\text{mod } n}, (j - l)_{\text{mod } n})$. A partir de y , on cherche à retrouver x . C'est donc un problème de déconvolution aveugle à deux dimensions.

Chapitre 3

Problèmes Inverses dans la Restauration d'Image

La restauration d'images tend à améliorer la qualité (souvent visuelle) d'une image. Par exemple, une photographie dont le négatif aurait reçu une poussière conduira à un défaut sur l'image. Un bougé lors de l'acquisition d'une photographie pourra conduire à une image floue. Une sous illumination conduira à des couleurs erronées . Certains défauts peuvent être éliminés ou réduits. Mais il ne faut pas non plus attendre que la restauration d'images permet de restaurer tout et n'importe quoi. Meilleure sera l'image ensuite.



FIG. 3.1 – Image originale



FIG. 3.2 – Image observée

3.1 Restauration d'Image Sans Visibilité

N'importe quelle image qui est le rendement d'une sonde est le résultat de la convolution des données d'entrée analogique à la sonde avec la fonction de diffusion de point (PSF) de la sonde. Ceci PSF se nomme généralement tache floue de ". Ce phénomène indésirable de tache floue se produit dans un éventail de sondes - d'astronomie à la formation image médicale à la microscopie. Dans beaucoup de cas, l'information valable d'image est perdu à la présence de la tache floue. Afin de reconstituer cette image brouillée, la tache floue de " devrait être estimée de sorte que l'image originale puisse être reconstituée jusqu'au meilleur degré possible. Cette tache floue sur l'image en résultant dépend non seulement du système optique de la sonde mais également de la distance entre la sonde et le spécimen qui est reflétant. Afin d'estimer d'abord la tache floue, nous devrions nous concentrer sur des parties de l'image qui serait affectée les la plupart par elle. Les approches précédentes dans ce domaine ont formulé une méthode pour l'évaluation de tache floue utilisant de dérivées de la fonction de diffusion gaussienne de point (PSF) et des pyramides orientables pour déterminer le désaccord de la tache floue gaussienne.

3.2 Considérations Générales

Etant donnée une image dégradée (par un flou, un bruit), on désire en déduire l'image idéale en connaissant un modèle de la dégradation dans le cas linéaire.

$f(x, y)$: image "idéale" recherchée,

$h(x, y)$: réponse impulsionnelle de la dégradation,

$n(x, y)$: bruit blanc décorrélé du signal,

$g(x, y)$: image observée à restaurer,

N est le nombre de pixels de l'image (= 256^2 par exemple).

Considérons toutes les lignes de l'image $f(x, y)$, concaténées suivant un vecteur $N \times 1$ que l'on notera \underline{f} . On peut faire la même chose pour la sortie $g(x, y)$ et le bruit $n(x, y)$ que l'on notera \underline{g} et \underline{n} . Comme on a un système linéaire, le modèle ci-dessus peut être décrit matriciellement par :

$$\underline{g} = H\underline{f} + \underline{n} , \quad (3.1)$$

où H est une matrice de taille $N \times N$ à coefficients constants. On peut noter que cette matrice a une forme particulière. C'est une matrice de Hankel-Bloc.

Donc le problème de la restauration, revient dans le cas linéaire à calculer \underline{g} , connaissant \underline{f} , H et les statistiques du bruit \underline{n} (mais pas sa "réalisation" effective).

La matrice H est formée de toutes les décalées x et y de la réponse impulsionnelle $h(x, y)$. C'est la raison pour laquelle elle est dite de Hankel-Bloc. On sait que, même dans ce cas simple, calculer \underline{g} n'est pas forcément évident. La restauration est un problème d'autant plus difficile à résoudre car il est mal conditionné. H n'est pas inversible la plupart du temps, et même si H est inversible, le déterminant de H est voisin de zéro.

On peut montrer que toute ligne de H peut être approximée par une combinaison linéaire de la ligne d'avant et de la ligne d'après (idem pour les colonnes), ce qui montre à quel point h est mal conditionnée.

