République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Charif Manel

Titre :

Systémes dynamiques linéaires et non linéaires

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Silabdi Nour eddine**	UMKB	Président
Dr.	**Kaci Fatma**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Soukeur Abdesselem**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Avant tous propos, je tiens à rendre grâce à "**Allah**"qui m'a guidé sur la bonne voie.

Je dédie ce modeste travail :

A mes parent qui m'ont vraiment encouragé et soutenu tout au long de ma formation.

Les mots ne peuvent exprimer mon entière gratitude.

Et ma reconnaissance pour tous leurs sacrifices

A mes seour : **"Zakia", "Rania", "sonia"**

A mon frére : "**Radouane** ".

Et toutes la famille « **Charif** » et la famille « **Zerarka** ».

Et mes chères amies :**"Fella", "Ilham", "Mima" , "Radjya" , "Djamila" ,"hada","Bilal" .**

A tous les enseingnants du département de Mathématiques surtout :"**Laadjal Baya** ", **"Mnaser"**

Et à toute la promotion de Master 2 Mathématiques (2017-2018)

"Charif Manel"

REMERCIEMENTS

Merci à notre "**Dieu**", notre guide, notre force, et la raison de notre existante. c'est lui nous a fait comprendre le but de cette vie, et qui nous a donné le pouvoir d'apprécier les choses.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur "**Kaci fatma**", qui s'est toujours montrer à l'écoute tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'elle a bien voulu me consacrer.

Mon grand remerciement aussi à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation au département de Mathématiques.

Enfin, je remercie mes amis pour leurs aides, leurs soutiens et leurs compréhensions.

A tout, pour tout

merci

Table des matières

Table des figures

Introduction

En mathématiques, en chimie ou en physique, un système dynamique est la donnée d'un système et d'une loi décrivant l'évolution de ce système. Ce système peut être l'évolution d'une réaction chimique au cours du temps, le mouvement des planètes dans le système solaire (régi par la loi universelle de la gravitation de Newton) ou encore l'évolution de la mémoire d'un ordinateur sous l'action d'un programme informatique. Formellement on distingue les systèmes dynamiques à temps discrets (comme un programme informatique) des systèmes dynamiques à temps continu (comme une réaction chimique).

Deux aspects importants d'un système dynamique est qu'il est :

Causal : c'est-à-dire que son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent

Déterministe : c'est-à-dire qu'à une « condition initiale » donnée à l'instant « présent » va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état « futur » possible.

Les systèmes dynamiques linéaires ont une grande importance en pratique, car de nombreux phénomènes naturels se modélisent par de tels systèmes, au moins en première approximation.

Ce mémoire est divisé en deux chapitres :

Dans le premier chapitre, nous allons étudier les systèmes dynamiques à temps continu et à temps discret ainsi que le passage du temps continu au temps discret.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons des méthodes de résolutions d'un système dynamique linéaire si il est à coefficients constants ou variables, ensuit des méthodes de résolution numérique d'un système dynamique. A la fin, nous donnons le principe de résolution d'un système dynamique non linéaire

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes dynamiques

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la définition des deux types des systèmes dynamiques : à temps continu et à temps discret, à la méthode de discrétisation (échantillonnage) des systèmes dynamiques ainsi que la définition d'un attracteur.

1.1 Systèmes dynamique

Un système dynamique consiste en un ensemble d'états possibles, avec une loi qui détermine de façon unique l'état présent du système en fonction de ses états passés. Aucun élément aléatoire n'est admis dans notre définition d'un système dynamique déterministe. Dans ce document, nous considérerons deux types de systèmes dynamiques. Si la loi est appliquée à des temps discrets, nous parlerons de **système dynamique à temps discret**. Un exemple est fourni par un modèle de la croissance d'une population animale.
L'autre type très important de systèmes dynamiques que nous étudierons est essentiellement la limite de systèmes discrets, où l'évaluation se fait à des intervalles de temps de plus en plus brefs. Dans ce cas, la loi devient une équation différentielle et l'on parle alors souvent de **système dynamique à temps continu**.

Exemple 1.1.1 ***(Un four de verrerie)***

Le exemple est un procédé industriel, illustré schématiquement à la Figure (1.1)

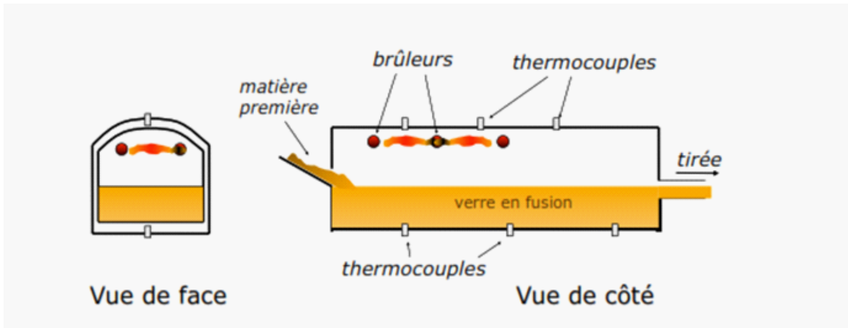

FIG. 1.1 – **Un four de verrerie**

Il s'agit d'un four dont les parois sont construites en matériau réfractaire et dans lequel on fait fondre un mélange de sable, de chaux et d'autres additifs pour obtenir du verre. Cette fusion est obtenue par un apport énergétique à l'intérieur du four, provenant par exemple de brûleurs à gaz disposés au dessus du bain de verre. Le verre fondu est extrait du four de manière continue pour alimenter les machines en aval. En faisant l'hypothèse que la température du verre est homogène dans le four et que celui-ci est parfaitement isolé, nous pouvons écrire les deux équations suivantes, correspondant à un bilan massique et à un bilan énergétique du procédé. Nous écrivons donc que la variation de masse ou d'énergie, par unité de temps, dans le système considéré est égale à la somme de ce qui rentre dans le système, en termes de masse et de chaleur, diminuée ce qui en sort, toujours durant la même unité de temps :

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= P_{in} - P_{out} \\ \frac{d}{dt}(CTM) &= Q_{in} + C_{in}T_{in}P_{in} - CT_{out}P_{out} \end{aligned} \tag{1.1}$$

avec la signification suivante des variables et paramètres du modèle :

M : masse du verre en fusion dans le four (kg).

T : température du verre en fusion dans le four (K).

T_{in} : température de la matière première enfournée (K).

C : chaleur spécifique du verre $(J/K \times kg)$,

l : chaleur spécifique de la matière première $(J/K \times Kg)$

Q_{in} : quantité de chaleur fournie par unité de temps (J/s)

P_{in} : masse enfournée par unité de temps (kg/s)

P_{out} : masse « *tirée* » par unité de temps (kg/s).

Nous avons indiqué des unités pour chacune des grandeurs définies ci-dessus. La cohérence dimensionnelle des équations est la première vérification à effectuer dans un exercice de mise en équation d'un modèle mathématique.

Pour mettre le système d'équations (1.1) sous la forme d'un modèle d'état on définit les variables d'état :

$x_1 \triangleq M$: masse du verre en fusion (kg)

$x_2 \triangleq M$: quantité de chaleur parunité de masse de verre en fusion(J/kg),

et les variables d'entrée :

$u_1 \triangleq P_{in}$: masse en fournée parunité de temps

$u_2 \triangleq P_{out}$: masse tirée parunité de temps(kg/s)

$u_3 \triangleq Q_{in}$: chaleur fournie parunité de temps(J/s).

