République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Boulekdair Nawal

Titre :

Principe du maximum stochastique suffisant dans un modèle de diffusion à changement de régime

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Tamer Lazhar	UMKB	Président
Dr.	Lakhdari Imad Eddine	UMKB	Encadreur
Pr.	Chighoub Farid	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce humble travail

A ceux qui m'ont appris le respect et le sens du devoir ;

Ceux qui ne cessent de se sacrifier pour mon bien être ;

Ceux qui m'ont protégés ;

A mes chèrs parents Ammar et Akila ;

A mes frères : Abdellah,Faress,Seiffe ;

A mes sœurs : Nassira,Awatif ;

A la seul fille de ma soeur : Rafif ;

A mon fiancé : Abdelghani ;

A ma meilleur oncle : Fouad ;

A mes *chères amies : Khawla,Sara,Bassma,Assma,Khadija,*

Nour,Afaf,Salma,Iman et Youssra,..

A mes collègues de la promotion 2018 particulièrement

ceux de la spècialité Mathématiques.

REMERCIEMENTS

La louange à Allah

qui nous a facilité l'accomplissement de ce travaill de resherche chose ne peut être qu' avec la volonté de Dieu-à lui la tous puissance et la majusté -et que la louange initiale et finale à Allah, signeur des mondes.

Je tiens remercier à mon encadreur ***Dr.LAKHDARI Imad Eddine,*** *pour son soutien, son aide, ses conseils, et ses diréctives du début jusqu'à la fin de ce travail*

Je tiens aussi à remercier notre chef du département de mathématique ***Dr.HAFAYED Moukhtar****,*

et les enseignant qui ont *participés à notre formation, et tous les enseignants du département de mathématiques de l'université Mohamed Kheider.*

Mes remerciements aussi aux membres de jurés qui nous honorent à accepter de juger ce modeste travail.

Pr.CHIGHOUB Farid *et* **Dr.TAMER Lazher**

J'exprime aussi mes gratitudes à toutes les personnes qui ont contribués de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

merci à tous.

Table des matières

Remerciements ii

Table des matières iii

Introduction 1

1 Généralité sur le calcul stochastique 2

1.1 Processus stochastique 2

1.1.1 Processus de Markov 4

1.2 Calcul d'Itô 8

1.2.1 Intégrale stochastique 8

1.2.2 Propriétés d'intégrale stochastique 10

1.2.3 Processus d'Itô 11

1.2.4 Formule d'Itô 12

1.3 Equations différentielles stochastiques(EDS) 13

1.3.1 Existence et unicité 14

2 Principe du maximum stochastique 17

2.1 Modèle de diffusion à changement de régime 17

2.2 Problème de contrôle 18

2.3 Principe du maximum stochastique suffisant 20

2.4 Relation à la programmation dynamique 23

3 Application : Problème de minimisation de perte quadratique **29**

Conclusion **36**

Bibliographie **37**

Introduction

Les problèmes de contrôle optimal stochastique ont un grand nombre d'applications dans les domaines de l'économie et à la finance. Il existe deux approches très appropriées pour aborder la résolution du problème de contrôle optimal : le principe du maximum stochastique, connue aussi sous le nom (condition nécessaire et suffisante d'optimalité), et le principe de la programmation dynamique, appelé aussi principe de Bellman.

Notre objectif dans ce mémoire est de faire une étude détaillée sur le principe du maximum stochastique suffisant et le principe de la programmation dynamique, pour un contrôle optimal dans un modèle de diffusion à changement de régime. Cette étude basé sur le travail de Catherine [3].

Nous présentons notre travail comme suit :

Le premier chapitre, on donne un bref rappel sur la théorie du calcul stochastique qui nous permettre de définir une chaîne de Markove.

Dans le deuxième chapitre, on va étudier le problème de contrôle optimal par le principe du maximum stochastique suffisant (conditions suffisantes d'optimalité) à changement de régime et la relation avec la programmation dynamique.

Finalement, on va résoudre un problème de minimisation des perte quadratique en utilison le principe du maximum stochastique suffisant.

Chapitre 1

Généralité sur le calcul stochastique

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 (Processus stochastique) *Un processus stochastique est une famille $X = (X_t)_{t\in T}$ de variables aléatoires à valeur dans un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ est indéxée par le temps t. Le paramétre de temps t variant dans I.*

1. *Si t fixe : X_t est un v.a définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeur dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.*
2. *Si ω fixe : X_t appelé la trajectoire de $(X_t)_{t\in T}$ associée à ω.*

Remarque 1.1.1

1. *Si $I \subseteq \mathbb{N}$, on dit que le processus a temp discret.*
2. *Si $I \subseteq \mathbb{R}$, on dit que le processus a temp continue.*

Définition 1.1.2 (Filtration) *Une filtration $\mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante de sous-tribus $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour tous*

$0 \leq s \leq t$ dans T

1. Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$est appelé espace de probabilité filtré.

2. On dit que la filtration est naturelle (ou canonique) de processus X si

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t), \qquad t \in T,$$

c'est la plus petite σ-algébre par rapport à laquelle X_s est mesurable pour tous $0 \leq s \leq t$.

3. On dit qu'une filtration $\mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est continue à droite si

$$\mathcal{F}_{t^+} := \cap_{s\geq t}\mathcal{F}s = \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.1.3 (Processus adapté) *Un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est dit adapté par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \in T$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Définition 1.1.4 (Processus a trajectoire continue) *Un processus (X_t) est a trajectoire continue ou simplement processus continue si*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; t \to X_t(\omega) \ \textit{est continue}\}) = 1$$

Définition 1.1.5 (Processus progressivement mesurable) *Un processus $(X_t)_{t\in I}$ est dit progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \in T$ l'application*

$(s, \omega) \to X_s(\omega)$ est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de la tribu produit $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

Définition 1.1.6 (Processus càdlàg) *Un processus X est dit càdlàg (continue à droite et pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et prouvues de limite à gauche pour presque tout ω.*

Remarque 1.1.2 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

Proposition 1.1.1 *Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continués à droite (ou à gauche), alors X est mesurable et progressivement mesurables s'il est de plus adapté.*

1.1.1 Processus de Markov

Définition 1.1.7 *On dit que le processus X_t est de Markov par rapport a une filtration canonique $\mathcal{F}_t$ si pour tout fonction F définie sur $\mathbb{R}^n$,et pour tout $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$:*

$$\mathbb{E}\left[F\left(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, ..., X_{s+t_n}\right) \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[F\left(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, ..., X_{s+t_n}\right) \mid X_s\right],$$

si pour tout fonction f Borélienne bornée et pour tous s et t, tels que $s \leq t$:

$$\mathbb{E}\left[F\left(X_t\right) \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[F\left(X_t\right) \mid X_s\right].$$

Proposition 1.1.2 *Soit $x \in \mathbb{R}^n$, soient $0 \leq r \leq s \leq t$. On a*

$$X_s^{r,x} = X_t^{s,X_s^{r,x}}, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Définition 1.1.8 (Chaîne de Markov) *Si pour tout entier $n \geq 0$ et tous états $i_0, i_1, ..., i_{n-1}$,*

$i, j \in E$ (l'ensemble E est l'espace d'état)

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0\right) = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right) \tag{1}$$

Le processus $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est appelé chaîne de Markov. Celle-ci est dite homogène si le second membre de (1) ne dépend pas de n.

La matrice $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}_{i,j\in E}$,où

$$p_{ij} = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right)$$

est la probabilité de transition de i vers j , est est appellée matrice de transition de la chaîne. Comme ses éléments sont des probabilités et puisqu'une transition a nécessairement lieu d'un état vers un autre état, on a

$$p_{ij} \geq 0, et \quad \sum_{k \in E} p_{ik} = 1$$

pour tous états i, j.

Définition 1.1.9 (Mouvement Brownien) *on appelle $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifier :*

(i) *Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

(ii) *Si $s \leq t$, $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s$.*

(iii) *Si $s \leq t$, la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0 = X_{t-s}$.*

Définition 1.1.10 (Mouvement Brownien standard) *Soit X un processus stochastique, on dit que X est un mouvement Brownien standard si :*

$$W_0 = 0 \quad \mathbb{P} - p.s, \qquad \mathbb{E}[W_t] = 0 \quad et \quad \mathbb{E}[W_t^2] = t.$$

Dans ce cas la loi de X_t est une loi normale.