Dans le cas non stationnaire c'est pire, car on n'a même pas le secours de la théorie pour faire l'inversion.

Avant de passer à la résolution de ce problème, il est donc important d'étudier comment on peut déterminer la réponse impulsionnelle de la dégradation dont on aura besoin pour effectuer la restauration.

3.3 Restauration d'Image

Nous considérons le problème classique de restauration d'image de récupérer une distribution idéale d'énergie radiante, $f(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, des valeurs enregistrées réelles $g(s)$, $s \in \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq M\}$. Nous pouvons considérer g comme une représentation discrète de f , mais dégradée par la tache floue, le bruit, et le prélèvement. Les éléments (i, j) désigné sous le nom des " Pixel "; l'image numérique est obtenue près " quantifiant " les valeurs assumées par g aux nombres entiers. La série de transformations qui porte f à g est discutée dans l'annexe; encore, ceux-ci impliquent des déformations induites par le système de formation d'image, la sonde, et le processus de la discrétisation. Plus avec précision, nous pouvons considérer le problème direct comme les spécifications de la distribution conditionnelle des données des véritables valeurs d'éclat. Nous supposons que cette distribution est donnée. En particulier, nous supposons que le mécanisme de tache floue est connu ou précédemment estimé, qui est souvent une prétention raisonnable; par exemple, la tache floue induite par l'appareil-photo commun de vidicon a été intensivement étudiée. Nous supposons également que les statistiques de bruit sont connues.

En raison de la perte d'information inhérente au modèle de dégradation, " le problème inverse " s'étend d'instable à mal-poser.

3.3.1 La restauration d'image (floue, bruitée)

Le terme restauration d'image représente aussi bien le problème de débruitage pur, que celui de la déconvolution d'image floue et bruitée. Dans l'hypothèse d'une dégradation invariante spatialement, la convolution représente une défocalisation ou un bougé de l'appareil optique. C'est aussi le modèle qui intervient lorsque l'on veut améliorer numériquement les performances d'un capteur qui sont limitées par la physique. Ce problème nous a été soumis en particulier par le CNES pour améliorer numériquement la qualité des images satellitaires.

Pour obtenir des images de meilleure qualité en termes de résolution, contraste,... il faut augmenter l'efficacité des capteurs qui vont coûter plus cher. Cette hausse de prix est d'autant plus importante que l'amélioration des capteurs entraîne une augmentation sensible de leur poids, et donc du coût financier au lancement. Ainsi, une des préoccupations du CNES a été de mettre au point une méthode de déconvolution pour la restauration d'image satellitaire dont on connaît la fonction de transfert puisqu'il s'agit de celle du capteur embarqué qui a été mesurée soigneusement avant le lancement. L'équation $o = \mathcal{H}(f)$ s'écrit pour la convolution $1 - D$:

$$o(t) = \int_{\Omega} h(s)f(t-s)ds. \quad (3.2)$$

L'acquisition réelle mesure des variables discrètes. Supposons donc que l'on discrétise les signaux f ; o , h avec le même pas d'échantillonnage $\delta x = 1$, que la durée des signaux entrée/sortie (o et f) soit limitée ainsi que le support du noyau de convolution h à $[\delta K_1 \delta x; K_2 \delta x]$. L'équation de convolution s'écrit :

$$o(i) = \sum_{k=-K_1}^{K_2} h(k)f(i-k) \quad i = 0, \dots, I-1 \quad (3.3)$$

Et de manière matricielle $o = Hf$ où H est une matrice de Toeplitz, caractéristique des systèmes linéaires de relation entrée/sortie, invariante par translation (avec des conditions

nulles aux bords du signal). Il faut de plus modéliser le bruit inhérent à tout capteur. Dans de nombreuses applications, et particulièrement lorsqu'il s'agit d'un bruit d'électronique du capteur, il est modélisé de manière additive par un bruit blanc gaussien v . On a alors :

$$o = h * f + v \quad (3.4)$$

$v \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, R_{vv})$ avec $R_{vv} = E[vv^T] = \sigma^2 Id$. En supposant l'image infiniment périodique sur \mathbb{R}^2 , H est circulante et dans l'espace de Fourier l'équation devient :

$$\mathcal{TF}(f) = \mathcal{TF}(h) \mathcal{TF}(f) + \mathcal{TF}(v) \quad (3.5)$$