On obtient alors le modèle d'état :

$$x_1' = u_1 - u_2$$

$$\vdots$$

$$x_2' = \frac{u_1(\alpha - x_2) + u_3}{x_1}$$

où le paramètre constante $\alpha = C_{in}T_{in}$ est la quatité de chaleur de la matiére enfornée par unité de masse.

Définition 1.1.1 *Un système dynamique est une application continue*

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

qui possède la propriété :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t_1, t_2 \in \mathbb{R} \begin{cases} f(x,0) = x \\ f(f(x,t_1),t_2) = f(x,\ t_1 + t_2) \end{cases}$$

Deux types de systèmes dynamiques peuvent se distinguer : les systèmes dynamiques à temps continu et les systèmes dynamiques à temps discret.

1.1.1 Système dynamique à temps continu

Définition 1.1.2 ***(Equation différentielle ordinaire)*** *Soit*

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^n,\ x \to f(x)$$

une application de classe C^k, $k \geq 1$, d'un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Nous écrirons

$$x = (x_1, x_2, .., x_n) \text{ et } f = (f_1, .., f_n)$$

On appelle équation différentielle vectorielle autonome du premier ordre une équation du type

$$x' = f(x) \tag{1.2}$$

ce qui est une écriture abrégée pour le système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, x_2.., x_n) \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2.., x_n) \\ &. \\ &. \\ x_n' &= f_n(x_1, x_2.., x_n) \end{aligned}$$

Le qualificatif autonome se rapporte au fait que le second membre dans l'équation différentielles ne dépend pas explicitement du temps.
On appelle solution de l'équation (1.2) toute application dérivable $x : I \to \mathbb{R}^n$ définie sur un intervalle non vide $I \subseteq \mathbb{R}$ et telle que, pour tout $t \in I$

$$x(t) \in \Omega, \; x' = f(x(t))$$

Nous rappelons le théorème d'existence et d'unicité qui assure que le système (1.2) est bien un système dynamique (à temps continu) au sens défini précédemment

Théorème 1.1.1 ***(Existence et Unicité)*** *Supposons que f soit de classe C^1 sur Ω. Alors, pour tout nombre réel t_0 et tout vecteur $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe un intervalle ouvert I*

contenant t_0, sur lequel il existe une solution de l'équation qui satisfait à la condition initiale $x(t_0) = x_0$ et cette solution est unique.

Le probléme de trouver une solution de l'équation satisfaisent à la condition initiale $x(t_0) = x_0$, est appelé **probléme de cauchy**. L'ensemble $\{(t, x(t)), t \in I\}$ s'appelé une **trajectoir** de système dynamique. L'ensemble $\{x(t), t \in I\}$ s'appelé une **orbite** du système dynamique.

Corollaire 1.1.1 *Les orbites d'une équation différentielle vectorielle autonome ne s'intersectent jamais. En particulier, une même orbite ne peut se recouper.*

Définition 1.1.3 *Une système différentiel d'ordre $p \in \mathbb{N}$ est une équation de la forme*

$$x^{(p)} = f(t, x, x', x'', x''', ...x^{p-1}) \tag{1.3}$$

Où $f : U \to \mathbb{R}^n$ définie la dynamique du système à temps continu sur une partie ouvert $U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^p$.

Une solution de l'équation (1.3) est une application $x : I \to \mathbb{R}^n$, p fois dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} (t, x(t), x'(t), ..., x^{(p-1)}) \in U, \ \forall t \in I \\ x^{(p)}(t) = f(t, x, x', ..., x^{(p+1)}), \ \forall \ t \in I \end{cases}$$

Définition 1.1.4 ***(Champ de vecteur) Cas1*** *: Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine et $f : D \to \mathbb{R}$ un fonction continue. Nous considérons l'équation différentielle* ***non-autonome*** *(c-à-d dépendante du temps)*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Où $(t_0, x_0) \in D$

Soit $x : I_0 \to \mathbb{R}$ est une solution de cette équation différentielle, et si nous dessinons le graphe de cette solution x dans un système cartésien de coordonnées t et x, alors l'équation difféntielle dit que la tangente en un point $(t, x(t))$ du graphe, caractérisée essentiellement par $x'(t)$, est donnée par $f(t, x(t))$

Nous dessinons donc dans un système cartésien de coordonnées t et x en tout point $(t, x) \in D$ le vecteur $(1, f(t, x))$ (où aussi $(c, cf(t, x))$ avec une constante $c \succ 0$ fixée)

Le champs de vecteur que nous obtenons ainsi peut nous indiquer comment se comportent les solutions de l'équation différentielle

CAS 2 : Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine et $f : D \to \mathbb{R}$ un fonction continue. Nous considérons l'équation différentielle **autonome** (c-à-d indépendante du temps)

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Où $x_0 \in D$.

Si $x : I_0 \to \mathbb{R}$ est une solution de cette équation différentielle, et si nous dessinons l'image de cette solution dans un système cartésien de coordonnées x_1, x_2 c-à-d si nous dessinons la courbe décrite par la solution x, alors les équation différentielle dit que la tangente à cette courbe en un point $x(t) \in \mathbb{R}^2$ montre dans la direction du vecteur $f(x(t))$.

Nous dessinons donc dans un système cartèsien de coordonnées x_1 et x_2 en tout point $(x_{1,2}) \in D$ le vecteur $f(x_1, x_2) = f(x)$ ou le vecteur normalisé $f(x)/\left\| f(x) \right\|$ (indiquant juste la direction). Ainsi, nous obtenons un champs de vecteurs qui peut indiquer comment les solutions exactes se comportent. Ce champs de vecteurs peut aussi indiquer où trouver des points d'équilibre et s'ils sont stables ou instables, c.à.d. si les solutions convergent vers ces points d'équilibre ou non. En plus, un champ de vecteurs peut nous indiquer si on peut trouver des solutions périodiques et si elles sont stables ou instables.

Définition 1.1.5 *Le **flot** du système différentielle (1.5) est la famille à un paramétre* *d'application* $\{\varphi_t(x_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *de* U

$$\varphi_t(x_0) = x(t, x_0)$$

et $x(t, x_0)$ est l'unique solution du probléme de Cauchy

Définition 1.1.6 ***(Point singulier)***

On appelle point singulier d'un système dynamique tout point x_s tel que :

$$f(x_s) = 0$$

1.1.2 Système dynamique à temps discret

Dans le cas général, Un système dynamique discret est décrit par un système d'équations aux différences finies. Il existe comme dans le cas continu, plusieurs types des systèmes. Dans le cas discret, un système dynamique est décrit par une itération de la forme

$$x_{n+1} = f(x_n),\ n \in \mathbb{N}$$

Définition 1.1.7 *Soit* $D \in \mathbb{R}^n$ *un ensemble et* $f : D \to D$ *une fonction continue et dérivable .On appelle* ***un système dynamique discret*** *(**SDD**) d'ordre* 1 *en dimension* n*, la récurrente suivante :*

$$x(0) = x_0 \in D,\ x(n+1) = f(x(n)),\ n \geq 0 \tag{1.6}$$

On utilise souvent la notation (f, t) pour désignes les systèmes dynamiques définies par une fonctions f sur l'ensemble D.