Proposition 1.1.3 *Soit W un mouvement Brownien Standard :*

1. *Pour tout $t \geq 0, X_t = tW_{\frac{1}{t}}$, alors (X_t) est un MB.*
2. *Soit c réel positive $(c > 0)$,on a $Z_t = cW_{\frac{t}{c^2}}$, donc (Z_t) est un mouvement Brownien.*
3. *Pour tout $s > 0, \{W_{t+s} - W_s\}_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien indépendant de $\sigma(W_u, u \leq s)$.*

Théorème 1.1.1 *Un processus W est un mouvement Brownien ssi c'est un processus Gaussien continue centré de fonction de covariance :*

$$cov(W_t, W_s) = \mathbb{E}(W_t W_s) = s \wedge t = \min(t, s).$$

Proposition 1.1.4 *Soit W un MB alors presque sûrement on a :*

– *W n'est pas différentiable en aucun point t.*

– *W n'est pas à variation finie en aucun point t.*

Définition 1.1.11 (Temp d'arrêt) *Une variable aléatoire $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ est un temp d'arrêt (par rapport a la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ si pour $t \in T$:*

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega \ / \ \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.1.12 (Martingales) *Un processus $(M_t)_{t\geq 0}$ est dit martingale si :*

1. *pour tout $t \geq 0$, M_t est $\mathcal{F}_t-$adapté ;*
2. *pour tout $t \geq 0$, M_t est intégrable, i.e. $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$;*
3. *pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) = M_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$*

On définit de manière similaire sur-martingale si (iii) est remplacé par

$$\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \leq M_s, , \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Et sous-martingale si (iii) est remplacé par

$$\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \geq M_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Proposition 1.1.5 *Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien*

(i) *$W_t^2 - t$ est une martingale.*

(ii) *Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}, \exp(\sigma W_t - \sigma^2 \frac{t}{2})$ est une martingale.*

Remarque 1.1.3 *Le mouvement Brownien standard $(W_t, t \geq 0)$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^B = \sigma(W_s, s \leq t)$.*

Théorème 1.1.2 (Théorème de représentation des martingales) *Soit W_t un mouvement Brownien sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$,et M_t une martingale $\mathcal{F}_t$-adapté. Alors, il existe un processus adapté Z_s tel que :*

$$M_t = M(0) + \int_0^t Z(s)dW_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Définition 1.1.13 (Martingale local) *Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté à trajectoire continue à droite. On dit que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale local s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$, $\mathbb{P} - p.s.$ et pour tout n, $M^{\tau_n} 1_{\tau_n > 0}$ est une martingale.*

Définition 1.1.14 (Variation finie, bornée et quadratique) *Soit $[0, T]$ un intervalle et $\pi_n = 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n = T$, une subdivision de $[0, T]$ de pas*

$$\|\pi_n\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left|t_i^n - t_{i-1}^n\right|.$$

On appelle variation infinitésimal d'ordre p d'un processus X indexé par $[0, T]$ associé a π_n :

$$V_T^p(\pi_n) = \sum_{i=1}^n \left|X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right|^p.$$

Si $V_T^p(\pi_n)$ admet une limite dans (en un certain sens) lorsque $\|\pi_n\|_\infty \to_{n\to\infty} 0$ et la limite ne dépond pas de la subdivision choisie, on appelle $V_T^p = \lim_{\|\pi_n\|_\infty \to 0} V_T^p(\pi_n)$ variation d'ordre p.

a) *Si $p = 1$, la limite V_T^1 est appelée vaiation totale de X*

- *Si $\forall T$, V_T^1 est fini on dit que X est à variation finie.*
- *Si $\forall T$, V_T^1 est borné on dit que X est à variation finie.*

b) *Si $p = 2$, la limite est appelée variation quadratique de X.*

1.2 Calcul d'Itô

1.2.1 Intégrale stochastique

Il s'agit d'une intégrale définie de façon similaire à l'intégrale de Riemann comme limite d'une somme de Riemann. Si on se donne un processus de Wiener (ou mouvement Brownien), $W : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ ainsi que $x : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ un processus stochastique adapté à la filtration naturelle associée à W_t, alors l'intégrale d'Itô

$$\int_0^T \phi_s dW_s \text{ est définie par la limite en moyenne quadratique de} \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité et W_t un mouvement Brownien sur cet espace, et la filtration naturelle du mouvement Brownien $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$.
l'objectif c'est définir l'intégrale $\int_0^t \phi_s dW_s$ pour des processus ϕ

1.Cas étagé

On dit ϕ est un processus étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_i, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et une suite de variable aléatoire ϕ_i telle que ϕ_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables de carré intégrables $\phi_t = \phi_i$ pour tout $t \in]t_i, t_{i+1}]$, soit

$$\phi_s(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(\omega) 1_{]t_i, t_{i+1}]}(s).$$

On définit

$$\int_0^\infty \phi_s dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

On sais que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s dW_s\right] = 0 \text{ et } Var\left[\int_0^\infty \phi_s dW_s\right] = \left[\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right].$$

Alors
$$\int_0^t \phi_s dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}\wedge t} - W_{t_i \wedge t}).$$

2.Cas général

Soit l'ensemble $\mathcal{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ des processus ϕ $\mathcal{F}_t$-adaptés càglàd (continus à gauche limite à droite).

Si ϕ un meilleur processus, il existe (ϕ_s^n) une suite de processus étagés telle que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\phi_s^n - \phi_s^2) ds\right] \to 0,$$

quand n tend vers ∞.

Ainsi, pour tout $t > 0$ il existe une v.a $I_t(\phi) = \int_0^\infty \phi_s dW_s$ de carré intégrable.

On va montrer que
$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s dW_s\right] = 0.$$

On a :
$$I_t(\phi) = \int_0^\infty \phi_s dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}),$$

$I_t(\phi)$ est gaussien, car (W_t) est un processus gaussien alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[I_t(\phi)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right], \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}), \\ &= 0.\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = 0$ car $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ sont à acroissement indépendantes.

Pour montrer que
$$var[I_t(\phi)] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right].$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
var[I_t(\phi)] &= \mathbb{E}(I_t(\phi)^2) - \mathbb{E}(I_t(\phi))^2, \\
&= \mathbb{E}(I_t(\phi)^2), \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s^2 dW_s\right], \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right)^2\right], \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\phi_i)^2 \mathbb{E}\left[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right], \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\phi_i)^2 (t_{i+1} - t_i), \\
&= \int_0^\infty \phi_s^2 ds.
\end{aligned}$$

1.2.2 Propriétés d'intégrale stochastique

Il y'a quelque propriétés sur l'intégrale stochastique les plus important sont :

1. Linéairité :
$$\int_0^t \left(a\phi_s^1 + b\phi_s^2\right) dW_s = a\int_0^t \phi_s^1 dW_s + b\int_0^t \phi_s^2 dW_s.$$

2. Additivité : pour $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$
$$\int_s^t \phi_v dW_v = \int_s^u \phi_v dW_v + \int_u^t \phi_v dW_v.$$

3. Propriétés de martingale : pour tout processue ϕ les processus :
$$t \to I_t(\phi), \quad \text{et} \quad t \to I_t(\phi)^2 - \int_0^t \phi_s ds,$$

sont des $(\mathcal{F}_t^W)$ -martingale continues.

$$\mathbb{E}[(I_t(\phi) - I_s(\phi))^2 \mid \mathcal{F}_s^W] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_u^2 du / \mathcal{F}_s^W\right].$$

4. Si $(x_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et $\mathbb{E}(\int_0^T |x_s|^2 ds) < +\infty$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t |x_s|^2 dW_s\right|^2\right] \leq 4\left(\int_0^T |x_s|^2 ds\right),$$

5. Isométrie :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t \phi_s^2 ds\right).$$

1.2.3 Processus d'Itô

Définition 1.2.1 (processus d'Itô) *Un processus d'Itô est un processus de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dW_s \quad \mathbb{P} - p.s,$$

avec X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, φ et θ deux processus $\mathcal{F}_t$-adapté vérifiant les conditions d'intégrabilité :

$$\int_0^t |\varphi_s| ds < +\infty \quad et \quad \int_0^t \|\theta_s\|^2 ds < +\infty,$$

où le coefficient φ est le drifte ou la dérivée et θ est le coefficient de diffusion.

On note de manière infinitésimale :

$$dX_t = \varphi_s ds + \theta_s dW_s.$$

1.2.4 Formule d'Itô

Théorème 1.2.1 (première formule d'Itô) *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 à dérivées bornées. Alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)ds,$$

Théorème 1.2.2 (deuxième formule d'Itô) *Soit f une fonction de C^2, on a alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\varphi_s ds + \int_0^t f'(X_s)\theta_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\theta_s^2 ds.$$

La notation infinitésimale de cette relation est donc :

$$df(X_t) = f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X\rangle_s.$$

Remarque 1.2.1 *La formule dItô s'énonce également dans le cas multidimentionnel (ie $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $W(t)$sont des matrices)*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \textstyle\int_0^t f_s(s, X_s)\varphi_s ds + \int_0^t f_x(s, X_s)\varphi_s ds \\ &+ \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\theta(s)^T f(s, X(s))\theta(s)\right] + \textstyle\int_0^t f_x(s, X_s)\theta_s dW_s \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 (Formule d'intégration par parties) *Si X et Y sont des processus d'Itô, alors*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t.$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par partie.

Proposition 1.2.2 (Formule d'Itô pour les semi-martingales) *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une semi-martingale. Pour toute fonction $f \in C^{1,2} : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$
\begin{aligned}
f\left(t, X_t\right)-f\left(t, X_0\right)= & \int_0^t \frac{\partial f}{d s}\left(s, X_s\right) \, d s+\int_0^t \frac{\partial f}{d x}\left(s, X_{s^{-}}\right) \, d X_s \\
& +\frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{d x^2}\left(s, X_{s^{-}}\right) \, d\,[X, X]_s^c \\
& +\sum_{0 \leq s \leq t, \Delta X_s \neq 0}\left[f\left(s, X_s\right)-f\left(s, X_{s-}\right)-\Delta X_s \frac{\partial f}{d x}\left(s, X_{s-}\right)\right],
\end{aligned}
$$

où

$$
d\,[X, X]_s=d\,[X, X]_s^c+\sum_{0 \leq s \leq t}\left(\Delta X_s\right)^2 .
$$

1.3 Equations différentielles stochastiques(EDS)

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une perturbation de l'équation différentielle ordinaire (EDO) avec un terme aléatoire modélisant un bruit autour de phénomène déterministe, la parturbation la plus simple est l'ajout d'un Brownien.