Dans la mesure où le spectre de $\mathcal{TF}(h)$ n'a pas de zéro, il y a existence et unicité de la solution $\mathcal{TF}(f)$. Celle-ci peut être calculée par simple inversion :

$$\mathcal{TF}(f) = \frac{\mathcal{TF}(o)}{\mathcal{TF}(h)} + \frac{\mathcal{TF}(v)}{\mathcal{TF}(h)}. \quad (3.6)$$

Malheureusement, c'est le terme $\mathcal{TF}(v) / \mathcal{TF}(h)$ qui domine dans cette équation. Même si le bruit est faible, il est amplifié lors de l'inversion par $\mathcal{TF}(h)$. En effet, h modélisant un filtre passe-bas, $\mathcal{TF}(h)$ a des valeurs très faibles en hautes fréquences.

D'autre part, plus la discrétisation est fine (δx petit), plus les lignes de la matrice H sont semblables et plus H est proche d'une matrice singulière. Cependant, si la discrétisation peut contribuer à rendre un problème inverse mal posé, rappelons que les problèmes inverses liés à la physique sont en général mal posés fondamentalement, comme nous l'avons montré sur leur expression continue. L'existence et l'unicité de la solution de l'équation discrète sont assurées dès que H définit une application bijective, c'est-à-dire si H est carrée et non singulière. La stabilité est mesurée par le conditionnement de la matrice H . Si H est régulière, son conditionnement est mesuré par :

$$Cond(H) = \|H\| \cdot \|H^{-1}\| \quad (3.7)$$

où $\|H\|$ est la norme matricielle induite d'une norme vectorielle sur \mathbb{R}^N (ici $N = I^2$ où I est la dimension de o ou f). L'opérateur H est borné donc la norme matricielle est bien définie. On a toujours $Cond(H) \geq 1$. Une matrice bien conditionnée (donnant lieu à un problème bien posé) est telle que $Cond(H)$ est proche de la valeur 1. Notons que $Cond(I) = 1$ où I est la matrice identité. Avec la norme euclidienne sur \mathbb{R}^N , on montre que :

$$Cond(H) = \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}} \quad (3.8)$$

où μ_i sont les valeurs singulières de H . Le conditionnement dépend donc de l'étalement du spectre de H . Par exemple dans le cas de la déconvolution circulaire considérée précédemment, les vecteurs propres de H sont les vecteurs de base de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) de longueur I où I est la longueur du signal convolué, et ses valeurs propres sont calculées par TFD de longueur I du noyau h . Les valeurs propres représentent donc le comportement de h dans l'espace de Fourier, c'est-à-dire le comportement d'un filtre passe-bas. La matrice H est très mal conditionnée, ceci quel que soit le pas de discrétisation δx . Le conditionnement est relié au problème de sensibilité par rapport au bruit car si l'on considère la relation matrice/vecteur à inverser $o = Hf$ et que δo est une perturbation sur les observations, alors la perturbation f sur la solution vérifie :

$$\frac{\|\delta f\|}{\|f\|} \leq Cond(H) \frac{\|\delta o\|}{\|o\|} \quad (3.9)$$

Ainsi si H est bien conditionnée ($Cond(H) \simeq 1$), alors une petite perturbation $\|\delta o\|$ relativement aux données $\|o\|$ engendrent une petite perturbation $\|\delta f\|$ relativement à $\|f\|$.

