République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

DJENIDI Houda

Titre :

Quelque méthodes de résoulution d'EDP et problème de Sturm-Liouville

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	DAKHIA Hassiba	UMKB	Président
Dr.	**TABARHA Ouarda**	UMKB	Encadreur
Dr.	GHOUDJMIS Ftiha	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce humble travail à mes parents.

REMERCIEMENTS

La réalisation de ce travail n'aurait pas pu se faire sans l'appui de plusieurs personnes que je tiens à remercier.

En premier lieu je remercie mes parents car grâce à eux que j'ai pu continuer mes études à un niveau si avancé.

J'adresse ma reconnaissance à mon encadreur **TABARHA Ouarda**, son sérieux et sa competence m'ont été trés utiles pour mener à bien ce travail. Je remercie les professeurs **DAKHIA Hassiba ,GHOUDJMIS Ftiha** qui m'ont accepés de présider les jurys de sountenance.

Je suis particulièrement reconnaissant envers Mr **NANI Youssef** et Mr **LAHLOUHI Said**

Enfin, je remercie toutes les personnes, famille, amis,... qui directement ou indirectement ont contribué à la réalisation de ce travial.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé EDP dans la suite. C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes au travers d'EDP que l'on a pu comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises. L'étude mathématique des EDP nous a aussi appris à faire preuve d'un peu de modestie : on a découvert l'impossibilité de prévoir à moyen terme certains phénomènes gouvernés par des EDP nonlinéaires - pensez au désormais célèbre effet papillon : une petite variation des conditions initiales peut en temps trés long conduire à des trés grandes variations. D'un autre côté, on a aussi appris à "entendre la forme d'un tambour" : on a démontré mathématiquement que les fréquences émises par un tambour lors de la vibration de la membrane - un phénomène d'ecrit par une EDP, permettent de reconstituer parfaitement la forme du tambour.

Quand sont apparues les EDP ?. Elles ont été probablement formulées pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17ème siècle (Newton, Leibniz...). Ensuite le "catalogue" des EDP s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique. . S'il ne faut retenir que quelques noms, on se doit de citer celui d'Euler, puis ceux de Navier et Stokes, pour les équations de la mécanique des fluides, ceux de Fourier pour l'"équation de la chaleur, de Maxwell pour celles de l'electromagnétisme, de Schrödinger et Heisenberg pour les équations de la mécanique quantique, et bien sûr de einstein pour les EDP de la théorie de la relativité.

Cependant l'étude systématique des EDP est bien plus récente, et c'est seulement au cours du 20ème siècle que les mathématiciens ont commencé à développer l'arsenal nécessaire. Un pas de géant a été accompli par L. Schwartz lorsqu'il a fait naître la théorie des distributions (autour des années 1950), et un progrés au moins comparable est du à L. Hörmander pour la mise au point du calcul pseudodifférentiel (au début des années 1970). Il est certainement bon d'avoir à l'esprit que l'étude des EDP reste un domaine de recherche trés actif en ce début de 21ème siècle. D'ailleurs ces recherches n'ont pas seulement un retentissement dans les sciences appliquées, mais jouent aussi un rôle trés important dans le développement actuel des mathématiques elles-mêmes, à la fois en géometrie et en analyse. Ce mémoire est dévisée en **quatre chapitres**, **le premier** chabitre est de rappeller l'essentiel des notions et résultats utilisées tout au long de nous travail. Il est organisé comme suite :en premier lieu nous rappellons quelque définitions et résultats sur l'EDP et sur les séries de Fourier **Le deuxième** chapitre est consacré à des méthode analytique de résoudre les équation aux dérivée partielles (séparation des variables, transformation de Fourier et transformation de Laplace) Et dans **troisième** nous traité la resoulution numérique en utilisant les différences finies.Et dans **dernier** chapitre nous allons traiter le théorème de Sturm- Liouville. Premièrement nous rappellons quelques notions algèbrique sur le produit scalaire, l'inégalité de Cauchy-Schwartz, puis nous décrivons ce qu'est un problème de Sturm- Liouville. Ensuite, nous montrons l'orthogonalité de solutions non nulles d'un tel problème correspondant à des valeurs propres distinects. Enfin, nous étudierons les équations différentielles d'Hermite, Legendre, LAgerre et Tchebecheff. Enfin, nous utilisons la méthode du défférences finies pour la solution approchée.

Chapitre 1

Généralité

L'objectif de ce chabitre est de rappeller l'essentiel des notions et résultats utilisées tout au long de ce travail. Le chapitre est organisé comme suit :en premier lieu nous rappellons quelque définitions et résultats sur les EDP, en deuxième lieu nous rappellons quelque résultat sur série de Fourier.

1.1 Equations aux dérivées partielles (EDP)

1.1.1 Notions fondamentales sur EDP

Définition 1.1.1 *Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une fonction. On appelle une équation aux dérivées partielles pour la fonction u est une relation entre $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$.et un nombre fini de dérivées parielles.*

Une EDP est sous la forme :

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_n^{k_n}}), \tag{1.1}$$

où $k_1, k_2, ..., k_n$ sont des entiers positifs tels que : $k_1 + k_2 + ... + k_n = m$.

L'équation 1.1 considérée dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.2 *On dit que u est une solution de l'équation aux dérivées partielles dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, si aprés substutition de u et de ses dérivées partielles, φ s'annulle pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$.*

Proposition 1.1.1 *L'ordre $m \in \mathbb{N}$ d'une équation aux dérivées partielles est celui de la dérivée parielle d'ordre plus élevé.*

Proposition 1.1.2 *Une équation aux dérivées partielles est linéaire, si φ est linéaire par rapport à u et ses dérivées partielles et non linéaire dans le cas contraire.*

Proposition 1.1.3 *La solution générale d'une équation aux dérivées partielles est celle qui permet de trouver toute les solutions d'équation (sauf le cas de solutions singulières) en donnant des valeurs particulières aux fonctions arbitraires.*

·L'équation $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u$ est une équation aux dérivées partielles d'ordre 2.
·L équation $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (\dfrac{\partial u}{\partial t})^2 = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est une équation aux dérivées partielles non-linéaire pour l'équation $u(x, t)$.
·L'équation $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \exp(-x^2)$ est linéaire.

1.1.2 Conditions initiales et conditions au bord

Pour trouver les solutions particulières, à partir de la solution générale, on va imposer les conditions respectives sur l'ensemble des solutions.
Les contraintes les plus fréquentes sont :

1-Condition initiale

Si u une fonctin de $(x, t) \in \mathbb{R}^n.\mathbb{R}$, on donne $u(x, t_0) = \Phi_0(x)$ ou $D_2^n u(x, t_0) = \Phi_n(x)$, on parle aussi de conditions de Cauchy.

2-Condition au bord

Si u une fonctin de $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ on a deux types de contraintes :

-condition de Dirichlet

Où u est fixé à bord de Ω, telque $u|_{\partial\Omega} = g$.

- condition de Neumman

Où la dérivée normale de u est fixé telque $\frac{du}{dx}|_{\partial\Omega} = g$.

1.1.3 Problèmes bien posés :

considérier une équation aux dérivées partielles sur un domaine Ω avec éventuellement des conditions auxiliaires sur la solution.

Définition 1.1.3 *On dit qu'un problème est bien posé si on a :*

-L'existence d'une solution du problème.

-Unicitée de cette solution.

-Stabilitée par rapport aux données du problème.

1.1.4 Equation aux dérivées partielles du second ordre

Dans le cas générale une équation aux dérivées partielles du second ordre dans $\mathbb{R}^2$ est de la forme :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = g, \tag{1.2}$$

où A, B, C, ..., F, g sont des fonctions de x, y définies dans un domaine D du plan.

Si $g = 0$ dans D, l'équation 1.2 est dite homogène ou sans second membre, sinon non homogène ou avec second membre.

Cette équations est quasi-linéaire si A, B, C dépendent de x, y, u, u_x, u_y et linéaire si A, B, C dépendent de x, y avec F est une fonction linéaire par rapport à u, u_x, u_y.

Types d'équations de second ordre

Les courbes de deuxième ordre

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

sont trois type (hyperpobolique, parabolique et elliptique) selon le signe du diterminant $\triangle = b^2 - ac$ de la forme quadratique $ax^2 + 2bxy + cy^2$.

Ainsi, pour une équation de type :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = g, \tag{1.3}$$

qui au point (x, y) sera hyperbolique si $\triangle(x, y) > 0$, parabolique si $\triangle(x, y) = 0$ et elliptique si $\triangle(x, y) < 0$.

SI les coefficients A, B, C de 1.3 dans le domaine D sont constantes, $\triangle(x, y) = const$ et le type d'équation sera le même à tous les points du domaine.