Définition 1.3.1 *Une équation différentielle stochastique (EDS) donnée par :*

$$
x_t=x+\int_0^t b(s, x_s) d s \;+\int_0^t \sigma(x_s) d W_s,
$$

ou sous forme

$$
\begin{cases}
d x_t=b(t, x_t) d t+\sigma(t, x_t) d W_t, \\
x_0=x,
\end{cases} \tag{1.1}
$$

où $\{W; t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien d-dimensionnel. Le coefficient $b(t, x_t)$ est appelé dérive et le coefficient $\sigma(t, x_t)$ de dW_t est appelé terme de diffusion.

Pour trouver une solution (forte) à l'équation (1.1) signifie trouver une processus stochastique (x_t) $t \geq 0$ continue $\mathcal{F}_t$-adapté qui vérifie :

1. Pour tout $t \geq 0$, les intégrales $\int_0^t b(s,x_s)ds$ et $\int_0^t \sigma(s,x_s)dW_s$ sont bien définies :

$$\int_0^t |b(s,x_s)|\, ds < +\infty \text{ et } \int_0^t |\sigma(s,x_s)|^2\, ds < +\infty, \quad \mathbb{P}-p.s.$$

2. (x_t), $t \geq 0$ vérifie (1.1) :

$$x_t = x + \int_0^t b(s,x_s)ds \ + \int_0^t \sigma(s,x_s)dW_s, \quad \mathbb{P}-p.s.$$

1.3.1 Existence et unicité

Le théorème dessous donne les conditions suffisantes sur b et σ pour avoir un résultat l'existence et l'unicité du solution de l'équation (1.1).

Théorème 1.3.1 (d'existence et d'unicité) *Si b et σ sont des fonctions continues telles qu'il existe $k < +\infty$:*

1. *Conditons de lipschitz :* $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq k\,|x-y|$.
2. *Conditons de coissance linéaire ;* $|b(t,x) - \sigma(t,x)| \leq k(1+|x|)$.
3. $\mathbb{E}(x^2) < +\infty$.

Alors : pour tout $t \geq 0$ l'équation (1.1) admet solution unique dans $[0,T]$. D'autre part la solution $(x_s)_{0\leq s\leq T}$ vérifie

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T} |x_s|^2) < +\infty.$$

Preuve. a- Pour démontrer l'existence d'une solution forte, on définit l'espace S_c^2 par :

$$S_c^2 = \left\{ \begin{array}{c} \text{les processus progressivement mesurables tel que } \mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T} |x_s|^2) < +\infty \text{ continue,} \\ \text{muni de } \|x\| = \mathbb{E}\left(\left[\sup_{0\leq s\leq T} |x_s|^2\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty\right). \end{array} \right\}$$

Pour $x \in S_c^2$ posons, pour tout $t \in [0,T]$

$$\Psi(x_t) = x + \int_0^t b(s,x_s)ds \ + \int_0^t \sigma(s,x_s)dW_s,$$

le processus $\Psi(x)$ est bien définie.et est continu si $x \in S_c^2$.

Soient x et y deux éléments de S_c^2 on utilisant le fait que $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ on a pour tout $0 \leq t \leq u \leq T$,

$$|\Psi(x_t) - \Psi(y_t)|^2 \leq 2 \sup_{0\leq t\leq u} \left| \int_0^t (b(s,x_s)ds - b(s,y_s))\, ds \right|^2 + 2 \sup_{0\leq t\leq u} \left| \int_0^t (\sigma(s,x_s)ds - \sigma(s,y_s))\, dW_s \right|^2 .$$

En utilise les propriétés (4 et 5) de l'intégrale stochastique alors on obient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |\Psi(x_t) - \Psi(y_t)|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^u |b(s,x_s)ds - b(s,y_s)|\, ds\right)^2\right] \\ &+ 8\mathbb{E}\left[\int_0^u |\sigma(s,x_s) - \sigma(s,y_s)|^2\, ds\right].\end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder donne alors la majoration

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |\Psi(x_t) - \Psi(y_t)|^2\right] &\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^u |b(s,x_s) - b(s,y_s)|^2\, ds\right] \\ &+ 8\mathbb{E}\left[\int_0^u |\sigma(s,x_s)ds - \sigma(s,y_s)|^2\, ds\right].\end{aligned}$$

Comme les fonction b et σ sont lipschiz

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |\Psi(x_t) - \Psi(y_t)|^2\right] \leq 2k^2(T+4)\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq r} |x_t - y_t|^2\, dr\right]. \tag{1.2}$$

De plus, notant 0 le processus nul, on a, comme $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$,
$|\Psi(0)|^2 \leq 3x^2 + 3\sup_{0\leq t\leq T} \left|\int_0^t b(s,0)ds\right|^2 + 3\sup_{0\leq t\leq T} \left|\int_0^t \sigma(s,0)dW_s\right|^2$,
d'où l'on tire en utilisant l'inégalité de Doob et la croussance linéaire de b et σ,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\Psi(0)|^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}(x^2) + K^2T^2 + 4K^2T\right), \tag{1.3}$$

Les estimations (1.2) et (1.3) montrant alors que le processus $\Psi(x)$ appartient à S_c^2 dés que x appartient à S_c^2.

On définit alors par récurrence une suit de processus de S_c^2 en posant

$$x_0 = 0, \quad \text{et}, \quad x^{n+1} = \Psi(x^n), \text{ pour } n \geq 0.$$

On obtient (1.2), pour tout $n \geq 0$ notant par C à la place de $2k^2(T+4)$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2\right] \leq \frac{C^nT^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^1\right|^2\right],$$

et notant D le majorant de l'inégalité (1.3),

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2\right] \leq D\frac{C^nT^n}{n!}.$$

Il résulte de cette dernière inégalité que

$$\sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2\right\|_{L^1} \leq \sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2\right\|_{L^2} \leq \sqrt{D}\frac{(CT)^{n/2}}{\sqrt{n!}} < \infty.$$

Alors le série $\sum_{n\geq 0}\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|$ converge $\mathbb{P} - p.s$ et donc, $\mathbb{P} - p.s$, x^n converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus continue. De plus $x \in S_c^2$. On vérifier que x est solution de l'EDS (1.1) en passant à la limite dans la définition $x^{n+1} = \Psi(x^n)$.
Si x et y deux solution de (1.1) dans S_c^2 alors : $x = \Psi(x_t)$ et $y = \Psi(y_t)$. L'inégalité (1.2) alors donne pour tout $u \in [0T]$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|x_t - y_t|^2\right] \leq 2K^2(T+4)\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq r}|x_s - y_s|^2\right]dr,$$

le lemme de Gronwall donne

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|x_t - y_t|^2\right] = 0,$$

ce si implique que x et y sont indistinguables i.e. $\mathbb{P}(x_t = y_t, \forall 0 \leq t \leq T)$. ∎

Chapitre 2

Principe du maximum stochastique

2.1 Modèle de diffusion à changement de régime

Soit $T \in (0, \infty)$ un temp fixe et déterministe. $W = (W_1, ..., W_N)$ un mouvement Brownien N-dimensionnel, α une chaîne de Markov définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La filtration est générée conjointement par le mouvement Brownien W et la chaîne de Markov α est donnée par

$$\mathcal{F}_t := \sigma\{(\alpha(s), W(s)), s \in [0, t]\} \vee \mathcal{N}(\mathbb{P}), \forall t \in [0, T], \tag{2.1}$$

où $\mathcal{N}(\mathbb{P})$ est l'ensemble de touts les événements $\mathbb{P}-$nulle dans l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que la chaîn de Markov prend des valeurs dans un espace d'état fini $I = \{1, .., D\}$ et qu'elle commence dans un état fixe $i_0 \in I$, de sort que $\alpha(0) = i_0$, $\mathbb{P}-p.s.$ La chaîne de Markov α a générateur $G{=}(g_{i\,j})_{i,j=1}^D$ qui est une matrice de dimension $D{\times}D$. On note $\mathbf{1}$ la fonction d'indicateur zéro-un. Associés à chaque paire des états distincts (i, j) dans l'espace d'état de la chaîn de Markov un processus ponctuel ou processus de comptage,

$$N_{ij}(t) := \sum_{0<s\leq t} \mathbf{1}\{\alpha(s-)=i\}\mathbf{1}_{\{\alpha(s)=j\}}, \forall t \in [0,T]. \tag{2.2}$$

Le processus $N_{ij}(t)$ compte le nombre des sauts que la chaîn de Markov α a fait de l'état i à l'état j jusqu'au temp t. Définir le processus d'intensité :

$$\lambda_{ij}(t) := g_{ij}\mathbf{1}_{\{\alpha(t-)=i\}} \ , \tag{2.3}$$

si on remplacer $N_{ij}(t)$ par $\int_0^t \lambda_{ij}(s)ds$, alors le processus

$$M_{ij}(t) := N_{ij}(t) - \int_0^t \lambda_{ij}(s)ds \ , \tag{2.4}$$

est une martingale de carré-intégrable purement discontinue qui est null à l'origine (voir [7] , lemme $IV.21.12$). Notez que l'ensemble des martingales $\{\ M_{ij}(t); i,j \in I, i \neq j\}$ sont mutellement orthogonales.