Quand le **système a plusieurs variables** d'état nous pouvons le représenter sous forme vectorielle . Soit

$$\vec{x}(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ . \\ . \\ x_n(n) \end{pmatrix}$$

Le vecteur des états du système. L'espace formé par ces états s'appelle espace de phases du système. Soit $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue et dérivable.

$$\vec{f}(\vec{n}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{n}) \\ f_2(\vec{n}) \\ . \\ . \\ . \\ f_m(\vec{n}) \end{pmatrix}$$

Alors le système (f, D) s'écrit sous la forme :

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0 \in D,\ x(n+1) = \vec{f}(n, \vec{x}(n))$$

Exemple 1.1.2 *Nous savons que depuis l'année* 2000 *jusqu'a* 2010 *la population en Chine augmente de* 6% *qui au début de notre expérience compte* $x(0)$ *en personnes . Notons par* $x(n)$ *le nombre de population de Chine de la* $n-$ *ème année. Nous voulons décrire l'évolution de* $x(n)$.

Après une année on obtient $x(1)$ population en Chine.

$$x(1) = x(0) + 0.06x(0) = 1.06x(0)$$

Au cours de la deuxième année la quantité de populations en Chine augmente de la même façon

$$x(2) = x(1) + 0.06x(1) = 1.06x(1)$$

En continuant, On trouve pour une année quelconque :

$$x(n+1) = x(n) + 0.06x(n) = 1.06x(n)$$

Ainsi , nous pouvons remarquer que pour chaque période de temps

$$x(n+1) = p(x(n)) \text{ avec } p(x) = 1.06x$$

Autrement dit, la dynamique de la population peut être décrite, comme dans l'exemple précédent, par l'itération d'une fonction $p(x)$. En connaissant cette fonction nous pouvons reconstituer l'état du système a chaque moment du temps.

Définition 1.1.8 *Si la fonction $\vec{f}$ est une fonction de l'état $\vec{x}$ et de la variable du temps n alors le systéme s'appelle non-autonomes :*

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0, x(n+1) = \vec{f}(n, \vec{x}(n)),\ n \geq 0$$

Définition 1.1.9 ***(Orbite)*** *Etant donné le point initial x_0, on appelle orbite du système* ***(SDD)*** *:*

$$x(0) = x_0 \in D,\ x(n+1) = f(x(n)),\ n \geq 0$$

la suite

$$O(x_0) = \{x(0) = x_0, x(1) = f(x(0)), ..., x(n+1) = f(x(n)), ...\} \tag{1.7}$$

Exemple 1.1.3 *Soit un **SDD** en dimension* 1 *définie par la fonction* $f(x) = x^2$*sur l'intervalle* $[0, +\infty[$. *Prenons pour condition initiale* $x(0) = \dfrac{1}{3}$ *L'orbite correspondent est*

$$\begin{array}{rcl} x(0) = & x_0 = & \frac{1}{3} \\ x(1) = & f(x(0)) = & \frac{1}{9} \\ x(2) = & f(x(1)) = & \frac{1}{81} \\ . & & \\ . & & \\ . & & \end{array}$$

Remarquons que

$$x(n) = f(x(n-1)) = f^{(n)}(x(0)) = (\frac{1}{3})^{2^n} \rightarrow 0 \text{ quant } n \rightarrow \infty$$

Prenons un autre point initial, $x(0) = 1$. Alors

$$x(0) = 1$$

$$x(1) = 1$$

$$x(2) = 1$$

Alors

$$O(x_0) = \{1,\ 1, ...,\ x(n) = 1^{2n} = 1, ...\}$$

Définition 1.1.10 *On appelle "'**point fixe**" d'un système dynamique tout point* x_s *tel que*

$$x_s = f(x_s)$$

Parfois, ces points sont appelés aussi **points stationnaires** ou **points d'équilibres**

1.2 Echantillonnage : passage de temps continu à temps discret

Il existe plusieurs techniques de discrétisation (**échantillonnage**) des systèmes . Voici un exemple simple, souvent utilisé : **la méthode d'Euler**.
Soit une équation différentielle d'ordre 1

$$x' = f(x)$$

Nous voulons étudier la trajectoire de cette équation seulement à des instants choisis, équidistants $t_n = t_0 + n \times \Delta t$. Si la période d'échantillonnage Δt est choisie assez petite, on peut approcher la dérivée de $x(t)$ par la différence :

$$\dot{x} \simeq \frac{x(t_n) - x(t_{n+1})}{\Delta t}$$

Alors, le système dynamique à temps continu peut être approché par le système dynamique à temps discret suivant :

$$x(n+1) = x(n) + \Delta t \times f(x(n))$$

1.3 Attracteur

Définition 1.3.1 ***(Ensemble invariant)*** *Soit A un sous-ensemble de l'espace des phases U, A est dit invariant* ***(resp. positivement invariant)*** *par un flots φ_t, Si pour t dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $[0, +\infty[$), $\varphi_t(A)$ est inclus dans A.*

Dans la littérature on trouve plusieurs définitions d'attracteur. En général , un attracteur est définie comme une sous-partie fermée de l'espace des phases qui **"attire"** toutes les autres orbites vers elle. On donne quelques définitions possibles d'attracteur :

Définition 1.3.2 (Mardseu , Ruelle) *Soit A un ensemble compact fermé de l'espace des phases, on suppose que A est invariant par φ_t, l'ensemble A est un attracteur si :*

1. Pour tout voisinage U de A, il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(t, x_0) = \varphi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$
2. $\cap \varphi_t(v) = A$, $t \geq 0$
3. Il existe une orbite dense dans A.

Il y a deux types d'attracteurs :

les attracteurs réguliers et **les attracteurs étranges ou chaotiques**.

– **Les attracteurs réguliers** peuvent être de trois sortes :

1. Le point fixe,
2. Un cycle limite .
3. Un tore .

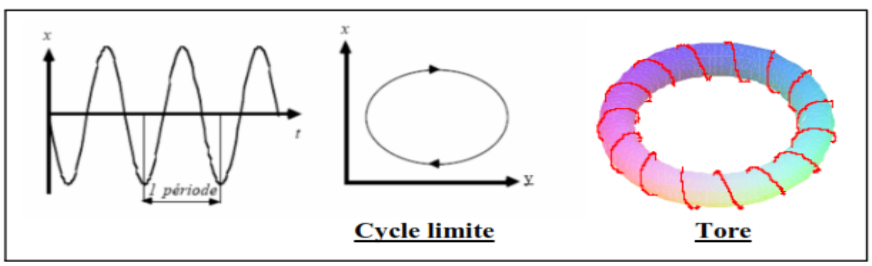

FIG. 1.2 – **Les attracteurs réguliers**

– **Les attracteur étranges** : L'attracteur chaotique(ou **étrange**) est une forme géométrique plus complexe qui caractérise l'évolution des systémes dynamiques chaotique

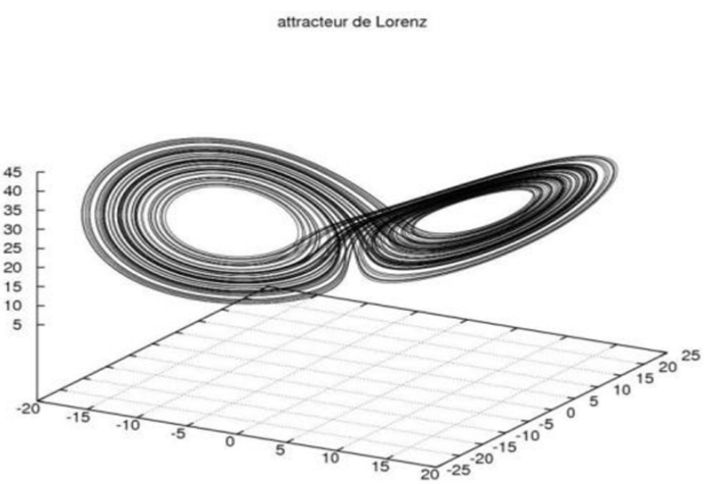

FIG. 1.3 – **Les attracteur étranges**

Chapitre 2

Systémes dynamiques linéaires et non linéaires

Dans ce chapitre, nous traitons deux types des systèmes dynamiques, il s'agit des systèmes linéaires et non linéaires. Nous présentons pour chaque types des méthodes de résolutions, ainsi que quelques méthodes d'approximations numériques.