Queleque exemples sur les équations de second ordre

-Equation de la chaleur elle est donnée par l'équation aux dérivée partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^2},$$

où t est le temps, u est le température d'un corps et α une constante. C'est une équation parabolique ($a = \alpha^2$, $b = c = 0$).

Elle apparait dans l'étude de la conduction de la Chaleur et dans d'autres procédés de diffusion.

-Equation des ondes (L'équation des cordes vibrantes) Elle est donnée par l'équation aux dérivée partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t^2},$$

où $u(x,t)$ est le déplacement du point d'abcisse x à l'instant t. C'est une équation hyperbolique ($a = 1$, $b = 0$, $c = -k^2$).
Qu'elle apparait dans l'étude des ondes acoustiques, vagues d'eau, et les ondes éléctromagnétiques.

-Equation de laplace Elle est donnée par l'équation aux dérivée partielles suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y^2} = 0,$$

et elle est elliptique ($a = c = 1$, $c = 0$),
Elle est la plus célèbre, elle se pose dans l'étude de diverse appliquation comme les flux régulière, les membranes vibratoires et les pontiels éléctroniques. Pour cette raison elle est souvent appellée l'équation de Potentiel.

1.2 Série de Fourier :

Si f est une fonction définie et intégrable sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. On suppose que cette fonction est 2π-periodique. les nombres a_k et b_k définis par

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, k \geq 0, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, k \geq 1,$$

s'appelle coefficients de Fourier de f et la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

est dite série de Fourier de f. Au lieu de considérer tout autre intervalle d'amplitude 2π, par exemple $[0, 2\pi]$. Pour une fonction f, $2L-$periodique définie et intégrable sur un intervalle $[-L, L]$ d'amplitude quelque finie, la série de Fourier associée à la fonction f est donnée par

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right),$$

où

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx, k \geq 0, \qquad b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx, k \geq 1.$$

En notation complexe, la série de Fourier d'une fonction 2π-periodique f s'écrit sous la forme

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(ikx\right), \text{ où } c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\exp(-ikx)dx,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Si f est série $2L - periodique$, sa série de Fourier s'écrit en notation complexe sous la forme

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(\frac{ik}{L}x\right), \text{ où } c_k = \frac{1}{2L}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\exp(-\frac{ik}{L}x)dx,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Chapitre 2

Méthodes analytiques

En général il existe une infinité de solutions pour une équation différentielle donnée. De façon analogue, une prolème d'EDP consiste en une équation aux dérivée partielles et des conditions supplémentaire (conditions initiales et/ ou conditions a la frontrère). Pour les équations de la physique ces conditions ont un sens concret. Elle sont soit le déplacement initial, soit la vitasse initiale ou soit une température aux extrémités,etc..
Ce chapitre est consecré à des quelques méthodes des analythiques comme méthdes de séparation de variables, transformation de Fourier et transformation de Laplace.

2.1 Méthode de séparation des variables (ou méthode de Fourier)

Cette méthode est la plus utilisée à cause de sa simpicité et de sa puissance de résolution. Dans cette section on consecré à la résolution de certains équations aux dérivées partielles (équation de la place, équation de la chaleur et équation des ondes).
Voici la procédure générale de résolution des EDP linéaire par cette méthode :
1)-On exprime la solution u comme le produit des fonctions inconues, chacune de ces fonctions ne dépendant que l'une seule variable indépendante $u = X.T$. Substituer cette

solution dans l'EDP. Séparer l'équation en équations différentielles ordinaires.

2)-Ramener les conditions aux limites homogène de u sur celles de X, T.

3)-Résoudre les équations différentielles à valeurs propres.

4)-Les fonctions propres sont le produit des solutions correspondant à chaque valeur propre n, $u_n = X_n T_n$. La solution d'EDP est la combinaison des fonctions propres $u = \sum A_n u_n$.

5)-Résoudre pour A_n en utilisant les conditions aux limites.

2.1.1 Equation de Laplace (problème elliptique)

On considère l'équation de **Laplace** en deux variables.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{2.1}$$

Avec les conditions aux limites s'expriment par

$$u(0, y) = u(x, 0) = u(\pi, y) = 0,\ u(x, \pi) = T_0.$$

On cherche des solutions particulière de 2.1 sous la forme

$$u(x, y) = X(x)T(t),$$

c'est-à-dire sous forme d'un produit de deux fonctions dépendant chacune d'une seul variable. En substituant cette expression dans 2.1, on obtient

$$X''(x)T(t) + X(x)T''(t) = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T''(t)}{T(t)}$$

On pose $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\dfrac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda^2$ donc

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ \text{et } T''(t) - \lambda^2 T(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x) = a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x) \\ \text{et } T(t) = c\cosh(\lambda y) + d\sinh \lambda y. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ u(x,y) = (a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x))(c\cosh\lambda y + d\sinh\lambda y)$$

Par les conditions aux limites alors, $b \neq 0$ et $d \neq 0$, il faut choisir $\lambda = k$ où $k = 1, 2, ...$Dès alors $u_k(x,y) = A_K \sin(kx)\sinh(ky)$. Pour satisfaire à la dernière condition : $u(x,\pi) = T_0$, on utilise d'abord le principe de superposition pour obtenir la solution générale :

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx)\sinh(ky)\,. \tag{2.2}$$

Puis en se basant sur la condition aux limites

$$u(x,\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx)\sinh(k\pi) = T_0, \tag{2.3}$$

on détermine les coefficients A_K de la manière suivante : l'équation 2.3 est un développement en série de Fourier de la constante T_0 sur l'intervalle $[0,\pi[$. En posant $u(x,\pi) = -T_0$ pour $x \in [-\pi, 0[$, la fonction $u(x,\pi)$ est définie sur l'intervalle $[-\pi,\pi[$, et comme il s'agit d'une fonction impaire, on a pour son dévellopement en série de Fourier :

$$u(x,\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) = T_0, \tag{2.4}$$

où

$$b_K = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x,\pi)\sin(kx)\,dx = \frac{2T_0}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(kx)\,dx = \frac{2T_0(1-\cos(k\pi))}{\pi k}.$$

Par 2.3 et 2.4, on obtient $A_k = \dfrac{2T_0(1-\cos(k\pi))}{\pi k \sinh(k\pi)}$.

Finalement, on portant ces valeurs dans 2.2, on obtient :

$$u(x,y) = \frac{2T_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\cos(k\pi))}{k\sinh(k\pi)} \sin(kx)\sinh(ky).$$

2.1.2 Equation de la Chaleur (problème parabolique)

On considère l'équation de la Chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t > 0, \tag{2.5}$$

avec les conditions aux limites : $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $l > 0$ ainsi que les conditions initiales $u(x,0) = \varphi(x)$ où $\varphi(x)$ est la température à l'instant $t = 0$

Nous étudions premièrement le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & l > 0 \end{cases}.$$

On pose $u(x,t) = X(x)T(t)$.dans l'équation 2.5, nous obtenons

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)}, \Rightarrow X''(x) - \lambda X(x) = 0, \text{ et } T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0.\text{telque } \lambda \text{ constant}$$

La première équation $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ avec $X(0) = X(l) = 0$ $(0 \leq x \leq l)$

·Si $\lambda \geq 0 \Rightarrow X = 0$ et $u(x,t) = 0, \forall 0 \leq x \leq l$ et $t \geq 0$

·Si $\lambda = -k^2 < 0 \Rightarrow X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$

$$\Rightarrow A = 0 \text{ puisque } X(0) = 0 \Rightarrow B\sin(kx)$$

supposant que $B \neq 0$ donc $\sin(kl) = 0 \Rightarrow kl = n\pi \Rightarrow \lambda = -(\dfrac{n\pi}{l})^2$ telque $n \in \mathbb{Z}$. Alors $X_n(x) = B_n \sin\left(\dfrac{n\pi x}{l}\right)$.

La deuxième équation $T'(t) + \lambda_n a^2 T(t) = 0$, $t \geq 0$ donc

$$\begin{aligned} T_n(t) &= C_n \exp(\lambda_n a^2 t) \\ &= C_n \exp\left[-(\frac{n\pi a}{l})^2 t\right]. \end{aligned}$$

Par les deux équations ; on a la solution

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left[-(\frac{n\pi a}{l})^2 t\right]; \end{aligned}$$

Alors

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l} \exp\left[-(\frac{n\pi a}{l})^2 t\right].$$

Aprés les conditions aux limites et condition initial on obtenons

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \varphi(x).$$

et comme elle est une série de Fourier de $\varphi(x)$, alors la solution formelle du problème initiale de Chaleur est

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left[-(\frac{n\pi a}{l})^2 t\right]$$

Avec $$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx, \text{ pour tout } n \geq 1$$

2.1.3 Équation des ondes

On considère l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{2.6}$$

avec les conditions initiales :

$$u(x,0) = f(x) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \text{ pour tout } 0 \leq x \leq l,$$

et les conditions à la frontière

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

On pose $u(x,t) = X(x)T(t)$.dans l'équation 2.6, nous obtenons

$$XT'' - c^2 X''T = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T'(t)}{T(t)},$$
$$\Rightarrow X''(x) - \lambda X(x) = 0,\text{et } T'(t) - \lambda c^2 T(t) = 0$$

La première équation

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad (0 \leq x \leq l),$$
$$\text{avec} \qquad X(0) = 0 \text{ et } X(l) = 0;$$

1)Si $\lambda = v^2 > 0$, alors la solution générale est de la forme $A\exp(-vx) + B\exp(vx)$ où A et B sont des nombres réels.