Par contre, quand le conditionnement est mauvais (i.e. $Cond(H)$ grand), $\frac{\|\delta f\|}{\|f\|}$ ne peut être borné par une constante petite même si $\frac{\|\delta o\|}{\|o\|}$ l'est. $\|\delta f\|$ peut être très grand relativement à $\|f\|$.

Ainsi les solutions basées sur l'inversion (inverse H^{-1} ou solution des moindres carrés $\min_{f \in \mathbb{R}^{IJ}} \|o - Hf\|^2$) ne donnent pas en général une solution correcte mais un résultat dominé par le bruit. Notons qu'il en est de même s'il y a des erreurs sur les coefficients de la matrice H . La théorie de la régularisation va permettre de calculer des solutions aux problèmes inverses mal posés.

3.3.2 Formulation de problème

Modèle de Continu-discret

Laissé $g(s)$ dénoter les valeurs enregistrées avant la quantification ; les données réelles sont alors $y_s = [g(s)]$, où $[\]$ dénote la quantification de la gamme de g " aux niveaux gris " $k \in \{0, 1, \dots, 2^m - 1\}$.

Nous pouvons simplifier et récapituler la discussion dans l'annexe en assumant cela

$$g(s) = \psi[\varphi(b(s)), \vec{\eta}_s] \quad (3.10)$$

là où :

i) $b(s)$ est l'intensité sur l'avion d'image à un endroit ξ_s (ou intensité moyenne près ξ_s) correspondance au Pixel s . assumant un système linéaire,

$$b(s) = \int \int f(\mathbf{u})k(\xi_s, \mathbf{u})d\mathbf{u} \quad (3.11)$$

là où $K(v, u)$ s'appelle la fonction de diffusion de point (PSF) et est la réponse du système de formation d'image au point v dans l'avion d'image à une source ponctuelle de lumière à u dans l'avion d'objet. Dans le cas espace-invariable, $k(\xi_s, \mathbf{u}) = k(\xi_s - \mathbf{u})$.

ii) φ explique des effets (non linéaires) de sonde ; par exemple, les appareils-photo de CCD (dispositif couplé par charge) contiennent une rangée de petites sondes photo-active ; les photons saisissants libèrent des porteurs de charge mais la correspondance entre le flux de photon d'incident et le flux électrique différentiel n'est pas linéaire. Nous pouvons

habituellement supposer que le φ est une augmentation fonction de \mathbf{R} au \mathbf{R} .

iii) $\vec{\eta}$ est une collection de champs de bruit, incluant, par exemple, procédés stochastiques correspondant au quantum et aux fluctuations thermiques, techniquement, le bruit de quantum se conforme à une loi de Poisson, mais pour les niveaux de forte intensité l'approximation gaussienne est commune.

iv) ψ définit le mécanisme de bruit, qui pourrait être signal-dépendant, selon les comptes de photon et d'autres facteurs.

Modèles discrets

Que les buts informatiques, il est discrétisent f comme trépointe comme g . Également simplifions les sujets en ignorant la quantification et en considérant seulement un processus de bruit.

Cependant, puisque nous voulons des réseaux finis, et en raison de la tache floue et d'autres facteurs (voir ci-dessous), nous écrivons $x = (x_s, s \in S)$ et $y = (y_s, s \in S')$ pour l'image " vraie " et les données, où $s \in \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq M\}$ et les S' est un autre réseau concentrique avec S , mais plus petit, dire de la dimension $M \times M$ avec $M < N$. Puis

$$y_s = \psi(\varphi(kx)_s), \eta_s \quad (3.12)$$

là où le k est une représentation discrète du PSF K :

$$(kx)_s = \sum_{t \in S} k(s, t)x_t \quad s \in S'. \quad (3.13)$$

Considérer seulement le cas espace-invariable ; puis

$$(kx)_s = \sum_{t \in S} k(s - t)x_t \quad (3.14)$$

Ce n'est pas exactement une convolution : on peut imaginer le x_t défini sur z^2 , convolution avec du k : sur le z^2 , mais seulement observé ou détecté sur des S' et seulement reconstruit

au-dessus des s finis de l'ensemble $S \subset S'$. Si k : a l'appui fini alors idéalement que nous devrions prendre S suffisamment grand pour nous assurer que l'addition 3.14 inclut toutes les limites pour lesquelles les $k(s - t) > 0$.

