République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **PROBABILITE STATISTIQUE**

Par

BOUZIDI HALIMA

Titre :

Generalités Sur L'intégrale Stochastique

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Labed Boubakeur**	UMKB	Président
Dr.	**Tamer Lazhar**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Gatt Rafika**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce humble travail a mes chers **parents**, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études,

A mes chère sœur **Asma** et petite cher **Chahd** pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral,

A mes chers frères **Sohaib**, **Yuones** pour leur appui et leur encouragement,

A toute ma famille et mes chéres amis **Amel**, **Fériél** pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,

Que ce mémoire soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fuit de votre soutien infaillible,

Merci d'être toujours là pour moi.

REMERCIEMENTS

Nous tenons tout d'abord à remercier **ALLAH** le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreur Dr : (**Tamer Lazhar**), son précieux conseil et son aide durant toute la période du mémoire.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail Et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Introduction

Le but de ce mémoire est introduire le calcul stoquastique afin de faire des applications Aprés avoir étudié le mouvement brownien avec ses diffirenes propriétés en particulier le fait que c'est une martingale, on introduit l'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien qui se généralise à une martingale.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre sera consacré aux rappels de base concernant les processus stochastiques.On donnera les principales propriétés du mouvement brownien ainsi que celles des martingales qui seront utiles pour la suit .On abordera enfin la notion de la variation quadratique.

Dans le deuxième chapitre, on donnera intégrale stochastique par rappot au browien et martingale et on étudier quelque de ces propriétés.Enfin on démontre que La formule d'Itô.

Dans le dernier chapitre, nous allons discuter de l'utilisation et de l'application des propriétés précédentes de formule d'ito afin de prouver qeulques des exemple et des théorémes.

Chapitre 1

Processus stochastique et mouvement Brownien

1.1 Les processus stochastiques

Définition 1.1.1 *Un processus stochastique est une collection de variable aléatoire* $X = \{X_t; 0 \leq t < \infty\} = (X_t)_{t \geq 0}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *espace de probabilité à valeurs dans* (S, δ) *appelé espase d'états.*

Géneralement $(S, \delta) = \left(\mathbb{R}^d, B\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ $.X_t : \Omega \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^d$ *:la fonction* $t \mapsto X_t(\omega)$ *est une trajectoire (ou réalisation) du processus* X *associée à* ω*.Un processus* X *: est continu si pour presque toutes les trajectoires sont continues de* $[0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^d$ *:continue à droite et limité à gauche .*

Notation 1.1.1 *Pour* $t \geq 0$ *et* X *un processus stochastique on note :*

limite à gauche en $t : X_{t^-} = \lim\limits_{s \to t; s < t} X_s.$

limite à droite en $t : X_{t^+} = \lim\limits_{s \to t; s > t} X_s.$

saut de X *en* $t : \Delta X_t = X_{t^+} - X_{t^-}.$

Un processus stochastique càdlàg si pour tout t; $X_t = X_{t^+}$ et

$X_{t^-} \in \mathbb{R}^d \Rightarrow \Delta X_t = X_{t^+} - X_{t^-}$.Si est continue $X_{t^+} = X_{t^-} = X_t \Longrightarrow \Delta X_t = 0$

Définition 1.1.2 *Pour deux processus stochastique X et Y*

X et Y sont identiques si $\forall t \geq 0;\ \forall \omega \in \Omega,\ X_t(\omega) = Y_t(\omega)$.

Y est une modification de X si :$\forall t \geq 0;\ P(X_t = Y_t) = 1$.

X et Y ont les même distributions finie dimensionnelles si $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall 0 < t_1 < t_2..... < t_n$, $\forall A \in B\left(\mathbb{R}^{nd}\right)$

$$P\left[(X_{t_1}, X_{t_2}, ...X_{t_n})\right] = P\left[(Y_{t_1}, Y_{t_2}, ...Y_{t_n}) \in A\right]$$

X et Y sont indistingables si pour presque toutes les trajectoires

$P[(X_t = Y_t; 0 \leq t < +\infty)] = 1$.

1.1.1 Mésurabilité

Définition 1.1.3 *Un processus stochastique X est mesurable si pour tout $A \in B\left(\mathbb{R}^d\right)$ l'ensemble $\{(t;\omega) : X_t(\omega) \in A\}$ appartient à la tribu $B([0;+\infty[) \otimes \mathcal{F}$*

l'application :

$$\begin{aligned}([0;+\infty[\times\Omega, B([0;+\infty[) \otimes \mathcal{F}) &\longrightarrow \left(\mathbb{R}^d, B\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\\ (t;\omega) &\mapsto X_t(\omega)\end{aligned}$$

est mesurable.

Remarque 1.1.1 *On suppose que tout les processus stochastiques sont mésurables.*

1.1.2 Filtration et adaptation

Définition 1.1.4 *Une filtration est une fammille croissant $\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$ de sous tribu de $\mathcal{F}, \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour $0 \leq s \leq t < +\infty$.*

Soit X un processus stochastique, la filtration engendrée par $x, \mathcal{F}_t^x = \sigma\left(X_s, 0 \leq s \leq t\right)$.

$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ *espace de probabilité filtré.*

Définition 1.1.5 *On définit :*

$\cdot\mathcal{F}_{t^-} = \sigma\left(\bigcup\limits_{s<t} \mathcal{F}_s\right),$

$\cdot\mathcal{F}_{0^+} = \mathcal{F}_0,$

$\cdot\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap\limits_{s>t} \mathcal{F}_{s.}$

Une filtration est continue à droit (resp àgauche) si $\forall t \geq 0; \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ *(resp* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-}$*).*

Remarque 1.1.2 *La continuité à droite de la filtration peut être interpretée comme non-auticipation de l'information.*

Définition 1.1.6 *Un processus stochastique* X *est adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si* $\forall t \geq 0; X_t$ *est v.a* $\mathcal{F}_t$*-mesurable progressivement mesurable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*si pour tout* $t \geq 0;$

$$([0,t] \times \Omega, B\,[0,t] \otimes \mathcal{F}) \longrightarrow \left(\mathbb{R}^d, B\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$$
$$(s,\omega) \mapsto X_t\,(\omega)$$

est mesurable.

Proposition 1.1.1 *Si un processus* X *est adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *alors il admet une modification progressivement mesurable.*

Si un processus X *est adapé à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*et si les trajectoires sont continues à droite alors il est progrissivement mesurables.*

Preuve. *Pour* $t \geq 0$ *;*$n \geq 1, k = 0, 1, ..., 2^{n-1}$ *et pour* $0 \leq s \leq t$ *on pose :*

$X_s^{(n)} = \frac{X_{k+1}}{2^n}\,(\omega);\quad \frac{kt}{2^n} \leq s \leq \frac{k+1}{2^n}$ *avec* $X_0^{(n)} = X_0(\omega)$ *l'application*

$$[0,t] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$(s,\omega) \mapsto X_s^{(n)}\,(\omega)$$

est $B([0,t]) \times \mathcal{F}_t$ *mesurable et continuité à droite*

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} X_s^{(n)}\,(\omega) = X_s\,(\omega)\,; \forall\,(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega$

$\Longrightarrow (s,\omega) \longmapsto X_s\,(\omega)$*est aussi est* $B([0,t]) \times \mathcal{F}_t$ *mesurable.* $\blacksquare$

1.1.3 Temps d'arret

Définition 1.1.7 *Soit* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ *un espace de probabilité filtré.*

Un temps d'arret est une v.a T $\mathcal{F}_t$*-mesurable à valeurs dans* $[0;+\infty[$ *telle que* $\forall t \geq 0;$ $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Proposition 1.1.2 *Si la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *est continue à droite, alors* T *est un temps d'arret ssi :*$\forall t \geq 0$ *;* $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Preuve. Soit T un temps d'arret , alors$\{T < t\} \subset \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$: la réciproque : soit $t \geq 0$; alors:

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{\epsilon>0} \{T < t+\epsilon\} \in \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon} \in \mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$$

la continuité à droite de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

$\Longrightarrow \mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$,On peut prendre $\epsilon = \frac{1}{n}$ alors$\{T \leq t\} = \bigcap_{\epsilon>0} \left\{T < t + \frac{1}{n}\right\}$. ■

Lemme 1.1.1 *Si* T *et* S *sont deux temps d'arret, alors* $T \wedge S$, $T \vee S$ *;* $.T+S$ *sont des temps d'arret.*

Définition 1.1.8 *(evenements antérieures à un temps d'arrét)*

Soit T *un temps d'arrét pour la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *.La* $\sigma-$*algébre* $\mathcal{F}_t$ *des évenement antérieures au temps* T *d'arret est continuée des ensembles* $A \in \mathcal{F}$ *telque :*

$$\forall t \geq 0, A \bigcap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Lemme 1.1.2 *Soit* S *et* T *deux temps d'arret , pour* $A \in \mathcal{F}_s$ *on a :*$A \bigcap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$ *en particulier :si* $S \leq T$ *dans* Ω : $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$

Soit S *et* T *deux temps d'arret alors* $\mathcal{F}_{T\wedge S} = \mathcal{F}_T \bigcap \mathcal{F}_S$, *et que les ensembles* $\{T < S\}, \{S < T\}$, $\{T \leq S\}, \{S = T\}$*appartiennent* $\mathcal{F}_T \bigcap \mathcal{F}_S$.

Proposition 1.1.3 *Soit* X *un processus stochastique à trajectoire càdlàg et est adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *qui satisfait les conditions usuelles alors il existe une temps d'arrét*

$\{T_n\}_{n\geq 1}$ *pour* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *qui sont des temps de saut de* X *:*

$$\left\{(t,\omega)\in\mathbb{R}_+^*\times\Omega, X_t(\omega)\neq X_t-(\omega)\right\}\subset\bigcup\left\{(t,\omega)\in\mathbb{R}_+^*\times\Omega, T_n(\omega)=t\right\}.$$

Soit S et T deux temps d'arret et soit Z une v.a intégrable tq :

$E(Z|\mathcal{F}_t)=E([Z|\mathcal{F}_{S\wedge T}])$ *p.p.s* sur $\{T\leq S\}$

$E((E(Z|\mathcal{F}_t))|\mathcal{F}_S)=E(Z|\mathcal{F}_{T\wedge S})$.

Soit X_t un processus stchostique on définit X_t sur$\{T<\infty\}$ par : $X_T(\omega)=X_{T(\omega)}(\omega)$.

Martingale à temps continue

Soit $\left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P\right)$ un espace de probabilité filtré

Définition 1.1.9 *Soit* M *un processus stochastique adapté avec* $\forall t\geq 0; M_t\in L^1$ *on dit que :*

M *est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*sous martingales si :* $M_t\leq E[M_{t+s}|\mathcal{F}_t]$ *;*$\forall t; s\geq 0.$

M *est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *sur martingale si :* $M_t\geq E[M_{t+s}|\mathcal{F}_t]$ *;*$\forall t; s\geq 0$

M *est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *martingale si :* $M_t=E[M_{t+s}|\mathcal{F}_t]$, $\forall t; s\geq 0$

Propriété 1.1.1 *Soit* D *un ensemble dénombrable dense dans* $\mathbb{R}_+$*, par exemple l'ensemble des dyadique* $D=\bigcup_n D_n$ *avec* $D_n=\{k2^{-n}, k\in\mathbb{N}\}$

Proposition 1.1.4 *Soit* (M_t) *est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-$ *martingale alors,* $\forall c\geq 0$ *:*

$$P\left(\sup_{s\in[0,t]\cap D}M_s\geq c\right)\leq P\sup_{s\in[0,T]}\left(|M_s|\right).$$

En plus si les trajectoires de$(M_t)_{t\geq 0}$ *sont càd (continue à droite).*

$$P\left(\sup_{s\in[0,T]}M_s\geq c\right)\leq\frac{1}{c}P\sup_{0\leq s\leq t}\left(|M_s|\right).$$

Proposition 1.1.5 *(Inégalité de Doob)*

Soit $M = M_t$ *une* $\mathcal{F}_t-$*martingale ou sous -martingale positive, et soit* $p, q > 1$ *tels que* $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ *alors :*

$$\left\| \sup_{s\in[0,t]\cap D} |M_s| \right\|_p \leq q \sup_{s\in[0,T]} \|M_s\|_p .$$

Si en plus les trajectoires de M *sont càd :*

$$\left\| \sup_{s\in[0,t]} |M_s| \right\|_p \leq q \sup_{s\in[0,T]} \|M_s\|_p .$$

Théorème 1.1.1 *(Régularisation de sur martingales)*

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ *un espace de probabilité filtré* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *vérifie les conditions usuelles complet et continue droit.Soit* M *une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *sur -martingales tq :* $t \mapsto E[M_t]$ *soit càd, alors il existe une version* $\widetilde{M}$ *telle que* $t \mapsto \widetilde{M}_t$ *est continue droit limité à gauche càdlag,* $\widetilde{M}$ *est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $-$*sur- martingale.*

Remarque 1.1.3 *Si* M *est une martingale lors son experiance est constant, donc continue.*

Si M *est une sous martingale, alors* M *est une sur martingale.*

Lemme 1.1.3 *Soit* D *un ensemble dénombrable dense de* $[0; +\infty[$*. Soit* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ *un espace de probabilité filtré, et* M *une* $(\mathcal{F}_t)$ *-sur-martingale, alors on a avec probabilité égale à* 1 *:*

$$i)\forall t \geq 0, M_{t^+} = \lim_{\substack{< \\ s\to t \\ s\in D}} M_s \ et M_{t^-} = \lim_{\substack{< \\ s\to t \\ s\in D}} M_s existe$$

$$ii)\forall t \geq 0, M_t \geq E[M_{t^+}|\mathcal{F}_t].$$

La filtration $s \mapsto E[M_s]$ *est continue à droite (c'est le cas des martingales) donc en* *particulier* $M_{t^+} \in L^1$.

$$iii)\,(M_{t^+}, t \geq 0) \text{ est une } (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} \text{ sur-martingale}$$

1.2 Mouvement Brownien

Proposition 1.2.1 *(Critére de continuité de Kolmogorove)*

Soit $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ *un processus stochastique à valeurs réelles et* $[0,T]$ *un intervale fini supposons qu'il existe un constante* $\alpha > 1$ *et* $p > 0$ *tels que :*

$$E\left(|X_t - X_s|^p\right) \leq c_T\,|t-s|^{\alpha} \ , \ \forall s,t \in [0,T]$$

alors il exsit une version de $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ *avec trajectoires continues.*

Remarque 1.2.1 *Sur le module de continuité des trajectoires :* $\omega \in \Omega$ *fixé, on peut comparer* $X_t(\omega) - X_s(\omega)$ *avec* $|t-s|$ *:* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists G_\varepsilon$ *v.a avec probabilité* $= 1$,

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq G_\varepsilon(\omega)\,|t-s|^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon} \quad \forall s,t \in [0,T]\,,\ E\left[G_\varepsilon\right] < \infty$$

Définition 1.2.1 *Un processus stochastique* $\{B_t; t \geq 0\}$*est appelé un mouvement Brownien s'il satisfait les conditions suivantes :*

i) $B_0 = 0$.

ii) $\forall\ 0 \leq t_1 t \leq_2 ...... \leq t_n$ *les accroissement* $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_2} - B_{t_1}$ *sont des v.a indépendantes .*

iii) si $0 \leq s < t$, *l'accroissement* $B_t - B_s$ *admet une distribution normale* $\mathcal{N}(0, t-s)$

iv) le processus $(B_t)_{t\geq 0}$*admet des trajectoires continue*

Remarque 1.2.2 *1) le mouvement Brownien est un processus gaussien .La distribution du vecteur* $(B_{t_1}, B_{t_2}, ...B_{t_n}), (0, t_1, t_2, ...t_n)$ *s'écrit comme combinaison linéaire du vecteur*

$\left(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ...B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right)$ *et puisque ces composants sont indépendantes suivant la loi normale*

$\Longrightarrow$*indépendant et normale.*

2) l'espérance est auto-covariance du mouvement Brownien où

$$\begin{aligned} E(B_t) &= 0 \\ E(B_s B_t) &= E(B_s \left|B_t - B_s + B_s\right|) \\ &= E(B_s \left|B_t - B_s\right|) + E(B_s^2) = s = \min(s;t), \end{aligned}$$

on peut démontrer qu 'un processus gaussien X*, d'espérance nulle, et de auto -covariance* $\Gamma_x(s;t) = \min(s;t)$ *satisfait les conditions i),ii)et iii) de la définition.*

3) la fonction d'autocovariance $\Gamma_x(s;t) = \min(s;t)$ *est une fonction définie positive on peut l'écrire :*

$$\Gamma_x(s;t) = \min(s;t) = \int_0^\infty 1_{[0,s]}(r)\, 1_{[0,t]}(r)\, dr$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \min(t_i, t_j) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \int_0^\infty 1_{[0,t_i]}(r)\, 1_{[0,t_j]}(r)\, dr \\ &= \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^{n} a_i 1_{[0,t_i]}(r)\, dr\right]^2 \geq 0 \end{aligned}$$

le critére de continuité de Kolmogorove il existe un processus Gaussien ,d'espérance 0 *et de covariance* $\Gamma_x(s;t) = \min(s;t)$ *avec des trajectoires continues.*

l'accroissement $B_t - B_s$ *admet un distribution normale* $\mathcal{N}(0, t-s)$

$\Longrightarrow$*pour un nombre k :*

$$E\left((B_t - B_s)^{2k}\right) = \frac{(2k)!}{2^k k!}(t-s)^k;$$

dans la définition du mouvement Brownien, on suppose que l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est arbitraire(quelconqe) l'application

$$\Omega \longrightarrow \varphi\left([0, \infty[\,, \mathbb{R}\right)$$

$$\omega \mapsto B\left(\omega\right)$$

on munit cet espace par la mesure de probabilité : $P_B = P \circ B^{-1}$, mesure de Winer.
$\varphi\left([0, \infty[\,, \mathbb{R}\right)$ l'espace des fonctions continues de $[0, \infty[$ à $\mathbb{R}$ muni de tribu borellienne B_{φ}.
l'espace $(\varphi, B_{\varphi}, P_B)$ est l'espace de probabilité canonique pour le mouvement Brownien $\varphi = \varphi\left([0, \infty[\,, \mathbb{R}\right)$.
Dans l'espace canonique, les variables aléatoires sont les applications :

$$X_t(\omega) = \omega(t)$$

$$X_t = \exp\left(\sigma B_t + \mu t\right), t \geq 0, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}.$$

1.3 Variation quadratique

1.3.1 Processus à varation finie

Fonction à varation finie

Définition 1.3.1 *Une fonction continue $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $a(0) = 0$ est à variation continue si pour tout $t > 0$:*

$$F(t) = \sup\left\{\sum_{k=0}^{n-1} \left|a(t_{k+1}) - a(t_k)\right|, n \in \mathbb{N} : 0 \leq t_0 \leq t_1 ...... \leq t_n \leq t\right\}$$

est finie.