Par les conditions

$$X(0) = 0\text{et } X(l) = 0 \Rightarrow A + B = 0$$
$$\Rightarrow X = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$$

2)Si $\lambda = 0$, $\Rightarrow X(x) = A + Bx$ où A et $B \in \mathbb{R}$. Par les , alors $X = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$.

3)Si $\lambda = -v^2 < 0 \Rightarrow A\exp(vx) + B\exp(vx)$ où A et B sont des nombres réels, avec les conditions aux limite donc $A = 0$ et $X(l) = B\sin(vl) = 0$, supposons que $B \neq 0$, alors $\sin(vl) = 0 \Rightarrow vl = n\pi \Rightarrow \lambda = -(\frac{n\pi}{l})^2$, avec $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda_n = -(\frac{n\pi}{l})^2$ donc $X_n(x) = B\sin(n\pi x/l)$

La deuxième équation

$$\begin{aligned} &T'(t) - \lambda c^2 T(t) = 0 \text{ pour } t \geq 0 \\ &\qquad\qquad \Rightarrow T_n(t) = C_n \cos(\frac{cn\pi t}{l}) + D_n \sin(\frac{cn\pi t}{l}). \end{aligned}$$

Par les deux équations ; on a la solution sous la forme

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \sin(\frac{n\pi x}{l})\left[a_n\cos(\frac{cn\pi t}{l}) + b_n\sin(\frac{cn\pi t}{l})\right].$$

Le principe de superposition est valable pour ce problème intermediare car il est linéaire et homogène, donc on trouve

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{n\pi x}{l})\left[a_n\cos(\frac{cn\pi t}{l}) + b_n\sin(\frac{cn\pi t}{l})\right].$$

On a :

$$\begin{aligned} u(x,0) = f(x) &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\frac{n\pi x}{l}) = f(x); \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{cn\pi}{l}\right) b_n \sin(\frac{n\pi x}{l}) = g(x) \end{aligned}$$

Dans l'intervalle $0 \leq x \leq l$. Autrement dit, doit développer les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ en série de Fourier de sinus dans l'intervalle $0 \leq x \leq l$.

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx; \\ \left(\frac{cn\pi}{l}\right) b_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx. \end{cases}$$

2.2 Transformation de Fourier

Définition 2.2.1 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *une fonction appartenant à* $L^1(\mathbb{R})$.*On appelle transformée de Fourier de* f, *la fonction* $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-2\pi i\omega x)dx$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.2.1 *Soient* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *alors*

$$\mathcal{F}\left\{\alpha f(x) + \beta g(x)\right\} = \mathcal{F}\left(\alpha f(x)\right) + \mathcal{F}\left(\beta g(x)\right).$$

$$\mathcal{F}\left\{f(x-c)\right\} = \exp(-2\pi i\omega c)\widehat{f}(\omega),\ c \in \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{F}\left\{\exp(2\pi i\omega_0 c)f(x)\right\} = \widehat{f}(\omega - \omega_0),\ \omega_0 \in \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{F}\left\{f(cx)\right\} = \frac{1}{c}\widehat{f}(\frac{\omega}{c}),\ c \in \mathbb{R}^*.$$

$$\mathcal{F}\left\{\bar{f}(x)\right\} = \overline{\widehat{f}}(-\omega),\ \text{(- désinge le conjugué)}$$

Proposition 2.2.2 *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R})$.*et supposons que* f *est dérivable et que* $f' \in L^1(\mathbb{R})$, *alors*

$$\mathcal{F}\left\{f'(x)\right\} = 2\pi i\omega\mathcal{F}\left\{f(x)\right\} = 2\pi i\omega\widehat{f}(\omega).$$

Si en outre f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n qui sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\mathcal{F}\left\{f^{(n)}(x)\right\} = (2\pi i\omega)^n\,\mathcal{F}\left\{f(x)\right\} = (2\pi i\omega)^n\,\widehat{f}(\omega).$$

Si f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n qui sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq \frac{c}{|\omega^n|}, \qquad c \equiv \text{constante}.$$

Proposition 2.2.3 *Soit* $f \in L^2(\mathbb{R})$.*alors*

– Si $xf \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \dfrac{d\widehat{f}(\omega)}{d\omega} = \mathcal{F}\left\{-2\pi ixf(x)\right\}$.

– Si $x^n f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \dfrac{d^n\widehat{f}(\omega)}{d\omega^n} = \mathcal{F}\left\{(-2\pi ix)^n f(x)\right\}$.

Exemple 2.2.1 *Soit*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ a > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Par la transformation de Fourier par rapport à variable x donc

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\exp(-2\pi i\omega x)dx = a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\exp(-2\pi i\omega x)dx, \\ \Rightarrow \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\omega,t) = -4a\pi^2\omega^2\widehat{u}(\omega,t) \\ \Rightarrow \widehat{u}(\omega,t) = C\exp(-4a\pi^2\omega^2 t) \\ \Rightarrow \widehat{u}(\omega,0) = C = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\exp(-2\pi i\omega x)dx \end{aligned}$$

donc

$$\widehat{u}(\omega,t) = \exp(-4a\pi^2\omega^2 t)\widehat{\varphi(x)}$$

Comme $\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\}.F\{g\}$, on peut poser $u(x,t) = f * g$, avec $f = \varphi(x)$ donnée et g telle que : $\mathcal{F}\{g\} = \exp(-4a\pi^2\omega^2 t)$ donc

$$g = \frac{1}{4\pi\sqrt{a\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{16a\pi^2 t}).$$

Finalement, on obtient la solution

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi\sqrt{a\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\exp(-\frac{(x-y)^2}{16a\pi^2 t})dy.$$

2.3 Transformation de Laplace :

Définition 2.3.1 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), une fonction localement sommable. On appelle transformation de Laplace de $f(x)$ la fonction notée $\pounds\{f(x)\}$ ou $F(p)$, de la variable* *complexe $p = \sigma + i\omega$ définie par*

$$\pounds\{f(x)\} = F(p) = \int_0^\infty f(x)\exp(-px)dx.$$

La fonction f est appelée originale de F et F l'image de f. On montre que si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, nulle pour tout $x < 0$, continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et si en outre ils ixistent des constantes $M > 0$ et σ_0 telles que : $|f(x| \leq M \exp(\sigma_0 x)$, $\forall x \geq x_0$, alors la transformée de Laplace existe pour tout $\sigma > \sigma_0$. Notons que si l'intégrale ci-dessus converge pour $\operatorname{Re}(p) = \sigma_0$, alors il en est de même pour tout p tel que $\operatorname{Re}(p) \geq \sigma_0$. Soit $f \in L_{loc}\{[0, +\infty[\}$. Le nombre

$$\sigma_0 = \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : f(x)\exp\sigma x \in L_{loc}([0, +\infty[)\},$$

s'appelle abscisse de sommabilité ou abscisse de convergence absolue de la fonction f. Le demmi-plande convergence $\{p = \sigma + i\omega : \operatorname{Re}(p) = \sigma > \sigma_0\}$ est le domaine de sommabilité sur lequel $F(p)$ est défini.

Proposition 2.3.1 *La transformation de Laplace est une application linéaire. Plus pécisément, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, pour f, g, d'abscisses de sommabilité respectives σ_0, ς_0, alors*

$$\pounds\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha\pounds\{f(x)\} + \beta\pounds\{g(x)\} = \alpha F(p) + \beta G(p), \text{ où } \operatorname{Re}(p) > \max\{\sigma_0, \varsigma_0\}$$

où $\operatorname{Re}(p) > \max\{\sigma_0, \varsigma_0\}$.

Si $\pounds\{f(x)\} = F(p)$, alors :

1/ $\pounds\{f(x - c)\} = \exp(-cp)F(p)$, $\operatorname{Re}(p) > \sigma_0$.

2/ $\pounds\{f(x)\exp(-\alpha x)\} = F(p + \alpha)$, $\operatorname{Re}(p + \alpha) > \sigma_0$.

3/ $\pounds\{f(cx)\} = \frac{1}{c}F(\frac{p}{c})$, $c > 0$.

4/ $\pounds\{\overline{f}(x)\} = \overline{F}(\overline{p})$, ($-$ désigne le conjugué).