2.1 Système dynamique linéaire en général

Définition 2.1.1 ***Un système dynamique linéaire*** *ou* ***système différentiel linéaire*** *est une équation portant sur une fonction vectorielle $X(t)$, qui peut s'écrire*

$$X' = A(t)X(t) \tag{2.1}$$

Oŭ, plus généralement

$$X' = A(t)X(t) + g(t) \tag{2.2}$$

Oŭ A est une matrice carrée et g un vecteur dont les éléments sont des fonctions de t

Le mot **linéaire** concerne uniquement la dépendance par rapport à X, les éléments de $A(t)$ et de $g(t)$ n'ont pas à être linéaires en t

Définition 2.1.2 *On dit que le système à coefficient* ***constante*** *si la matrice de A ne dépend pas de la variable t. On dit que le système est* ***homogène*** *si $\forall t,\ g(t) = 0$.*

2.1.1 Système dynamique linéaire à coefficients constantes

A)Système homogène

Résolution des systèmes homogènes

– **Cas oŭ la matrice du système est diagonalisable**

Théorème 2.1.1 *Soit A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), diagonalisable. On note $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ les valeurs propres et $(v_1, ..., v_n)$une base de vecteurs propres associés . Alors, l'ensemble des solutions de $X' = AX$, sur I un intervalle quelconque, est un $\mathbb{k}$ espace vectoriel de dimension n, et :*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i e^{\lambda_i t} v_i$$

Si de plus, on fixe la condition initiale $X(0) = X_0$, la solution existe et unique.

Preuve. On appelle P la matrice de passage dont la $i^{éme}$ collonne est le vecteur v_i , alors $A = PDP^{-1}$, où D est la matrice diagonale des λ_i .On a :

$X'(t) = AX(t) = PDP^{-1}X(t) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t)$

et on pose

$$Z(t) = P^{-1}X(t), \text{ c-à-d } Z'(t) = P^{-1}X'(t)$$

Alors

$$Z'(t) = DZ(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ . \\ . \\ z_n'(t). \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & & . \\ . & . & . & . & . \\ . & & . & . & . \\ 0 & . & . & . & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ . \\ . \\ z_n(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1'(t) = \lambda_1 z_1(t) \\ z_2'(t) = \lambda_2 z_2(t) \\ . \\ . \\ z_1'(t) = \lambda_1 z_1(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ z_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \\ . \\ . \\ z_n = c_n e^{\lambda_n t} \end{cases} \underset{X(t)=PZ(t)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 & . & . & v_n^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & . & . & v_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ v_1^n & v_2^n & . & . & v_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ . \\ . \\ z_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^1 z_1(t) & +v_2^1 z_2(t) & . & . & +v_n^1 z_n(t) \\ v_1^2 z_1(t) & +v_2^2 z_2(t) & . & . & +v_n^2 z_n(t) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ v_1^n z_1(t) & +v_2^n z_2(t) & . & . & +v_n^n z_n(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ . \\ . \\ v_1^n \end{pmatrix} z_1(t) + \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ . \\ . \\ v_1^n \end{pmatrix} z_2(t) + ... + \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ . \\ . \\ v_n^n \end{pmatrix} z_n(t)$$

$$\Leftrightarrow X(t) = v_1 z_1(t) + v_2 z_2(t) + ... + v_n z_n(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + ... + c_n e^{\lambda_n t} v_n$$

La solution de (2.1) est :$X(t) = \sum_{i=1}^{i=n} c_i \exp(\lambda_i t) V_i$. ■

Exemple 2.1.1 *On va résudre le système différentiel* $\begin{cases} x_1' = 8x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 18x_1 - 7x_2 \end{cases}$

Solution 2.1.1 *On a*

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 18 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \Rightarrow X' = AX(t)$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -3 \\ 18 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(-7-\lambda) + 54 \quad \text{et } I \text{ :matrice identité}$$

On a donc 2 valeurs propres :$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$

– pour $\lambda_1 = 2$, On a

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \Longleftrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

– pour $\lambda_2 = -1$, On a

$$Av_2 = \lambda_2 v_2 \Longleftrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La solution est $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

La solution de condition initiale $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ s'obtient en résolvant le système $\begin{pmatrix} c_1 + c_2 = 1 \\ 3c_1 + 2c_2 = 1 \end{pmatrix}$ dont la solution est $c_1 = 2$, $c_2 = -1$

La solution générale donnée par :

$$X = 2e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

– **Cas où A est triangularisable, non diagonalisable**

Proposition 2.1.1 *Si la matrice A est triangularisable. On considére P une matrice de passage telle que $T = P^{-1}AP$ avec T triangulaire, Alors*

$$X'(t) = AX(t) \Longleftrightarrow X'(t) = PTP^{-1}X(t) \Leftrightarrow Y'(t) = TY(t),\ où\ Y(t) = P^{-1}X(t)$$

On a donc

$$Y'(t) = TY(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ . \\ . \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & . & . & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & . & . & t_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ . \\ . \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = & \lambda_1 y_1(t) + \quad t_{12}y_2(t) + \quad . \quad . \quad . \quad + t_{1n}y_n(t) \\ y_2'(t) = & \lambda_2 y_2(t) + \quad t_{23}y_3(t) + \quad . \quad . \quad . \quad + t_{2n}y_n(t) \\ . & . \\ . & . \\ y_n'(t) = & \lambda_n y_n(t) \end{cases}$$

On résoudre ce dernier système , équation par équation et on obtient X par la forme $X(t) = PY(t)$.

Exponentielle d'une matrice

Définition 2.1.3 *On appelle exponentielle de matrice l'application*

$$\exp : M_n(K) \rightarrow M_n(K)$$

$$e^A = \exp(A) = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)^n}{n!} \qquad (2.3)$$

où I_n est une matrice indéntité. Notons que la série$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$converge normalement. En effet

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|A^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|A\|^n}{n!} = e^A \prec \infty$$

où on a choisi pour $\|.\|$ une norme multiplicative sur $M_n(\mathbb{k})$ (par exemple une norme matricielle). L'application exponentielle est donc continue.