2.2 Problème de contrôle

Supposons que pour $P \in \mathbb{N}$, on donne un ensemble $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^p$ et un processus de contrôle $u(t) = u(\omega,t) : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathcal{U}$,soit $u(t)$ est $\{\mathcal{F}_t\}-$adapté et càdlàg.
On considère la variable d'état $X(t) = (X_1(t),...,X_N(t))^\top$ dont n^{ième} composante satisfait l'équation différentielle stochastique suivante

$$dX_n(t) = b_n(t,X(t),u(t),\alpha(t-))dt + \sum_{m=1}^{N} \sigma_{nm}(t,X(t),u(t),\alpha(t-))dW_m(t), \tag{2.5}$$

où $b_n : [0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^p \times I \longrightarrow \mathbb{R}$, et $\sigma_{nm} : [0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^p \times I \longrightarrow \mathbb{R}$, sont des fonctions continues pour $n,m = 1,...N$. En utilisant $A^\top$ pour désigner la transposition d'un matrice A, mettre $b(t) := (b_1(t),...,b_N(t))^\top$ et $\sigma(t) := (\sigma_{nm}(t))_{n,m=1}^N$.

Nous considérons un critère de performance définie pour chaque $x \in \mathbb{R}^N$ comme

$$J^{(u)}(x) := J^{(u)}(x, i_0) := \mathbb{E}\left(\int_0^T f(t, X(t), u(t), \alpha(t))dt + h(X(T), \alpha(T)) \middle| X(0) = x, \alpha(0) = i_0\right),$$

où pour chaque $i \in I$ on a $f(.,.,.,i) : [0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et $h(.,i) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ est $C^1(\mathbb{R})$ et concave.

On dit que le processus de contrôle u est admissible et écrire $u \in \mathcal{A}$ si, pour chaque $x \in \mathbb{R}^N$, (2.5) admet une solution unique et fort $X(t) = X^{(u)}(t), t \in [0,T]$ satisfisont à la fois $X(0) = x, \mathbb{P}-$ $p.s$,et

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T f(t, X(t), u(t), \alpha(t))dt + h(X(T), \alpha(T))\right) < \infty.$$

Le problème du contrôle stochastique est de trouver un contrôle optimal $u^{\star} \in \mathcal{A}$ tel que

$$J^{(u^{\star})}(x) = \sup_{u \in \mathcal{A}} J^{(u)}(x). \tag{2.6}$$

Définir l'Hamiltonien $\mathcal{H}$:$[0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{U} \times I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times N} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{H}(t,x,u,i,p,q) := f(t,x,u,i) + b^{\top}(t,x,u,i)p + tr(\sigma^{\top}(t,x,u,i)\, q), \tag{2.7}$$

où $tr(A)$ dénote la trace de la matrice A. On supposer que l'Hamiltonien $\mathcal{H}$ est différentiable par rapport à x.

L'équation adjointe (EDSR) est définie par les processus adaptés, $p(t) \in \mathbb{R}^N, q(t) \in \mathbb{R}^{N \times N}$

et $\eta = \left(\eta^{(1)}(t), ..., \eta^{(N)}(t)\right)^{\top}$, où $\eta^{(n)} \in \mathbb{R}^{D\times D}$. telle que

$$\begin{cases} dp(t) = -\nabla_x \mathcal{H}(t, X(t), u(t), \alpha(t), p(t), q(t))\, dt \\ \qquad\qquad + q^{\top}(t)\, dW(t) + \eta(t) \bullet dM(t), \\ p(T) = \nabla_x h(X(T), \alpha(T)), p.s, \end{cases} \tag{2.8}$$

avec $\nabla_x \mathcal{H}(t, X(t), u(t), \alpha(t), p(t), q(t))$ dénote $\nabla_x \mathcal{H}(t, x, u(t), \alpha(t), p(t), q(t))\,|_{x=X(t)}$, $\nabla_x h(X(T), \alpha(T))$ dénote $\nabla_x h(x, \alpha(T))\,|_{x=X(T)}$, on définit pour tous $t \in [0, T)$

$$\eta(t) \bullet dM(t) := \left(\sum_{j\neq i} \eta_{ij}^{(1)}(t)\, dM_{ij}(t), ..., \sum_{j\neq i} \eta_{ij}^{(N)}(t)\, dM_{ij}(t)\right)^{\top}.$$

On note que nous utilisons tout au long de cet mémoire $\sum_{j\neq i}$ comme raccourci pour $\sum_{i=1}^{D} \sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}$.

Remarque 2.2.1 *Notez qu'il ya des sauts dans l'équation adjointe* (2.8) *même s'il n'ya pas des sauts dans* (2.5) *qui gouverne la variable d'état* $X(t)$. *Ceci est une conséquence des coefficients* $b(t)$ *et* $\sigma(t)$ *des fonctions de la chaîne de Markov* $\alpha(t)$. *De plus, le processus inconnu* $\eta(t)$ *dans les équations adjoints* (2.8) *n'apparaît pas dans l'Hamiltonien* (2.7).

2.3 Principe du maximum stochastique suffisant

Dans cette chapitre, nous allons démentrer le principe du maximum stochastique suffisant pour qu'on puisse appliquer à un problème de minimisation de perte quadratique dans le chapitre 3.

Théorème 2.3.1 (Principe du maximum stochastique suffisant) *Soit* $\widehat{u} \in \mathcal{A}$ *avec* $\widehat{X} = X^{(\widehat{u})}$ *la solution correspondante. Supposons qu'il existe une solution* $(\widehat{p}(t), \widehat{q}(t), \widehat{\eta}(t))$ *de l'équation adjointe* (2.7) *satisfaisant*

$$\mathbb{E}\int_0^T \left\| \left(\sigma\left(t, \widehat{X}(t)\right) - \sigma\left(t, X^{(u)}(t)\right)\right)^{\top} \widehat{p}(t) \right\|^2 dt < \infty, \tag{2.9}$$

$$\mathbb{E}\int_0^T \left\|\widehat{q}^{\top}(t)\left(\widehat{X}(t)-X^{(u)}(t)\right)\right\|^2 dt<\infty, \tag{2.10}$$

et

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{j\neq i}\mathbb{E}\int_0^T \left|\left(\widehat{X}_n(t)-X_n^{(u)}(t)\right)\widehat{\eta}_{ij}^{(n)}(t)\right|^2 d\langle M_{ij}\rangle(t)<\infty. \tag{2.11}$$

Pour tous les contrôles admissibles $u\in\mathcal{A}$, supposons

1. $\mathcal{H}\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t),\alpha(t),\widehat{p}(t),\widehat{q}(t)\right)=\sup_{v\in\mathcal{U}}\mathcal{H}\left(t,\widehat{X}(t),v,\alpha(t),\widehat{p}(t),\widehat{q}(t)\right)$.
2. $h(x,i)$ *est une fonction concave de* x *pour chaque* $i\in I$, *et*
3. *Pour chaque pair fixe* $(t,i)\in[0,T]\times I$, $\widehat{\mathcal{H}}(x):=\max_{v\in\mathcal{A}}\mathcal{H}(t,x,v,i,\widehat{p}(t),\widehat{q}(t))$ *existe et est une fonction concave de* x.

Alors $\widehat{u}$ est un contrôle optimal.

Preuve. Fixe $u\in\mathcal{A}$ avec la solution correspondante $X=X^{(u)}$.
On note $\left(t,\widehat{X}(t-),\widehat{u}(t-),\alpha(t-)\right)$ par $\left(t,\widehat{X}(t-)\right)$. Alors

$$\begin{aligned}J(\widehat{u})-J(u)=\mathbb{E}\Bigg(&\int_0^T\left(f\left(t,\widehat{X}(t)\right)-f(t,X(t))\right)dt\\ &+\ h\left(\widehat{X}(T),\alpha(T)\right)-h(X(T),\alpha(T))\Bigg).\end{aligned}$$

On utilise la concavité de $h(.,i)$ pour chaque $i\in I$ et (2.8) pour obtenir les inégalités

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(h\left(\widehat{X}(T),\alpha(T)\right)-h(X(T),\alpha(T))\right)&\geq\mathbb{E}\left(\left(\widehat{X}(T)-X(T)\right)^{\top}\nabla_x h\left(\widehat{X}(T),\alpha(T)\right)\right)\\ &\geq\mathbb{E}\left(\left(\widehat{X}(T)-X(T)\right)^{\top}\widehat{p}(T)\right).\end{aligned}$$