Proposition 2.3.2 *La transformation de Laplace d'une fonction localement sommable f, est une fonction holomorphe dans le domaine de sommabilité $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(p) \geq \sigma_0\}$ et ona la formule*

$$F^{(n)}(p) = \int_0^{\infty} (x)^n f(x) \exp(-px) dx = (-1)^n \pounds\{(x)^n f(x)\}.$$

Si $\pounds\{f(x)\} = F(p)$, et si $\pounds\{g(x)\} = G(p)$, alors

$$\pounds\{f(x) * g(x)\} = F(p)G(p), \ \ \operatorname{Re} p > \max\{\sigma_0, \varsigma_0\},$$

où σ_0 et ς_0 sont les indices de sommabilitées de f et g respectivememt

Proposition 2.3.3 *Si f est localement sommable, f est continue pour tout $x \geq x_0$, les dérivées $f'(x)$, ..., $f^{(n-1)}$ existent et sont continues par morceaux, il existe des constantes $M > 0$ et σ_0 telle que $|f(x)| \leq M \exp \sigma_0 x$ pour tout $x \geq x_0$, alors*

$$\pounds\left\{f^{(n)}(x)\right\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \ldots - p f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+).$$

Proposition 2.3.4 *Si $\pounds\{f(x)\} = F(p)$, alors*

$$\pounds\left\{\int_0^x f(x) dx\right\} = \frac{F(p)}{p}, \ \operatorname{Re} p > \max\{\sigma_0, 0\}$$

Exemple 2.3.1 *Soit*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = 0 = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) \\ u(0,t) = \sin x, \qquad t > 0. \end{cases}$$

On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ tel que : $|(u(x,t)| \leq M$.

Soit $U(x,p) = \pounds\{u(x,t)\}$ par la transformation de Laplace on a

$$\begin{aligned}
\pounds\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} &= \pounds\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} \\
p^2U(x,p) - pu(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \frac{d^2U(x,p)}{dx^2} \\
&\Rightarrow p^2U(x,p) - \frac{d^2U(x,p)}{dx^2} = 0 \text{ puisque } u(x,0) = 0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \\
&\Rightarrow U(x,p) = C_1\exp(px) + C_2\exp(-px)
\end{aligned}$$

Puisque $|(u(x,t)| \leq M \Rightarrow C_1 = 0$, et $U(x,p) = C_2\exp(-px)$.

donc C_2=$U(0,p) = C_2$

ona :

$$U(0,p) = \pounds\left\{u(0,t)\right\} = \pounds\left\{\sin t\right\} = \frac{1}{p^2+1},$$

alors

$$U(x,p) = \frac{1}{p^2+1}\exp(-px)$$

donc

$$u(x,t) = \begin{cases} \sin(t-x) & \text{si } t > x \\ 0 & \text{si } t < x \end{cases}.$$

Chapitre 3

Méthode numérique

Nous étudirons des méthodes numériques pour résoudre les EDP, puisque leurs solutions analytiques sont habituellement difficiles à trouver. Pour passer d'un problème éxact continu régit par une EDP au problème approché discret, il existe trois grands familles des méthodes :l**es différences finies,les volumes finis et les éléments finies.** Mais dans cette chapitre nous étudiant les différences finies

3.1 Différences finis

Définition 3.1.1 *elle consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœude du maillage.*

Définition 3.1.2 *La méthode des différences finies est une méthode numérique de résolution des EDO et EDP. Sa formulation est bassée sur l'approximation locale au voisinage d'un point donnée des fonctions dérivées apparaissant dans les équations différentielles. Les fonctions dérivées sont approchées par des fonctions polynômiales données par le de développement en série de Taylor.*

Théorème 3.1.1 Théorème de Taylor :

Soit $f \in C^n$ dans un intervalle I contenant d'un point x_0 : Parmi tous les polynôme de dégré n il existe un seul dont les dérivées d'ordres inferieurs ou égale à n sont tous égales aux dérivées de f. Nous définissons le polynome de Taylor comme

$$P^k = f^k(x_0),\ k = 0, 1, ..., n. \tag{3.1}$$

3.2 Le développement de Taylor :

3.2.1 Le développement en série de Taylor :

Si $f \in C^{n+1}$ au voisinage d'un point $x = x_0$ c'est à dire dans un intervalle ouvert contenant x_0, alors cette fonction peut être approchée par une fonction polynomiale écrit sous la forme de série convergente qu'on appelle série de Taylor :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + ... + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + ... \qquad (3.2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}. \end{aligned}$$

3.2.2 Le développement en série de Taylor :

Dans l'équation 3.2, on ne peut tenir compte que d'un nombre fini de terme on a donc un développement à termes finis 'est le dévelopement limité de Taylor (appelée aussi formule de Taylor) de la f autour du point $x = x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + ... + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + R_n. \tag{3.3}$$

Le dernier terme de l'équation 3.3 est appelé reste ou erreur de troncation, est donné par la formule de Lagrange :

$$R_n = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^n}{(n + 1)!}.$$

Cette erreur est notée par $O(x-x_0)^{n+1}$

En posant $h=\triangle x=x-x_0$ la formule de Taylor 3.3 devient :

$$f(x)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+...+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+O(h^{n+1}). \tag{3.4}$$

3.3 La méthode des différences finies :

Définition 3.3.1 *La méthode des différences finies est une méthode d'approximation des EDO et EDP et elle consiste à :*

-discrétiser la fonction f aux différentes points M_i de coordonnées x_i espacés d'un pas $h=\triangle x$ selon la direction x.
-reformuler les dérivées partielles qui apparaissent dans l'EDP. Les fonctions dérivées sont approchées en utilisant le développement limite de Taylor de la fonction f au voisinage des points x_i.

3.4 Approximation des dérivées par différence finies :

3.4.1 Approximation des dérivées premières

1-Différences finies en avant

La fonction f est connue aux pionts x_i du domaine d'analyse de la formule de Taylor 3.4 on développe la fonction f jusqu'à l'ordre 2

$$f(x_i+h)=f(x_i)+hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(\xi) \text{ avec } x_i<\xi<x_i+h. \tag{3.5}$$

En résolvant 3.5 pour $f'(x_i)$, on a :

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h}+O(h). \tag{3.6}$$

La formulation de la dérivée première s'écrit en notation indicielle,

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h). \tag{3.7}$$

2-Différences finies en arrière

En changemeant h en $-h$ dans l'équation 3.5

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(\xi) \text{ avec } x_i - h < \xi < x_i. \tag{3.8}$$

En résolvant pour la dérivée première :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} + O(h); \tag{3.9}$$

la notation indicielle,

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h). \tag{3.10}$$

3-Différences finies centrées

L'élimination de $f(x_i)$ des équations

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_i) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi) \text{ avec } x_i < \xi < x_i + h, \tag{3.11}$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_i) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi) \text{ avec } x_i - h < \xi < x_i; \tag{3.12}$$

nous permet de trouver la dérivée première par la schéma de différences centrées

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} + O(h^2) \tag{3.13}$$

qui s'écrit en notation indicielle

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2). \tag{3.14}$$

3.4.2 Approximation des dérivées secondes

1-Différences finies en avant

On écrit le développement de $f(x_i + h)$ et $f(x_i + 2h)$:

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_i) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi), \tag{3.15}$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + 2hf'(x_i) + 2h^2 f^{(2)}(x_i) + \frac{8h^3}{3!} f^{(3)}(\xi). \tag{3.16}$$

L'élimination de $f'(x_i)$ entre les deux équations, on obtient :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_i + h) + f(x_i + 2h)}{h^2} + O(h), \text{telque } O(h) = -hf^{(3)}(\xi); \tag{3.17}$$

qui s'écrit en notation indicielle

$$f_i'' = \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{h^2} + O(h). \tag{3.18}$$

2-Différences finies en arrière

On considère le développement de $f(x_i - h)$ et $f(x_i - 2h)$:

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_i) - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi), \tag{3.19}$$

$$f(x_i - 2h) = f(x_i) - 2hf'(x_i) + 2h^2 f^{(2)}(x_i) - \frac{4h^3}{3} f^{(3)}(\xi). \tag{3.20}$$

L'élimination de $f'(x_i)$ entre les deux équations, on obtient :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - 2h) - 2f(x_i - h) + f(x_i)}{h^2} + O(h),\ O(h) = -hf^{(3)}(\xi); \tag{3.21}$$

qui s'écrit en notation indicielle

$$f_i'' = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} + O(h). \tag{3.22}$$

3-Différences finies centrées

On considère le développement de $f(x_i + h)$ et $f(x_i - h)$:

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_i) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + \frac{h4}{4!}f^{(4)}(\xi), \tag{3.23}$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_i) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + \frac{h4}{4!}f^{(4)}(\xi). \tag{3.24}$$

L'élimination de $f'(x_i)$ entre les deux équation, on obtient :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - h) - 2f(x_i) + f(x_i + h)}{h^2} + O(h^2), \text{tel que } O(h^2) = -\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi), \tag{3.25}$$

$$f_i'' = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} + O(h^2). \tag{3.26}$$

3.5 Procédure de résolution des problèmes aux limites

La résolution d'un problème aux limites par la méthode des différences finies se fait selon les principales étapes suivantes :

1-Construire le maillage ou grille du domaine Ω.