Calcule de l'exponentielle d'une matrice diagonale

Supposons que A est diagonalisable, alors il existe une matrice D diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs propres λ_i, et $A = PDP^{-1}$, ceci implique que pour tout $k \in \mathbb{N} : A^k = PD^kP^{-1}$. Par conséquent :

$$e^A = P(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D^k}{k!})P^{-1} = Pe^DP^{-1}$$

Où

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1} & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . \\ 0 & . & . & . & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Exemple 2.1.2 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $e^A = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + ...$ *Alors*

$$\begin{aligned} e^A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 + ... \\ &= \begin{pmatrix} 1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+..... & 0 \\ 0 & 1+3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+..... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcule de exponentielle d'une matrice nilpotent

Exemple 2.1.3 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *On a* $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\exists k = 2 \in \mathbb{N} : A^K = 0$ c-à-d que A nilpotent

$$\begin{aligned} e^A &= I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + ... \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + ... = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proposition 2.1.2 *L'exponentielle de matrice satisfait les propriétes*

1. Si A et B commutent $(AB = BA)$, $e^{A+B} = e^A e^B$.
2. Si $B = -A$, alors comme A et $-A$ commutent il vient $e^{A+B} = e^{A-A} = e^0 = I$ Ainsi, $e^A e^{-A} = I$ d'où $e^{-A} = (e^A)^{-1}$
3. Si B est semblable à A $(B = P^{-1}AP)$,Alors $e^B = P^{-1}e^A P$
4. Si $B = tA$, alors $\dfrac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}$

Proposition 2.1.3 *Pour tout matrice A , On a :*

$$\det(e^A) = \exp(tr(A))$$

Théorème 2.1.2 *Pour tout* $t_0 \in \mathbb{R}$ *le probléme de cauchy*

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

admet pour une unique solution le fonction X définie par

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Preuve. On a

$$X'(t) = (e^{A(t-t_0)}X_0)' = Ae^{A(t-t_0)}X_0 = AX(t) \tag{2.5}$$

et on a :

$$X(t_0) = e^{A(t_0-t_0)}X_0 = e^0 X_0 = IX_0 \tag{2.6}$$

D'apres (2.5) et (2.6) on obtient que :

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0$$

est solution de probleme de cauchy. ■

Exemple 2.1.4 *On va résoudre le système* (E) *avec une condition initiale* $X(0) = X_0$

$$(E)\begin{cases} x_1'(t) = 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

1^{ére} méthode

On a

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Où $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculont $e^{A(t-t_0)}$

Les valeurs propres de A sont :$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$

– Pour $\lambda_1 = -1$ Alors $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

– Pour $\lambda_2 = 2$ Alors $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a $A = PDP^{-1}$, oŭ $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Alors

$$
\begin{aligned}
e^{A(t-t_0)} &= e^{P(t-t_0)DP^{-1}} = Pe^{D(t-t_0)}P^{-1}\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{2(t-t_0)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{-(t-t_0)} + e^{2(t-t_0)} & -2e^{-(t-t_0)} + 2e^{-2(t-t_0)} \\ -e^{-(t-t_0)} + e^{2(t-t_0)} & e^{-(t-t_0)} + 2e^{2(t-t_0)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Si $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Alors $X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0$ ce que donné : $X(t) = e^{At}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

Donc

$$
\begin{cases} x_1(t) = e^{2t} \\ x_2(t) = e^{2t} \end{cases}
$$

2^{éme} méthode

La slution est donnée par

$$
\begin{aligned}
X(t) &= c_1e^{\lambda_1 t}v_1 + c_2e^{\lambda_2 t}v_2\\
&= c_1e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = 2c_1e^{-t} + c_2e^{2t} \\ x_2(t) = -c_1e^{-t} + c_2e^{2t} \end{cases}
\end{aligned}
$$

On a $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Alors :

$$
\begin{cases} x_1(0) = 2c_1 + c_2 = 1 \\ x_2(0) = -c_1 + c_2 = 1 \end{cases}
$$

Donc $c_1 = 0$, $c_2 = 1$

Finalement

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{2t} \\ x_2(t) = e^{2t} \end{cases}$$

B)Système non homogènes

On cherche à résoudre le système $X' = AX + g$ oŭ $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i, j = 1, .., n$

$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ . \\ . \\ g_n \end{pmatrix}$, $g_1, .., g_n$ sont des fonctions de la variable t définie sur un intérvalle I de $\mathbb{R}$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_1, .., x_n$ sont des fonctions de classe C^1

définie sur l'intérvalle I sur $\mathbb{R}$, On suppose que $A = P\hat{A}P^{-1}$ on a donc :

$$\begin{aligned} X' = AX + g &\Leftrightarrow X' = P\hat{A}P^{-1}X + g \\ &\Leftrightarrow P^{-1}X' = \hat{A}P^{-1}X + P^{-1}g \\ &\Leftrightarrow Z'(t) = \hat{A}Z(t) + \hat{g}(t) \end{aligned}$$

Avec $Z = P^{-1}X$, $\hat{g} = P^{-1}g$. Si $\hat{A}$ est diagonale ou triangulaire , alors on peut résoudre ce dernier système : $Z'(t) = AZ(t) + \hat{g}(t)$ ce qui permet d'obtenir Z, puis on en déduite X par $X(t) = P(t)Z(t)$

Exemple 2.1.5 *Résoudre le système*

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + t \\ x_2' = 2x_1 + 4x_2 + 2t \end{cases}$$

Solution 2.1.2 *On a $X' = AX(t) + g(t)$ oŭ*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \ , \ g(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ et les vecteurs propres associées sont

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On a A est diagonalisable $A = PDP^{-1}$ oŭ

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \ P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$X' = AX + g \Rightarrow Z' = DZ + \hat{g}$$

Oŭ $\hat{g} = P^{-1}g = \begin{pmatrix} 4t \\ -3t \end{pmatrix}$, donc on obtient

$$\begin{cases} Z_1' = 2Z_1 + 4t \\ Z_2' = 3Z_2 - 3t \end{cases}$$

Par la méthode de variation de la constante on obtient :

$$\begin{cases} Z_1 = Z_H + Z_P = \lambda_1 e^{2t} - 2t - 1 \\ Z_2 = Z_H + Z_P = \lambda_2 e^{3t} + t + \frac{1}{3} \end{cases} \text{et } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

On a $X = PZ$ alors :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 e^{2t} + \lambda_2 e^{3t} - t - \frac{2}{3} \\ x_2 = -\lambda_1 e^{2t} - 2\lambda_2 e^{3t} + \frac{1}{3} \end{cases} \text{et } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Proposition 2.1.4 ***(Formule de Duhamel)*** *Soit g une fonction continue de I dans $\mathbb{R}^n$ et soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, Alors le système*

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + g(t) \\ X(t_0) = X(0) \end{cases} \tag{2.7}$$

admet une unique solution donnée par :

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(s-t_0)} ds$$

Exemple 2.1.6 *En utilisant l'exponentielle de matrice*

La solutions du systéme $\begin{cases} X' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \\ X(0) = X_0 \end{cases}$

Solution 2.1.3 *On a* $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 4I + N$

Avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotent car c'est une matrice triangulaire supérieur dont les élément de la diagonale sont nuls, On vérifie facilement que $N^2 = 0$

On a $e^{A(t-t_0)} = e^{(4I+N)(t-t_0)} = e^{(4I)(t-t_0)}e^{(N)(t-t_0)}$ et I, N commutent

$$\begin{aligned}
e^{A(t-t_0)} &= \begin{pmatrix} e^{4(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{4(t-t_0)} \end{pmatrix} [I + N(t-t_0) + \frac{N^2(t-t_0)^2}{2!} + ..+] \\
&= \begin{pmatrix} e^{4(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{4(t-t_0)} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t-t_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} e^{4(t-t_0)} & (t-t_0)e^{4(t-t_0)} \\ 0 & e^{4(t-t_0)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La solution est donnée par

$$\begin{aligned}
X(t) &= e^{A(t-t_0)} X(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(s-t_0)} ds \\
&= \begin{pmatrix} e^{4(t-t_0)} & (t-t_0)e^{4(t-t_0)} \\ 0 & e^{4(t-t_0)} \end{pmatrix} X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} e^{4(t-s)} & (t-s)e^{4(t-s)} \\ 0 & e^{4(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4s} \\ 0 \end{pmatrix} ds \\
&= e^{A(t-t_0)} X(t_0) + \begin{pmatrix} (t-t_0)e^{4t} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.1.2 Système linéaires à coefficient variables

Définition 2.1.4 *Un système différentiel linéaire à coefficient variables est une système sous la forme :*

$$X'(t) = A(t)X(t) + g(t)$$

Où $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice donnée d'éléments $a_{ij}(t)$ qui sont des fonctions de la variable t.