Cela donne

$$\begin{aligned}J(\widehat{u})-J(u)\geq\ &\mathbb{E}\int_0^T\left(f\left(t,\widehat{X}(t-)\right)-f(t,X(t-))\right)dt\\ &+\mathbb{E}\left(\left(\widehat{X}(T)-X(T)\right)^{\top}\widehat{p}(T)\right).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Pour dévlopper le premir terme du côté droit de (2.12), on utilise la définition de $\mathcal{H}$ en (2.7) pour obtenir

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\int_0^T \left(f\left(t,\widehat{X}\left(t\right)\right)-f\left(t,X\left(t\right)\right)\right)dt \\ & =\mathbb{E}\int_0^T \left(\mathcal{H}\left(t,\widehat{X}\left(t\right),\widehat{u}\left(t\right),\alpha\left(t\right),\widehat{p}\left(t\right),\widehat{q}\left(t\right)\right)\right. \\ & \quad \left.-\mathcal{H}\left(t,X\left(t\right),u\left(t\right),\alpha\left(t\right),\widehat{p}\left(t\right),\widehat{q}\left(t\right)\right)\right)dt \\ & \quad -\mathbb{E}\int_0^T \left(\left(b\left(t,\widehat{X}\left(t\right)\right)-b\left(t,X\left(t\right)\right)\right)^{\top}\widehat{p}\left(t\right)\right. \\ & \quad \left.+tr\left(\sigma\left(t,\widehat{X}\left(t\right)\right)-\sigma\left(t,X\left(t\right)\right)\right)^{\top}\widehat{q}\left(t\right)\right)dt\ . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Pour développer le second terme du côté droit (2.12) on commencer par appliquer intégration par-parties pour obtenir

$$\begin{aligned} \left(\widehat{X}\left(T\right)-X\left(T\right)\right)^{\top}\widehat{p}(T) &= \int_0^T \left(\widehat{X}\left(t\right)-X\left(t\right)\right)^{\top} d\widehat{p}\left(t\right) \\ & \quad + \int_0^T \widehat{p}^{\top}\left(t\right)d\left(\widehat{X}\left(t\right)-X\left(t\right)\right)+\left[\widehat{X}-X,\widehat{p}\right]\left(T\right)\ . \end{aligned}$$

Remplacer $X,\widehat{X}$ et $\widehat{p}$ à partire de (2.5) et (2.8), on trouve

$$\begin{aligned} & \left(\widehat{X}\left(T\right)-X\left(T\right)\right)^{\top}\widehat{p}(T) \\ & =\int_0^T \left(\widehat{X}\left(t\right)-X\left(t\right)\right)^{\top}\left(-\nabla_x\mathcal{H}\left(t,\widehat{X}\left(t\right),\widehat{u}\left(t\right),\alpha\left(t\right),\widehat{p}\left(t\right),\widehat{q}\left(t\right)\right)dt\right. \\ & \quad \left.+\widehat{q}^{\top}\left(t\right)dW\left(t\right)+\widehat{\eta}\left(t\right)\bullet dM\left(t\right)\right) \\ & \quad +\int_0^T \widehat{p}^{\top}\left(t\right)\left(\left(b\left(t,\widehat{X}\left(t\right)\right)-b\left(t,X\left(t\right)\right)\right)dt\right. \\ & \quad \left.+\left(\sigma\left(t,\widehat{X}\left(t\right)\right)-\sigma\left(t,X\left(t\right)\right)\right)^{\top}dW\left(t\right)\right) \\ & \quad +\int_0^T tr\left(\widehat{q}^{\top}\left(t\right)\left(\sigma\left(t,\widehat{X}\left(t\right)\right)-\sigma\left(t,X\left(t\right)\right)\right)\right)dt\ . \end{aligned}$$

En raison des conditions d'intégrabilités (2.9)-(2.11) , le mouvement Brownien et la chaîne de Markov sont des martingales de carré-integrables qui sont nulles à l'origine. Ainsi, en prenant l'esperance on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left(\widehat{X}(T)-X(T)\right)^{\top}\widehat{p}(T)\right) \\
&=\mathbb{E}\int_0^T\left(-\left(\widehat{X}(t)-X(t)\right)^{\top}\nabla_x\mathcal{H}\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t),\alpha(t),\widehat{p}(t),\widehat{q}(t)\right)\right)dt \\
&\quad+\mathbb{E}\int_0^T\left(\widehat{p}^{\top}(t)\left(b\left(t,\widehat{X}(t)\right)-b(t,X(t))\right)\right. \\
&\quad\left.+\,tr\left(\widehat{q}^{\top}(t)\left(\sigma\left(t,\widehat{X}(t)\right)-\sigma(t,X(t))\right)\right)\right)dt\ .
\end{aligned}$$

Remplacer la dernière équation et (2.13) dans l'intégalite (2.12) , on trouve

$$\begin{aligned}
J(\widehat{u})-J(u)\geq\mathbb{E}\int_0^T&\mathcal{H}\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t),\alpha(t),\widehat{p}(t),\widehat{q}(t)\right) \\
&-\mathcal{H}(t,X(t),u(t),\alpha(t),\widehat{p}(t),\widehat{q}(t)) \\
&-\left(\widehat{X}(t)-X(t)\right)^{\top}\nabla_x\mathcal{H}\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t),\alpha(t),\widehat{p}(t),\widehat{q}(t)\right)dt\ .
\end{aligned}\tag{2.14}$$

Nous pouvons montrer que l'intégrande sur le côté droit de (2.14) est non négatif $\mathbb{P}-p.s.$ Pour chaque $t\in[0,T]$ en fixant l'état de la chaîne de Markov, puis en utilisant la concavité supposéé de $\widehat{\mathcal{H}}(x)$ pour appliquer l'argument de [[5], pp.83-84]. Cela donne $J(\widehat{u})-J(u)\geq 0$ et donc $\widehat{u}$ est optimal. ■

2.4 Relation à la programmation dynamique

Dans les problèmes de diffusion avec saut, la relation entre le principe du maximum stochastique et le principe de la programmation dynamique est prouvé dans [[5], secte 3]. On va montrer une relation dans le Théorème 2.4.1, entre la fonction de valeur $V(t,x,i)$ du problème de contrôle et les processus adjoints $p(t), q(t)$ et $\eta(t)$. Dans ce cas, la différence est que, dans le modèle de diffusion à changement de régime, le processus adjoint $\eta_{ij}(t)$ présent les sauts de le x-gradient de la fonction de valeur dûe à la changement de la chaîne de Markov de l'état i à l'état j. Dans les problèmes de diffusion avec saut où il n'y a pas de changement de régime, ce processus adjoint représente les sauts du x-gradient de la fonction de valeur en raison des sauts dans le processus d'état $X(t)$.

Mettre le problème dans un cadre Markovien afin que nous puissions appliquer le principe de la programmation dynamique, on définie

$$J_u(s,x,i) := \mathbb{E}\left(\int_s^T f(t,X(t),u(t),\alpha(t))\,dt + h(X(T),\alpha(T))\right| \\ \left. X(s)=x \ ,\alpha(s)=i\right) \ , \ \forall u \in \mathcal{A},$$

et mettre

$$V(s,x,i) := \sup_{u\in\mathcal{A}} J_u(s,x,i)\,, \tag{2.15}$$

pour tous $(s,x,i) \in [0,T]\times\mathbb{R}^N\times I$.

Théorème 2.4.1 *On suppose que $V(.,.,i) \in C^{1,3}\left([0,T]\times\mathbb{R}^N\right)$ pour chaque $i\in I$, et que il existe un contrôle de Markov optimal $u^\star(t,x,i)$ pour (2.15) avec la solution correspondante $X^\star = X^{(u^\star)}$. Définir*

$$p_n(t) := \frac{\partial V}{\partial x_n}(t,X^\star(t),\alpha(t))\,, \tag{2.16}$$

$$q_{nm}(t) := \sum_{l=1}^{N} \sigma_{lm}(t,X^\star(t),u^\star(t),\alpha(t))\frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_l}(t,X^\star(t),\alpha(t))\,, \tag{2.17}$$

$$\eta_{ij}^{(n)}(t) := \frac{\partial V}{\partial x_n}(t,X^\star(t),j) - \frac{\partial V}{\partial x_n}(t,X^\star(t),i)\,. \tag{2.18}$$

Alors $p(t),q(t),\eta(t)$ résoudre l'équation adjointe (2.8).

Preuve. Pour démontrer le théorème ci dessus, nous avons besoin de la formule d'Itô , qui est donnée prochainement, la formule d'Itô peut être trouvée dans $[[6]$, théorème 18,p $278]$.