2-Transformer l'équation aux dérivées partielles et l'exprimer sous forme de molécule ou schéma numérique de différences finies.

3-Ecrire l'équation de différence finies aux point des maillage.

4-Obtenir le système d'équation algèbriques discrètes $[K]\{\Phi\} = \{\Phi_c\}$, $\{\Phi_c\}$ est le vecteur connu donné par les conditions aux limites non homogènes, $[K]$ est la matrice des coefficients et $\{\Phi\}$ est le vecteur solution recherché en tout point du maillage.

5-Trouver la solution $\{\Phi\}$ en résolvant le système d'équations $[K]\{\Phi\} = \{\Phi_c\}$.

Exemple 3.5.1 *Soit le problème elliptique donné par l'équation de Laplace*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \; sur\ \Omega \\ u(x,0) = u_b, \; u\left(x, L_y\right) = u_h \\ u(0,y) = u_g, \; u\left(L_x, y\right) = u_d \end{cases}$$

Le domaine de calcul est disrétisé en $(N+1).(P+1)$ noeuds (x_i, y_i). On supposera que le pas d'espace dans chaque direction $\triangle x$ et $\triangle y$ sont constants.

À l'aide d'un schéma de différences centées d'ordre 2 s'écrivons les dérivées secondes en espace :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\triangle x^2}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\triangle y^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\triangle x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\triangle y^2} = 0.$$

La formulation discrétisée est alors, pour i variant de 1 à $N-1$ et j variant de 1 à $P-1$:

$$\triangle y^2\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) - 2(\triangle x^2 + \triangle y^2)u_{i,j} + \triangle x^2\left(u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right) = 0 \tag{3.27}$$

Soit sous forme matricielle, pour $N = P = 4$, en posant $A = \triangle x^2 + \triangle y^2$:

$$\begin{bmatrix} -2A & \triangle y^2 & 0 & \triangle x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \triangle y^2 & -2A & \triangle y^2 & 0 & \triangle x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \triangle y^2 & -2A & 0 & 0 & \triangle x^2 & 0 & 0 & 0 \\ \triangle x^2 & 0 & 0 & -2A & \triangle y^2 & 0 & \triangle x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \triangle x^2 & 0 & \triangle y^2 & -2A & \triangle y^2 & 0 & \triangle x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \triangle x^2 & 0 & \triangle y^2 & -2A & 0 & 0 & \triangle x^2 \\ 0 & 0 & 0 & \triangle x^2 & 0 & 0 & -2A & \triangle y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \triangle x^2 & 0 & \triangle y^2 & -2A & \triangle y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \triangle x^2 & 0 & \triangle y^2 & -2A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \triangle x^2 u_b + \triangle y^2 u_g \\ \triangle x^2 u_b \\ \triangle x^2 u_b + \triangle y^2 u_d \\ \triangle y^2 u_g \\ 0 \\ \triangle y^2 u_d \\ \triangle x^2 u_h + \triangle y^2 u_g \\ \triangle x^2 u_h \\ \triangle x^2 u_h + \triangle y^2 u_d \end{bmatrix}$$

Dans le cas $\triangle x = \triangle y$, , l'équation 3.27 devient

$$u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} = 0 \tag{3.28}$$

Soit sous forme matricielle, pour $N = P = 4$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} u_b + u_g \\ u_b \\ u_b + u_d \\ u_g \\ 0 \\ u_d \\ u_h + u_g \\ u_h \\ u_h + u_d \end{bmatrix}$$

Notons I la matrice identité d'ordre 3 et D la matrice de dimension 3 définie par :

$$D = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Notons u_1, u_2 et u_3 les vecteurs à trois définis par :

$$u_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{bmatrix}$$

Le système peut s'écrire sous forme matricielle bloc suivante :

$$\begin{bmatrix} D & I & 0 \\ I & D & I \\ 0 & I & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

La matrice obtenue est tridiagonale et chacun de ses bloc est tridiagonal. La résolution du système peut s'effectuer par une méthode de Thomas matriciel où une méthode itérative matricielle (méthode de Gauss-siedel).

Algorithme de Thomas matriciel

Cet algorithme est utilisée pour la résolution d'un système avec une matrice tridiagonalepar bloc faisant intervenir un vecteur d'inconnues discrètes X_i de la forme

$$A_i X_{i-1} + B_i X_i + C_i X_{i+1} = D_i \quad i \text{ variant de 1 à } N-1;$$

où A_i, B_i et C_i sont des matrices et D_i un vecteur.

Sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & .. & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & .. & 0 \\ ... & .. & ... & .. & ... \\ 0 & 0 & A_{N-2} & B_{N-2} & C_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & A_{N-1} & B_{N-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ ... \\ X_{N-2} \\ X_{N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 - A_1 X_0 \\ D_2 \\ ... \\ D_{N-2} \\ D_{N-1} - C_{N-1} X_N \end{bmatrix}$$

On introduit la matrice α_i et le vecteur β_i évalués par les relations de réurrenc suivantes : $\alpha_i = (B_i + C_i \alpha_{i+1})^{-1} A_i$ et $\beta_i = (B_i + C_i \alpha_{i+1})^{-1} . (D_i - C_i \beta_{i+1})$ pour i variant de $N-1$ à 1 avec $\alpha_N = 0$ et $\beta_N = X_N$ (où X_N exprine une condition aux limites)

La deuxième étape détermine les inconnues, pour i variant de 1 à $N-1$: $X_i = \alpha_i X_{i-1} + \beta_i$.

Chapitre 4

Problème de sturm-Liouville

Dans ce chapitre nous allons traiter le problème de Sturm- Liouville. Premièrement nous rappellons quelques notions algèbrique sur le produit scalaire, l'inégalité de Cauchy-Schwartz, puis nous décrivons ce qu'est un problème de Sturm- Liouville. Ensuite, nous donnons quellques propriètés du problème Sturm-Liouville Enfin, nous étudierons les équations différentielles d'Hermite, Legendre, Lagerre et Tchebecheff.

4.1 Rappel Algèbrique

Définition 4.1.1 *Dans un espace vectorial X, un produit scalaire est un forme bélinéaire ω symétrique et définie positif c'est à dire un application de $X.X$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant :*

1.Symétrie :

$$\omega(x, y) = \omega(y, x).$$

2.Bélinéairité : ω est linéaire continue par rapport x à son premier argument (et donc par rapport à deuxième argument par symétrie)

3.Définie positive :

$$\omega(x, x) \geq 0 \text{ et } \omega(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

un espace euclidient est espace vectoriel normé dans lequel la norme est définie a partire d'un produit scalaire, c'est à dire :

$$||x|| =^{déf} \sqrt[2]{w(x,x)}.$$

Définition 4.1.2 *une forme bilinéaire : $(x,y) \to \omega(x,y)$ continue sur $X.X$ est une forme bilinéaire pour laquelle il existe une constante M telleque*

$$\forall x, y \in X \omega(x,y) \leq M.||x||.||y||.$$

Définition 4.1.3 *La forme bilinéaire est dite $V-elliptique$ s'il existe un constante $\alpha \geq 0$ telle que :*

$$\forall x \in X \ \omega(x,x) \geq \alpha \|x\|^2.$$

Théorème 4.1.1 *Si (X,ω) est un espace* ***préhilpertien,*** *alors on a l'inégalité suivante, dite de* ***Cauchy-schwartz*** *:*

$$|\omega(x,y)| \leq (\omega(x,x))^{1/2} (\omega(y,y))^{1/2}, \forall x, y \in X.$$

4.2 Problème de sturm-Liouville

À la suite de la séparation des variables dans une équation différentielle partielle dans le deuxième chapitre, nous avons rencontré à plusieurs reprises l'équation différentielle

$$X'' + \lambda X = 0, \ 0 < X < l,$$

avec les conditions aux limites

$$X(0) = 0, \ X(l) = 0.$$

Ce problème de valeur limite est le prototype d'une grande classe de problèmes qui sont importants en mathématique appliquée. Ces problèmes connus sous le nom de problèmes de valeur limite Sturm-Liouville. Dans ce chapitre nous discutons des propriétés majores des problèmes de Sturm-Liouville et de leurs solutions, dans le processus un peu la méthode de séparation des variables pour équations différentielles aux dérivées partielles

Définition 4.2.1 *(**l'équation de Sturm-Liouville (ESL)**) On considère*

$$p(x) \in C^1([0,l]); p(x) > 0 \ : q(x) \in C([0,l]); q(x) > 0.$$

L'équation de Sturm-Liouville (**ESL**) est l'équations différentielle ordinaire de paramètre numérique arbitraira λ :

$$LX(x) = (p(x)X'(x))' + q(x)X(x) = -\lambda\rho(x)X(x), x \in (0,l), \tag{4.1}$$

$$x \in (0,l); \ \ \rho(x) \in C([0,l]); \ \ \rho(x) > 0,$$

ici $p(x)$, $q(x)$ et $\rho(x)$ sont des fonctions à valeurs réelles sur $[0,l]$.