Proposition 1.3.1 *i) la fonction* $t \longmapsto F(t)$ *est croissante et continue : il existe une mesure* $|\mu|$ *finie sur les compacts telle que* $|\mu|([0,t]) = F(t)$

ii)$\forall s \leq t$; $|a(s) - a(t)| \leq F(t) - F(s)$

iii) $t \longrightarrow \frac{F(t+a(t))}{2}$ *et* $t \longrightarrow \frac{F(t-a(t))}{2}$ *sont croissantes et continues. Il existe* μ_+, μ_- *mesures finies sur les compacts telles que*

$\mu_+([0,t]) = \frac{F(t+a(t))}{2}$, $\mu_-([0,t]) = \frac{F(t-a(t))}{2}$,*on a alors* $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$.

$$\begin{aligned} a(t) &= \mu_+([0,t]) - \mu_-([0,t]) \\ &= \mu([0,t]) \end{aligned}$$

où μ *est la mesure signée* $\mu = \mu_+ - \mu_-$

Proposition 1.3.2 *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue,* $t \geq 0$ *et* $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < ... < t_n^{(n)} = t$ *Une suite de subdivisions dont le pas tend vers* 0, *on a :*

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s)\, da(s) &= \int_0^t f(s)\, d\mu(s) \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(t_k^{(n)}\right)\left(a\left(t_{k+1}^{(n)}\right) - a\left(t_k^{(n)}\right)\right) \end{aligned}$$

Preuve. soit f_n telle que $f_n(s) = f\left(t_k^{(n)}\right)$ si $t_k^{(n)} < s < t_{k+1}^{(n)}$, alors la somme s'écrit :

$$\int f_n(s)\, d\mu(s) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(t_k^{(n)}\right)\left(a\left(t_{k+1}^{(n)}\right) - a\left(t_k^{(n)}\right)\right)$$

$f_n(s) \longmapsto f(s)$ pour tout s et $f_n$est bornée par $\sup\limits_{0 \leq s \leq t} |f(s)|$ donc on obtient le résultat par convergence dominée. ■

Notation 1.3.1 *Pour tout* f *mesurable positive,on note :*

$$\int f(s)\, |da(s)| = \int f(s)\, d|\mu|(s).$$

Proposition 1.3.3 *Pour tout f mesurable bornée :*

$$\left|\int_0^t f(s)\, da(s)\right| \leq \int_0^t |f(s)|\, |da(s)|$$

Processus à variation finie

Soit $(\mathcal{F}_t)_t$ une filtration continue à droite.

Définition 1.3.2 *Un processus $(X_t)_t$ est dit progressif si pour tout $t \geq 0$, l'application :*

$$\begin{aligned} \Omega \times [0,t] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, s) &\longmapsto X_s(\omega) \end{aligned}$$

est $\mathcal{F}_t \otimes B([0,t])$ mesurable.

Proposition 1.3.4 *Si (X_t) est continu à droite ou continu à gauche et adapté, alors il est progressif.*

Proposition 1.3.5 *On note*

$$Prog = \{A \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : (1_A(\omega,t))_{t\geq 0} \text{ est un processus progressif}\}$$

Définition 1.3.3 *Un processus à variation finie est un processus adapté et sont toutes les trajectoires sont à variation finie (continues, partant de 0).*

Proposition 1.3.6 *Soit A un processus à variation finie et H un processus progressif.Soit $H \cdot A$ le processus défini par :*

$$(H \cdot A) = \int_0^t H_s dA_s$$

bien défini si pour tout $t \geq 0$,

$$\int_0^t |H_s dA_s| < \infty.$$

Le processus $H \cdot A$ est à variation finie.

Preuve. Chaque trajectoire est à variation finie

$$(H \cdot A)_t - (H \cdot A)_s = \int_0^t H_s dA_s$$
$$\Longrightarrow |(H \cdot A)_t - (H \cdot A)_s| \leq \int_0^t |H_s| \, |dA_s| \, .$$

Il reste à vérifier que le processus est adapté.on veut vérifier que si $h : \Omega \times [0,t] \longrightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{F}_t \otimes B\left([0,t]\right)$ mesurable bornée, alors $\int_0^t h\left(\omega, s\right) dA_s$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable, si :

$$h\left(\omega, s\right) = 1_{[u;v[}\left(s\right) 1_B\left(\omega\right) \text{ avec } [u; v[\subset [0,t] \, et B \in \mathcal{F}_t$$

alors :

$$\int_0^t h\left(\omega, s\right) dA_s = 1_B\left(\omega\right)\left(A\left(v\right) - A\left(u\right)\right)$$

est $\mathcal{F}_t$-mesurable, par le lemme des classes monotones $h = 1_\Gamma$ est mesurable si $\Gamma \in \mathcal{F}_t \otimes B\left([0,t]\right)$ .Puis, on conclue si h est mesurable bornée en l'écrivant comme limite ponctuelle de fonctions étagées. ■

1.3.2 Martingale locale

Exemple 1.3.1 *Brownien B en dimension 3 : $f : x \longrightarrow \frac{1}{|x|}$ est harmonique, $\Delta f = 0$ .on a envie de dire :*

$$f\left(B_t\right) - f\left(B_0\right) = \int_0^t \frac{\Delta}{2} f\left(X_s\right) ds + Martingale$$
$$f\left(B_t\right) = Martingale$$

c'est faux $E[f(B_t)] \underset{t \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{1}{|x|} \exp\left(-\frac{|x-3|}{2t}\right) dt \underset{t \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

Notation 1.3.2 *Si T est un temps d'arrêt, on note X^T le processus $t \longrightarrow X_{t\wedge T}$.*

Définition 1.3.4 *Un processus adapté à trajectoires continues $(M_t)_{t\geq 0}$ tel que $M_0 = 0$ est une martingale locale s'il existe une suite croissante des temps d'arrêts (T_n) telle que T_{n+1} presque sûrement telle que pour tout n, M_{T_n} est une martingale uniformément intégrable. Si $M_0 \neq 0$ ont dit que M est une martingale locale si $M - M_0$ est une martingale locale. Dans tous les cas, on dit qu'une telle suite de temps d'arrêts réduit la martingale locale.*

Remarque 1.3.1 *On n'a pas forcément $M_t \in L^1$.*

Proposition 1.3.7 *a. Une martingale est une martingale locale.*
b.On pourrait changer la définition et demander simplement $\left(M^{T_n}\right)_n$martingale.
c. Si T temps d'arrêt et M martingale locale, alors M^T est une martingale locale.
d. Si S_n réduit M et T_n est une suite de temps d'arrêt telle que $T_n \nearrow \infty$ presque sûrement, alors $T_n \wedge Sn$ réduit M.
e. L'ensemble des martingales locales et un espace vectoriel.

Proposition 1.3.8 *1) Une martingale locale positive telle que $M_0 \in L^1$ est une sur-martingale.*
2) Si $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale telle que $|M_t| \leq Z$ pour tout $t \geq 0$où $Z \in L^1$, alors M est une martingale uniformément intégrable.
3) Si M est une martingale locale telle que $M_0 = 0$ alors la suite

$$Tn = \inf\{t \geq 0, |M_t| \geq n\} \text{ réduit } M.$$

Preuve. 1) On a $M_t = M_0 + N_t$ où N est une martingale locale issue de 0, soit (T_n) qui réduit N, on a :

$$E\left[N_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}_s\right] = N_{s\wedge T_n}$$

$$E\left[M_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}_s\right] = M_{s\wedge T_n}$$

$$E\left[M_t|\mathcal{F}_s\right] \leq M_s$$

par Fatou($M \geq 0$) en particulier, $E[M_t] \leq E[M_0] < \infty$. $M_t \in L^1$ dit que M est une sur-martingale.

2) On a de même

$$E\left[N_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}_s\right] = N_{s\wedge T_n}.$$

Par le théorème de convergence dominée,

$$E\left[M_t|\mathcal{F}_s\right] = M_s$$

3)M^{T_n} martingale locale bornée donc (vraie) martingale. ■

Remarque 1.3.2 *Si M est une martingale dans L^2,*

$$E[(M_t - M_s)^2] = E[(M_t - M_u)^2] + E[(M_u - M_s)^2] \text{ } si \text{ } s \leq u \leq t.$$

Théorème 1.3.1 *Si M est une martingale locale telle que $M_0 = 0$ à variation finie, alors $M = 0$.*

Preuve. Soit $T_n = \inf\left\{t \geq 0, \int_0^t |sM_s| \geq n\right\}$, T_n temps d'arrêt, $N = M^{T_n}$ martingale locale issue de 0 :

$$N(t) \leq \int_0^{T_n} |dM_s| \leq n$$

donc N est une martingale bornée, on a :

$$\begin{aligned} E\left[N_t^2\right] &= E\left[\sum_{k=0}^{p-1}\left(N_{t_{k+1}}-N_{t_k}\right)^2\right] \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} E\left[\left(N_{t_{k+1}}-N_{t_k}\right)^2\right] \\ &\leq E\left[\sup_k \left|N_{t_{k+1}}-N_{t_k}\right| \sum_{k=0}^{p-1}\left|N_{t_{k+1}}-N_{t_k}\right|\right] \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{k=0}^{p-1}\left|N_{t_{k+1}}-N_{t_k}\right| \leq \int_0^t |dN_s| \leq \int_0^{T_n} |dM_s| \leq n$$

$$E\left[N_t^2\right] \leq nE\left[\sup_k \left|N_{t_{k+1}}-N_{t_k}\right|\right]$$

est $\sup\limits_k \left|N_{t_{k+1}}-N_{t_k}\right|$ est bornée car$N$ est bornée ainsi :

$$E[N_t^2] \longrightarrow 0 \; p.s$$

quand le pas de la subdivision tend vers 0, donc $E[N_t^2]=0$. $N=0$ presque sûrement par continuité. ■

1.3.3 Variation quadratique d'une martingale locale

Théorème 1.3.2 *Soit M une martingale locale il existe un unique processus $(\langle M,M\rangle_t)_{t\geq 0}$ croissant partant de 0 tel que $M_t^2-\langle M,M\rangle_t$ est une martingale locale, de plus, si $0=t_0^{(n)}<...<t_n^{(n)}=t$ est une suite de partitions emboîtées de $[0,t]$ dont le pas tend vers 0 alors :*

$$\langle M,M\rangle_t = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(M_{t_{k+1}^{(n)}}-M_{t_k^{(n)}}\right)^2$$

en probabilité. Le processus $\langle M,M\rangle$est indépendant de la suite de partition il est appelé variation quadratique de M.

Remarque 1.3.3 *1) Si $M_t = M_0 + N_t$ alors $\langle M, M \rangle_t = \langle N, N \rangle_t$*

2) Pour le mouvement Brownien B, on a $\langle B, B \rangle = t$ en effet :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(B_{t_{k+1}^{(n)}} - B_{t_k^{(n)}} \right)^2 - \left(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)} \right)^2 \xrightarrow{P} 0$$

en fait, la convergence a lieu dans L^2et

$$\begin{aligned} Var \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(B_{t_{k+1}^{(n)}} - B_{t_k^{(n)}} \right)^2 - \left(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)} \right)^2 \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} Var \left(\left(B_{t_{k+1}^{(n)}} - B_{t_k^{(n)}} \right)^2 \right) \\ &= c \sum_{k=0}^{n-1} \left(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)} \right)^2 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

3)l Lhypothèse "emboîtés"n'est pas nécessaire.

4) La variation quadratique est continue.

Théorème 1.3.3 *Soit M une martingale lolcale avec $M_0 = 0$,*

1) Il y a équivalence entre :

a. M est une martingale bornée dans L^2.

b. $E[\langle M, M \rangle_\infty] < +\infty$

Si ces conditions sont satisfaites, alors $(M_t^2 - \langle M, M \rangle_t)_{t \geq 0}$ est une martingale uniformément intégrable, en particulier,

$$E[M_\infty^2] = E[\langle M, M \rangle_\infty]$$

2) Il y a équivalence entre :

a. M est une martingale telle que pour tout t, $M_t \in L^2$.

b. $E[\langle M, M \rangle_t] < +\infty$.

Dans ce cas, $(M_t^2 - \langle M, M \rangle_t)_{t \geq 0}$ est une vraie martingale.

Remarque 1.3.4 *Dans a. l'hypothèse "vraie martingale" est nécessaire. Contre-exemple : Brownien en dim 3.*

Preuve. "a $\Longrightarrow$ b" Doob (pour les vraies martingales). :

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0\le s\le t}|M_s|^2\right] &\le 4E[M_t^2] \\ &\le C<+\infty \end{aligned}$$

Soit $(T_n)_n$ qui réduit $M^2-\langle M,M\rangle$,

$$\begin{aligned} E\left[M_{t\wedge T_n}-\langle M,M\rangle_{t\wedge T_n}\right] &= 0 \\ E\left[\langle M,M\rangle_{t\wedge T_n}\right] &\le E\left[\sup_{0\le s\le t}M_s^2\right]\le C<+\infty \\ E[\langle M,M\rangle_\infty] &\le C<+\infty \end{aligned}$$

par Fatou.

"b $\Longrightarrow$ a" Soit T_n qui réduit $M_t^2-\langle M,M\rangle_t$, posons $S_n=T_n\wedge\inf\{t\ge 0,|M_t|\ge n\}$, M^{S_n} est une martingale bornée.

$$E\left[M_{t\wedge S_n}^2\right]=E\left[\langle M,M\rangle_{t\wedge S_n}\right]\le E[\langle M,M\rangle_\infty]<+\infty.$$

Par Fatou,

$$E\left[M^2\right]=E\left[\langle M,M\rangle_{t\wedge S_n}\right](M_{t\wedge S_n})_n$$

est une martingale bornée dans L^2 donc uniformément bornée et converge presque sûrement dans L^1.

$$\begin{aligned} E\left[M_{t\wedge S_n}|\mathcal{F}_s\right] &= M_{s\wedge S_n} \\ E\left[M_t|\mathcal{F}_s\right] &= M_s \end{aligned}$$

donc M est une martingale, il reste à voir que $M^2 - \langle M, M\rangle$ est une martingale uniformément bornée,

$$E\left[M^2 - \langle M, M\rangle\right] \leq \sup_{s\geq 0} M_s^2 + \langle M, M\rangle_\infty$$

$\sup_{s\geq 0} M_s^2$ est intégrable par Doob, ainsi $M^2 - \langle M, M\rangle$ est une martingale uniformément bornée.

2) Il suffit d'appliquer le résultat 1) à $(M_{t\wedge t_0})_{t\geq 0}$ pour t_0 fixé. ■

Corollaire 1.3.1 *Si M est une martingale locale qui part de 0 telle que $\langle M, M\rangle = 0$, alors $M = 0$.*

Preuve. On a M^2 vraie martingale : $E\left[M_t^2\right] = E\left[M_0^2\right] = 0$. ■

Définition 1.3.5 *Soient M, N deux martingales locales, on appelle covariation de M et N le processus*

$$\langle M, N\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle M+N, M+N\rangle - \langle M, M\rangle - \langle N, N\rangle\right).$$

Proposition 1.3.9 *1) $\langle M, N\rangle$ est l'unique processus à variation finie tel que $MN - \langle M, N\rangle$ tel que $MN - \langle M, N\rangle$ est une martingale locale.*

2) L'application $M, N \to \langle M, N\rangle$ est bilinéaire.

3) Si $0 = t_0^{(n)} < ... < t_n^{(n)} = t$ est une suite de subdivisions dont le pas tend vers 0, alors :

$$\langle M, N\rangle_t = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(M_{t_{k+1}^{(n)}} - M_{t_k^{(n)}}\right)^2\left(N_{t_{k+1}^{(n)}} - N_{t_k^{(n)}}\right)^2.$$

4) Si T est un temps d'arrêt, on a :

$$\left\langle M^T, N^T\right\rangle_t = \left\langle M^T, N\right\rangle_t = \langle M, N\rangle_{t\wedge T}$$

5) Si M, Nsont des martingales bornées dans L^2, alors $MN - \langle M, N\rangle$ est une martingale uniformément intégrable.