Problèmes conditionnés

Il suffit pour considérer le modèle linéaire

$$y = kx + \eta \tag{3.15}$$

Pour illustrer les problèmes s'est associé à l'inversion et à la stabilité. Par réétiquetage les emplacements de S' et S , nous pouvons considérer de vrais vecteurs de y , x , et de η des dimensions M^2 , N^2 et de M^2 respectivement et k comme matrice de $N \times M^2$, là où $M^2 = |S'| \leq |S| = N^2$. Il devrait noter que même si $\eta = 0$, il y a au moins le " bruit " dû à la quantification : $y = [kx]$ est le vecteur de données réellement enregistré. Néanmoins considérer d'abord le cas " de données exactes " $y = kx$. Généralement le système sous déterminé alors et k^{-1} n'est évidemment pas bien défini. Il y a des cas spéciaux dans lesquels peut prendre $N = M$, comme la convolution circulaire ou les valeurs connues de z sur la " frontière " S/S' , mais ce sont habituellement peu réalistes. D'ailleurs, même si k étaient inversibles, l'existence de la mesure et/ou de l'erreur de quantification rend le problème 3.15 de mauvais tempérament dans le sens que la propagation de l'erreur des données à la solution n'est pas raisonnablement commandée. Ces observations peuvent être rendues plus précises dans des limites opérateur-théorétiques, mais le dilemme de base est clair : k donné : et y , deux images avec des valeurs brouillées très étroitement à y peut être distant très lointain.

Par conséquent, on cherche des informations supplémentaires pour contraindre le problème. Nous maintenant envisager plusieurs méthodes dans lesquelles les connaissances ou les hypothèses sur les surfaces d'intensité de la vraie image sont exploitées dans le contexte de la théorie de l'optimisation standard. Finalement, nous allons décrire une autre approche

impliquant MRFs dans lequel des variables supplémentaires sont introduites tenir compte des discontinuités entre les surfaces d'intensité.

3.4 Application MATLAB

Image deblurring (or restoration) is an old problem in image processing, but it continues to attract the attention of researchers and practitioners alike. A number of real-world problems from astronomy to consumer imaging find applications for image restoration algorithms. Plus, image restoration is an easily visualized example of a larger class of inverse problems that arise in all kinds of scientific, medical, industrial and theoretical problems. Besides that, it's just fun to apply an algorithm to a blurry image and then see immediately how well you did.

To deblur the image, we need a mathematical description of how it was blurred. (If that's not available, there are algorithms to estimate the blur. But that's for another day.) We usually start with a shift-invariant model, meaning that every point in the original image spreads out the same way in forming the blurry image. We model this with convolution :

$$g(m, n) = h(m, n) * f(m, n) + u(m, n)$$

where $*$ is 2D convolution, $h(m, n)$ is the point-spread function (PSF), $f(m, n)$ is the original image, and $u(m, n)$ is noise (usually considered independent identically distributed Gaussian). This equation originates in continuous space but is shown already discretized for convenience.

Actually, a blurred image is usually a windowed version of the output $g(m, n)$ above, since the original image $f(m, n)$ isn't ordinarily zero outside of a rectangular array. Let's go ahead and synthesize a blurred image so we'll have something to work with. If we assume $f(m, n)$ is periodic (generally a rather poor assumption!), the convolution becomes circular convolution, which can be implemented with FFTs via the convolution theorem.