■

Théorème 2.4.2 (la formule d'Itô) *On donne un processus N-dimensionnel $X = (X_1, ..., X_N)^\top$ satisfaisant pour chaque $n = 1, ..., N$*

$$
\begin{aligned}
dX_n(t) &= b_n(t, X(t), \alpha(t-))\,dt + \sum_{m=1}^{N} \sigma_{nm}(t, X(t), \alpha(t-), dW_m(t)),\\
X_n(0) &= x_0^{(n)},\ \mathbb{P} - p.s.,
\end{aligned}
$$

pour certains $x_0^{(n)} \in \mathbb{R}$, et les fonctions $V(.,.,i) \in C^{1,3}\left([0,T] \times \mathbb{R}^N\right)$ pour chaque $i = 1, ..., D$, alors

$$
\begin{aligned}
V(t, X(t), \alpha(t)) = V(0, X(0), \alpha(0)) &+ \int_0^t \Gamma V(s, X(s), \alpha(s-))\,ds\\
&+ \sum_{n=1}^{N} \int_0^t \frac{\partial V}{\partial x_n}(s, X(s), \alpha(s-)) \sum_{m=1}^{N} \sigma_{nm}(s, X(s), \alpha(s-))\,dW_m(s)\\
&+ \sum_{j \neq i} \int_0^t (V(s, X(s), j) - V(s, X(s), i))\,dM_{ij}(t),
\end{aligned}
$$

pour

$$
\begin{aligned}
\Gamma V(t, x, i) := \frac{\partial V}{\partial t}(t, x, i) &+ \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_n}(t, x, i)\, b_n(t, x, i)\\
&+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_m}(t, x, i) \sum_{l=1}^{N} \sigma_{nl}(t, x, i)\, \sigma_{ml}(t, x, i)\\
&+ \sum_{j=1}^{D} \mathbf{g}_{ij}(V(t, x, j) - V(t, x, i)),
\end{aligned}
$$

pour tous $(t, x, i) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N \times I$.

Preuve. Théorème 2.4.1

Dans la théorie général de la programmation dynamique, l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman est donnée par

$$
\frac{\partial V}{\partial t}(t, x, i) + \sup_{u \in \mathcal{U}} \{ f(t, x, u, i) + \mathcal{A}^u V(t, x, i) \} = 0,
$$

où $\mathcal{A}^u$ est le générateur infinitésimal et le supremum est attient par $u^\star(t,x,i)$.

On définie

$$F(t,x,u,i) := \frac{\partial V}{\partial t}(t,x,i) + f(t,x,u,i) + \mathcal{A}^u V(t,x,i).$$

En utilisant la formule d'Itô (Théorème 2.4.2) pour étendre $\mathcal{A}^u V(t,x,i)$, on trouve

$$\begin{aligned} F(t,x,u,i) &= f(t,x,u,i) + \frac{\partial V}{\partial t}(t,x,i) + \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_n}(t,x,i)\, b_n(t,x,i) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_m}(t,x,i) \sum_{l=1}^{N} \sigma_{nl}(t,x,i)\,\sigma_{ml}(t,x,i) \\ &+ \sum_{j=1}^{D} \mathbf{g}_{ij}\left(V(t,x,j) - V(t,x,i)\right) \ . \end{aligned}$$

Dérivons $F(t,x,u^\star(t,x,i),i)$ par rapport à x_k et évaluer à $x = X^\star(t)$ et $i = \alpha(t)$. Pour facilité de la notation, on note $(t, X^\star(t), u^\star(t, X^\star(t), \alpha(t)), \alpha(t))$ par $(t, \alpha(t))$.

On a

$$\begin{aligned} 0 = &\frac{\partial f}{\partial x_k}(t,\alpha(t)) + \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial t}(t, X^\star(t), \alpha(t)) + \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_n}(t, X^\star(t), \alpha(t)) \cdot b_n(t,\alpha(t)) \\ &+ \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_n}(t, X^\star(t), \alpha(t)) \cdot \frac{\partial b_n}{\partial x_k}(t,\alpha(t)) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \frac{\partial^3 V}{\partial x_k \partial x_n \partial x_m}(t, X^\star(t), \alpha(t)) \left(\sum_{l=1}^{N} \sigma_{nl}\sigma_{ml}\right)(t,\alpha(t)) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_m}(t, X^\star(t), \alpha(t)) \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{l=1}^{N} \sigma_{nl}\sigma_{ml}\right)(t,\alpha(t)) \\ &+ \sum_{j=1}^{D} \mathbf{g}_{\alpha(t),j}\left(\frac{\partial V}{\partial x_k}(t, X^\star(t), j) - \frac{\partial V}{\partial x_k}(t, X^\star(t), \alpha(t))\right). \end{aligned} \tag{2.19}$$

On pose

$$Y_k(t) := \frac{\partial V}{\partial x_k}(t, X^\star(t), \alpha(t)), \qquad \text{pour } k = 1, \ldots, N$$

En utlisant la formule d'Itô (Théorème 2.4.2) pour obtenir la dynamique de $Y_k(t)$, on trouve

$$
\begin{aligned}
dY_k(t) = & \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x_k}(t, X^\star(t), \alpha(t)) + \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_k}(t, X^\star(t), \alpha(t)) \cdot b_n(t, \alpha(t)) \right. \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial^3 V}{\partial x_n \partial x_m \partial x_k}(t, X^\star(t), \alpha(t)) \left(\sum_{l=1}^{N} \sigma_{nl} \sigma_{ml} \right)(t, \alpha(t)) \\
& \left. + \sum_{j=1}^{D} \mathbf{g}_{\alpha(t),j} \left(\frac{\partial V}{\partial x_k}(t, X^\star(t), j) - \frac{\partial V}{\partial x_k}(t, X^\star(t), \alpha(t)) \right) \right\} dt \\
& + \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_k}(t, X^\star(t), \alpha(t)) \sum_{m=1}^{N} \sigma_{nm}(t, \alpha(t)) \, dW_m(t) \\
& + \sum_{j \neq i} \left(\frac{\partial V}{\partial x_k}(t, X^\star(t), j) - \frac{\partial V}{\partial x_k}(t, X^\star(t), i) \right) dM_{ij}(t) \quad .
\end{aligned}
$$

Remplacer à $\dfrac{\partial^2 V}{\partial t \partial x_k}$ à partir de (2.19), on obtient

$$
\begin{aligned}
dY_k(t) = -& \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_k}(t, \alpha(t)) + \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_n}(t, X^\star(t), \alpha(t)) \cdot \frac{\partial b_n}{\partial x_k}(t, \alpha(t)) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_m}(t, X^\star(t), \alpha(t)) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{l=1}^{N} \sigma_{nl} \sigma_{ml} \right)(t, \alpha(t)) \right\} dt \\
& + \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_k}(t, X^\star(t), \alpha(t)) \sum_{m=1}^{N} \sigma_{nm}(t, \alpha(t)) \, dW_m(t) \\
& + \sum_{j \neq i} \left(\frac{\partial V}{\partial x_k}(t, X^\star(t), j) - \frac{\partial V}{\partial x_k}(t, X^\star(t), i) \right) dM_{ij}(t) . \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

Notez que

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{l=1}^{N} \sigma_{nl} \sigma_{ml} \right) \qquad (2.21) \\
& = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_m} \sum_{l=1}^{N} \left(\frac{\partial \sigma_{nl}}{\partial x_k} \sigma_{ml} + \sigma_{nl} \frac{\partial \sigma_{ml}}{\partial x_k} \right) \\
& = \sum_{m=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \left(\sum_{n=1}^{N} \sigma_{nl} \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_m} \right) \frac{\partial \sigma_{ml}}{\partial x_k} \quad .
\end{aligned}
$$

Ensuite, à partir de (2.7), on trouve

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k}\left(t, X\left(t\right), u\left(t\right), \alpha\left(t\right), p\left(t\right), q\left(t\right)\right) = \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(t, \alpha\left(t\right)\right) + \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial b_n}{\partial x_k}\left(t, \alpha\left(t\right)\right) p_n\left(t\right)$$
$$+ \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial \sigma_{nm}}{\partial x_k}\left(t, \alpha\left(t\right)\right) q_{nm}\left(t\right) \; .$$

Remplacer (2.16)-(2.18), (2.21) et la dérnière équation en (2.20) donne

$$dY_k\left(t\right) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k}\left(t, X\left(t\right), u\left(t\right), \alpha\left(t\right), p\left(t\right), q\left(t\right)\right) dt + \sum_{m=1}^{N} q_{km}\left(t\right) dW_m\left(t\right)$$
$$+ \sum_{j \neq i} \eta_{ij}^{(k)}\left(t\right) dM_{ij}\left(t\right),$$

et comme $Y_k\left(t\right) = p_k\left(t\right)$ pour chaque $k = 1, \ldots, N$, nous avons montré que $p\left(t\right), q\left(t\right)$ et $\eta\left(t\right)$ donnée par (2.16)-(2.18) résoudre l'équation adjointe (2.8). ■

Chapitre 3

Application : Problème de minimisation de perte quadratique

Dans ce chapitre on utilise le principe du maximum pour résoudre un problème de minimisation de perte quadratique. Soit un marché financier à changement de régime qui s'appuie sur un actif échange, que nous appelons l'actif risqué, et un actif sans risque. Le processus de prix de l'actif sans risque $S_0 = \{S_0(t), t \in [0,T]\}$ est donnée par

$$\frac{dS_0(t)}{S_0(t)} = r(t, \alpha(t-))\,dt, \qquad \forall, t \in [0,T] \;\; S_0(0) = 1, \tag{3.1}$$

lorsque le taux d'intérêt sans-risque $r(t,i)$ est un fonction déterministe bornée sur $[0,T]$, pour $i = 1, ..., D$,

Le processus de prix $S_1 = \{S_1(t), t \in [0,T]\}$ de l'actif risqué est donnée par :

$$\frac{dS_1(t)}{S_1(t)} = b(t, \alpha(t-))\,dt + \sigma(t, \alpha(t-))\,dW(t), \quad \forall t \in [0,T] \;, \tag{3.2}$$

avec la valeur initiale $S_1(0)$ une constante fixe strictement positive dans $\mathbb{R}$. On suppose que le taux de rendement $b(t,i)$ et le processus de volatilité $\sigma(t,i)$ sont bornés, non nulls, fonctions déterministes sur $[0,T]$ pour $i = 1, ..., D$. Ici, W est un mouvement Brownien standard 1-dimensionel et b et σ sont des processus scalaires.