1)L'équation de Bessel : $x^2y''(x) + cy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0.$

2)L'équation d'Hermite $[\exp(-x^2)y'(x)]' + \lambda \exp(-x^2)y = 0.$

3)L'équation de Chebychev $\left[\sqrt{1-x^2}y'(x)\right]' + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}y = 0.$

Définition 4.2.2 *On appelle problème aux limites de Sturm-Liouville (**PSL**) qui consiste à déterminer la solution de l'équation de Sturm-Liouville (**ESL**)*

$$LX(x) = (p(x)X'(x))' + q(x)X(x) = -\lambda\rho(x)X(x), x \in (0,l),$$

avec en plus les conditions aux limites :

$$\Gamma_1 X(x) = \alpha X'(0) + \beta X(0) = 0; \tag{4.2}$$
$$\Gamma_2 X(x) = \gamma X'(l) + \delta X(l) = 0,$$

où $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ et $(\gamma, \delta) \neq (0,0)$ sont des constantes données

Les valeurs de λ pour lesquelles 4.1 et 4.2 ont une solution non triviale s'appelent les **nombre propres** ou **valeurs propres** et les solutions qui leur correspondent sont les **fonctions propres** de Strum-Liouville. L'ensemble des valeurs propres λ s'appelle **spectre** du problème.

4.3 Identité de Lagrange

Avant procéder à l'établissement de certaines propriétés, il est nécessaire de conduire une identité, connu comme **identité de Lagrange,** ce qui est fondamental pour l'étude des problèmes de limite linéaires soit $u, v \in C^2(0,l) \cap C^1(0,l)$, alors

$$\int_0^l L[u]v dx = \int_0^l [-(pu')'v + quv]dx.$$

L'intégration du premier terme du côté droit deux fois par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^l L[u]v dx &= -p(x)u'(x)v(x)|_0^l + p(x)u(x)v'(x)|_0^l + \int_0^l [-u(pv')' + uqv]dx \\ &= -p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]|_0^l + \int_0^l uL[v]dx.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^l \{L[u]v - uL[v]\} dx = -p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]|_0^l, \tag{4.3}$$

lequel est **identité de Lagrange.**

Supposons maintnant que les fonctions u et v dans 4.3 aussi satisfaire les conditions aux limites 4.2. Alors, si nous supposons que $\beta \neq 0$ et $\delta \neq 0$, le côté droit de 4.3.devient

$$\begin{aligned} -p(x)[u'(x)v(x) - p(x)u(x)v'(x)]|_0^l &= -p(l)[u'(l)v(l) - u(l)v'(l)] + p(0)[u'(0)v(0) - u(0)v'(0)] \\ &= -p(l)[-\frac{\gamma}{\delta}u(l)v(l) + \frac{\gamma}{\delta}u(l)v(l)] + p(0)[-\frac{\alpha}{\beta}u(0)v(0) + \frac{\alpha}{\beta}u(0)v(0)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le même résultat si β ou δ est nulle, la preuve dans ce cas est encore plus simple, et vous est laissée.Donc, si l'opérateur différentiel L est défini en 4.1, et si les fonction u et v satisfont conditions aux limites 4.2, identité de Lagrange réduit à

$$\int_0^l \{L[u]v - uL[v]\}\, dx = 0. \tag{4.4}$$

Maintenant écrivons 4.4 d'une manière légèrement différent. Nous avons introduit le produit inérieur (u, v) de deux fonctions réelles u et v sur un intervalle donné, en utilisant l'intervalle $0 < x < l$, que nous avons

$$(u, v) = \int_0^l u(x)v(x)dx. \tag{4.5}$$

Dans cette notation 4.4 devient

$$(L[u], v) - (u, L[v]) = 0. \tag{4.6}$$

Définition 4.3.1 *Il y a trois types de problème aux limites de Sturm-Liouville*

1)Régulier si $p(x) > 0$ et $\rho(x) > 0$ sur $[0, l]$

2)Singulier si $p(x) > 0$ et $\rho(x) \geq 0$ sur $]0, l[$ avec $\rho(0) = \rho(l) = 0$

3)Periodique $X(0) = X(l) = 0$

4.4 Propriétés des SL

Proposition 4.4.1 *Toutes les valeurs propres de Sturm-Liouville sont* ***réelles.***

Preuve. Suppose que $\lambda \in \mathbb{C}$ est un valeur propre du problème aux limites 4.1,4.2 et $X \in \mathbb{C}$ être la fonction propre correspondante, où $\lambda = \mu + i\nu$ et $X = U + iV$ tels que μ, ν, U et V sont réelles.Alors, si nous posons $u = \phi$ et $v = \phi$ dans 4.6, nous obtien

$$(L[\phi], \phi) = (\phi, L[\phi]), \tag{4.7}$$

nous savons que $L[\phi] = \lambda\rho\phi$,donc 4.7 devient

$$(\lambda\rho\phi, \phi) = (\phi, \lambda\rho\phi),$$

$$ie : \lambda\,(\rho\phi, \phi) = \bar{\lambda}\,(\phi, \rho\phi),$$

$$\lambda \int_0^l \rho(x)\phi(x)\overline{\phi(x)}dx = \bar{\lambda} \int_0^l \phi(x)\overline{\rho(x)\phi(x)}dx,$$

$$\Rightarrow \left(\lambda - \bar{\lambda}\right) \int_0^l \rho(x)\phi(x)\overline{\phi(x)}dx = 0,$$

car $\int_0^l \rho(x)\phi(x)\overline{\phi(x)}dx \neq 0$, alors $\lambda - \bar{\lambda} = 0$, et donc $\lambda = \bar{\lambda}$. ■

Proposition 4.4.2 *Le problème aux limites 4.1,4.2 a un nombre infini de valeurs propres qu'on peut classer par ordre croissant :*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ...,$$

alors,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

Proposition 4.4.3 *A chaque valeur propre λ correspondent une et une seul fonction propre.*

Preuve. Soit ; à cet effet, un nombre propre λ pour lequel correspondent de deux fonctions propres indépendantes et linéaires $\overset{2}{X}(x,\lambda)$ et $\overset{2}{X}(x,\lambda)$, alors leur combinaison linéaire :

$$X(x,\lambda) = c_1\overset{1}{X}(x,\lambda) + c_2\overset{2}{X}(x,\lambda) \tag{4.8}$$

est une solution de l'équation linéaire homogène 4.1 qui satisfera les condition 4.2.
En particulier quelque soit c_1,c_2, on aura :

$$\alpha X'(0,\lambda) + \beta X(0,\lambda) = 0. \tag{4.9}$$

D'autre part, 4.8 et la solution générale de 4.1, alors on peut trouver c_1, c_2 de sorte que $X(0,\lambda) = \beta$; $X'(0,\lambda) = \alpha$, mais selon $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, ce qui contredit la condition 4.2 sur α et β. ■

Proposition 4.4.4 *Les fonctions propres correspondant aux différentes valeures propres sont orthogonales avec une pondération $\rho(x)$ sur l'intervalle $[0,l]$.*

Preuve. Soient λ_k, λ_s les valeurs propres des fonctions $X_k(x)$, $X_s(x)$ correspondantes.
Ecrivons l'égalité sous la forme :

$$(p(x)X_k'(x))' + (\lambda_k\rho(x) - q(x))X_k = 0;$$
$$(p(x)X_s'(x))' + (\lambda_s\rho(x) - q(x))X_s = 0.$$

En multipliant le premier membre par $X_s(x)$ et le second par $X_k(x)$ et en intégrant sur l'intervalle $[0,l]$, on obtient :

$$\int_0^l X_s(pX_k')dx - \int_0^l X_k(pX_s')'dx + (\lambda_k - \lambda_s)\int_0^l \rho X_k X_s dx = 0.$$

En intégrant par partie les deux premiers termes de la dernièrer expression, on a :

$$(X_s \rho X_k'|_0^l - \int_0^l pX_k' X_s^{'} dx) - (X_k p X_s'|_0^l + \int_0^l pX_s' X_k' dx) + (\lambda_k - \lambda_s) \int_0^l \rho X_k X_s dx = 0;$$

$$(\lambda_k - \lambda_s) \int_0^l \rho X_k X_s dx = p(X_k X_s' - X_s X_k')|_0^l$$

les fonctions $X_k(x)$ et $X_s(x)$ satisfont les conditions aux limites 4.2, c'est pour quoi :

$$\begin{cases} \alpha X_k'(0) + \beta X_k(0) = 0, \\ \alpha X_s'(0) + \beta X_s(0) = 0. \end{cases}$$

ce système d'équation peut être considéré comme un système homogène par rapport à α, β et donc, son déterminant est :

$$X_k'(0) X_s(0) - X_s'(0) X_k(0) = 0.$$

Analogiquement, on montre que :

$$X_k'(l) X_s(l) - X_s'(l) X_k(l) = 0.$$

Ainsi,

$$(\lambda_k - \lambda_s) \int_0^l \rho(x) X_k(x) X_s(x) dx = 0.$$

mais

$$(\lambda_k - \lambda_s) \neq 0 \Rightarrow \int_0^l \rho(x) X_k(x) X_s(x) dx = 0;$$

ce qui correspond à la demandée.