Si $A(t)$ est diagonalisable, Alors :

$$X'(t) = A(t)X(t) + g(t) \Rightarrow X'(t) = P(t)D(t)P^{-1}(t)X(t) + g(t)$$

Posons

$$Z(t) = P^{-1}(t)X(t) \text{ et } X(t) = P(t)Z(t)$$

Alors

$$\begin{aligned} X'(t) = (P(t)Z(t))' &= P(t)D(t)P^{-1}(t)X(t) + g(t) \\ &\Rightarrow P'(t)Z(t) + P(t)Z'(t) = P(t)D(t)Z(t) + g(t) \\ &\Rightarrow P(t)Z'(t) = -P'(t)Z(t) + P(t)D(t)Z(t) + g(t) \end{aligned}$$

En multipliant par $P^{-1}(t)$, on obtient

$$Z'(t) = -P^{-1}(t)P'(t)Z(t) + D(t)Z(t) + P^{-1}(t)g(t)$$

et donc n'est pas ramené à un système dont la matrice est diagonalisable (à aussi du premier terme) sufbien dans le cas où $P'(t) = 0$

Exemple 2.1.7 *Résoudre le systéme suivant :*

$$\begin{cases} x_1'(t) = (2t-1)x_1(t) + 2(t-1)x_2(t) + 2t \\ x_2'(t) = (t-1)x_1(t) + (2-t)x_2(t) + t \end{cases}$$

On a $X'(t) = A(t)X(t) + g(t)$ oŭ $A(t) = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2(t-1) \\ t-1 & 2t \end{pmatrix}$, $g(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$

On a $\det(A(t) - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda(1+t) + t$ Alors

$$\Delta = (1+t)^2 - 4t = (t-1)^2 \geq 0$$

Alors $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = t$

Les vecteur propres associés sont réspectivement

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A(t)$ est diagonalisable (car, alors : $p\prime(t) = 0$), Alors :

$$X' = A(t)X(t) + g(t) \Rightarrow Z'(t) = D(t)Z(t) + P^{-1}(t)g(t)$$

Où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

Donc, On a

$$\begin{cases} Z_1'(t) = tZ_1(t) \\ Z_2'(t) = tZ_2(t) + t \end{cases}$$

Par la méthode de variation de la constante, on obtient :

$$\begin{cases} Z_1(t) = k_1 e^t \\ Z_2(t) = k_2 e^{\frac{t^2}{2}} - 1 \end{cases}$$

D'où

$$X = PZ \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = k_1 e^{2t} + 2k_2 e^{\frac{t^2}{2}} - 2 \\ x_2(t) = k_1 e^t + k_2 e^{\frac{t^2}{2}} - 1 \end{cases}$$

Si $\Delta = 0$, $t = 1$, On obtient le système

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2 \\ x_2'(t) = x_2(t) + 1 \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} x_1'(t) = \lambda_1 e^t - 2 \\ x_2'(t) = \lambda_2 e^t - 1 \end{cases}$$

Etude de système homogène Soit $A : I \to M_n(\mathbb{k})$. On considére le système :

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{2.8}$$

Soit F l'ensemble des solution de (2.8) :

$$F = \left\{X \in C^1(I, \mathbb{k}^n),\ X'(t) = A(t)X(t)\right\}$$

et pour tout $t_0 \in I$, on a l'isomorphisme $\mathbb{k}$ linéaire

$$\begin{cases} \phi_{t_0} & : & F & \to & \mathbb{k}^n \\ & & X & \to & \phi_{t_0}(x) = X(t_0) \end{cases}$$

Résolvante

Pour tout couple $(t, t_0) \in I^2$, on définit

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & \phi_{t_0}^{-1} & & \phi_t & \\ R(t,t_0) & = & \phi_t \circ \phi_{t_0}^{-1} & : & \mathbb{k}^n & \to & F & \to & \mathbb{k}^n \\ & & & & V & \to & X & \to & X(t) \end{array}$$

Donc $R(t, t_0).V = X(t)$ où X est la solution de (2.8), telle que $X(t_0) = V$

La matrice $R(t, t_0)$ s'appelle la résolvante de système linéaire (2.8)

Proposition 2.1.5 *La résolvante $R(t, t_0)$ admet les propréités :*

1. $\forall v \in \mathbb{k}^n$, on a :
$$\frac{d}{dt}R(t,t_0) = A(t)R(t,t_0)$$

2. $\forall t \in I,\ R(t_0, t_0) = I_n$

3. $\forall(t_1,t_2,t_3)\in I^3$, $R(t_2,t_1).R(t_1,t_0)=R(t_2,t_0)$

4. $\forall(t_1,t_2)\in I^2$, $R(t_0,t_1)$ est inversible d'inverse $R(t_1,t_0)$

Proposition 2.1.6 *Soit $M(t)\in M_n(\mathbb{k})$, La résolvante $R(t,t_0)$ est l'unique solution dans $M_n(\mathbb{k})$ du probléme*

$$\begin{cases} \frac{dM(t)}{dt}=A(t)M(t) \\ M(t_0)=I_n \end{cases} \tag{2.9}$$

Remarque 2.1.1 *La solution du (2.8) avec la condition initiale $X(t_0)=V$ est donnée par :*

$$X(t)=R(t,t_0)V$$

Proposition 2.1.7 *Si $A(t)A(s)=A(s)A(t)$, Alors*

$$R(t,t_0)=\exp(\int_{t_0}^{t}A(s)ds)$$

Preuve. Posons $M(t)=\exp(\int_{t_0}^{t}A(s)ds)$, on va démontrer que $M(t)$ vérifie la proposition (2.1.6), On a

$$M(t+h)=\exp(\int_{t_0}^{t+h}A(s)ds)=\exp(\int_{t_0}^{t}A(s)ds+\int_{t}^{t+h}A(s)ds)$$

Comme $A(t)A(s)=A(s)A(t)$, d'aprés la **théoréme de Fubini** , on a :

$$\int_{t_0}^{t}A(s)ds\int_{t}^{t+h}A(s)ds=(\int_{t}^{t+h}A(s)ds\int_{t_0}^{t}A(s)ds)$$

Donc

$$M(t+h)=\exp(\int_{t_0}^{t}A(s)ds)\exp(\int_{t}^{t+h}A(s)ds)=M(t)\exp(\int_{t}^{t+h}A(s)ds)$$

Or : $\int_{t}^{t+h} A(s)ds = hA(t) + O(h)$, alors :

$$M(t+h) = M(t)(I_n + hA(t) + O(h)) = M(t) + hA(t)M(t) + O(h) \tag{2.10}$$

Ceci implique que :

$$\frac{dM(t)}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{M(t+h) - M(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{hAM(t) + O(h)}{h} = A(t)M(t) \tag{2.11}$$

D'autre part, on a :$M(t_0) = \exp(\int_{t_0}^{t_0} A(s)ds) = I_n$

D'aprés (2.10) et (2.11), on obtient que :

$$R(t, t_0) = \exp(\int_{t_0}^{t} A(s)ds)$$

■

Théorème 2.1.3

$$\det R(t, t_0) = \exp(\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds)$$