Un processus de portefeuille $\pi(t)$ est un processus scalaire $\{\mathcal{F}_t\}$ $-$prévisible qui donne la montant investi dans l'actif-risque au temp t. Dénote $\pi_0(t)$ la montant investi dans l'actif sans-risque au temp t. Le processus de la richesse correspondant $X^\pi(t)$ est ensuite donnée par

$$X^\pi(t) = \pi_0(t) + \pi(t).$$

On suppose que $X^\pi(0) = x_0, \mathbb{P}-$ $p.s.$ Définir le prix de marché du risque de diffusion $\theta(t,i) := \sigma^{-1}(t,i)(b(t,i) - r(t,i))$. Sous la condition d'auto-financement, la dynamique du processus de richesse satisfait

$$dX^\pi(t) = (r(t)X^\pi(t) + \pi(t)\sigma(t)\theta(t))\,dt + \pi(t)\sigma(t)\,dW(t), \quad X^\pi(0) = x_0. \tag{3.3}$$

On dit que $\pi(t)$ est un processus de portefeuille admissible et on écrite $\pi \in \mathcal{A}$**,** s'il d'un $\{\mathcal{F}_t\}$ $-$prévisible, carré -intégrable, processus scalaire.

On considère le problème de trouver un processus de portefeuille admissible $\bar{\pi} \in \mathcal{A}$ telle que :

$$\mathbb{E}\left(X^{\bar{\pi}}(T) - d\right)^2 = \inf_{\pi\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left(X^\pi(T) - d\right)^2,$$

pour un constant fixe $d \in \mathbb{R}$.

Pour résoudre ceci, on utilise le principe du maximum suffisant du Théorème 2.3.1. Définir la fonction à valeur réelle $h(x) := -(x-d)^2$ et considérer le problème équivalent de maximiser

$$\mathbb{E}\left(h\left(X^\pi(T)\right)\right) = \mathbb{E}\left(-\left(X^\pi(T) - d\right)^2\right), \tag{3.4}$$

pour tous $\pi \in \mathcal{A}$. Le processus de contrôle $u(t) := \pi(t)$ et $X(t) := X^\pi(t)$. Pour cet exemple, l'Hamiltonien (2.7) devient

$$\mathcal{H}(t,x,u,i,p,q) := (r(t,i)\,x + u\sigma(t,i)\,\theta(t,i))\,p + u\sigma(t,i)\,q, \tag{3.5}$$

et les équations adjointes (2.8) son pour tout $t \in [0, T)$,

$$\begin{cases} dp(t) = -r(t)\, p(t)\, dt + q(t)\, dW(t) + \sum_{j \neq i} \eta_{ij}(t)\, dM_{ij}(t), \\ p(T) = -2X(T) + 2d, \mathbb{P} - p.s. \end{cases} \tag{3.6}$$

On cherche à la solution $(p(t), q(t), \eta(t))$ de (3.6).

Depuis que $h(x)$ est quadratique en x et que le processus adjoint p est la dérivée première de la fonction h, une hypothèse naturelle est que p est linéaire en X, cela signifie que p est de la forme

$$p(t) = \phi(t, \alpha(t))\, X(t) + \psi(t, \alpha(t)), \tag{3.7}$$

où $\phi(., i)$ et $\psi(., i)$ sont des fonctions déterministes, différentiableles pour chaque $i = 1, ..., D$, qui sont d'être trouvés, à partir de (3.6) ϕ et ψ ont des conditions limites terminal

$$\phi(T, i) = -2 \quad \text{et} \quad \psi(T, i) = 2d, \quad \forall i \in I. \tag{3.8}$$

l'étape suivante consiste à étendre le côté droit de (3.7), puis à la comparer avec (3.6). Pour ce faire, on commencer par noter de la formule d'Itô (Théorème 2.4.2) cet pour la fonction $f(t, \alpha(t))$ on a

$$\begin{aligned} df(t, \alpha(t)) = {} & f_t(t, \alpha(t-))\, dt + \sum_{j \neq i} \mathbf{g}_{ij} (f(t, j) - f(t, i))\, \mathbf{1}[\alpha(t-) = i]\, dt \\ & + \sum_{j \neq i} (f(t, j) - f(t, i))\, dM_{ij}(t). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Utiliser (3.9) pour étendre les fonction ϕ et ψ, et (3.3) pour étendre X (avec $\pi(t) := u(t)$

et $X^{\pi}(t) := X(t))$, on applique l'intégration par-parties à (3.7), on obtient

$$\begin{aligned} dp(t) = \sum_{i=1}^{D} \mathbf{1}[\alpha(t-) = i] \Bigg\{ & X(t-) \Bigg(\phi(t,i) r(t,i) + \phi_t(t,i) \\ & + \sum_{j=1}^{D} \mathbf{g}_{ij} (\phi(t,j) - \phi(t,i)) \Bigg) + \phi(t,i) u(t) \sigma(t,i) \theta(t,i) + \psi_t(t,i) \\ & + \sum_{j=1}^{D} \mathbf{g}_{ij} (\psi(t,j) - \psi(t,i)) \Bigg\} dt + \phi(t) u(t) \sigma(t) dW(t) \\ & + \sum_{j \neq i} (X(t-)(\phi(t,j) - \phi(t,i)) + (\psi(t,j) - \psi(t,i))) dM_{ij}(t) \ . \end{aligned}$$

En comparant les coefficients avec (3.6) on obtient trois équations

$$\begin{aligned} & - r(t, \alpha(t-)) p(t-) \\ & = \sum_{i=1}^{D} \mathbf{1}[\alpha(t-) = i] \Bigg\{ X(t-) \Bigg(\phi(t,i) r(t,i) + \phi_t(t,i) + \sum_{j=1}^{D} \mathbf{g}_{ij} (\phi(t,j) - \phi(t,i)) \Bigg) \\ & \quad + \phi(t,i) u(t) \sigma(t,i) \theta(t,i) + \psi_t(t,i) + \sum_{j=1}^{D} \mathbf{g}_{ij} (\psi(t,j) - \psi(t,i)) \Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$q(t) = \phi(t) \sigma(t) u(t), \tag{3.11}$$

$$\eta_{ij}(t) = X(t-)(\phi(t,j) - \phi(t,i)) + (\psi(t,j) - \psi(t,i)). \tag{3.12}$$

Soit $\widehat{u} \in \mathcal{A}$ un contrôle optimal avec le processus d'état correspondant $\widehat{X}$ et la solution adjoint $(\widehat{p}, \widehat{q}, \widehat{\eta})$. Alors pour l'Hamiltonien (3.5), pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{H}\left(t, \widehat{X}(t), u, \alpha(t), \widehat{p}(t), \widehat{q}(t)\right) = \left(r(t) \widehat{X}(t) + u\sigma(t) \theta(t)\right) \widehat{p}(t) + u\sigma(t) \widehat{q}(t).$$

Comme $\mathcal{H}$ il est un fonction lineaire de u , nous devinons que le coefficient de u s'annule à l'optimalité, ce qui entraîne l'égalité

$$\widehat{q}(t) = -\theta(t) \widehat{p}(t) \ . \tag{3.13}$$

En remplaçant dans (3.11) pour $\widehat{q}\,(t)$ à partir de (3.13) et en utilisant (3.7) pour remplacer $\widehat{p}\,(t)$, on obtient

$$\widehat{u}\,(t) = -\sigma^{-1}\,(t)\,\theta\,(t)\left(\widehat{X}\,(t) + \phi^{-1}\,(t)\,\psi\,(t)\right). \tag{3.14}$$

Donc, pour trouver le contrôle optimal, il reste à trouver ϕ et ψ. Pour ce faire, on mette $X\,(t) := \widehat{X}\,(t)\,, u\,(t) := \widehat{u}\,(t)$ et $p\,(t) := \widehat{p}\,(t)$ dans (3.10), puis remplacer $\widehat{p}\,(t)$ à partir de (3.7) et pour $\widehat{u}\,(t)$ à partir de (3.14). Cela résulte en une équation linéaire en $\widehat{X}\,(t)$.
En supposont que le coefficient de $\widehat{X}\,(t)$ est égale à zéro, on obtient deux équations

$$\phi\,(t,i)\left(2r\,(t,i) - |\theta\,(t,i)|^2\right) + \phi_t\,(t,i) + \sum_{j=1}^{D} \mathbf{g}_{ij}\,(\phi\,(t,j) - \phi\,(t,i)) = 0, \tag{3.15}$$

$$\psi\,(t,i)\left(r\,(t,i) - |\theta\,(t,i)|^2\right) + \psi_t\,(t,i) + \sum_{j=1}^{D} \mathbf{g}_{ij}\,(\psi\,(t,j) - \psi\,(t,i)) = 0, \tag{3.16}$$

avec les conditions aux limites terminal donnés par (3.8).
Considérez les processus

$$\widetilde{\phi}\,(t,\alpha\,(t)) := -2\mathbb{E}\left(\exp\left\{\int_t^T \left(2r\,(s) - |\theta\,(s)|^2\right) ds\right\}\middle|\,\alpha\,(t)\right), \tag{3.17}$$

et

$$\widetilde{\psi}\,(t,\alpha\,(t)) := 2d\mathbb{E}\left(\exp\left\{\int_t^T \left(r\,(s) - |\theta\,(s)|^2\right) ds\right\}\middle|\,\alpha\,(t)\right). \tag{3.18}$$