De plus, $\langle M, N \rangle_t \underset{ps}{\longrightarrow} \langle M, N \rangle_\infty$ *intégrable et tel que :*

$$E\left[M_\infty N_\infty\right] - E\left[\langle M, N \rangle\right] = E\left[M_0 N_0\right]$$

Corollaire 1.3.2 *Si* B *et* B' *sont deux Browniens indépendants, alors :*

$$\langle B, B' \rangle = 0.$$

Preuve. Soit $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(B + B'\right)$ c'est un mouvement Brownien ;

$$\begin{aligned}
\langle Z, Z \rangle_t = t &= \frac{1}{2}\langle B + B', B + B' \rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(\langle B, B \rangle_t + \langle B', B' \rangle_t\right) + \langle B, B' \rangle_t
\end{aligned}$$

donc $\langle B, B' \rangle_t = 0.$ ■

Chapitre 2

Intégrale stochastique

2.1 Intégrale stochastique d'itô Brownienne

2.1.1 Intégrale Brownienne des processus en escalier progrissivement mesurable

Définition 2.1.1 *On définit l'espace vectoriel des processus en escalier progrissivement mesurable et de carré intégrable $\mathcal{E}sc\,(T\times\Omega;\mathcal{F}_t - Prog)$ ou seulement $\mathcal{E}sc\,(Prog)$ comme étant l'espace des processus $\phi=\phi\,(s,\omega)$ de la forme :*

$$\phi\,(t;s)=\sum_{k=0}^{n-1}\phi_k\,(\omega)\,1_{[t_k,t_{k+1}]}(s) \tag{2.1}$$

avec $0=t_0\langle.......\langle t_n\in T$ *et* $\emptyset_k\in L^2\left(\mathcal{F}_{t_k}^B\right)$ *pour tout* $k=0,.......n-1.$

Définition 2.1.2 *Pour tout processus $\phi\in\mathcal{E}sc\,(T\times\Omega;\mathcal{F}_t - Prog,dtdP)$ dont l'expression est donnée par 2.1.On définit l'integrale stochastique Brownienne de ϕ comme etant la variable aléatoire,*

$$\forall\ \omega\in\Omega\qquad\left(\int_T\phi dB\right)(\omega)=\sum_{k=0}^{n-1}\phi_k\,(\omega)\,(B\,(t_{k+1},\omega)-B\,(t_{k,\omega}))$$

Et plus généralement comme étant le processus stochastique défini par : $\forall t \in T, \forall \omega \in \Omega$

$$\begin{aligned}(\phi \cdot B)(\omega) = \left(\int_T \phi dB \right)(\omega) &= \sum_{j=0}^{k-1} \phi_j \left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j} \right) + \phi_k \left(B_t - B_{t_k} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j \left(B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j} \right) 1_{t_j \leq t} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j \left(B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t} \right)\end{aligned}$$

avec k *choisi la premier identité de sorte que* $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ *ou* $k = n$*, et avec la notion* $a \wedge b = min(a; b)$ *pour deux réels* $a, b \in \mathbb{R}$*.*

L'égalité entre la deuxiéme définition résulte de ce que $\left(B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j} \right) 1_{t_j \leq t} = \left(B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t} \right)$ *pour tout* t *et tout* j*.Il est alors clair que l'intégrale stochastique est un processus adapté à la filtration* $\mathcal{F}_t$*et à trajectoire continue p.s.*

Remarquons que la définition de l'intégrale stochastique comme variable aléatoire en prenant $T = [0, t]$ *on en posant :*

$$\left(\int_0^t \phi dB \right)(\omega) = \int_T \left[\phi(s, \omega) 1_{[0,t]}(s) \right] dB_S(\omega)$$

Et en remarquant que :

$$\phi(s) 1_{[0,t]}(s) = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j 1_{\left]t_j \wedge t; t_{j+1} \wedge t\right]} = \sum_{j=0}^{k-1} \phi_j 1_{]t_j; t_{j+1}]} + \phi_k 1 \,]t_k, t] \qquad si \ t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

on conservera donc la notion à la place de $[0, t]$*.*

Lemme 2.1.1 *Pour tout processus l'integrale stochastique Brownienne associée satisfait :*

$$E \left| \int_T \phi dB \right|^2 = E \left(\int_T |\phi(t, \omega)|^2 \, dt \right) = \|\phi\|^2_{L^2(T \times \Omega)}.$$

Preuve. On calcule :

$$\begin{aligned}
E\left(\int_T \phi dB\right)^2 &= E\left[\sum_{k;i=0}^{n-1} \phi_k\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)\phi_k\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)\right] \\
&= 2\sum_{j\prec k} E\left[\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)\phi_k\phi_j\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)\right] + \sum_{k=0}^{n-1} E\left[\phi_k^2\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)^2\right] \\
&= 2\sum_{j\prec k} E\left[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right] E\left[\phi_k\phi_j\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)\right] + \sum_{k=0}^{n-1} E\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)^2 E\phi_k^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(t_{k+1} - t_k\right)E\phi_k^2 = E\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(t_{k+1} - t_k\right)\phi_k^2\right] = E\left(\int_T \left|\phi\left(t,\right)\right|^2 dt\right)
\end{aligned}$$

ou on utilisé le fait que $B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$ est indépandant des autres va qui appartiennent à $\mathcal{F}_{t_k}$. ■

Lemme 2.1.2 *Pour tout processus $\phi \in \mathcal{E}sc\left(T\times\Omega;\mathcal{F}_t - Prog, dtdP\right)$ l'intégrale stochastique Brownienne associée est une martingale, en particulier $E\left(\phi\cdot B_t\right) = 0$ $\forall t \geq 0$.*

Preuve. Soit $s, t \in T, s < t$ on suppose qu'il exsiste $k \in \{0, ..., n-1\}$ tel que $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ on calcule :

$$\begin{aligned}
E\left(\int_0^t \phi dB|\mathcal{F}_s\right) &= \sum_{j=0}^{n-1} E\left(\phi_j\left(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j}\right)|\mathcal{F}_s\right)1_{t_j\leq t} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} E\left(\phi_j\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)|\mathcal{F}_s\right) + E\left(\phi_k\left(B_{t_{k+1}\wedge t} - B_{t_k}\right)|\mathcal{F}_s\right) \\
&+ \sum_{j=k+1}^{n-1} E\left(\phi_j\left(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j}\right)|\mathcal{F}_s\right)1_{t_j\leq t}
\end{aligned}$$

comme $\sigma\left[\emptyset_j\left(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j}\right)\right] \subset \mathcal{F}_{t_k} \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $j \leq k-1$, le premier terme donne

$$\sum_{j=0}^{k-1} E\left(\phi_j\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)|\mathcal{F}_s\right) = \sum_{j=0}^{k-1}\phi_j\left(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j}\right)$$

comme $B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{t_k} \supset \mathcal{F}_s$ pour tout $j \geq k+1$ avec ,le dernier terme donne ;

$$\begin{aligned}\sum_{j=k+1}^{n-1}\mathbf{E}\left(\emptyset_j\left(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j}\right)|\mathcal{F}_s\right)1_{t_j\leq t} &= \sum_{j=k+1}^{n-1}\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\phi_j\left(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j}\right)|\mathcal{F}_s\right)|\mathcal{F}_s\right)1_{t_j\leq t}\\ &= \sum_{j=k+1}^{n-1}\mathbf{E}\left(\phi_j\mathbf{E}\left(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j}\right)|\mathcal{F}_s\right)1_{t_j\leq t}\\ &= 0\end{aligned}$$

Enfin , la deuxième terme s'écrit,

$$\begin{aligned}E\left(\phi_j\left(B_{t_{k+1}\wedge t} - B_{t_j}\right)|\mathcal{F}_s\right) &= \mathbf{E}\left(\phi_j\left(B_{t_{k+1}\wedge t} - B_s\right)|\mathcal{F}_s\right) + E\left(\phi_k\left(B_s - B_{t_k}\right)|\mathcal{F}_s\right)\\ &= \phi_k\ E\ \left(B_{t_{k+1}\wedge t} - B_s\right) + \phi_k\ \left(B_s - B_{t_k}\right)\\ &= \phi_k\left(B_s - B_{t_k}\right)\end{aligned}$$

on obtient donc :

$$E\left(\int_0^t \phi dB|\mathcal{F}_s\right) = \sum_{j=0}^{k-1}\phi_j\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right) + \phi_k\left(B_s - B_{t_k}\right)$$

en recollant les morceaux, ce qui est les resultat annoncé. ■

2.2 Intégrale brownien des processus progressivement mesurables de carré sommable

l'idée maintenant est de définir l'intégrale stochastique pour un intégrale général $\phi \in L^2$ $(\mathbb{T}; Prog)$ par :

$$\int \phi dB = \lim \int \phi_n dB$$

Avec (ϕ_n) une suite de fonctions en escalier convergent vers ϕ, comme cela se fait trés souvent en analyse, on montre que la suit de droit est une suit de Cauchy ,et l'intégrale stochastique est alors, par définition,le processus limite obtenu. Afin que cette intégrale soit à la fois un processus adapté à la filtration $\mathcal{F}^{\mathcal{B}}$ et un processus continu nous somme amés à "gonfler" un peu cella -ci afin qu'elle contienne tous les ensembles négligeables.on définit dorénavant

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(B_s, 0 \leq s \leq t\right) \vee N$$

ou N désigne la collectin des ensembles négligeables.

Définition 2.2.1 *Un processus ϕ sur $T \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$est dit progressivement mesurable si pour tout $t \in T$ la v a $(s,\omega) \mapsto \phi(s,\omega)$ de $[0,t] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$est $\beta(0,t) \otimes \mathcal{F}_t-$mesurable on note $L^P\left(T \times \Omega; \mathcal{F}_t - Prog, dtdP\right)$,ou seulement $L^P\left(T \times \Omega; \mathcal{F}_t - Prog\right)$, l'éspace des processus ϕ progressivement mesurables sur $T \times \Omega$ bornés dans $L^P\left(T \times \Omega; \beta(T) \otimes \mathbf{A}, \mathbf{P}\right)$.*

Lemme 2.2.1 *On a $\mathcal{E}sc\left(T \times \Omega; Prog, dtdP\right) \subset L^P\left(T \times \Omega; Prog, dtdP\right)$.*

Preuve. D'une part, en définissant k par $t_k \leq t \leq t_{k+1}$,on a :

$$\phi_{[0,t]\times\Omega}(s,\omega) = \sum_{j=0}^{k-1} \phi_j 1_{]t_j, t_{j+1}\wedge t]}(s) \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable}$$

puisque alors $\sigma(\phi_j) \subset \mathcal{F}_{t_j} \subset \mathcal{F}_{t_k}$ pour tout $j \leq k$,déautre part ,on a :

$$\int_{\mathbb{T}\times\Omega} |\phi|^2 \, dsdP = \sum_{j=0}^{n-1} E\left[|\phi_j|^2\right]\left(t_{j+1} - t_j\right)$$

qui est fini. ■

Lemme 2.2.2 *Les espaces $L^p(\mathbb{T}, \mathcal{F}_t - Prog)$sont des espaces de Banach, l'espace $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{F}_t - Prog)$est un espace de Hilbert.*

Lemme 2.2.3 *Pour tout processus* $\phi \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{F}_t - Prog)$ *il existe une suite* (ϕ_n)*de processus de* $\mathcal{E}sc(\mathbb{T} \times \Omega; \mathcal{F}_t - Prog, dtdP)$*telle que :*

$$E\left(\int_{\mathbb{T}} \left|\phi\left(t,.\right) - \phi_n\left(t,.\right)\right|^2 dt\right) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

Pour tout processus continu (ou càd) et progressivement mesurable , on peut d ´efinir (ϕ_n)*en posant*

$$\phi_n\left(t\right) = \phi_n\left(t_k^n\right) \forall t \in \Delta_k^n = \left]t_k^n, t_{k+1}^n\right]$$

avec $(t^{nk})_{0 \leq k \leq n-1}$ *suite de* $\mathbb{T}$ *telle que* $t_0^n = 0$ *et* $\forall k \ t_{k+1}^n - t_k^n = n \to 0$*, lorsque* $n \longrightarrow \infty$*.*

Preuve. Dans le cas général, on définit

$$\phi_n\left(t,\omega\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\delta^n}\left(\int_{\Delta_{k-1}^n} \phi\left(s,\omega\right) ds\right) 1_{\Delta_k^n}\left(t\right) \quad \Delta_k^n = \left]t_k^n, t_{k+1}^n\right]$$

On voit que ϕ_n est progressivement mesurable et dans L^2 car l'est. ■

Preuve. Pour $\psi \in L^2(\mathbb{T})$, on définit

$$\zeta_n\left[\psi\right] = \int_{\mathbb{T}} \left|\psi\left(t\right) - \psi_n\left(t\right)\right|^2 dt. \ \psi_n\left(t\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k^n 1_{\Delta_k^n}\left(t\right). \quad \psi_k^n = \frac{1}{\delta^n}\left(\int_{\Delta_{k-1}^n} \psi\left(s\right) ds\right)$$

Alors, d'une part par Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} \left|\psi_n\left(t\right)\right|^2 dt &= \int_{\mathbb{T}} \sum_{j,k} \frac{1}{\left(\delta^n\right)^2}\left(\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} \psi\left(s\right) ds\right) 1_{\left]t_j^n, t_{j+1}^n\right]}\left(\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \psi\left(s\right) ds\right) 1_{\left]t_k^n, t_{k+1}^n\right]} \\
&= \sum_k \frac{1}{\left(\delta^n\right)^2}\left(\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} \psi\left(s\right) ds\right)^2 \int_{\mathbb{T}} 1_{\left]t_j^n, t_{j+1}^n\right]}\left(t\right) dt \\
&\leq \sum_k \int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} \left|\psi\left(s\right)\right|^2 ds = \int_{\mathbb{T}} \left|\psi\left(s\right)\right|^2 ds
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\zeta_n [\psi] \leq 4 \int_{\mathbb{T}} |\psi(s)|^2 \, ds \tag{2.2}$$

D'autre part, si $\psi \in C_c(\mathbb{T})$ et si υ désigne le module de continuité uniforme de ψ , on a

$$\begin{aligned}
\zeta_n [\psi] &= \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_k \left(\psi(t) - \psi_k^n\right) 1_{\Delta_k^n}(t) \right|^2 dt \\
&= \int_{\mathbb{T}} \sum_k |\psi(t) - \psi_k^n|^2 \, 1_{\Delta_k^n}(t) \, dt \\
&= \sum_k \int_{\Delta_k^n} |\psi(t) - \psi_k^n|^2 \, dt \leq \sum_k 1_{\left\{\sup p\psi \cap \Delta_k^n \neq \emptyset\right\}} \upsilon(\delta^n)^2 \leq C_\psi \upsilon(\delta^n)^2 \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

lorsque $n \longrightarrow \infty$, donc par densité $C_c(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$, on a également pour tout $\psi \in L^2(\mathbb{T})$

$$\zeta_n [\psi] \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty \tag{2.3}$$

En combinant 2.2, 2.3 avec $\psi = (., \omega)$ et le thoéréme de convergence dominée on obtient

$$\int_{\nleq} \zeta_n [\phi(., \omega)] \, dP(\omega) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

■

Proposition 2.2.1 *(i) Soit X une va et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de A, on a l'inégalité de Jensen* $\left|E^{\mathcal{B}} X\right| \leq E^{\mathcal{B}} |X|$

(ii) Soit M une $\mathcal{F}-$Martingale, alors $|M|$ est une $\mathcal{F}$-sousmartingale.

(iii) Soit M une martingale de carré intégrable et càd, alors on a l'inégalité Maximale de Doob

$$\forall t \geq 0 \quad E\left[\underset{0 \leq s \leq t}{max} |M(s)|^2\right] \leq 4E\left[M(t)^2\right]$$

en particulier, la variable aléatoire $max_{0 \leq s \leq t} |M(s)|^2$ est intégrable.

Preuve. (i) Par définition on a $E(E^{\mathcal{B}} XZ) = E(XZ)$ pour tout $0 \leq Z \in L^1(\mathcal{B})$.

On a donc pour tout $0 \leq Z \in L^1(\mathcal{B})$, et en notant $Z' = Z sign E^{\mathcal{B}} X \in L^1(\mathcal{B})$,

$$E(E^{\mathcal{B}}X|Z) = E(E^{\mathcal{B}}XZ)$$

(ii) Par (i) on a $E(|M_t||\mathcal{F}_s) \geq |E(M_t|\mathcal{F}_s)| = M_s$.

(iii) On introduit une suite $\left(t_j^n\right)$ de temps définie par $t_j^n = jt/n$, la sous-martingale $S(t) = |M(t)|$ et le processus croissant $X_j = sup_{0\leq k\leq j} S(t_k)$ et $X_{-1} = 0$.

La différence $X_{j+1}^2 - X_j^2 = (X_{j+1} - X_j)(X_{j+1} + X_j)$ est majorée par $2S_{t_{j+1}}(X_{j+1} - X_j)$ (faire une disjonction des cas $X_{j+1} = X_j$ et $X_{j+1} > X_j$) de sorte que par définition d'une sous-martingale $E(S_{t_{j+1}}|\mathcal{F}^M_{t_{j+1}}) \leq E(S_t|\mathcal{F}^M_{t_{j+1}})$ et donc

$$\forall j \leq n-1 \;\; E\left[X_{j+1}^2 - X_j^2\right] \leq E\left[2S_{t_{j+1}}\left(X_{j+1} - X_j\right)\right] \leq 2E\left[S_t\left(X_{j+1} - X_j\right)\right]$$

en sommant cette inégalité entre $j = 0$ et $j = n-1$ et en utilisant Cauchy-Schwarz on a :

$$E\left[X_n^2\right] \leq 2E\left[S_t X_n\right] \leq 2E\left[S_t^2\right]^{\frac{1}{2}} E\left[X_n^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ce qui prouve

$$E\left[\sup_{0\leq k\leq n} M_{t_k}^2\right] \leq 4E\left[M_t^2\right]$$

On conclut en passant à la limite $n \longrightarrow \infty$ et en utilisant le fait que M est càd. ■

Théorème 2.2.1 *Il existe une application linéaire continue I de $L^2(\mathbb{T}, Prog)$ dans $\mathcal{M}_c^2(\mathbb{T})$ l'espace des martingales réelles, continues, de carré intégrable, ayant les propriétés suivantes :*

(a) Si $\phi \in \mathcal{E}sc(\mathbb{T}, Prog)$ on a $I(\phi)(t) = \int_0^t \phi_s dB_s$.

(b) Pour tout $\phi \in L^2(\mathbb{T}, Prog)$ et tout $t \in \mathbb{T}$

$$E\left(I\left(\phi\right)\left(t\right)^2\right) = E\left(\int_0^t \left|\phi_s\right|^2 ds\right)$$

et

$$E\left(\sup_{[0,T]} I(\phi)(t)^2\right) \leq 4E\left(\int_0^T |\phi_s|^2 ds\right)$$

On note encore $I(\phi)(t) = (\phi \bullet B)_t = \int_0^t \phi_s dB_s$ *l'intégrale Brownienne de* ϕ.