Notons que le coefficient de pondération $\rho(x)$, avec lequel les fonctions propres sont orthogonales, se trouve comme un facteur dans l'équation

$$(p(x)X'(x))' + (\lambda\rho(x) - q(x))X(x) = 0;$$

■

Proposition 4.4.5 *Si l'on a les condition aux limites de façon à ce que :*

$$p(x)X(x)X'(x)|_0^l \leq 0, \tag{4.10}$$

alors, toutes les valeurs propres ne sont pas négatives.

Preuve. Soit λ une valeur propres et $X_k(x)$ la fonction propre correspondente. Multiplions par $X_k(x)$ l'égalé :

$$(p(x)X_k'(x))' + (\lambda_k\rho(x) - q(x))X_k(x) = 0 \Rightarrow \int_0^l X_k(pX_k')'dx + \lambda_k \int_0^l \rho X_k^2 dx - \int_0^l qX_k^2 dx = 0$$

En intégrant par partie le premier terme, on a :

$$X_k(x)p(x)X_k'(x)|_0^l - \int_0^l pX_k^2 dx + \lambda_k \int_0^l \rho X_k^2 dx - \int_0^l qX_k^2 dx = 0;$$

d'où, l'on a $\lambda_k \geq 0$ puisque le premier terme est négative et $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$, $q(x) > 0$.

Si les conditions aux limites sont sous la forme :

1) $X(0) = 0, X(l) = 0;$

2) $X(0) = 0, X(l) = 0;$

3) $X'(0) - h_1X(0) = 0; X'(l) + h_2X(l) = 0, h_1, h_2 > 0,$

alors, toutes les valeurs propres $\lambda_k \geq 0$.

Vérifions les conditions 4.10 pour le cas **(3)** (les cas **1**et **2** sont accomplis bien entendu) :

$$p(x)X_k(x)X_k'(x)|_0^l = p(l)X_k(l)X_k'(l) - p(0)X_k(0)X'(0) = p(l)X_k(l)(-h_2X(l)) - p(0)X_k(0)(h_1X_k(0)) = -($$

car

$$p(x) > 0 \ \forall x \in [0, l].$$

■

Proposition 4.4.6 *la valeur propre* $\lambda = 0$ *correspond au problème aux limites 4.1, 4.2 quand* $q(x) = 0$, $\beta = 0$, $\delta = 0$, *c'est-à-dire pour le problème :*

$$(\rho(x)X') + \lambda X = 0\,;\ X'(0) = 0\,;\ X'(l) = 0.$$

Proposition 4.4.7 ***(auto-adjoint)***

L'opérateur de SL L est auto-adjoint si quelque soit $u, v \in C^2(0, l) \cap C^1(0, l)$ et satisfait le **PSL** et Les conditions aux limites **(CL)** alors

$$\int_0^l [vLu - uLv]\, dx = 0.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\int_0^l vLudx &= \int_0^l [(-vpu') + vqu]\, dx \\
\text{(Intègrer par partie)} &= -pvu'|_0^l + \int_0^l [pu'v' + vqu]\, dx \\
\text{(soustraite une expression d'une autre et appliquer } \mathbf{CL}\text{)} &= \int_0^l [pu'v' + vqu]\, dx \\
&\Rightarrow \int_0^l [vLu - uLv]\, dx = p\,[u'v + uv']\,|_0^l = 0.
\end{aligned}$$

■

Théorème 4.4.1 *Si* $\varphi(x)$ *est une fonction ayant une dérivée première et une dérivée seconde continue par morceaux sur l'intervalle* $[0, l]$ *et satisfait les conditions au limites 4.2, elle sera développée en série de Fourier uniformement et absolument convergente par* *fonctions propres du problème aux limites 4.1, 4.2*

$$\varphi(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x).$$

En multipliant l'égalité par $\rho(x)X_n(x)$, et en intégrant sur l'intervalle $[0, l]$, on obtient les coefficients de Fourier en utilisant la la propriété d'orthogonalité (propriété 3) :

$$\varphi_n = \frac{1}{||X_n||} \int_0^l \rho(x)\varphi(x)X_n(x)X_n(x)dx\,;\ ||X_n||^2 = \int_0^l \rho(x)X_n^2(x)dx.$$

Par ailleurs,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^l \rho(x)(\varphi(x) - \sum_{x=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x))^2 dx = 0.$$

4.5 Transformation d'une équation homogène en une forme Sturm-Liouville

Beaucoups d'équations différentielles ordinaires linéaires de second ordre sont équivalentes à une équation de Sturm-Liouville. Plus précésement si les fonctions $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ et $\alpha_3(x)$ définies sur l'intervalle $[0, l]$ sont telle que $\alpha_1(x) \neq 0$ pour tout $x \in [0, l]$ et que la fonction $\alpha_2(x)/\alpha_1(x)$ est intégrable sur $[0, l]$, et si nous définissons

$$p(x) = \exp\left[\int_0^x \frac{\alpha_2(t)}{\alpha_1(t)}dt\right],\ q(x) = \frac{\alpha_3(x)}{\alpha_1(x)}p(x),\ \rho(x) = \frac{p(x)}{\alpha_1(x)};$$

alors l'équation différentielle ordinaire

$$\alpha_1(x)X'' + \alpha_2(x)X' + (\alpha_3(x) + \lambda)\,X = 0, \text{ où } x \in [0, l]; \tag{4.11}$$

est équivalent à l'équation de Sturm-Liouville

$$(p(x)X'(x))' + (q(x) + \lambda\rho(x))\, X(x) = 0, x \in (0, l).$$

Enffet

$$\begin{aligned}(p(x)X'(x))' &= p(x)X''(x) + p'(x)X'(x)\\ &= p(x)X''(x) + \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} \exp\left[\int_0^x \frac{\alpha_2(t)}{\alpha_1(t)}dt\right] X'(x)\\ &= p(x)X''(x) + \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}p(x)X'(x).\end{aligned}$$

En substituant ceci, ainsi que les expressions pour $\rho(x)$ et $p(x)$ dans l'équation de Sturm-Liouville, nous obtenons

$$p(x)X''(x)+\frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}p(x)X'(x)+\left(\frac{\alpha_3(x)}{\alpha_1(x)}p(x) + \lambda\frac{p(x)}{\alpha_1(x)}\right) X(x) = 0 \Rightarrow \alpha_1(x)X''+\alpha_2(x)X'+(\alpha_3(x) + \lambda)\, X =$$

Nous obtenons cette dernière équations en multipliant les deux cotés de la première équations par $\alpha_1(x)/p(x)$.

Parceque $p(x)$ est l'exponentielle d'un nombre réel, alors $p(x) > 0$ et qu'il ainsi la dévision par $p(x)$ pour tout $x \in (0, l)$ est bien définie. Nous avons obtenu l'équation 4.11. Si $X = X(x)$ est une solution de **(ESL)** alors sera aussi solution de l'équation 4.11. La réciproque aussi vraie

Polynôme de Hermite $H_n(x)$:

$H_n(x)$ sont déterminer à laide de la fonction génératrice $\Psi(\rho, x) = \exp(2x\rho - \rho^2) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{\rho^n}{n!}$, $x \in]-\infty, +\infty[$

$$\mathbf{H}_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \exp^{(n)}(-x^2), x \in]-\infty, +\infty[$$

qui est manifesement un polynôme de dégré n.