Définition 2.1.5 *On dit que $R(t)$ est un matrice résolvante "**Fondamentale wronskin**" si*

$$R(t) = R(\ell_1(t), \ell_2(t), ..., \ell_n(t)) \text{ oŭ } \ell_i = \ell_i(t),\ \forall i = 1, .., n$$

sont des solutions du système homogéne

$$X' = A(t)X \Longleftrightarrow Z' = DZ \Rightarrow X'(t) = R(t)C \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = R(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Remarque 2.1.2 *Les colonnes de $R(t, t_0)$ sont formées des solutions ℓ_i qui vérifient la condition initiale $\ell_i(t_0) = e_i$ (e_i le $i-$éme vecteur de base cononique).*

Exemple 2.1.8 *Donner la matrice $R(t,0)$ du systéme*

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_2 \\ x_2'(t) = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Solution 2.1.4 *On a $X' = AX$ oŭ $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_1 = 2$ le vecteure propre sont $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $R(t) = (e^{\lambda_1 t} v_1 \; e^{\lambda_2 t} v_2) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ -2e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix}$ alors $R(t,0) = (\ell_1(t), \ell_2(t))$ oŭ $\ell_1(t)$ et $\ell_2(t)$ sont des solution du $X' = AX$*

$$\ell_1(0) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ell_2(0) = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc on peut écrire :

$$\begin{cases} \ell_1(t) = R(t)c_1 \\ \ell_2(t) = R(t)c_2 \end{cases} \quad (c_1, c_2) \text{ sont des constantes vectorieles}$$

On veut trouver c_1, c_2 :

On a $\ell_1(0) = R(0)c_1$ Alors $c_1 = R^{-1}(0)\ell_1(0)$ et $\ell_2(0) = R(0)c_2$ alors $c_2 = R^{-1}(0)\ell_2(0)$

On obtient :

$$\text{On a } R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \; R^{-1}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$c_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, c_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ ce qui donné } \ell_1(0) = R(t)c_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{-t} - 2e^{2t} \\ -2e^{-t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \ell_2(0) = R(t)c_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{-t} + e^{2t} \\ 2e^{-t} + e^{2t} \end{pmatrix}$$

Alors $R(t,0) = R_0(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{-t} - 2e^{2t} & e^{-t} + e^{2t} \\ -2e^{-t} - 2e^{2t} & 2e^{-t} + e^{2t} \end{pmatrix}$ et $R_0(0) = I_2$

Wronskien

Définition 2.1.6 *Le **wronskien** d'un système de n solutions $X_1, X_2, .., X_n$ de (2.8) est*

$$\forall t \in I \ , \ W(t) = \det(X_1(t), .., X_n(t))$$

posont $V_i = X_i(t_0)$ Alors $X_i(t) = R(t, t_0).V_i$ d'où

$$W(t) = \det(R(t, t_0)). \det(V_1, .., V_n)$$

Théorème 2.1.4 *Soit $t_0 \in I$ et pour $j = 1, .., n$ soient $\ell_j : I \to \mathbb{k}^n$ solution de* (2.8) *, alors les proposition suivantes sont, équivalent :*

1. Les ℓ_j sont indépendantes,
2. $\forall t \in I \ , \ W(t) \neq 0$,
3. $\exists t_0 \in I \ , \ W(t_0) \neq 0$.

Exemple 2.1.9 *Prenons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Le système $X' = AX$ avec condition initiale*

$(0, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix})$, *où* $\alpha, \beta \in \Bbbk$, *s'écrit :*

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} x_1(0) = \alpha \\ x_2(0) = \beta \end{cases}$$

et l'intervalle d'étude est $I = \mathbb{R}$ car A est un fonction matricielle constante est continue sur tout $\mathbb{R}$. La matrice A a pour valeurs propres $\lambda_1 = 1$ associe à $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, et $\lambda_2 = 3$ associe à $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On en déduit 2 solutions indépendantes :

$$\ell_1(t) = e^t v_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \ell_2(t) = e^{3t} v_2 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une résolvante est donc donnée par la fonction matricielle R définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$R(t) = ((\ell_1(t))(\ell_2(t))) = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{pmatrix}$$

et

$$w(0) = \det R(0) = 2 \neq 0$$

Et toute solution est donnée sur $\mathbb{R}$ par combinaison linéaire de $\ell_1(t)$ et de $\ell_2(t)$: Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\ell(t) = c_1 \ell_1(t) + c_2 \ell_2(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{3t} \\ -c_1 e^t + c_2 e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

qu'on peut écrire sous la forme $\ell(t) = R(t).c$.

Etant donné une condition initiale (vectorielle) $\ell(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, on peut alors calculer c_1 et c_2

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Soit $c_1 = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $c_2 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ la solution cherchée, correspondant aux conditions initiales $\ell(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est donc :

$$\ell(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)e^t + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)e^{3t} \\ -\frac{1}{2}(\alpha - \beta)e^t + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)e^{3t} \end{pmatrix}$$

Les fonctions $t \to x_1(t)$ et $t \to x_2(t)$ cherchées sont :

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)e^t + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)e^{3t} \\ x_1(t) = -\frac{1}{2}(\alpha - \beta)e^t + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)e^{3t} \end{cases}$$

Proposition 2.1.8

$$W(t) = \exp(\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds)w(t_0)$$

Preuve. Si $X_i(t)$, $i = 1, .., n$ sont n solutions du système(2.8) , alors :

$$\forall i = 1, .., n \ : X_i(t) = R(t, t_0)X_i(t_0)$$

Par conséquent, On a

$$\begin{aligned}
W(t) &= \det(X_1(t), .., X_n(t)) \\
&= \det R(t,t_0) \det(X_1(t_0), .., X_n(t_0)) \\
&= \exp(\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds) \det(X_1(t_0), .., X_n(t_0)) \\
&= \exp(\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds) w(t_0)
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.1.3 *Le cas où $A(t)$ est à coefficients constants, on a :*

1. La résolvante devient $R(t, t_0) = \exp((t - t_0)A)$.
2. $\det R(t, t_0) = \exp((t - t_0)tr(A))$.

Etude de systéme non homogéne On cherche à résoudre le système :

$$X'(t) = A(t)X(t) + g(t) \tag{2.12}$$

La solution général (2.12) est donné par $X(t) = X_H(t) + X_p(t)$ où $X_H(t)$ est une solution homogéne de (2.12) et $X_P(t)$ est une solution paraticuliére de (2.12) telle que $X_H(t) = R(t, t_0).V$ la solution du systéme homogéne .