Remarque 2.2.1 *Prenons maintenant* $\phi = B1_{[0,T]}$ *que l'on peut approcher par :*

$$\psi_n = \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_{k+1}} 1_{]t_k,t_{k+1}]} \text{ ou } \phi_n = \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k} 1_{]t_k,t_{k+1}]}$$

on a alors

$$\int \psi_n dB - \int \phi_n dB = \sum_{k=0}^{n-1} \left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)^2 \longrightarrow T$$

Lorsque $k \longrightarrow \infty$, *cet exemple montre qu'il est important de choisir quelle approximation on fait lorsque l'on construit l'intégrale stochastique.*

Comme Itô, nous faisons le choix de l'approximation non anticipante ϕ_n*.Le choix de l'approximation anticipante* ψ_n*conduit à l'intégrale de Stratonovitch qui est légérement différente de celle d'Itô.*

Preuve. On considére (ϕ_n) une suite de $\mathcal{E}sc(Prog)$ telle que $\phi_n \longrightarrow \phi$ dans $L^2(Prog)$. Comme l'intégrale stochastique $M_n = \phi_n\ B$ est une Martingale, il en est de même du processus $M_m - M_n$, de sorte que l'inégalité de Doob et l'isométrie dans L^2 donnent

$$\begin{aligned} E\left(\sup_{t\in[0,T]} |M_m(t) - M_n(t)|^2\right) &\leq 4E\left(|M_m(T) - M_n(T)|^2\right) \\ &= 4E\left(\int_0^T |\phi_m - \phi_n|^2 dt\right) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque $m, n \longrightarrow \infty$. Cela montre que $M_n|_{[0,T]}$est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; C([0,T]))$ de sorte que (M_n) admet une limite M, notée par la suite $M = \phi \bullet B$. Par construction on a donc :

(i)$t \longrightarrow M_t(\omega)$ est continue p.s.

(ii) M satisfait évidemment la second borne de (b) ainsi que la relation d'isométrie puisqu'en particulier pour tout $t \in [0,T]$ on a :

$$EM_t^2 = \lim_{n \longrightarrow \infty} EM_{nt}^2 = \lim_{n \longrightarrow \infty} E \int_0^t \phi_n^2 ds = E \int_0^t \phi^2 ds$$

(iii) De $M_n(t) \in \mathcal{F}_t$ pour tout $n \geq 1$ on tire qu'à la limite $M(t) \in \mathcal{F}_t$.

(iv) Enfin $M_n(t) \longrightarrow M(t)$ dans L^2 implique $E(M_n(t)|\mathcal{F}_s) \longrightarrow E(M(t)|\mathcal{F}_s)$ dans L^2, et en revenant à la définition de l'espérance conditionnelle et d'une martingale on a pour tout $Z \in L^2(\mathcal{F}_s)$

$$E(M(s)Z) = \lim_{n \longrightarrow \infty} E(M_n(s)Z) = \lim_{n \longrightarrow \infty} E(E\left(M_n(t)|\mathcal{F}_s\right)Z) = E(E\left(M(t)|\mathcal{F}_s\right)Z)$$

ce qui est exactement dire que M_t est une $\mathcal{F}$-martingale.On a ainsi, entre autre, démontré le résultat suivant. ■

2.3 Processus d'Itô et formule d'Itô

2.3.1 Formule d'Ito dans le cas Brownien

Théorème 2.3.1 *Soit B un mouvement Brownien réel et soit f une fonction de classe $C_b^2(\mathbb{R})$, ce qui signifieque f est de classe C^2 et que f, f'et f''sont des fonctions bornées, alors :*

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds. \tag{2.4}$$

Remarque 2.3.1 *En prenant B un mouvement Brownien standard et $f(x) = x^2$, on retrouve*

$$B_t^2 - t = 2\int_0^t B_s dB_s \quad \text{est une martingale.et donc } E\left[B_t^2\right] = t$$

Puisque l'intégrale Brownienne est une martingale donc d'éspérance nulle, bien sur, appliquer la formule d'Itô à la fonction $f(x) = x^2$ n'est pour l'instant pas licite, mais on *montrera que la formule est valable dés que $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec $f\prime(B_s) \in L^2$ et $f'(B_s) \in L^1$.*

Preuve. On introduit une suite de temps $0 = t_0 < t_1 \leq ... \leq t_n = t$ avec $t_k = k_t / n$ de sorte que

$$\begin{aligned} f(B_t) &= f(B_0) + \sum_{i=1}^{n} \left[f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}}) \right] \\ &= f(B_0) + \sum_{i=1}^{n} f'(B_{t_{i-1}}) \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f''(\theta_i) \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \right)^2 \end{aligned}$$

avec θ_i dans l'intervalle $(B_{t_{i-1}}, B_{t_i})$. Le second terme s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n} f'(B_{t_{i-1}}) \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \right) = \int_0^t \phi_n(s)\, dB_s$$

avec

$$\phi_n(s) = \sum_{i=1}^{n} f'(B_{t_{i-1}}) 1_{t_{i-1} < s \leq t_i} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f'(B_s) \text{ dans } L^2([0,t] \times \Omega; Prog) \tag{2.5}$$

en effet, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^t (\phi_n(s) - f'(B_s))^2\, ds \right] &= \sum_{i=1}^{n} E\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(f'(B_{t_{i-1}}) - f'(B_s) \right)^2 ds \right] \\ &\leq \|f''\|_\infty^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} E\left[\left(B_s - B_{t_{i-1}} \right)^2 \right] ds \\ &\leq \|f''\|_\infty^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (s - t_{i-1})^2\, ds = \|f''\|_\infty^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\frac{t}{n} \right)^2 \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Par construction de l'intégrale stochastique Brownienne, on a donc :

$$\sum_{i=1}^{n} f'(B_{t_{i-1}}) \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \right) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \int_0^t f'(B_s) dB_s.$$

Pour le troisiéme terme, on écrit,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(\theta_i)\left(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\right)^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(f''(\theta_i)-f''(B_{t_{i-1}})\right)\left(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\right)^2 \quad (=T_1)\\ &+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(B_{t_{i-1}})\left(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\right)^2-(t_i-t_{i-1}) \quad (=T_2)\\ &+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(B_{t_{i-1}})(t_i-t_{i-1}) \quad (=T_3)\end{aligned}$$

et on traite chaque terme séparemment. Pour le premier terme, on a par Cauchy-Schwarz

$$E\left|T_1\right| \leq \frac{1}{2}\left\{E\sup_i\left|\left(f''(\theta_i)-f''(B_{t_{i-1}})\right)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

qui tend vers 0 puisque la premiére espérance tend vers 0 grace au théoréme de convergence dominée (on utilise que f'' est bornée et que les trajectoires sont continues) et le second terme tend vers t (c'est précisément la définition de la variation quadratique du mouvement Brownien).Pour le second terme, on écrit,

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{i-1}\left(\Delta_i^2-\delta_i\right)$$

avec $\varphi_{i-1}=f''(B_{t_{i-1}})$, $\Delta_i = B_{t_i}-B_{t_{i-1}}$ et $\delta_i = t_i - t_{i-1}$. On calcule alors en utilisant que $\Delta_j \coprod \mathcal{F}_{t_{j-1}}$ et $E\left[\Delta_j^2-\delta_j\right]=0$.

$$\begin{aligned}E\left[T_2^2\right] &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} E\left[\varphi_{i-1}\left(\Delta_i^2-\delta_i\right)\varphi_{i-1}\right]E\left[\Delta_j^2-\delta_j\right]+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} E\left[\varphi_{i-1}^2\left(\Delta_i^2-\delta_i\right)^2\right]\\ &\leq \frac{\|f''\|_\infty^2}{4}\sum_{i=1}^{n} E\left[\varphi_{i-1}^2\left(\Delta_i^2-\delta_i\right)^2\right]\end{aligned}$$

Qui tend vers 0, comme cela a été démontré dans la preuve de la variation totale du mouvement Brownien.Enfin, le dernier terme tend vers l'intégrale annoncée. ■

Théorème 2.3.2 *(Extension 1 : cas non bornée). Soit B un mouvement Brownien réel* *et soit f une fonction de classe C^2 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$on a :*

$$|f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)| \leq Ae^{|x|^a}, A > 1, a < 2,$$

alors la formule 2.4 est encore valable.

Preuve. On introduit une fonction impaire $T \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq T' \leq 1, T(x) = x$ pour$|x| \leq 1$, $T''(x) = 0$ pour $|x| \geq 2$, et on définit $f_n(x) = f(nT(\frac{x}{n}))$. On a $f_n \in C_b^2(\mathbb{R})$ de sorte que

$$f_n(B_t) = f_n(B_0) + \int_0^t f_n'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_n''(B_s)ds \tag{2.6}$$

et

$$f_n'(x) = f'(nT(\frac{x}{n}))T'(\frac{x}{n}), \quad f_n''(x) = f''(nT(\frac{x}{n}))T'(\frac{x}{n})^2 + \frac{1}{n}f'(nT(\frac{x}{n}))T''(\frac{x}{n})$$

On passe alors terme à terme à la limite $n \longrightarrow \infty$, traitons par exemple le deuxiéme terme, grace à la relation d'isométrie et pour n assez grand (on choisit n tel que $2n^a \leq \frac{n^2}{(4t)}$) on a

$$\begin{aligned}
E\left(\int_0^t \left(f_n'(B_s) - f'(B_s)\right)dB_s\right)^2 &= \int_0^t E\left(\left(f_n'(B_s) - f'(B_s)\right)\right)ds \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(f_n'(x) - f'(x)\right)^2 \frac{e^{-x^2/(2s)}}{\sqrt{2\pi s}}dxds \\
&\leq 4\int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{2|x|^a} 1_{|x|\geq n}\frac{e^{-x^2/(2s)}}{\sqrt{2\pi s}}dxds \\
&\leq 4\int_0^t \left\{\int_{\mathbb{R}} 1_{|\sqrt{sy}|\geq n}\frac{e^{-y^2/4}}{\sqrt{2\pi}}dy\right\}ds \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

puisque le terme entre $\{...\}$ est plus petit que $\sqrt{2}$ et tend vers 0 pour tout $s > 0$, et il suffit d'appliquer le théoréme de convergence dominée. ■

Théorème 2.3.3 *(Extension 2 : cas dépendant du temps), soit B un mouvement Brownien réel et soit $f \in C_b^2(\mathbb{R}^2)$, alors :*

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t (\partial_x f)(s, B_s)dB_s + \int_0^t (\partial_s f)(s, B_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\partial_{xx}^2 f\right)(s, B_s)ds$$

Preuve. On écrit

$$f(t,B_t)=f(0,B_0)+\sum_{i=1}^{n}\left[f(t_i,B_{t_i})-f(t_i,B_{t_{i-1}})\right]+\sum_{i=1}^{n}\left[f(t_i,B_{t_{i-1}})-f(t_{i-1},B_{t_{i-1}})\right]$$

Et le dernier terme (qui est le terme nouveau) donne une contribution

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\left(\partial_s f\right)\left(\eta_i,B_{t_{i-1}}\right)(t_i-t_{i-1})\longrightarrow\int_0^t\left(\partial_s f\right)(s,B_s)ds$$

lorsque $n\longrightarrow\infty$. ■

Théorème 2.3.4 *(Extension 3 : cas vectoriel). Soit $B=(B^1,...,B^d)$ un mouvement Brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$ et soit $f\in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ alors :*

$$f(B_t)=f(B_0)+\sum_{k=1}^{d}\int_0^t\left(\partial_{x_k}f\right)(B_s)dB_s^k+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\Delta f\right)(B_s)ds.$$

Preuve. Pour simplifier les notations traitons le cas $d=2$, on écrit,

$$\begin{aligned}
f(B_t)&=f(B_0)+\sum_{i=1}^{n}\left[f(B_{t_I}^1,B_{t_i}^2)-f(B_{t_{i-1}}^1,B_{t_{i-1}}^2)\right]+\sum_{i=1}^{n}\left[f(B_{t_{i-1}}^1,B_{t_I}^2)-f(B_{t_{i-1}}^1,B_{t_{i-1}}^2)\right]\\
&=f(B_0)+\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\partial_1 f\right)(B_{t_{i-1}}^1,B_{t_i}^2)(B_{t_I}^1-B_{t_{i-1}}^2)+\left(\partial_2 f\right)(B_{t_{i-1}})(B_{t_i}^2,B_{t_{i-1}}^2)\right\}\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\partial_{11}^2 f\right)(\theta_i^1,B_{t_{i-1}}^2)(B_{t_I}^1-B_{t_{i-1}}^1)+\left(\partial_{22}^2 f\right)(B_{t_{i-1}}^1,\theta_i^2)(B_{t_i}^1-B_{t_{i-1}}^2)^2\right\}\\
&=f(B_0)+\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\partial_1 f\right)(B_{t_{i-1}})(B_{t_I}^1-B_{t_{i-1}}^2)+\left(\partial_2 f\right)(B_{t_{i-1}})(B_{t_i}^2,B_{t_{i-1}}^2)\right\}\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\partial_{11}^2 f\right)(\theta_i^1,B_{t_{i-1}}^2)(B_{t_I}^1-B_{t_{i-1}}^1)^2+\left(\partial_{22}^2 f\right)(B_{t_{i-1}}^1,\theta_i^2)(B_{t_i}^1-B_{t_{i-1}}^1)^2\right\}\\
&+\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\partial_{12}^2 f\right)(B_{t_{i-1}}^1,\theta_i^3)-\left(\partial_{12}^2 f\right)(B_{t_{i-1}})\right](B_{t_i}^1-B_{t_{i-1}}^1)(B_{t_i}^2,B_{t_{i-1}}^2)\\
&+\sum_{i=1}^{n}\left(\partial_{12}^2 f\right)(B_{t_{i-1}})(B_{t_i}^1-B_{t_{i-1}}^1)(B_{t_i}^2,B_{t_{i-1}}^2) \qquad (=T_4)
\end{aligned}$$

et la seule difficulté nouvelle est de passer à la limite dans le dernier terme (et de voir pourquoi la limite est nulle), noter que l'avant dernier terme se raméne à un terme du type T_1 dans la preuve du théoréme en utilisant l'inégalté de Young :

$$\left|(B^1_{t_i} - B^1_{t_{i-1}})(B^2_{t_i}, B^2_{t_{i-1}})\right| \leq \frac{1}{2}(B^1_{t_i} - B^1_{t_{i-1}})^2 + \frac{1}{2}(B^2_{t_i}, B^2_{t_{i-1}})^2$$

pour estimer le terme T_4, on note

$$\varphi_{i-1} = \left(\partial^2_{12} f\right)(B_{t_{i-1}}), \Delta_{l,i} = B^l_{t_i} - B^l_{t_{i-1}}, \Delta_{1+2,i} = \left(B^1_{t_i} - B^2_{t_i}\right)/\sqrt{2} - \left(B^1_{t_{i-1}} - B^2_{t_{i-1}}\right)/\sqrt{2}$$

et $\delta_i = t_i - t_{i-1}$, de sorte que l'on a :

$$\begin{aligned} T_4 &= \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i-1} \Delta_{1,i} \Delta_{2,i} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i-1} \left(2\Delta_{1+2,i} - \Delta_{1,i} - \Delta_{2,i}\right) \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} \varphi_{i-1} \left(\Delta^2_{1+2,i} - \delta_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i-1} \left(\Delta^2_{1,i} - \delta_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i-1} \left(\Delta^2_{2,i} - \delta_i\right) \end{aligned}$$

En remarquant que le $t \mapsto (B^1_t - B^2_t)$ processus est un mouvement Brownien (il suffit de constater qu'il vérifie la caractérisation gaussienne d'un mouvement Brownien) adapté à la filtration $\mathcal{F}^B$, on voit que les trois termes tendent vers 0 dans L^2. ∎

Remarque 2.3.2 *Pour des processus X, Y, Z on définit la variation quadratique $\langle X \rangle_T$ par*

$$\langle X \rangle_T = \langle X \rangle = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2,$$

si cette limite existe pour toute suite de partitions $0 = t_0 < ... < t_n = T$, et la covariation $\langle Y, Z \rangle_T$

$$\langle Y, Z \rangle_T = (\langle Y + Z \rangle - \langle Y \rangle - \langle Z \rangle) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n} (Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}})(Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}})$$

Si dans la premiére définition les quantités sont toutes bien définies, ou de maniére équivalente, si dans la deuxiéme définition cette limite existe pour toute suite de partitions

$0 = t_0 < ... < t_n = T$, *ce que l'on vient de démontrer dans le théoréme c'est que pour deux mouvements brownien* B^1 *et* B^2 *indépendants on a :*

$$\left\langle B^1, B^2 \right\rangle = 0$$

2.3.2 Processus d'Itô

Définition 2.3.1 *Soit* B *un mouvement Brownien à valeurs dans* $\mathbb{R}^{d_1}$.*On appelle processus d'Itô, un processus* $(X_t)_t \in T$ ' *à valeurs dans* $\mathbb{R}^{d_2}$ *qui s'écrit sous la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \phi_s dB_s + \int_0^t \psi_s ds \tag{2.7}$$

avec $X_0 \in \mathbb{R}^{d_2}$*un va* $\mathcal{F}_0$*-mesurable,* $\phi \in L^2(\mathbb{T}; \mathcal{F}^B - Prog)$ '*à valeurs dans l'espace des matrices* $d_2 \times d_1$ *et* $\psi \in L^1(\mathbb{T}; \mathcal{F}^B - Prog)$ '*à valeurs dans* $\mathbb{R}^{d_2}$ *pour etre plus explicite, on écrit :*

$$X_i (t) = X_i (0) + \sum_{j=1}^{d_1} \int_0^t \phi_{ij} (s) \, dB_j (s) + \int_0^t \psi_i (s) \, ds$$

On introduit la notation "infinitésimale" dX *du processus d'Itô* X *par :*

$$dX_s = \phi_s dB_s + \psi_s ds$$

et le crochet $\langle X \rangle$ *du processus d'Ito* X *par :*

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t \phi_s^2 ds \text{ ou } dX_t = \phi_t^2 dt \quad \text{si } X \text{ est réel} \tag{2.8}$$

$$\langle X \rangle_{ij} (t) = \langle X_i, X_j \rangle_t = \int_0^t \sum_{l=1}^{d_1} \phi_{il} (s) \, \phi_{jl} (s) \, ds \text{ ou } d \langle X_i, X_j \rangle_t = \sum_{l=1}^{d_1} \phi_{il} (t) \, \phi_{jl} (t) \, dssi \ X \in \mathbb{R}^{d_2} \tag{2.9}$$

Preuve. Etape 1.En prenant $t = 0$ on a$X_0 = X'_0$ p.s, on définit :

$$Z_t = \int_0^t (\phi - \phi'_s)\, dB_s = \int_0^t (\psi - \psi'_s)\, ds$$

puisque Z est une martingale (c'est une intégrale stochastique), on a

$$\begin{aligned} E\left(Z_t^2\right) &= E\left[\sum_{k=1}^{n} (Z_{t_k}^2 - Z_{t_{k-1}}^2)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} E\left[Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}}\right]^2 \end{aligned}$$

En prenant maintenant la premiére expression de Z, on en déduit grace à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} E\left(Z_t^2\right) &= E\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi(s)\, ds\right]^2 \leq E\sum_{k=1}^{n}\left[(t_k - t_{k-1})\int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi^2(s)\, ds\right] \\ &= \sup_{1\leq k\leq n} (t_k - t_{k-1})\, E\left[\int_0^t \psi^2(s)\, ds\right] \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

ce qui démontre $Z \equiv 0$.