If we model out-of-focus blurring using geometric optics, we can obtain a PSF using `fspecial` and then implement circular convolution :

Form PSF as a disk of radius 3 pixels

```
h = fspecial('disk',4);
% Read image and convert to double for FFT
cam = im2double(imread('cameraman.tif'));
hf = fft2(h,size(cam,1),size(cam,2));
cam_blur = real(ifft2(hf.*fft2(cam)));
imshow(cam_blur)
```



A similar result can be computed using `imfilter` with appropriate settings.

You'll immediately notice that the circular convolution caused the pants and tripod to wrap around and blur into the sky. I told you that periodicity of the input image was a poor assumption! But we won't worry about that for the time being.

Now we need to add some noise. If we define peak SNR (PSNR) as

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{[g \max - g \min]^2}{\sigma_u^2}$$

then the noise scaling is given by

$$\sigma_u = 10^{-PSNR/20} |g_{\max} - g_{\min}|$$

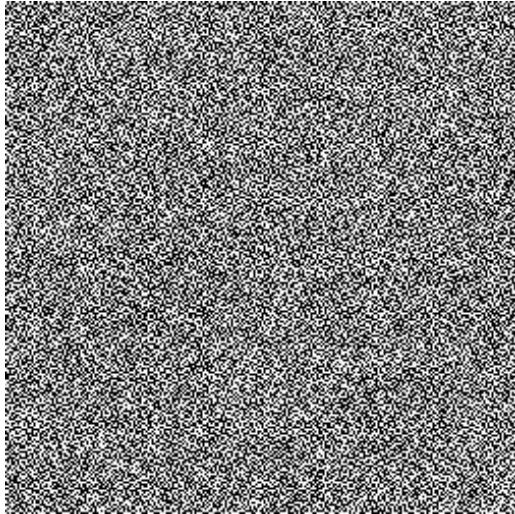
Now we add noise to get a 40 dB PSNR :

```
sigma_u = 10^(-40/20)*abs(1-0);  
cam_blur_noise = cam_blur + sigma_u*randn(size(cam_blur));  
imshow(cam_blur_noise)
```



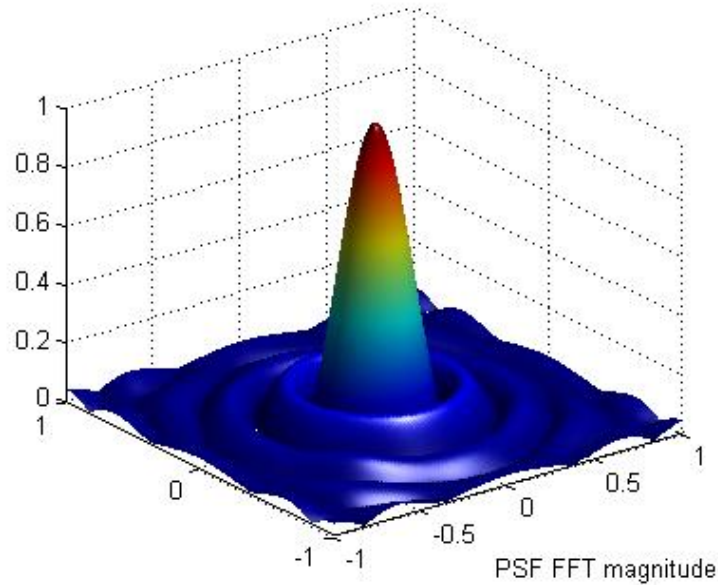
The inverse filter is the simplest solution to the deblurring problem. If we ignore the noise term, we can implement the inverse by dividing by the FFT of $h(m,n)$ and performing an inverse FFT of the result. People who work with image restoration love to begin with the inverse filter. It's really great because it's simple and the results are absolutely terrible. That means that any new-and-improved image restoration algorithm always looks good by comparison! Let me show you what I mean :

```
cam_inv = real(ifft2(fft2(cam_blur_noise)./hf));  
imshow(cam_inv)
```



Something must be wrong, right ? Well, nothing is wrong with the code. But it is definitely wrong to think that one can ignore noise. To see why, look at the frequency response magnitude of the PSF :

```
hf_abs = abs(hf);  
surf([-127:128]/128,[-127:128]/128,fftshift(hf_abs))  
shading interp, camlight, colormap jet  
xlabel('PSF FFT magnitude')
```



We see right away that the magnitude response of the blur has some very low values. When we divide by this pointwise, we are also dividing the additive noise term by these same low values, resulting in a huge amplification of the noise—enough to completely swamp the image itself.