On cherche alors une solution particuliére de (2.12) par la méthode de variation de la consrante, $X(t) = R(t, t_0)V(t)$, ou $V(t)$ supposée différentiable. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{dt} &= \frac{d}{dt}(R(t, t_0)V(t)) \\
&= \frac{d}{dt}R(t, t_0)V(t) + R(t, t_0)V'(t) \\
&= A(t)R(t, t_0)V(t) + R(t, t_0)V'(t) \\
&= A(t)X(t) + R(t, t_0)V'(t)
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $R(t, t_0).V'(t) = B(t)$

C'est à dire

$$V'(t) = R(t_0, t)B(t) \Leftrightarrow V(t) = \int_{t_0}^{t} R(t_0, s)B(s)ds$$

car $R(t_0, t)$ est l'inverse de $R(t, t_0)$

Alors :

$$X(t) = R(t, t_0)V(t) = \int_{t_0}^{t} R(t, t_0)R(t_0, s)B(s)ds = \int_{t_0}^{t} R(t, s)B(s)ds$$

Théorème 2.1.5 ***(Duhamel)*** *La solution de (2.12) telle que* $X(t_0) = V$ *est donnée par :*

$$X(t) = R(t, t_0).V(t) + \int_{t_0}^{t} R(t, s)B(s)ds$$

2.2 Approximations numérique

Les trois méthodes numériques (Euler, point milieu, Runge-kutta) utilisèes pour les èquations différentielles se généralisent sans probléme en dimension supérieur : on note pas h le pas, et on a toujours :

$$t_{i+1} = t_i + h$$

Les formules donnant x_{i+1}pour chacune de ces méthodes avec un pas h sont :

– Pour la méthode d'Euler,

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i)$$

– Pour la méthode du point milieu

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + hm \\ \text{Avec } m &= f(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} f(x_i, t_i)) \end{aligned}$$

– Pour Runge-kitta

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + hm \\ \text{avec } m &= \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\ m_1 &= f(t_i, x_i) \\ m_2 &= f(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} m_1) \\ m_3 &= f(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} m_2) \\ m_4 &= f(t_i + h, x_i + hm_3) \end{aligned}$$

Notez bien que les pentes m_i, aisi que les x_i et la fonction f prennent des valeurs vectorielles ,alors que la variable t rest réelle.

2.3 Système dynamique non linéaire en général

Définition 2.3.1 *Un système dynamique non linéaire peut toujours étre écrit par une équation différentielle de la forme suivante :*

$$X'(t) = f(t, X(t)) = \begin{pmatrix} f_1(X(t)) \\ f_2(X(t)) \\ . \\ . \\ f_n(X(t)) \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, et f est une fonction non linéaire .on note $f(t, X(t)) = F(X(t))$
A la section (2.1), nous avons étudié le cas où f est linéaire bien entendu, dans le cas non linéaire, nous ne pourrons pas faire une description aussi détaillée, puisque la fonction f est arbitraire, l'analyse des systèmes linéaires va nous aider énormément dans l'étude des systèmes non linéaires ; plus pécisément, nous montrerons qu'au voisinage des champs de vecteurs, le comportement des solutions d'une équation est presque toujours du méme type que celui des solutions de son approximation linéaire.

2.3.1 Comportment local et comportement global

Comportement local

Le comportement local est presque toujour identique au cas linéaire deux exceptions à cette assertion :

– Cas où les valeurs propres sont imaginaires pures.

– Cas d'une valeur propre nulle.

Dans ces deux cas il faut faire une étude plus détaillée.

Comportement global

Un comportement global est fixé par le nombre, la position et la nature des points d'équilibres.

2.3.2 Point d'équilibre

Définition 2.3.2 *Nous appelons point d'équilibre (ou* ***point critique*** *ou* ***point singulier*** *) de (2.13) le point P qui vérifie $F(P) = 0$.*

Exemple 2.3.1 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} x' = \sin y \\ y' = -\sin y + x \end{cases}$$

Les points d'équilibres sont $P_1(0,0)$ et $P_2(0,2\pi)$

2.3.3 Linéarisation

Si les fonctions f et g sont de classe C^2 au voisinage d'un point critique (x_0, y_0), il est naturel d'en faire un développement limité .

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= (\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} h) + (\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} k) + P(h,k) \\ g(x_0+h, y_0+k) &= (\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} h) + (\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} k) + Q(h,k) \end{aligned}$$

où $P(h,k)$, $Q(h,k)$ s'annulent à l'origine ainsi que leurs dérivées premiére

Il est raisonnable de perser qu' au voisinage de (x_0, y_0) les termes P et Q sont négligeables devante les termes linéaires, au moins lorsque ceux-ci ne s'annulent pas .

On dit qu'au voisinage du point critique (x_0, y_0), le systéme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

est approximé par le systéme linéaire

$$\begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} & \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \\ \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} & \frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

ce dernier système est appelée le linéarisé du précédent au point (x_0, y_0).

Exemple 2.3.2 *Considérons l'équation du pendule avec frottement*

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x - y \end{cases}$$

Les points $(0,0)$ et $(\pi, 0)$ sont des points critique .

Le linéarisé en $(0,0)$ est

$$\begin{pmatrix} h' \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Le linéarisé en $(\pi, 0)$ est

$$\begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Définition 2.3.3 *Soit*

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Un champ de vecteurs de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et soit x_0 un zéro de f (point critique)

On appelle linéarisé de l'équation différentielle $x' = f(x)$ au point x_0 l'équation différentielle linéaire

$$\varepsilon' = A\varepsilon$$

où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x_0} & \cdots & .. & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right|_{x_0} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right|_{x_0} & \cdots & .... & \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right|_{x_0} \end{pmatrix}$$

Si l'on fait un dévloppement limité de f au voisinage de x_0, le terme linéaire est $A(x-x_0)$. Cela rend vraisemblable le principe que nous allons énoncer

Principe En général, au voisinage d'un point critique x_0, les solutions d'un système différentiel non linéaire $X' = f(x)$ ressemblent à celles de son linéarisé

$$\varepsilon' = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x_0} & \cdots & .. & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right|_{x_0} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right|_{x_0} & \cdots & .... & \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right|_{x_0} \end{pmatrix} \varepsilon$$

Le principe ci-dessus est faux si l'une des valeurs propres de la matrice A est imaginaire pur (et en particulier nulle).

Exemple 2.3.3 *Considérons l'équation*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \varepsilon(x^2+y^2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Le linéarisé en $(0,0)$ *est tout simplement*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

dont les trajectoires sont des cercles

Or, en observant les composantes normale et tangentielles du champ, il devient intuitif que les trajectoires du système initial spiralent vers l'origine si $\varepsilon \succ 0$

Bibliographie

[1] Anna Désilles."**Introduction à la théorie des systémes dynamiques à temps discret**", 24 septembre 2003 .

[2] G. Bastin, "**Modélisation et analyse des systèmes dynamiques**", 14 juillet 2013

[3] J. BRICMONT . "**Introduction à la dynamique non linéaire** "Unité de Physique théorique & mathématique", Année académique 2009-2010 .

[4] Michel cohen de lara. "**Commande linéaire des systémes dynamique**"mars 1994

[5] Rosario Toscano, "**Commande et diagnostic des systèmes dynamiques",** Décembre 2004

[6] C-M.Marle, "**Système dynamique,une intoduction**", Ellipses editions Marcting S.A,Paris(2003).

[7] Y.Kuznetsov, "**Elements of Applied Bifurcation Théory**".Second Edition ,(1998).

[8] JONHN Hubbard, "**Èquations différentielles et systémes dynamique** ", mars1999.

[9] Rosario Toscano, "**Commande et diagnostic des systèmes dynamiques",**Décembre 2004

[10] Farid Ammar khodja, "**Systèmes différentiels : Rappels de cours et exercices**", INFM de franche -Comté

[11] Jean -Pierre Demailly "**Analyse numérique et équations différentielles**"mars 2006

[12] Ralph Chill "**Equations différentielles et stabilitée**" Universit ´e de Metz ,Licence de Mathématiques

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

SDD	Un système dynamique discret
$D_n(\mathbb{k})$	Ensemble des matrices carrée diagonaux d'ordre n sur $\mathbb{k}$
D	matrice diagonale
$\mathbb{k}$	$\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$
X_0	condition initiale
$R(t_0, t)$	La résolvante
$K_n[X]$	Espace vectoriel des polynome de degré $\leq n$
$M_n(\mathbb{k})$	Ensemble des matrices carrée d'ordre n sur $\mathbb{k}$