Etape 2.On a alors d'une part pour toute fonction $\chi \in C^1([0,T])$ telle que $\chi(T) = 0$ par intégration par parties :

$$\int_0^T \chi\,(\psi - \psi'_s)\, ds = -\int_0^T \chi'(t)\left(\int_0^t (\psi - \psi'_s)\, ds\right) dt$$

Et en choisissant $\chi_n \rightarrow sign\,(\psi - \psi'_s)$ on obtient

$$\int_0^T |\psi - \psi'_s|\, ds = 0$$

Et donc $\psi = \psi'_s$. Enfin, grace à la relation d'isométrie on a :

$$E\int_0^t (\phi_s - \phi'_s)^2\, ds = E\left(\int_0^T (\phi_s - \phi'_s)\, dB_s\right)^2 = 0$$

ce qui implique également $\phi_s = \phi_s'$ p.s. ■

Définition 2.3.2 *Soit X un processus d'Ito de la forme2.7.Pour toute fonction $\mathcal{F}^B$-progressivement mesurable on définit l'intégrale stochastique par rapport au processus X par :*

$$\int_0^t \theta_s dX_s = \int_0^t \theta_s \phi_s dB_s + \int_0^t \theta_s \psi_s ds$$

dés que $\theta_s \phi_s \in L^2$ et $\theta_s \psi_s \in L^1$.

Théorème 2.3.5 *(Extension 5 : processus d'Ito réel). Soit X un processus d'Ito réel de la forme 2.7.Pour toute fonction $f \in C_b^2(\mathbb{R})$on a :*

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \phi_s dB_s + \int_0^t \left[f'(X_s) \psi_s + \frac{1}{2} f''(X_s) \phi_s^2 \right] ds \end{aligned}$$

Preuve. Etape1 : On commence par considérer le cas (indépendant du temps)

$$dX_t = \phi(\omega) dB_t + \psi(\omega) dt$$

avec $\phi, \psi \in L^\infty(\mathcal{F}_0)$, on procéde comme dans les extensions précédantes, en écrivant

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{i=1}^n \left[f(X_{t_i}) - f\left(X_{t_{i-1}}\right) \right] \\ &= f(X_0) + \sum_{i=1}^n f'(X_{t_i}) \left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(\theta_i) \left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right)^2 \end{aligned}$$

avec i dans l'intervalle $(X_{t_{i-1}}, X_{t_i})$, or, par définition,

$$X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi_s dB_s + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_s ds = \phi\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \right) + \psi(t_i - t_{i-1})$$

ce qui implique d'une part que

$$\sum_{i=1}^{n} f'\left(X_{t_i}\right)\left(X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right) \longrightarrow \int_0^t f'(X_s)\phi_s dB_s + \int_0^t f'(X_s)\psi_s ds = \int_0^t f'(X_s)dX_s$$

cela implique d'autre part que

$$\left(X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right)^2 = \phi^2\left(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\right)^2 + 2\phi\left(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\right)\psi\left(t_i-t_{i-1}\right)+\psi^2\left(t_i-t_{i-1}\right)$$

et on estime le deuxiéme terme par

$$\begin{aligned} E\left|\phi\left(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\right)\psi\left(t_i-t_{i-1}\right)\right| &= \left|t_i-t_{i-1}\right| E\left|\phi\psi\right| E\left|B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\right| \\ &\leq \left|t_i-t_{i-1}\right|^{\frac{3}{2}} E\left|\phi^2\right|^{\frac{1}{2}} E\left|\psi^2\right|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On voit donc en sommant et en passant à la limite $n \longrightarrow \infty$ que le deuxiéme terme et le troisiéme terme donnent une contribution nulle, alors que le premier terme converge vers le terme habituel (multiplié par ϕ^2).On a donc ainsi démontré la formule d'Itô dans ce cas. Etape 2.On traite le cas d'une fonction en escalier en itérant la premiére étape, enfin dans le cas général $\phi \in L^2(Prog)$, $\psi \in L^1(Prog)$, il existe des suites (ϕ_n) et (ψ_n) de $\mathcal{E}sc(Prog)\bigcap L_\infty$ telles que $\phi_n \to \phi$ dans L^2 et $\psi_n \longrightarrow \psi$ dans L^1 et telles que

$$f(X_t^n) = f(X_0) + \int_0^t f'(X^n(s))\phi_n(s)\,dB_s + \int_0^t \left[f'(X_s^n)\psi_n(s) + \frac{1}{2}f''(X^n(s))\phi_n^2(s)\right] ds$$

ou on a défini le processus d'Itô $X^{\ n}$ par :

$$X_t^n = X_0 + \int_0^t \phi_n(s)\,dB_s + \int_0^t \psi_s(s)\,ds$$

on conclut en passant à la limite $n \longrightarrow \infty$. ■

Remarque 2.3.3 *On vient d'établir une deuxiéme régle de calcul concernant le crochet,* *à savoir que :*

$$\langle B, t\rangle = 0$$

Théorème 2.3.6 *(Extension 6 : processus d'Itô vectoriel).Soient X un processus d'Itô défini par et $f \in C^2(\mathbb{R}^{d_2+1})$ alors on a ;*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \bigtriangledown f(s, X_s) dX_s + \int_0^t (\partial_s f)(s, X_s) ds + \frac{1}{2}\int_0^t D^2 f(s, X_s) d\langle X\rangle_s$$

lorsque

i) $\phi = (\phi_{ij}) \in L^2(Prog)$, $\psi = (\psi_i) \in L^1(Prog)$ et $f \in C_b^2$.

ii) $\phi = (\phi_{ij}), \psi = (\psi_i) \in \mathcal{E}sc([0,T]; Prog) \bigcap L_\infty([0,T] \times \Omega)$ et f satisfait pour tout : $x \in \mathbb{R}$ ona

$$|f(x)| + |Df(x)| + |D^2 f(x)| \leq Ae^{|x|^a}, A > 1, a < 2,$$

(iii) "moralement" dés que $Df(X)\phi \in L^2$ et $Df(X)\psi, D^2 f(X)\phi^{\otimes 2} \in L^1$.

Preuve. On procéde en plusieurs étapes.

Etape 1.Pour tout , $\phi, \psi \in \mathcal{E}sc([0,T]; Prog) \bigcap L_\infty([0,T] \times \Omega)$ il existe $k > 0$ tel que le processus d'Itô X associé satisfait

$$\forall t \in [0,T] \quad E\left(\exp\left(kX_t^2\right)\right) \leq C < \infty$$

Pour simplifier on ne traite que le cas de la dimension $d_1 = 1$ et que le terme (plus délicat) $(\phi \bullet B)_t$.En effet, on a :

$$(\phi \bullet B)_t^2 = \left(\sum_{k=1}^n \phi_{k-1}\left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right)\right)^2 \leq C_n \|\phi\|_\infty^2 \sum_{k-1}^n \left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right)^2$$

de sorte qu'avec $\delta_k = t_k - t_{k-1} \leq T$ et $k > 0$ assez petit tel que $A < \frac{1}{(2T)}$

$$E\left[\exp\left(\varepsilon(\phi \bullet B)_t^2\right)\right] \leq E\left[\exp\left(A\sum_{k-1}^{n}\left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right)^2\right)\right] \leq \prod_{k-1}^{n} E\left[\exp\left(A\left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right)^2\right)\right]$$
$$\leq \prod_{k-1}^{n} E\left[\exp\left(AB_{\delta_k}^2\right)\right] = \prod_{k-1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{Ax^2 - \frac{x^2}{2\delta_k}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi\delta_k}} \leq \prod_{k-1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 2^{\frac{n}{2}}$$

cette (trés mauvaise) borne permet de justifier tous les calculs à venir.

Etape 2. On commence par considérer le cas indépedant du temps

$$dX_t = \phi(\omega)\,dB_t + \psi(\omega)\,dt = \left(\sum_{j=1}^{d_1}\phi_{ij}dB_{jt} + \psi_i(\omega)\,dt\right)_{1\leq i\leq d_2}$$

avec ϕ_{ij}, $\psi_i \in L_\infty(\mathcal{F}_0)$ Pour la suite de temps $t_k = \frac{kt}{n}$, on écrit

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{k=1}^{n}\left[f\left(X_{t_k}\right) - f\left(X_{t_{k-1}}\right)\right]$$
$$= f(X_0) + \int_0^t \triangledown f(X_{t_{k-1}})\left(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right) + \sum_{k=1}^{n}\int_0^1 (1-s)\,D^2 f(\theta_s)\left(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right)^{\otimes 2} ds$$

avec $\theta_s = sX_{t_k} + (1-s)X_{t_{k-1}}$.Or, par définition,

$$X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = \phi\left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right) + \psi\left(t_i - t_{i-1}\right) = \left(\sum_{j=1}^{d_1}\phi_{ij}\left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right) + \psi_i\left(t_k - t_{k-1}\right)\right)_{1\leq i\leq d_2}$$

ce qui implique d'une part que (en somment l'indice i de 1 à d_2 et l'indice j de 1 à d_1)

$$\sum_{k=1}^{n}\triangledown f(X_{t_{k-1}})\left(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right) = \sum_{i;j}\sum_{k=1}^{n}\left(\partial_i f\right)(X_{t_{k-1}})\phi_{ij}\left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right) + \psi_i\left(t_k - t_{k-1}\right)$$
$$\longrightarrow \sum_{i;j}\partial_i f\left(X_s\right)\left(\phi_{ij}dB_{js} + \psi_i ds\right) = \int_0^t \triangledown f(X_s)dX_s$$

Cela implique d'autre part que (avec convention de sommation des indices répétés)

$$\begin{aligned}\left(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right)_{ij}^{\otimes 2} &= \phi_{ip}\phi_{jq}\left(B_{pt_k}-B_{pt_{k-1}}\right)\left(B_{qt_k}-B_{qt_{k-1}}\right)+\phi_{ip}\left(B_{pt_k}-B_{pt_{k-1}}\right)\psi_j\left(t_k-t_{k-1}\right)\\ &\quad+\phi_{jq}\left(B_{qt_k}-B_{qt_{k-1}}\right)+\psi_i\left(t_k-t_{k-1}\right)+\psi_i\psi_j\left(t_k-t_{k-1}\right)^2\end{aligned}$$

ou tous les termes, sauf éventuellement le premier, sont en $\mathcal{O}(|t_k-t_{k-1}|^{3/2})$ Pour le premier terme, on a

$$\phi_{ip}\phi_{jq}\sum_{k=1}^{n}\left(B_{pt_k}-B_{pt_{k-1}}\right)\left(B_{qt_k}-B_{qt_{k-1}}\right)\longrightarrow\phi_{ip}\phi_{jq}\left\langle B_p,B_q\right\rangle=\phi_{ip}\phi_{jq}\delta_{pq}t$$

En conclusion, on a démontré que la limite ci-dessous existe et sa valeur est

$$\langle X\rangle_{ij}^{\otimes 2}(t)=\lim_{k\to\infty}\left(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right)_{ij}^{\otimes 2}=\sum_{p=1}^{d_2}\int_0^t\phi_{ip}\phi_{jq}ds$$

Etape 3. Pour établir (i), on procéde comme dans la deuxiéme étape du théoréme.

Etape 4. Pour établir (ii), on reprend la preuve du théoréme2.6 . Avec les notations introduites dans cette preuve, le point clef est d'estimer le terme suivant (où pour simplifier on ne considére que le cas $\psi\equiv 0$, on utilise la borne de l'étape 1 et on choisit n assez grand de sorte que $2n^a\leq\frac{\varepsilon n^2}{2}$),

$$\begin{aligned}E\left(\int_0^t\left(f_n'\left(X_s\right)-f'(X_s)\right)dX_s\right)^2&=E\left(\int_0^t\left(f_n'\left(X_s\right)-f'(X_s)\right)^2\phi_s^2\right)ds\\ &\leq\|\phi\|_\infty^2\int_0^T E\left[A^2e^{2|X|^a}1_{|X|\geq n}\right]ds\\ &\leq A^2\|\phi\|_\infty^2\int_0^t E\left[\left(e^{\varepsilon|X|^2/2}1_{|X|\geq n}\right)\left(e^{\varepsilon|X|^2/2}e^{-\varepsilon n^2/2}1_{|X|\geq n}\right)\right]ds\\ &\leq A^2\|\phi\|_\infty^2\int_0^t E\left[\left(e^{\varepsilon|X|^2}1_{|X|\geq n}\right)\right]dse^{-\varepsilon n^2/2}\longrightarrow 0\end{aligned}$$

lorsque $n\longrightarrow\infty$. ■

Remarque 2.3.4 *Ce que l'on a démontré est que l'on a la régle de calcul*

$$\langle X,Y\rangle = \langle X\rangle + 2\langle X,Y\rangle + \langle Y\rangle$$

pour les processus d'Itô X et Y.

2.4 Martingales remarquables

2.4.1 Représentation d'une martingale Brownienne

Nous avons vu qu'une intégrale stochastique browienne était une martingale, nous allons maintenant montrer la réciproque.

Théorème 2.4.1 *Soit B un mouvement Brownien et M une $\mathcal{F}^B$-martingale bornée dans L^2.Alors il existe un (unique) processus $\phi \in L^2(B)$ tel que :*

$$M_t = E(M_0) + \int_0^t \phi_s dB_s \tag{2.10}$$

On a va commencer par démontrer deux résultats intermédiaires.

Lemme 2.4.1 *Soit B un mouvement Brownien, et soit $T \in \mathbb{T}$ fixé. L'espace V engendré par les variables aléatoires*

$$\exp(i\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right))$$

pour $0 = t_0 < ... < t_n = T$ et $1,...,n \in \mathbb{R}$est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}^B_T)$

Preuve. L'espace V est égal à l'espace vectoriel engendré par les fonctions de la forme $\exp(i\sum_{k=1}^n \mu_k B_{t_k})$ qui est dense dans l'espace vectoriel engendré par les fonctions de la forme $(B_{t_1}, ..., B_{t_n})$ (c'est un théoréme de densité dans $C_b(\mathbb{R}^{nd})$), qui est lui-meme dense dans l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}^B_T)$ (c'est une propriété de classe monotone liée à la définition de $\mathcal{F}^B_T$). ∎

Lemme 2.4.2 *Soient B un mouvement Brownien, $T \in \mathbb{T}$ fixé et X une va $\mathcal{F}_T^B-$mesurable et bornée dans L^2.Alors il existe un (unique) processus $\phi \in L^2(B)$tel que :*

$$X = E(X) + \int_0^t \phi_s dB_s$$

Preuve. Notons $\mathcal{H}$ le sous-espace véctoriel des va $M_T \in L^2(\Omega; \mathcal{F}_T)$ vérifiant pour $t = T$. Nous allons montrer que $\mathcal{H}$ est fermé, $\mathcal{H}$ contient un sev dense dans $L^2(\Omega; \mathcal{F}_T)$, donc $\mathcal{H} = L^2(\Omega; \mathcal{F}_T)$.Puis nous obtiendrons 2.10 en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_t^B$.

Premiére étape :unicité remarquons que si ϕ et ψ sont deux processus progressifs vérifiant alors :

$$E\left[\int_0^t (\phi_s - \phi_s)^2 \, ds\right] = E\left[\int_0^T (\phi_s - \phi_s)^2 \, dB_s\right] = 0$$

d'ou l'unicit de la représentation .

Deuxiéme étape : $\mathcal{H}$ est fermé. De la meme maniére, si (Z^n) est une suite de $\mathcal{H}$ convergente dans $L_2(\Omega; \mathcal{F}_T)$ vers une limite Z et si (ϕ^n) est la suite de processus de $L^2(B)$ associés, alors

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^t (\phi_s^m - \phi_s^n)^2 \, ds\right] &= E\left[\int_0^T (\phi_s^m - \phi_s^n) \, dB_s\right]^2 \\ &= E\left[(Z^m - E(Z^m)) - (Z^n - E(Z^n))\right]^2 \\ &\leq 2\left\|Z^n - Z^m\right\|_{L^2} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

et donc (ϕ^n) est une suite de Cauchy, on en déduit que (ϕ^n) converge vers une limite qui est un processus de $L^2(B)$, et que ϕ et $M_T = Z$ satisfont, donc $\mathcal{H}$ est fermé.