Now we can apply a very simple trick to attempt our dramatic and very satisfying improvement. We simply zero out the frequency components in the inverse filter result for which the PSF frequency response is below a threshold.

```
cam_pinv = real(ifft2((abs(hf) > 0.1).*fft2(cam_blur_noise)./hf));  
imshow(cam_pinv)  
xlabel('pseudo-inverse restoration')
```



For comparison purposes, we repeat the blurred and noise image.

```
imshow(cam_blur_noise)  
xlabel('blurred image with noise')
```



This result is obviously far better than the first attempt! It still contains noise but at a much lower level. It's not dramatic and satisfying, but it's a step in the right direction. You can see some distortion due to the fact that some of the frequencies have not been restored. In general, some of the higher frequencies have been eliminated, which causes some blurring in the result as well as ringing. The ringing is due to the Gibbs phenomenon – an effect in which a steplike transition becomes "wavy" due to missing frequencies.

A similar but slightly improved result can be obtained with a different form of the pseudo-inverse filter. By adding a small number δ^2 to the number being divided, we get nearly the same number unless the number is in the same range or smaller than δ^2 . which is like the previous pseudo-inverse filter but with a smooth transition between the two extremes. To implement this in MATLAB, we do :

```
cam_pinv2 = real(ifft2(fft2(cam_blur_noise).*conj(hf)./(abs(hf).^2 + 1e-2)));  
imshow(cam_pinv2)  
xlabel('alternative pseudo-inverse restoration')
```



As you can see, this produces better results. This is due to a smoother transition between restoration and noise smoothing in the frequency components.

Conclusion

Les problèmes inverses dans la restauration d'image sont une image dégradée (à travers le flou et le bruit), on peut en déduire l'image idéale en connaissant le modèle de décroissance.

Dans ce travail, nous avons étudié les problèmes inversés en général et nous avons parlé sur l'utilisation de ces derniers dans la restauration d'image floue et d'image bruitée.

Nous en avons indiqué quelques uns qui représentent le problème de débruitage pur, que celui d'image floue et bruitée.

Bibliographie

- [1] Alexander G. Ramm. (2005). Inverse problems : mathematical and analytical techniques with applications to engineering. Springer.
- [2] Blanc-Féraud, L. (2000). Sur quelques problèmes inverses en traitement d'image. Habilitation dirigée des recherches, Université de Nice-Sophia Antipolis.
- [3] Charles, C. (2014). Introduction aux problèmes inverses. Notes de Statistique et d'Informatique.
- [4] Dauphin, G (5 août 2015) Notes de cours Traitement d'images numériques.
- [5] Destuynder, P. (2006). Analyse et traitement des images numériques.
- [6] Diane, L. (2005). Cours de traitement d'images'. Laboratoire I3S Informatique, Signaux et Systèmes, Université de Nice Sophia Antipolis, Rapport de recherche ISRN I3S/RR, 22.
- [7] Geman, D. (1990). Random fields and inverse problems in imaging. In Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour XVIII-1988 (pp. 115-193). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [8] Hadamard, J. (1923). Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, Yale Univ. Press. New Haven.
- [9] Hassouna, H. (2016). Gaussian Process for Image Classification (Doctoral dissertation, Université Mohamed Khider-Biskra).
- [10] Jean-Marc, V (2011/2012) Traitement des images et vision par machine, MASTER PRO INFO, Jean-Marc.Vezien@limsi.fr.