Nous visons à montrer que $\phi = \widetilde{\phi}$ et $\psi = \widetilde{\psi}$. Il est util de définir à ce stade les martingales

$$R\,(t) := \mathbb{E}\left(\exp\left\{\int_0^T \left(2r\,(s) - |\theta\,(s)|^2\right) ds\right\}\middle|\,\mathcal{F}_t^{\alpha}\right), \tag{3.19}$$

et

$$S\,(t) := \mathbb{E}\left(\exp\left\{\int_0^T \left(r\,(s) - |\theta\,(s)|^2\right) ds\right\}\middle|\,\mathcal{F}_t^{\alpha}\right), \tag{3.20}$$

où $\mathcal{F}_t^\alpha := \sigma\left\{\alpha(\tau), \tau \in [0,t]\right\} \vee \mathcal{N}(\mathbb{P})$ est la filtartion générés par la chaîne de Markov. Par $\{\mathcal{F}_t^\alpha\} -$ Théorème de représentation martingale, il existe $\{\mathcal{F}_t^\alpha\}$ −prévisible, processus carrés-integrables $\nu^R(t)$,$\nu^S(t)$ tels que

$$R(t) = R(0) + \sum_{j\neq i} \int_0^t \nu_{ij}^R(\tau)\, dM_{ij}(\tau) \quad \text{et} \quad S(t) = S(0) + \sum_{j\neq i} \int_0^t \nu_{ij}^S(\tau)\, dM_{ij}(\tau) \ .$$

Par la positivité de $R(t)$ et $S(t)$, on peut définir le processus $\widehat{\nu}_{ij}^R(t) := \nu_{ij}^R(t)\, R^{-1}(t-)$ et $\widehat{\nu}_{ij}^S(t) := \nu_{ij}^S(t)\, S^{-1}(t-)$ pour que

$$\begin{aligned} R(t) &= R(0) + \sum_{j\neq i} \int_0^t R(\tau-)\, \widehat{\nu}_{ij}^R(\tau)\, dM_{ij}(\tau) \quad \text{et} \\ S(t) &= S(0) + \sum_{j\neq i} \int_0^t S(\tau-)\, \widehat{\nu}_{ij}^S(\tau)\, dM_{ij}(\tau) \ . \end{aligned} \tag{3.21}$$

De (3.17) et la défintion de R dans (3.19),on a la relation

$$R(t) = -\frac{1}{2}\widetilde{\phi}(t, \alpha(t)) \exp\left\{\int_0^t \left(2r(s) - |\theta(s)|^2\right) ds\right\}, \forall t \in [0,T] \ . \tag{3.22}$$

En utilisant l'expansion de la formule d'Itô de $\widetilde{\phi}(t,\alpha(t))$ (voir (3.9)), on appliquer l'intégration par partie pour développer le côte droit de l'équation ci-dessus et le comparer avec la représentation martingale de $R(t)$ donnée par (3.21) , on trouve que $\widetilde{\phi}$ satisfait (3.15) avec $\phi := \widetilde{\phi}$. On conclue que $\phi = \widetilde{\phi}$.

De même, à partir de (3.18) et la définition de S dans (3.20), on a

$$S(t) = \frac{1}{2d}\widetilde{\psi}(t, \alpha(t)) \exp\left\{\int_0^t \left(r(s) - |\theta(s)|^2\right) ds\right\}, \forall t \in [0,T] . \tag{3.23}$$

En utilisant l'expansion de la formule d'Itô de $\widetilde{\psi}(t,\alpha(t))$ (voir (3.9)), on appliquer l'intégration par parties pour développer le côte droit de l'équation ci-dessus et le comparer avec $S(t)$ donnée par (3.21) , on trouve que $\widetilde{\psi}$ satisfait (3.16)avec $\psi := \widetilde{\psi}$. On conclue que $\psi = \widetilde{\psi}$.

Ainsi à partir de (3.7),(3.11) et (3.12), on écrire les solutions

$$\widehat{p}(t) = \phi(t)\widehat{X}(t) + \psi(t), \qquad \widehat{q}(t) = \phi(t)\sigma(t)\widehat{u}(t),$$
$$\widehat{\eta}_{ij}(t) = \widehat{X}(t-)(\phi(t,j) - \phi(t,i)) + (\psi(t,j) - \psi(t,i)),$$

à l'équation adjointe (3.6). Remplacer dans (3.14) pour $\phi = \widetilde{\phi}$ de (3.22) et par $\psi = \widetilde{\psi}$ à partir de (3.23) et utiliser la propriété de Markov de α pour obtenir le processus de contrôle

$$\widehat{u}(t) = -\left(\widehat{X}(t) - d\frac{\mathbb{E}\left(\exp\left\{\int_t^T \left(r(s) - |\theta(s)|^2\right)ds\right\}\Big|\ \alpha(t)\right)}{\mathbb{E}\left(\exp\left\{\int_t^T \left(2r(s) - |\theta(s)|^2\right)ds\right\}\Big|\ \alpha(t)\right)}\right)\sigma^{-1}(t)\theta(t) \ . \quad (3.24)$$

Avec ce choix de processus de contrôle et les conditions de limitation sur la marché paramètres r, b et σ, les conditions du Théorème 2.3.1 sont satisfaites et donc $\widehat{u}(t)$ est le processus de contrôle optimal.

Remarque 3.0.1 *Le résultat ci-dessus peut être utilisé pour obtenir la solution au problème classique de l'optimisation de portefeuille moyenne-variance. Supposons que nous souhaitons trouver un processus de portefeuille admissibles qui minimise*

var$(X(T)) = \mathbb{E}(X(T) - \mathbb{E}(X(T)))^2$ l'objet de $\mathbb{E}(X(T)) = a$, pour certains $a \in \mathbb{R}$. En appliquant un technique de multiplicateur de lagrange on note que pour tous les $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left((X(T) - a)^2 + 2\lambda(X(T) - a)\right) = \mathbb{E}(X(T) - a + \lambda)^2 - \lambda^2.$$

Fixer $\lambda \in \mathbb{R}$ et minimiser $\mathbb{E}(X(T) - a + \lambda)^2$. Le processus de portefeuille qui minimise c'est $\widehat{u}(t) := \widehat{u}(t;\lambda)$, qui est donnée par (3.24) avec $d := a - \lambda$. Ensuite, on maximiser la fonction quadratique $\mathbb{E}(X(T) - a + \lambda)^2 - \lambda^2$ sur tout $\lambda \in \mathbb{R}$ pour trouver l'optimal $\lambda^\star \in \mathbb{R}$ et donc on obtient le processus de portefeuille optimal $\widehat{u}(t;\lambda^\star)$ qui résout le problème de moyenne-variance.

Conclusion

Dans cet mémoire, nous avons étudié un problème de contrôle optimal dans un modèle de diffusion à changement de régime. Nous avons étudié le principe du maximum stochastique suffisant et le principe de la programmation dynamique et la relation entre eux. A titre d'exemple nous avons etudié un problème de minimisation des pertes quadratiques en utilison le principe du maximum stochastique suffisant. Notez que cette étude basé sur le travail de Catherine [3].

Bibliographie

[1] Bismut, J.-M. (1973). "Conjugate convex functions in optimal stochastic control." Journal of Mathematical Analysis and Applications 44(2) : 384-404.

[2] Brémaud, P. (2009). Initiation aux Probabilités : et aux chaînes de Markov, Springer Science & Business Media.

[3] Donnelly, C. (2011). "Sufficient stochastic maximum principle in a regime-switching diffusion model." Applied Mathematics & Optimization 64(2) : 155-169.

[4] Elliott, R. J., T. K. Siu, et al. (2010). "On mean-variance portfolio selection under a hidden Markovian regime-switching model." Economic modelling 27(3) : 678-686.

[5] Framstad, N. C., B. Øksendal, et al. (2004). "Sufficient stochastic maximum principle for the optimal control of jump diffusions and applications to finance." Journal of Optimization Theory and Applications 121(1) : 77-98.

[6] Protter, P. E. (2005). Stochastic differential equations. Stochastic integration and differential equations, Springer : 249-361.

[7] Rogers, L. C. G. and D. Williams (1994). Diffusions, Markov processes and martingales : Volume 2, Itô calculus, Cambridge university press.

[8] Zhou, X. Y. and G. Yin (2003). "Markowitz's mean-variance portfolio selection with regime switching : A continuous-time model." SIAM Journal on Control and Optimization 42(4) : 1466-1482.