Troisiéme étape : $\mathcal{H}$ est dense dans $L_2(\Omega; \mathcal{F}_T)$. Soient $0 = t_0 < ... < t_n = T$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ et

$$M_t = \exp\left[i\left(\phi \bullet B\right)_t\right], \quad \phi_s = \sum_{k=1}^n \lambda_k 1_{]t_{k-1}, t_k]}.$$

En posant $f(t,X)=\exp(iX+\frac{1}{2}\int_0^t\phi_s^2ds)$ la formule d'Itô implique

$$\begin{aligned}
M_T\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T\phi_s^2ds\right) &= f\left(T,(\phi\bullet B)_T\right) \\
&= f(0,0)+\int_0^T\left(\partial_x f\right)(s,X_s)\phi_s dB_s+\int_0^T\left(\partial_s f\right)(s,X_s)ds \\
&+\int_0^T\left(\partial_{xx}^2 f\right)(s,X_s)d\left\langle X\right\rangle_s \\
&= 1+i\int_0^T f(s,X_s)\phi_s dB_s+\int_0^T f(s,X_s)\left(\frac{1}{2}\phi_s^2 ds+i^2 d\left\langle X\right\rangle_s\right) \\
&= 1+i\int_0^T f(s,X_s)\phi_s dB_s
\end{aligned}$$

ce qui montre que l'espace vectoriel H_0 engendré par les variables aléatoires

$$\exp(i\sum_{k=1}^n\lambda_k\left(B_{t_k}-B_{t_{k-1}}\right))=M_T$$

est inclus dans $\mathcal{H}$

D'aprs le appliqué à $Z=M_T$, il existe un unique $\phi\in L^2(B)$ tel que :

$$M_T=E\left(M_T\right)+\int_0^T\phi_s dB_s$$

On en déduit immédiatement

$$M_T=E\left(M_T|\mathcal{F}_t\right)=E\left(M_0\right)+\int_0^T\phi_s dB_s$$

pour tout $t\in[0,T]$. ■

2.4.2 Martingale quadratique

Théorème 2.4.2 *Pour tout , $\phi,\psi\in L^2(\mathbb{T},Prog)$, le processus $M_t$défini par*

$$M_t=X_tY_t-\int_0^t\phi_s^2\psi_s ds,\;\; X_t=\int_0^t\phi_s dB_s, Y_t=\int_0^t\psi_s ds$$

est une martingale continue centrée, en particulier

$$\left(\int_0^t \phi_s dB_s\right)^2 - \int_0^t \phi_s^2 dB_s \text{ est une martingale continue centrée}$$

Preuve. Soit $\phi \in L^2(Prog)$ et ϕ^n une suite de processus élémentaires de $\mathcal{E}sc(Prog) \bigcap L^\infty$ telle que $\phi^n \to \phi$ dans L^2. La formule d'Itô s'applique et donne

$$(\phi^n \bullet B)_t^2 = \int_0^t 2\left(\phi^n \bullet B\right)_s \phi_s^n dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\left(\phi_s^n\right)^2 ds$$

ce qui implique pour le processus associé à ϕ^n. Il n'y a alors aucune difficulté à passer à la limite $n \longrightarrow \infty$ et obtenir Pour deux processus $\phi, \psi \in L^2(Prog)$ on utilise l'identité de polarisation ;

$$M_t = \frac{1}{4}\left(\left((\phi+\psi)\bullet B\right)_t - \int_0^t (\phi+\psi)^2 ds\right) - \frac{1}{4}\left(\left((\phi-\psi)\bullet B\right)_t - \int_0^t (\phi-\psi)^2 ds\right)$$

et deux fois pour en déduire. ■

2.5 Intégrale stochastique par rapport martingale

2.5.1 Construction de l'intégrale stochastique

Définition 2.5.1 *Soit* $\mathbb{H}$ *l'espace des martingales* M *continues bornées dans* L^2 *(pour tout* $M \in \mathbb{H}$, $\sup_t E\left[M_t^2\right] < \infty$*) telles que* $M_0 = 0$*.On a vu que* $M, N \in \mathbb{H}$
$\Longrightarrow E\left[\left|\langle M, N\rangle_\infty\right|\right] < \infty$*, on définit la forme bilinéaire symétrique :*

$$(M, N)_{\mathbb{H}} = E\left[\left|\langle M, N\rangle_\infty\right|\right] = E\left[M_\infty N_\infty\right]$$

On a vu que $(M,M)_{\mathbb{H}} \geq 0$ *avec égalité si et seulement si* $M=0$*. On note*

$$\|M\|_{\mathbb{H}} = (M,M)_{\mathbb{H}}^{2}.$$

Proposition 2.5.1 *L'espace* $(\mathbb{H},(.,.)_{\mathbb{H}})$ *est un espace de Hilbert.*

Preuve. Il est clair que $\mathbb{H}$ est un espace vectoriel et que $(.,.)_{\mathbb{H}}$ est un produit scalaire.Il faut vérifier que $\mathbb{H}$ est complet pour $\|.\|_{\mathbb{H}}$. Soit $\left(M^{(n)}\right)$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{H}$ c'est équivalent à dire que $\left(M_{\infty}^{(n)}\right)$est de Cauchy dans L^2,donc $M_{\infty}^{(n)}$ converge dans L^2 vers $M_{\infty} \in L^2$.Par l'inégalité de Doob,

$$E\left[\sup_{t\geq 0}\left|M_t^{(m)} - M_t^{(n)}\right|^2\right] \leq 4E\left[\left(M_{\infty}^{(m)} - M_{\infty}^{(n)}\right)^2\right] \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On peut extraire une sous-suite telle que

$$E\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\sup_{t>0}\left|M_t^{(n_{k+1})} - M_t^{(n_k)}\right|\right] < +\infty$$

presque sûrement,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sup_{t>0}\left|M_t^{(n_{k+1})} - M_t^{(n_k)}\right| < +\infty$$

Donc $M^{(n_k)}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers une limite, notée M. M est donc continue comme limite uniforme de fonctions continues.$M_t^{(n_k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} M_t$ dans L^2.En particulier, $M_t \in L^2$ et $M_t^{(n_k)} = E\left[M_s^{(n_k)}|\mathcal{F}_t\right]$ pour $t \leq s$ et $M_t = E[M_s|\mathcal{F}_t]$ donc M est une martingale et $M_t = E[M_{\infty}|\mathcal{F}_t]$, par Doob,

$$E\left[\sup_{t\geq 0}\left|M^2\right|\right] \leq 4E\left[M_{\infty}^2\right]$$

donc (M_t) est uniformément bornée dans L^2 et on a bien

$$\left\|M^{(n)} - M\right\|_{\mathbb{H}}^2 = E\left[\left(M_{\infty}^{(n)} - M_{\infty}\right)^2\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

■

Définition 2.5.2 *Pour $M \in \mathbb{H}$, on pose*

$$L^2(M) = L^2(\Omega \times \mathbb{R}, Prog, dP \otimes d\langle M, M\rangle)$$

$L^2(M)$ est l'espace des processus progressifs tels que $E\left[\int_0^{+\infty} H_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right] < \infty$.C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(H, K)_{L^2(M)} = E\left[\int_0^{+\infty} H_s K_s d\langle M, N\rangle_s\right]$$

Définition 2.5.3 *On note $\mathcal{E}$ le sous-espace de $L^2(M)$ formée des processus de la forme*

$$H_s(\omega) = \sum_{k=0}^{p-1} H^{(k)}(\omega) 1_{]t_k, t_{k+1}]}(s)\,.\ où\ 0 < t_0 < ... < t_p$$

et $H^{(k)}$ est $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable et borné pour tout k.

Proposition 2.5.2 *Pour tout $M \in \mathbb{H}$, l'espace $\mathcal{E}$est dense dans $L^2(M)$.*

Preuve. Il suffit de montrer que $\mathcal{E}^{\perp} = \{0\}$.Soit $K \in \mathcal{E}^{\perp}$, on pose

$$X_t = \int_0^t K_u d\langle MM\rangle_u = 0$$

On vérifie que$(X_t)_t \subset L^1$.

$$E[|X_t|] \overset{CS}{\leq} E\left[\int_0^t K_u d\langle MM\rangle_u\right]^{\frac{1}{2}} \times E\left[\int_0^t d\langle MM\rangle_u\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

Donc $X_t \in L^1$. Soit $0 \leq s < t$ et soit F une variable aléatoire $\mathcal{F}_s$–mesurable bornée et soit $H_s(\omega) = F(\omega)1_{]s,t]}(u)$.On a $(H, K)_{L^2(M)} = 0$ ie

$$E\left[F \int_0^t K_u d\langle MM\rangle_u\right] = 0$$

d'où

$$E[F(Xt - Xs)] = 0$$

pour tout F $\mathcal{F}_s$-mesurable bornée et

$$E[F(X_t - X_s)] = 0$$

et

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_S : (X_t)_t$$

est une martingale à variation finie car $\int_0^t |K_u| \, d \langle MM \rangle_u < +\infty$.Donc $X = 0$ ie pour tout t,

$$\int_0^t K_u d \langle MM \rangle_u = 0$$

d'où $K = 0$ dans $L^2(M)$. ■

Théorème 2.5.1 *Soit $M \in \mathbb{H}$, pour tout $H \in \mathcal{E}$ de la forme*

$$H_s(\omega) = \sum_{k=0}^{p-1} H^{(k)}(\omega) 1_{]t_k, t_{k+1}]}(s)$$

(comme précédemment), on définit le processus $H.M$ par

$$(H.M)_r = \sum_{k=0}^{p-1} H^{(k)} \left(M_{t_{k+1} \wedge t} - M_{t_k \wedge t} \right)$$

1) L'application $H \longmapsto H.M$ s'étend en une isométrie de $L^2(M)$ dans $\mathbb{H}$.

2) Le processus $H.M$ est caractérisé par :

$$\forall \mathcal{N} \in \mathbb{H}, \langle H.M, N \rangle = H. \langle M, N \rangle = \int H_s d \langle M, N \rangle_s$$

3) Si T est un temps d'arrêt, alors :

$$\left(1_{[0,T]}H\right).M = (H.M)^T = H.\left(M^T\right)$$

Définition 2.5.4 *On note $(H.M)_t = \int_0^t H_s dM_s$ l'intégrale stochastique.*

Preuve. 1) $H.M$ est bien une martingale, bornée dans L^2, continue :

$H.M \in \mathbb{H}.H \longmapsto H.M$ est linéaire.Il reste à voir la propriété d'isométrie :

$$\|H.M\| = \|H\|_{L^2(M)},$$

$$\langle H.M, H.M\rangle_t = \sum_{k=0}^{p-1} \left(H^{(k)}\right)^2 \left(\langle M, M\rangle_{t_{k+1}\wedge t} - \langle M, M\rangle_{t_k\wedge t}\right)$$

$$\begin{aligned}
\|H.M\|_{\mathbb{H}}^2 &= E\left[\langle H.M, H.M\rangle_\infty\right] \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \left(H^{(k)}\right)^2 \left(\langle M, M\rangle_{t_{k+1}\wedge t} - \langle M, M\rangle_{t_k\wedge t}\right) \\
&= E\left[\int_0^t H_s d\langle M, N\rangle_s\right]
\end{aligned}$$

car $s \longmapsto \langle M, M\rangle_s$ est continue donc

$$\|H.M\|_{\mathbb{H}}^2 = \|H\|_{L^2(M)}^2$$

L'espace d'arrivée H est complet et $\mathcal{E}$ est dense dans $L^2(M)$ donc on peut étendre l'isométrie $H \longmapsto H.M$ à tout $L^2(M)$.

2) On vérifie que c'est vrai pour les processus élémentaires. On prend H de la forme habituelle. On a :

$$\begin{aligned}\langle H.M, N\rangle_t &= \sum_{k=0}^{p-1} H^{(k)} \left(\langle M, N\rangle_{t_{k+1}\wedge t} - \langle M, N\rangle_{t_k\wedge t}\right) \\ &= \int_0^t H_s^2 d\langle M, M\rangle_s\end{aligned}$$

et $s \longmapsto \langle M, M\rangle_s$ continue donc $\langle H.M, M\rangle_t = (H.\langle M, N\rangle)t$. Pour voir que le propriété reste vraie pour tout $H \in L^2(M)$, on observe que $X \longrightarrow \langle X, N\rangle_t$ est continue de H dans L^1. En effet, par l'inégalité de Kunita-Watanabe

$$\begin{aligned}E\left[\left|\langle X, N\rangle_t\right|\right] &\leq E\left[\left|\langle X, X\rangle_t\right|\right]^{\frac{1}{2}} E\left[\left|\langle N, N\rangle_t\right|\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|X\|_{\mathbb{H}} \|N\|_{\mathbb{H}}\end{aligned}$$

Si $H^{(n)} \in \mathcal{E}$ est tel que $H^{(n)} \longrightarrow H$ dans $L^2(M)$ alors $H^{(n)}.M \longrightarrow H.M$ dans $\mathbb{H}$ et donc $\left\langle H^{(n)}.M, N\right\rangle_t \to \langle H.M, N\rangle_t$ dans $L1$:

$$\begin{aligned}\langle H.M, N\rangle &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \left\langle H^{(n)}.M, N\right\rangle \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} H^{(n)}.\langle M, N\rangle \\ &= H.\langle M, N\rangle\end{aligned}$$

Il reste à vérifier $H.\langle M, N\rangle = \lim H^{(n)}\langle M, N\rangle$.

$$\begin{aligned}E\left[\left|\int_0^t \left(H^{(n)} - H\right) d\langle M, N\rangle_s\right|\right] &\leq E\left[\left|\int_0^t \left(H^{(n)} - H\right) d\langle M, N\rangle_s\right|\right]^{\frac{1}{2}} E\left[\left|\langle N, N\rangle_t\right|\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left\|H^{(n)} - H\right\|_{L^2(M)} \|N\|_{\mathbb{H}}.\end{aligned}$$

Voyons que si $X \in H$ est tel que pour tout $\mathcal{N} \in H$, $\langle X, N\rangle = H\ .\langle M, N\rangle$ alors $X = H.M$. Dans ce cas, on a :

$$\langle X - H.M, N\rangle\,, \forall \mathcal{N} \in H$$

On peut prendre $N = X - H.M$ et on obtient $\|X - H.M\|_{\mathbb{H}} = 0$ d'ou $X = H.M$

3) Soit T un temps d'arrêt. Pour tout $\mathcal{N} \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned}\left\langle (H.M)^{\,T}, N\right\rangle &= \langle H.M, N\rangle_{t\wedge T}\\ &= (H.\langle M, N\rangle)_{t\wedge T}\\ &= \left(H1_{[0,T]}.\langle M, N\rangle\right)_t\end{aligned}$$

donc $(H.M)^T = H1_{[0,T]}.M$. De la même façon,

$$\begin{aligned}\left\langle H.M^T, N\right\rangle &= \left(H.\left\langle M^T, N\right\rangle\right)_t\\ &= \left(H.\langle M, N\rangle^T\right)\\ &= H1_{[0,T]}.\langle M, N\rangle\end{aligned}$$

donc $H.(M_t) = \left(H1_{[0,T]}\right).M$. ■

Remarque 2.5.1 *On peut utiliser la propriété pour définir l'intégrale stochastique en utilisant le théorème de Riesz.On peut réécrire cette propriété sous la forme*

$$\left\langle \int_0^t H_s dM_s, N\right\rangle_t = \int_0^t H_s d\,\langle M, N\rangle_s$$

Proposition 2.5.3 *Associativité. Soit $M \in \mathbb{H}$. Si $K \in L^2(M)$ et $H \in L^2(K.M)$. Alors,*

$$HK \in L^2(M) \text{ et } HK.M = H.(K.M)$$

Preuve. D'après la propriété caractéristique , on a

$$\begin{aligned}\langle K.M, K.M\rangle &= K.\langle M, K.M\rangle \\ &= K.(K.\langle M, M\rangle) \\ &= K^2.\langle M, M\rangle\end{aligned}$$

∎

Proposition 2.5.4 *Donc* $\int_0^{+\infty} H_s K_s d(\langle M, M\rangle)_s = \int_0^{+\infty} H_s^2 \langle K.M, K.M\rangle_s$*, comme* $H \in L^2(K.M)$*, on a bien* $HK \in L^2(M)$*, soit* $N \in H$*, on a :*

$$\begin{aligned}\langle (HK).M, N\rangle &= (HK).\langle M, N\rangle \\ &= H.(K.\langle M, N\rangle)\end{aligned}$$

par associativité de l'intégrale contre les processus à variation finie

$$\langle (HK).M, N\rangle = H.\langle K.M, N\rangle$$

ce qui montre $(HK).M = H.(K.M)$*.De manière informelle,*

$$\int_0^t H_s d\left(\int_0^t K_u dM_u\right)_s = \int_0^t H_s K_s dM_s$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\left\langle \int_0^t H_s dM_s, \int_0^t K_s dN_s \right\rangle &= \int_0^t H_s d\left(\left\langle M, \int_0^t K_u dN_u \right\rangle\right)_s \\ &= \int_0^t H_s d\left(\int_0^t K_u d\langle M, N\rangle_u\right)_s \\ &= \int_0^t H_s K_s d(\langle M, N\rangle)_s\end{aligned}$$

Pour tout $M, N \in \mathbb{H}$ *et* $H \in L^2(M), N \in L^2(N)$,

$$\left\langle \int_0^t H_s dM_s, \int_0^t K_s dN_s \right\rangle = \int_0^t H_s K_s d\left(\langle M, N\rangle\right)_s$$

Comme $H.M$ *est une martingale bornée dans* L^2 : $E\left[\int_0^t H_s dM_s\right] = 0$, $s \leq t$,

$$E\left[\int_0^t H_u dM_u | \mathcal{F}_s\right] = \int_0^s H_u dM_u$$
$$E\left[\left(\int_0^t H_u dM_u\right)^2\right] = E\left[\int_0^t H_s^2 d\left\langle M, M\right\rangle_s\right]$$

et plus généralement,

$$E\left[\left(\int_0^t H_s dM_s\right)\left(\int_0^t K_s dN_s\right)\right] = E\left[\int_0^t H_s K_s d\left(\langle M, N\rangle\right)_s\right]$$

Extension de l'intégrale stochastique

Soit M une martingale locale issue de 0. On note $L^2_{loc}(M)$ l'espace des processus progressifs H tels que, presque sûrement, $\forall t \geq 0$, $\int_0^t H_s^2 d\left\langle M, M\right\rangle_s < +\infty$. On note $L^2(M)$ l'espace des processus tels que $E\left[\int_0^{+\infty} H_s^2 d\left\langle M, M\right\rangle_s\right] < +\infty$.