- [11] Kern, M. (2016). Méthodes numériques pour les problèmes inverses (p. 222). ISTE editions.
- [12] Kern, M. (2002). Problèmes inverses : aspects numériques.
- [13] Lelevé, A., Meyer, C., & Prevot, P. (2002, November). Télé-TP : Premiers pas vers une modélisation. In Technologies de l'Information et de la Communication dans les Enseignements d'ingénieurs et dans l'industrie (pp. 203-221). Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- [14] MUGNIER, L. (2008). Introduction aux problèmes inverses : application à l'imagerie optique à haute resolution en astronomie. Des données à l'objet : le problème inverse, EDP Sciences/CNRS, Paris.
- [15] Stigler, S. M. (1981). Gauss and the invention of least squares. *The Annals of Statistics*, 465-474.
- [16] Viswanathan, R. (2005). *Inverse Problems in Image Processing : Blind Image Restoration*.
- [17] Internet : [//www.clashinfo.com/aide-informatique/multimedia/art153-formats-image.html](http://www.clashinfo.com/aide-informatique/multimedia/art153-formats-image.html).
- [18] Internet : <https://blogs.mathworks.com/steve/2007/08/13/image-deblurring-introduction/>

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$J(x; y)$	Fonction continue de luminosité analogique.
f	Image numérique.
$L1$ et $L2$	Degrés de luminosité.
$A1$ et $A2$	Deux zones voisines.
C	Contraste
m	Mesures effectuées.
p	Valeurs des paramètres du phénomène.
G	Opérateur linéaire.
o	Observation.
i	Données mesurées.
H	Opérateur linéaire continu.
h	Noyau de convolution représentant un flou.
b	Variable auxiliaire.
Ho	Convolution discrète.

\hat{o}_{MC}	Minimise l'écart, en moyenne quadratique.
$\ \cdot\ $	Norme euclidienne.
H^+i	Inverse généralisé.
$p_b(b)$	Loi de probabilité.
$p(i o)$	Quantité vue comme une fonction de o .
\hat{o}_{MV}	Effectivement observées les plus probables.
C_b	Matrice de covariance.
$J_i(o)$	Critère dit de moindres carrés pondérés.
$\sigma_b^2(k)$	Éléments de la diagonale.
σ_b^2	Variance.
X	Tomographie à Rayons.
$Rf(s, u)$	L'intégrale sur l'hyperplan.
s	Sphère unité.
u	Constant.
y	L'opérateur de flou donne une image observée.
$f(x, y)$	Image "idéale" recherchée.
$h(x, y)$	Réponse impulsionnelle de la dégradation.
$n(x, y)$	Bruit blanc décorrélé du signal.
$g(x, y)$	Image observée à restaurer.
N	Nombre de pixels.
$Nx1$	Vecteur que l'onnotera f .
NxN	Coefficients constants.
\underline{n}	Statistiques du bruit.
$o(t)$	Convolution.
$\delta K_1 \delta x; K_2 \delta x$	Durée des signaux.
$o(i)$	L'équation de convolution.
$\delta x = 1$	D'échantillonnage.

v	Bruit blanc gaussien.
$\mathcal{TF}(h)$	Mesure où le spectre.
$\ H\ $	Norme matricielle induite d'une norme vectorielle.
I	Dimension de o ou f .
$Cond(H)$	Matrice bien conditionnée.
$Cond(I)$	Matrice identité.
δo	Perturbation sur les observations.
$\ \delta o\ $	Petite perturbation.
$g(s)$	Valeurs enregistrées avant la quantification.
y_s	Données réelle.
\square	Dénote la quantification de la gamme de g .
$b(s)$	L'intensité sur l'avion d'image à un endroit ξ_s .
$K(v, u)$	Fonction de diffusion de point (PSF).
φ	Explique des effets (nonlinéaires) de sonde.
$\vec{\eta}$	Collection de champs de bruit.
ψ	Mécanisme de bruit.
S'	Trellis concentrique avec S .
k	Représentation discrète du PSF K
\mathcal{H}	Opérateur de convolution associé à h .