Les premiers polynômes sont

$$H_0 = 1,$$
$$H_1 = 2x,$$
$$H_2 = 4x^2 - 2,$$
$$H_3 = 8x^3 - 12x.$$

Les polynômes $H_n(x)$ sont solutions de l'équation

$$X'' - 2xX' + 2\lambda X = 0, x \in]-\infty, +\infty[.$$

La forme **SL** qui équivalent de cette équation est obtenie de multiplier cette dernière par $p(x) = \exp(-x^2)$:

$$\begin{aligned} LX(x) &= \exp\left(-x^2\right) X'' - 2x \exp\left(-x^2\right) X' = -2\lambda \exp\left(-x^2\right) X, x \in]-\infty, +\infty[\\ &= \left(\exp\left(-x^2\right) X'\right)' = -2\lambda \exp\left(-x^2\right) X, x \in]-\infty, +\infty[. \end{aligned}$$

Nous avons $p(x) = \exp(-x^2)$, $q(x) = 0$ et $\rho(x) = \exp(-x^2)$, c'est une problème de Sturm-Liouville singulière puisque l'intervalle est non borné

Polynôme de Legendre $P_n(x)$:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2n} \left[x + i\sqrt{1 - x^2} \sin\varphi\right]^n d\varphi.$$

Les polynômes $P_n(x)$ sont uniformément bornés pour tout les valeurs de l'argument $-1 \leq x \leq 1$ c'est-à-dire $|P_n(x)| \leq 1$.

L'équation de Legendre donnée comme

$$\left(1 - x^2\right) X'' - 2xX' + l(l+1)X = 0, -1 \leq x \leq 1.$$

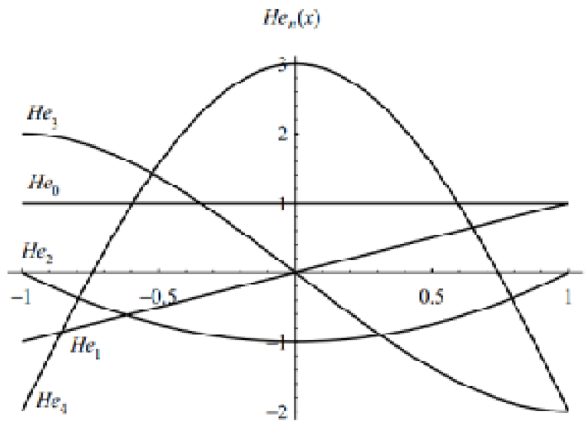

FIG. 4.1 – les 4 premiers polynomes de Hermite

Cette équation peut écrire sous la forme

$$\left[\left(1-x^2\right)X'\right]' = -l(l+1)X, -1 \leq x \leq 1.$$

Nous avons $p(x) = (1-x^2)$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = 1$ et $\lambda = l(l+1)$, c'est un **PSL** singulier car $p(-1) = p(1) = 0$

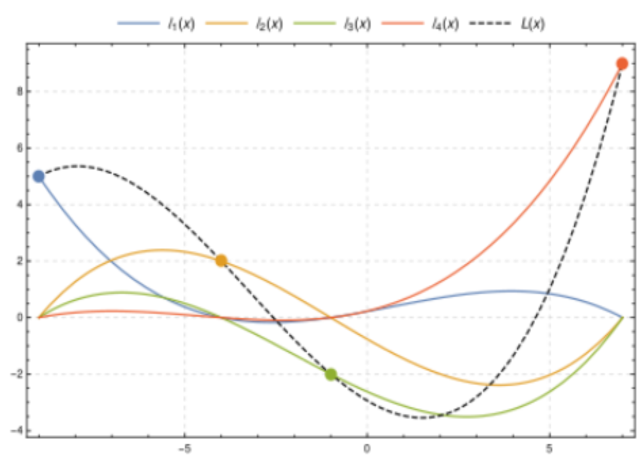

FIG. 4.2 – Les premiers polynomes de Lagendre

Polynôme de Laguerre $L_n(x)$

les polynômes de Laguerre exprimés par l'équation différentielle suivante :

$$L_n(x) = \exp(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^n \exp(-x)).$$

L'équation de Laguerre est donnée par

$$xX'' + (1-x)X' + aX = 0, x \in [0, +\infty[.$$

Peut être écrire sous la forme SL par multiplier par $\exp(-x)$, alors

$$x\exp(-x)\,X'' + (1-x)\exp(-x)\,X' + a\exp(-x)\,X = 0, x \in [0, +\infty[.$$

$$(x\exp(-x)\,X')' = -a\exp(-x)\,X.$$

Nous avons $p(x) = x\exp(-x)$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = \exp(-x)$et $\lambda = a$, c'est un **PSL** singulier car l'intervalle est infini et $p(0) = 0$

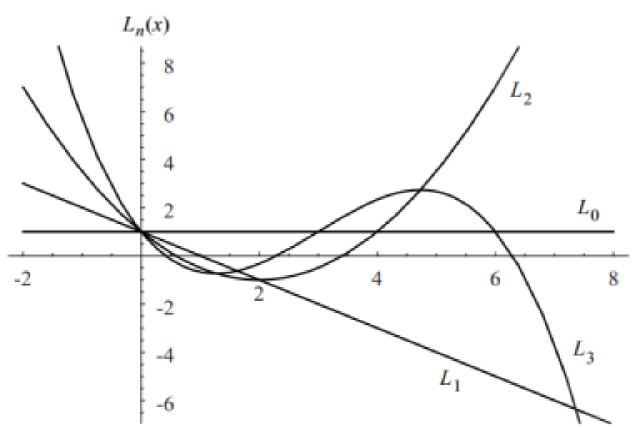

FIG. 4.3 – Les 4 premiers polynomes de laguerre

Polynôme de Tchebychev $\mathbf{T}_n(x)$

Ces polynômes définis par

$$\mathbf{T}_n(x) = \cos\left(n \cos^{-1}(x)\right)$$

Ils satisfont l'équation différentielle suivante :

$$\left(1 - x^2\right) X'' - xX' + n^2 X = 0, x \in [-1, 1] \text{ où } n = 0, 1, 2, ...$$

cela peut être converti sous la forme SL en divisant par $\sqrt{1 - x^2}$

$$\sqrt{1 - x^2} X'' - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} X' + \frac{n^2}{\sqrt{1 - x^2}} X = 0, x \in [0, 1] \text{ où } n = 0, 1, 2, ...$$

$$\left[\sqrt{1 - x^2} X'\right]' = -\frac{n^2}{\sqrt{1 - x^2}} X, x \in [-1, 1] \text{ où } n = 0, 1, 2,$$

Nous avons $p(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$et $\lambda = n$, c'est un **PSL** singulier.

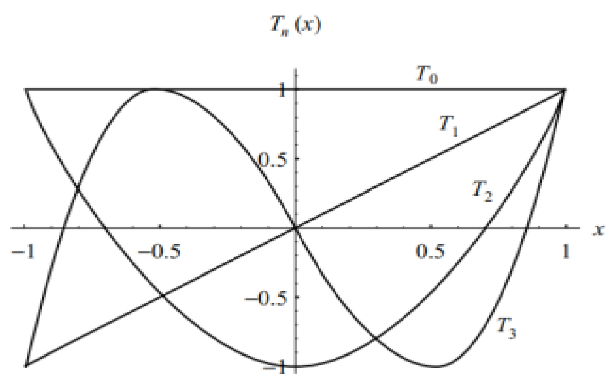

FIG. 4.4 – Les 4 premiers polynomes de Tchebychev

Bibliographie

[1] Baddari, K., & Abbassov, A. (2009). Equations de la physique mathématique appliquées.

[2] Boyce, W. E., DiPrima, R. C., & Haines, C. W. (1969). Elementary differential equations and boundary value problems (Vol. 9). New York : Wiley.

[3] Brezis, H., Ciarlet, P. G., & Lions, J. L. (1999). Analyse fonctionnelle : théorie et applications (Vol. 91). Paris : Dunod.

[4] Goncalves, E. (2005). Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO. Cours de l'Institut National Polytechnique de Grenoble

[5] Houchmandzadeh, B. (2010). Mathématiques pour la Physique.

[6] Lesfari, A. (2015). Équations di érentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles (Cours et exercices corrigés), éditions Ellipses. Mars

[7] Merad, A. Equations de la Physique Mathématiques.

[8] Robert Bédard. offert par le département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal. Notes pour le cours Equations aux dérivées partielles.

[9] Tahar Abbes, M. Ben Aknoun-Alger. (2007). Méthode des différences finies Méthodes intégrales et variationnelles.

[10] Vaillancourt, R. Mathématiques de l'ingénieur. Département de mathématiques, Université d'Ottawa, Ottawa, ON, Canada, K1N 6N5

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\frac{\partial u}{\partial x_i}$	la dérivée partielle.de u par rapport à x_i
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	ouvert
$\partial\Omega$	frontière de Ω
$\mathcal{F}$	transformée de Fourier de f.
$f * g$	la produit de convolution
$\bar{f}$	le conjugué de f
£	transformée de Laplace de f.
$Re(p)$	la partie réelle de p
L_{loc}	localement intégrable
$\|\|.\|\|$	la norme