Théorème 2.5.2 *Soit* M *martingale locale issue de* 0. *pour tout* $H \in L^2_{loc}(M)$, *il existe une unique martingale locale* $H.M$ *tel que, pour tout* N *martingale locale,*

$$\langle H.M, N\rangle = H.\left\langle M, N\right\rangle$$

Si T *est un temps d'arrêt, on a :*

$$\left(1_{[0,T]}H\right).M = \left(H.M\right)^T = H.\left(M^T\right)$$

Si $K \in L^2_{loc}(M)$ *et* $L \in L^2_{loc}(K.M)$, *alors* $HK \in L^2_{loc}(M)$ *et*

$$(HK).M = H.(K.M)$$

Si $M \in \mathbb{H}$, *alors* $H.M$ *coïncide avec la définition précédente.*

Preuve. Soit

$$T_n = \inf\left\{t \geq 0, \int_0^t \left(1 + H_s^2\right) d\left\langle M, M\right\rangle_s \geq n\right\} \leq \inf\left\{t \geq 0, \int_0^t H_s^2 d\left\langle M, M\right\rangle_s \geq n \text{ ou } \left\langle M, M\right\rangle_t \geq n\right\} ps$$

$T_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, temps d'arrêt.

$$\left\langle M^{T_n}, M^{T_n}\right\rangle = \left\langle M, M\right\rangle_{t \wedge T_n} \leq n \text{ donc } M^{T_n} \in \mathbb{H}.$$

$$\int_0^{+\infty} H_s^2 d\left\langle M^{T_n}, M^{T_n}\right\rangle_s = \int_0^{T_n} H_s^2 d\left\langle M, M\right\rangle_s \leq n$$

donc $H \in L^2\left(M^{T_n}\right)$. L'intégrale stochastique $H.M^{T_n}$est bien définie. Si $m > n$,

$$(H.M^{T_m})^{T_n} = H.(M^{T_m \wedge T_n}) = H.(M^{T_n})$$

donc il existe un unique processus $H.M$ tel que $(H.M)^{T_n} = H.\left(M^{T_n}\right)$ On sait que $(H.M)^{T_n}$ est une martingale uniformément intégrable et $T_n \nearrow +\infty$ donc $H.M$ est une martingale locale.Soit N une martingale locale, qu'on suppose issue de 0 sans perte de généralité. Soit $T_n' = \inf\{t \geq 0 | \left|N_t\right| \geq n\}$ et on définit $S_n = T_n \wedge T_n'$

$$\begin{aligned}
\left\langle H.M, N\right\rangle^{S_n} &= \left\langle (H.M)^{T_n}, N^{S_n}\right\rangle \\
&= \left\langle \underset{\in \mathbb{H}}{H}.\underset{\in \mathbb{H}}{(M)^{T_n}}, N^{S_n}\right\rangle \\
&= H.\left\langle M^{T_n}, N^{S_n}\right\rangle
\end{aligned}$$

par la propriété caractéristique, d'où

$$\begin{aligned}\langle H.M, N\rangle^{S_n} &= H.\left\langle M^{T_n}, N^{S_n}\right\rangle \\ &= H.\langle M, N\rangle^{S_n} \\ &= (H.\langle M, N\rangle)^{S_n}.\end{aligned}$$

On a bien vérifié $\langle H.M, N\rangle = H.\langle M, N\rangle$ car $S_n \longrightarrow \infty$ presque sûrement. De même on montre que si $n \in \mathbb{H}$,$\left\langle (H.M)^{T_n}, N\right\rangle = H.\left\langle (M)^{T_n}, N\right\rangle$ caractérise $(H.M)^{T_n}$ pour tout n. ■

Remarque 2.5.2 *Par la propriété caractéristique*

$$\langle H.M, H.M\rangle = H.\langle M, H.M\rangle = H^2.\langle M, M\rangle$$

Si $E\left[\int_0^t H_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right] < +\infty$ *alors* $(H.M)_t$ *est une martingale uniformément intégrable et* $((H.M)^t)^2 - \langle H.M, H.M\rangle$ *aussi. En particulier, on a alors bien*

$$E\left[\int_0^t H_s dM_s\right] = 0$$

et

$$E\left[\left(\int_0^t H_s dM_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t H_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right]$$

L'égalité n'est pas vraie en générale mais on a toujours :

$$E\left[\left(\int_0^t H_s dM_s\right)^2\right] \leq E\left[\int_0^t H_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right]$$

On peut finalement définir l'intégrale par rapport à une semi-martingale.On dit qu'un processus progressif H *est localement borné si, presque sûrement, pour tout* $t \geq 0$, $\sup\limits_{0\leq s\leq t} |H_s| < +\infty$ *en particulier, tout processus adapté et continu est localement borné.Si* H *est localement borné et* A *est à variation finie, alors* $\int_0^t H_s|dA_s| < +\infty$ *et si* M *est une martingale* *locale, on a aussi*

$$\int_0^t H_s^2 d\left\langle M, M\right\rangle_s < +\infty$$

Définition 2.5.5 *Soit $X = M + A$ une semi-martingale où M est une martingale locale et A à variation finie, pour tout processus H localement borné, on pose :*

$$H.X = H.M + H.A$$
$$(H.X)_t = \int_0^t H_s dX_s$$

Proposition 2.5.5 *1) $(HK).X = H(K.X)$*

2) Pour tout T temps d'arrêt,$\left(1_{[0,T]}H\right).X = H.\left(X^T\right) = (H.X)^T$

3) Si Xest une martingale locale (resp. à variation finie) alors $H.X$ est une martingale locale (resp. à variation finie).

4) Si $H_s = \sum\limits_{k=0}^{p-1} H^{(k)} 1_{\{t_k \leq s \leq t_{k+1}\}}$ avec $H^{(k)}$ $\mathcal{F}_{t_k}-$mesurable (pas nécessairement borné) alors

$$(H.X)_t = \sum_{k=0}^{p-1} H^{(k)}\left(X_{t\wedge t_{k+1}} - X_{t\wedge t_k}\right)$$

Proposition 2.5.6 *Soit X une semi-martingale et H adapté continu.*

Soit $0 = t_0^{(n)} < ... < t_n^{(n)} = t$ subdivision dont le pas tend vers 0, on a :

$$\int_0^t H_s dX_s = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=0}^{n-1} H_{t_k^{(n)}}\left(X_{t_{k+1}^{(n)}} - X_{t_k^{(n)}}\right)$$

au sens de la convergence en probabilité.

Preuve. $X = M + A$. La partie faisant intervenir A est claire, soit

$$H_s^{(n)} = \begin{Bmatrix} H_{t_k^{(n)}} & \text{si } t_k^{(n)} < s \leq t_{k+1}^{(n)} \\ 0 & \text{si } s = 0 \text{ ou } s \geq t \end{Bmatrix}$$

Soit $T_p = \inf\left\{s \geq 0, |H_s| + \left\langle M, M\right\rangle_s \geq p\right\}.H.H^{(n)}$ et $\left\langle M, M\right\rangle$ sont bornés sur $[0, T_p]$.

On a :

$$E\left[\left(\left(H^{(n)}.M^{T_p}\right)_t - \left(H.M^{T_p}\right)_t\right)^2\right] \leq E\left[\int_0^{t\wedge T_p}\left(H_s^{(n)} - H_s\right)^2 d\left\langle M,M\right\rangle_s\right]$$

Or, $H_s^{(n)} - H_s \longrightarrow 0$ presque sûrement donc $E\left[\int_0^{t\wedge T_p}\left(H_s^{(n)} - H_s\right)^2 d\left\langle M,M\right\rangle_s\right] \longrightarrow 0$ par le théorème de convergence dominée donc $\lim \left(H^{(n)}.\left(M^{T_p}\right)\right)_t = \left(H.M^{T_p}\right)$ dans L^2

$$\left(H^{(n)}.M\right)_{t\wedge T_p} \xrightarrow{L^2} (H.M)_{t\wedge T_p}$$

■

Remarque 2.5.3 *Le résultat n'est pas vrai si on remplace H_{t_k} par $H_{t_{k+1}}$.Pour le voir, on peut prendre $H = X$:*

$$\sum X_{t_{k+1}}\left(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right) = \sum X_{t_k}\left(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right) + \sum\left(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right)$$

donc

$$\lim \sum X_{t_{k+1}}\left(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right) = \int_0^t X_s dX_s + \left\langle X,X\right\rangle_t$$

$$X_t^2 - X_0^2 = 2\int_0^t X_s dX_s + \left\langle X,X\right\rangle_t$$

2.6 Formule d'Itô

La formule d'Itô est un équivalent du théorème fondamental de l'analyse pour l'intégrale stochastique. On peut aussi l'interpréter comme une sorte de formule de Taylor pour le calcul stochastique.

Théorème 2.6.1 *Formule d'Itô.*

1) Soit X une semi-martingale et $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$de classe C^2. Alors,

$$f\left(X_t\right)=f\left(X_0\right)+\int_0^t f'\left(X_s\right)dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''\left(X\right)d\left\langle X,X\right\rangle_s$$

2) Plus généralement, si $X^{(1)},...,X^{(p)}$ sont des semi-martingales et $F:\mathbb{R}_p\longrightarrow\mathbb{R}$ est C^2, alors

$$\begin{aligned}F\left(X_t^{(1)},...,X_t^{(p)}\right)&=F\left(X_0^{(1)},...,X_t^{(p)}\right)+\sum_{i=1}^{p}\int_0^t\frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s^{(1)},...,X_s^{(p)})dX_s^{(i)}\\&+\frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq p}\int_0^t\frac{\partial^2F}{\partial x_i\partial x_j}(X_s^{(1)},...,X_s^{(p)})d\left\langle X^{(i)},X^{(j)}\right\rangle_s\end{aligned}$$

Remarque 2.6.1 *En particulier, $f(X_t)$ est une semi-martingale et la formule d'Itô donne la décomposition.*

Preuve. On traite d'abord 1). Soit $0=t_0^{(n)}<...<t_n^{(n)}=t$ une suite de subdivision dont le pas tend vers 0.

$$f\left(X_t\right)-f\left(X_0\right)=\sum_{k=1}^{n-1}f\left(X_{t_{k+1}^{(n)}}\right)-f\left(X_{t_k^{(n)}}\right)$$

Par la formule de Taylor-Lagrange,

$$f\left(X_{t_{k+1}^{(n)}}\right)-f\left(X_{t_k^{(n)}}\right)=f'\left(X_{t_k^{(n)}}\right)\left(X_{t_{k+1}^{(n)}}-X_{t_k^{(n)}}\right)+\frac{1}{2}f''_{n,k}\left(X_{t_{k+1}^{(n)}}-X_{t_k^{(n)}}\right)^2$$

où $f''_{n,k}=f''(z_{n,k})$ pour un $z_{n,k}$ entre $X_{t_k^{(n)}}$et $X_{t_{k+1}^{(n)}}$. On a bien :

$$\sum_{k=1}^{n-1}f'\left(X_{t_k^{(n)}}\right)\left(X_{t_{k+1}^{(n)}}-X_{t_k^{(n)}}\right)\xrightarrow{(P)}\int_0^t f'\left(X_s\right)dX_s$$

Il reste à voir :

$$\sum_{k=1}^{n-1}f''_{n,k}\left(X_{t_{k+1}^{(n)}}-X_{t_k^{(n)}}\right)^2\xrightarrow{(P)}\int_0^t f''\left(X\right)d\left\langle X,X\right\rangle_s$$

Définissons pour $m \leq n$,

$$I_{m,n} = \sum_{k=1}^{m-1} f''_{m,k} \sum_{l:t_k^{(m)} \leq t_l^{(m)} < t_{k+1}^{(m)}} \left(X_{t_{k+1}^{(n)}} - X_{t_k^{(n)}} \right)^2$$

On a :

$$I_{m,n} \underset{n \longrightarrow \infty}{\overset{(P)}{\longrightarrow}} \int_0^t h_m (s)\, d \langle X, X \rangle_s \underset{m \longrightarrow \infty}{\overset{(P)}{\longrightarrow}} \int_0^t f'' (X_s)\, d \langle X, X \rangle_s$$

où $h_m (s) = f''_{m,k}$ si $t_k^{(m)} \leq s < t_{k+1}^{(m)}$. En effet, presque sûrement, on a $h_m (s) \longrightarrow f'' (X_s)$ uniformément sur $[0, t]$ car presque sûrement, $\sup |X_s| < +\infty$. On souhaite justifier que

$$\forall \varepsilon \geq 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 \leq m \leq n \Longrightarrow P \left(|I_{m,n} - I_{n,n}| \geq \varepsilon \right) \leq \varepsilon \tag{2.11}$$

Pour tout $m \geq m_1, P \left(\left| \int_0^t h_m (s)\, d \langle X, X \rangle_x - \int_0^t f'' (X_s)\, d \langle X, X \rangle_s \right| \geq \varepsilon \right) \leq \varepsilon$ et on a :

$$\begin{aligned} \left| I_{n,n} - \int_0^t f'' (X_s)\, dX_s \right| &\leq |I_{n,n} - I_{m,n}| + \left| I_{m,n} - \int_0^t h_m (s)\, d \langle X, X \rangle_s \right| \\ &\quad + \left| \int_0^t h_m (s)\, d \langle X, X \rangle_s - \int_0^t f'' (X_s)\, d \langle X, X \rangle_s \right| \end{aligned}$$

Reste à montrer 2.11 :

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^{n-1} f''_{n,k} \left(X_{t_{k+1}^{(n)}} - X_{t_k^{(n)}} \right)^2 - \sum_{k=0}^{m-1} f''_{m,k} \sum_{l:t_k^{(m)} \leq t_l^{(m)} < t_{k+1}^{(m)}} \left(X_{t_{k+1}^{(n)}} - X_{t_k^{(n)}} \right)^2 \\ &\leq \underbrace{\sup_{k<m} \sup_{l:t_k^{(m)} \leq t_l^{(m)} < t_{k+1}^{(m)}} \left| f''_{m,k} - f''_{n,k} \right|}_{\overset{ps}{\longrightarrow} 0} \cdot \underbrace{\sum_{l=0}^{n-1} \left(X_{t_{k+1}^{(n)}} - X_{t_k^{(n)}} \right)^2}_{\underset{n \longrightarrow \infty}{\overset{(P)}{\longrightarrow}} \langle X, X \rangle_t} \end{aligned}$$

2) On procède de même en utilisant une version de Taylor-Lagrange en multidimensionnel.

■

Remarque 2.6.2 *Si on sait par exemple que, presque sûrement,* $X_t \in U$ *pour tout* t *,où* U *est un ouvert de* $\mathbb{R}$ *fixé, alors il suffit dans la formule d'Itô de supposer que* F *est* C^2 *sur*

U. Pour le voir, on prend $(K_n)_n$ une suite de compacts croissante telle que $\bigcup_n K_n = U$, on construit F_n qui est C^2 sur l'espace complet et qui coïncide avec F sur K_n. Par exemple, si $X_t > 0$ pour tout $t \geq 0$, alors :

$$\log(X_t) = \log(X_0) + \int_0^t \frac{1}{X_s} dX_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{X_s^2} d\langle X, X\rangle_s$$

Chapitre 3

Quelques applications de la formule d'Itô

Exemple 3.0.1 *$F(x,y) = xy$ on a l'intégration par parties stochastique :*

$$X_tY_t - X_0Y_0 = \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \frac{1}{2}.2\int_0^t d\langle X,X\rangle_s$$
$$= \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + d\langle X,X\rangle_t$$

Si $X = M$ est une martingale locale,

$$M_t^2 - \langle M,M\rangle_t = M_0^2 + 2\int_0^t M_s dM_s$$

2) $tB_t = \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s$. $\int_0^t B_s ds$ est à variation finie , $\int_0^t s dB_s$ est une martingale.

3) $f(Bt) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds$

Soit F $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \to \mathbb{R}$est C^2,

$$F(t,Bt) = F(0,B_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s,B_s)dB_s + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)(s,B_s)ds$$

Si B est un Brownien multidimensionnel :

$$F(t,Bt) = F(0,B_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(s,B_s)dB_s^{(i)} + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta F\right)(s,B_s)ds$$

En particulier, si F est de classe C^2 et $\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta F$ vaut 0 sur $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^d$ alors $F(t,B_t)$ est une martingale locale.

Proposition 3.0.1 *Martingale exponentielle. Soit M une martingale locale. On pose :*

$$\mathcal{E}(\lambda M)_t = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M,M\rangle_t\right)$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$. Le processus $\mathcal{E}(\lambda M)$ est une martingale locale et de plus,

$$\mathcal{E}(\lambda M)_t = e^{\lambda M_0} + \lambda \int_0^t \mathcal{E}(\lambda M)_s dM_s$$

Remarque 3.0.3 *Cela signifie $\mathcal{E}(\lambda M)$ est solution de $dX_t = \lambda X_t dM_t$*

Preuve. Soit $F(x,r)$ de classe C^2,

$$\begin{aligned} F(M_t,\langle M,M\rangle_t) = F(M_0,0) &+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(M_s,\langle M,M\rangle_s)dM_s \\ &+ \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial f} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)(M_s,\langle M,M\rangle_s)d\langle M,M\rangle_s \end{aligned}$$

donc $(F(M_t,\langle M,M\rangle_t))_t$ est une martingale locale dès que $\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$. Cela est bien vérifié pour $F(x,r) = \exp\left(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}r\right)$ et on a bien la formule annoncée. ■

Théorème 3.0.2 *Caractérisation de Paul Lévy du mouvement Brownien.Soit $X = \left(X^{(1)},...,X^{(d)}\right)$ un processus adapté et continu. Il y a équivalence entre :*

1) $(X_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien standard.

2) $X^{(1)},...,X^{(d)}$sont des martingales locales issues de 0et $\left\langle X^{(i)},X^{(j)}\right\rangle_t = t\delta_{ij}$

Preuve. 1) $\Longrightarrow$ 2)

2) $\Longrightarrow$ 1) Soit $\xi \in \mathbb{R}^d : \xi \cdot X_t$ est une martingale locale et

$$\langle \xi.X, X.\xi \rangle_t = \sum \xi_i \xi_j \left\langle X^{(i)}, X^{(j)} \right\rangle_t = |\xi|_t^2$$

$\exp\left(i\xi.X_t + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)$ est une martingale locale bornée sur $[0,t]$ pour tout t donc c'est une martingale .

$$E\left[\exp\left(i\xi.X_t + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)|\mathcal{F}_s\right] = \exp\left(i\xi.X_t + \frac{|\xi|^2}{2}s\right)$$

Autrement dit :

$$E\left[\exp\left(i\xi.\left(X_t - X_s\right)\right)|\mathcal{F}_s\right] = \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2}\left(t-s\right)\right)$$

On a que $(X_t - X_s) \sim \mathcal{N}(0, -s)$ et est indépendant de $\mathcal{F}_s$. En effet, soit $A \in \mathcal{F}_s$ tel que $P(A) > 0$:

$$E\left[\exp\left(i\xi.\left(X_t - X_s\right)\right)|A\right] = \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2}\left(t-s\right)\right)$$

Sous $\mathbb{P}(.|A), (X_t - X_s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ donc $E[f(X_t - X_s)|A] = E[f(X_t - X_s)]$.

$E[1_A f(X_t - X_s)] = \mathbb{P}(A)E[f(X_t - X_s)]$.

On a bien $(X_t - Xs)$ indépendant de $\mathcal{F}_s$ ie c'est un processus continu. ■

Remarque 3.0.4 *Dans la preuve précédente $x.y$ représente le produit scalaire usuel de x et y dans $\mathbb{R}^d$.*

Théorème 3.0.3 *Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy*

Soit M une martingale locale issue de 0 et soit $M_t^* = \sup_{s \leq t} |Ms|$.Soit $p > 0$. Il existe c_p et C_p indépendantes de M telles que

$$c_p E\left[\langle M, M \rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[|M_t^*|^p\right] \leq C_p E\left[\langle M, M \rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right]$$

Remarque 3.0.5 *On peut remplacer ∞ par n'importe quel temps d'arrêt T.*

Preuve. (partielle) On montre d'abord la $1^{ère}$ inégalité pour $p \geq 2$. on peut supposer M bornée. Sinon, on pose $Tn = \inf\{t \geq 0, |M_t| \geq n\}$ appliquer le résultat à M^{T_n}et passer à la limite grâce au théorème de convergence monotone. On applique la formule d'Itô :

$$|M_t|^p = \int p|M_s|^{p-1} dM_s signe(M_s) dM_s + \frac{1}{2} p\,(p-1) \int |M_s|^{p-2} d\,\langle M, M\rangle_s$$

M est bornée donc $M \in \mathbb{H}$ et $\int p|M_s|^{p-1} dM_s signe(M_s) dM_s$ est une martingale. Donc

$$\begin{aligned} E\left[|M_t|^p\right] &= 0 + \frac{p\,(p-1)}{2} E\left[\int |M_s|^{p-2} d\,\langle M, M\rangle_s\right] \\ &\leq \frac{p\,(p-1)}{2} E\left[(M_t^*)^{p-2}\,\langle M, M\rangle_t\right] \\ &\leq \frac{p\,(p-1)}{2} E\left[|M_t^*|^p\right]^{1-\frac{p}{2}} E\left[\langle M, M\rangle_t^{\frac{P}{2}}\right]^{\frac{2}{P}} \end{aligned}$$

Par Doob :

$$\begin{aligned} E\left[|M_t^*|^p\right] &\leq C_p E\left[|M_t|^p\right] \\ &\leq C_p'' E\left[|M_t^*|^p\right]^{1-\frac{p}{2}} E\left[\langle M, M\rangle_t^{\frac{P}{2}}\right]^{\frac{2}{P}} \end{aligned}$$

On a bien le résultat annoncé.

Montrons l'inégalité inverse pour $p \geq 4$. Par la formule d'Itô,

$$M_t^2 = 2\int_0^t M_s dM_s + \langle M, M\rangle_t$$

$$E\left[\langle M,M\rangle_t^{\frac{P}{2}}\right]\leq C_p\left(\begin{array}{c}E\left[|M_t|^p\right]+\underbrace{E\left[\left|\int_0^t M_s dM_s\right|^{\frac{P}{2}}\right]}\\ \leq C_p E\left[\left|\int_0^t M_s^2 d\langle M,M\rangle_s\right|^{\frac{p}{4}}\right]\end{array}\right)$$

$$\leq C_p\left(E\left[|M_t^*|^p\right]+E\left[|M_t^*|^{\frac{p}{2}}\langle M,M\rangle_t^{\frac{p}{4}}\right]\right)$$

$$\overset{CS}{\leq} C_p\left(E\left[|M_t^*|^p\right]+E\left[|M_t^*|^p\right]^{\frac{1}{2}}E\left[\langle M,M\rangle_t^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right)$$

Or $x^2\leq C_p\left(y^2+xy\right)\Longrightarrow\exists C,x\leq C.y.$ ■

Théorème 3.0.4 *Girsanov. Soit L une martingale locale issue de 0 et*

$$\mathcal{E}(L)=\exp\left(L-\frac{1}{2}\langle L,L\rangle\right)$$

On suppose que $\mathcal{E}(L)$ est une martingale uniformément intégrable $\Longrightarrow(E[\mathcal{E}(L)_\infty]=1)$. On pose

$$d\mathbb{Q}=\mathcal{E}(L)_\infty dP$$

Si M est une P-martingale locale alors $M-\langle M,L\rangle$ est une Q- martingale locale

Preuve. On note $\mathcal{E}=\mathcal{E}(L)$ et $\mathbb{F}$ l'espérance par rapport à $\mathbb{Q}$.

Première étape :si X est un processus adapté continu et T un temps d'arrêt tel que $(X\mathcal{E})^T$ est une P-martingale, alors X^T est une $\mathbb{Q}$-martingale

a.

$$\begin{aligned}\mathbb{F}\left[|X_{t\wedge T}|\right]&=E\left[|X_{t\wedge T}|\,|\mathcal{E}_\infty\right]\\&=E\left[|X_{t\wedge T}|\,|\mathcal{E}_{t\wedge T}\right]\\&=E\left[(X\mathcal{E})_{t\wedge T}\right]<\infty\end{aligned}$$

b. Soit $A \in \mathcal{F}_s$ et $s < t$, On a

$$\mathbb{F}\left[1_{A\cap\{T\leq s\}}X_{t\wedge T}\right] = \mathbb{F}\left[1_{A\cap\{T\leq s\}}X_{s\wedge T}\right]$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}\left[1_{A\cap\{T>s\}}X_{t\wedge T}\right] &= E\left[1_{A\cap\{T>s\}}X_{t\wedge T}\mathcal{E}_\infty\right] \\
&= E\left[1_{A\cap\{T>s\}}X_{t\wedge T}\mathcal{E}_{t\wedge T}\right] \\
&= E\left[1_{A\cap\{T>s\}}X_{t\wedge T}\mathcal{E}_{s\wedge T}\right] \\
&= E\left[1_{A\cap\{T>s\}}X_{t\wedge T}\mathcal{E}_\infty\right] \\
&= \mathbb{F}\left[1_{A\cap\{T>s\}}X_{s\wedge T}\right]
\end{aligned}$$

En résumé, $\mathbb{F}[1_A X_{t\wedge T}] = \mathbb{F}[1_A X_{s\wedge T}]$ pour tout $A \in \mathcal{F}_s$ donc on a bien

$$\mathbb{F}[X_{t\wedge T}|\mathcal{F}_s] = X_{s\wedge T}$$

Etape 2 :Soit M une P-martingale locale et soit $\widetilde{M} = M - \langle M, L\rangle$. On veut vérifier que $\widetilde{M}\ \mathcal{E}$ est une P-martingale locale (cf étape 1), par la formule d'Itô,

$$\widetilde{M}_t\mathcal{E}_t{=}\widetilde{M}_0\mathcal{E}_0 + \int \widetilde{M}_s d\mathcal{E}_s + \int \mathcal{E}_s dM_s - \int \mathcal{E}_s d\left\langle M, L\right\rangle_s + \left\langle M, \mathcal{E}\right\rangle_t$$

On veut que $\int \mathcal{E}_s d\left\langle M, L\right\rangle_s + \left\langle M, \mathcal{E}\right\rangle_t = 0$, on va vérifier que $\left\langle M, L\right\rangle_t = \mathcal{E}^{-1}\left\langle M, \mathcal{E}\right\rangle_t$.

Etape 3 : $Lt = \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1} d\mathcal{E}_s$. En effet, $\mathcal{E}_t > 0$ pour tout t et continu donc on peut appliquer la formule d'Itô "généralisée" évoquée dans la remarque

$$\begin{aligned}
\log\left(\mathcal{E}_t\right) &= \log\left(\mathcal{E}_0\right) + \int_0^t \frac{d\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d\left\langle \mathcal{E}, \mathcal{E}\right\rangle_s}{\mathcal{E}_s^2} \\
&= 0 + L_t - \frac{1}{2}\left\langle L, L\right\rangle_t
\end{aligned}$$

Par égalité des parties “martingales locales”, on a bien

$$L_t = \int_0^t \frac{d\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_s}$$

donc $L = \mathcal{E}^{-1}.\mathcal{E}$ et

$$\left\langle M, \mathcal{E}^{-1}.\mathcal{E} \right\rangle = \mathcal{E}^{-1} \langle M, \mathcal{E} \rangle$$

■

Proposition 3.0.2 *Soit L une martingale locale issue de 0. Considérons les propriétés :*

i) $E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty\right)\right] < +\infty$.

ii) L est une martingale uniformément intégrable et $E\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right)\right] < +\infty$.

iii) $\mathcal{E}(L)$ est une martingale uniformément intégrable

On a 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$3).

Preuve. “1) $\Longrightarrow$ 2)” On a $E\left[\langle L, L\rangle_\infty\right] < \infty$ donc L est une martingale bornée dans L^2 donc uniformément intégrable

$$\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right) = \mathcal{E}(L)_\infty^{\frac{1}{2}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

par Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right)\right] &\leq E\left[\mathcal{E}(L)_\infty\right]^{\frac{1}{2}} E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty\right)\right] \\ &\leq E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty\right)\right] \\ &< +\infty \end{aligned}$$

2)$\Longrightarrow$ 3) On suppose que L est une martingale uniformément intégrable donc pour tout temps d'arrêt,$L_T = E[L_\infty|\mathcal{F}_T]$ par Jensen,

$$\exp\left(\frac{1}{2}L_T\right) \leq E\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right)|\mathcal{F}_T\right]$$

$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right)\right] < +\infty$ donc $\left\{\exp\left(\frac{1}{2}L_T\right), T \text{ temps d'arrêt}\right\}$est uniformément intégrable. Soit $0 < a < 1$ et $Z_t^{(a)} = \exp\left(\frac{a}{1+a}L_t\right)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(aL)_t &= \mathcal{E}(L)_t^{a^2}\exp\left(\left(a-a^2\right)L_t\right) \\
&= \mathcal{E}(L)_t^{a^2}\left(Z_t^{(a)}\right)^{1-a^2}
\end{aligned}$$

On veut montrer que $\mathcal{E}(aL)$ est une martingale uniformément intégrable, il suffit de voir que $\{\mathcal{E}(aL)_T, T \text{ temps d'arrêt}\}$ est uniformément intégrable.Soit A un ensemble mesurable.Par Holder

$$\begin{aligned}
E\left[1_A\mathcal{E}(aL)_T\right] &\leq E\left[\mathcal{E}(L)_T\right]^{a^2} E\left[1_A\left(Z_t^{(a)}\right)^{1-a^2}\right] \\
&\leq E\left[1_A\left(Z_t^{(a)}\right)^{1-a^2}\right]
\end{aligned}$$

Pour justifier $\{\mathcal{E}(aL)_T, T \text{ temps d'arrêt}\}$ est uniformément intégrable, il suffit de voir que $\left\{Z_T^{(a)}, T \;\text{ temps d'arrêt }\right\}$ est uniformément intégrable, c'est vrai car $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{2}$ et $\left\{\exp\left(\frac{1}{2}L_T\right), T \text{ temps d'arrêt}\right\}$ est uniformément intégrable.Donc on a bien que $\mathcal{E}(aL)$ est une martingale uniformément intégrable.On a :

$$\begin{aligned}
1 &= E[\mathcal{E}(aL)_\infty] \\
&\overset{Holder}{\leq} \underbrace{E[\mathcal{E}(L)_\infty]^{a^2}}_{\underset{a\to1}{\longrightarrow}E[\mathcal{E}(L)_\infty]}.\underbrace{E\left[\exp\left(\frac{a}{1+a}L_\infty\right)\right]^{1-a^2}}_{\underset{a\to1}{\longrightarrow}1}
\end{aligned}$$

On a bien $E[\mathcal{E}(L)_\infty] = 1$. ■

Corollaire 3.0.1 *Soit $b : \mathbb{R}_+ \times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et telle que $\int \sup|b(t,x)|^2\, dt < +\infty$, soit B un mouvement Brownien et $L_t = \int_0^t b(s,B_s)dB_s$*

$$\mathcal{E}(L)_t = \exp\left(\int_0^t b(s,B_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t b^2(s,B_s)ds\right)$$

$(\mathcal{E}(L)_t)_t$*est une martingale uniformément intégrable.Soit* $d\mathbb{Q} = \mathcal{E}(L)_\infty dP$ *alors,*

$$\begin{aligned}\beta_t &= B_t - \langle B, L\rangle_t \\ &= B_t - \int_0^t b(s, X_s)ds\end{aligned}$$

est une $\mathbb{Q}-$*martingale locale. De plus,*

$$\langle \beta, \beta\rangle_t - \langle B, B\rangle_t = t$$

donc β *est un* $\mathbb{Q}-$*mouvement Brownien.*

Preuve. Provient de la Proposition et du Théorème de Girsanov.

On peut reformuler ce résultat en disant que sous $\mathbb{Q}$, il existe un Brownien β tel que le processus $X = B$ (X n'est pas un Brownien sous $\mathbb{Q}$) satisfait

$$X_t = \beta_t + \int_0^t b(s, X_s)ds, soit\ dX_t = d\beta_t + b(t, X_t)dt$$

on a donc résolu une équation différentielle stochastique.

Si b ne dépend pas de x : $b(t, x) = g(t)$ avec $\int_0^{+\infty} g^2(t)dt < \infty$, posons $h(t) = \int_0^t g(s)ds$. $h \in H^1$ sous

$$d\mathbb{Q} = \exp\left(\int_0^{+\infty} g(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g^2(s)ds\right) dP$$

le processus $\beta_t = B_t - h(t)$ est un mouvement Brownien sous $\mathbb{Q}$.

Autrement dit, si Φ est une fonction mesurable positive sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, alors :

$$\begin{aligned}&\mathbb{F}\left[\Phi(B_t)_{t\geq 0}\right] = \mathbb{F}\left[\Phi(\beta + h)\right] \\ &\qquad \Leftrightarrow E\left[\phi(B)\right]\exp\left(\int_0^{+\infty} g(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g^2(s)ds\right) = E\left[\Phi(B + h)\right]\end{aligned}$$

Pour h de la forme choisie, on a donc que la loi de $B+h$ est absolument continue par rapport à la loi de B avec une densité explicite.

Conséquence :Loi du temps d'atteinte d'une droite par le Brownien. ■

Preuve. Soit B un Brownien, $a>0$ et $T_a=\inf\{t\geq 0, B_t=a\}$ soit $c\in R$ et

$$S_a=\inf\{t\geq 0, B_t=a-ct\}.\text{La loi de}T_a \text{ a pour densité}\frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}}\exp\left(-\frac{a^2}{2s}\right)1_{\{s\geq 0\}}.$$

Soit $\Phi(\omega)\,1_{\left\{\underset{[0,t]}{\max}\omega\geq a\right\}}$ et $h(s)=\int_0^s c1_{\{u\leq t\}}du=\int_0^s g(u)du$, on a bien

$$\int_0^{+\infty} g^2(u)du<\infty.\exp\left(cB_t-\frac{1}{2}c^2t\right)$$

$$\begin{aligned}
P((S_at) &= E\left[\Phi(B+h)\right] \\
&= E\left[\Phi(B)\exp\left(\int_0^{+\infty} g(s)dB_s-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g^2(s)ds\right)\right] \\
&= E\left[\underbrace{1_{\{T_a\leq t\}}}_{\mathcal{F}_{T_a}-mesurable}\quad\underbrace{\exp\left(cB_t-\frac{1}{2}c^2t\right)}_{martingale}\right] \\
&= E\left[1_{\{T_a\leq t\}}\exp\left(cB_{T_a\wedge t}-\frac{c^2}{2}\left(T_a\wedge t\right)\right)\right] \\
&= E\left[1_{\{T_a\leq t\}}\exp\left(ac-\left(\frac{c^2}{2}T_a\right)\right)\right] \\
&= \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}}\exp\left(-\frac{a^2}{2s}+ac-\frac{c^2}{2}s\right)ds \\
&= \int_0^t \underbrace{\frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}}\exp\left(-\frac{1}{2s}\left(a-cs\right)\right)}_{\text{densité de la loi de}S_a}ds
\end{aligned}$$

■

Bibliographie

[1] Bouleau, N. (1988). Processus stochastiques et applications. Paris : Hermann.

[2] Comets, F., & Meyre, T. (2015). Calcul stochastique et modèles de diffusions-2e éd. Dunod.

[3] Durrett, R. (2010). Probability : theory and examples. Cambridge university press.

[4] Le Gall, J. F. (2012). Mouvement Brownien, martingales et calcul stochastique (Vol. 71). Springer Science & Business Media.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\xrightarrow{\mathcal{P}}$	convergence en probabilité.
$\xrightarrow{p.s.}$	convergence presque sûre.
càdlag	continue à droit limité a gauch
càd	continu à droit