République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **probabilités**

Par

Boukhalfa Nardjes

Titre :

Probléme de Dirichlet : interprétation probabiliste

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Nassima Chaouchkhouane	UMKB	Président
Dr.	Boubakeur Labed	UMKB	Encadreur
Dr.	Nassima Berouis	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je rends un grand hommage à travers ce modeste travail, en signe de respect et de reconnaissance envers :

Mon pére ibrahim

Ma mére mounobiia

Pour tous les sacrifices et leur soutien moral et matériel dont ils ont fait preuve pour que je réussisse.

Je le dédie également à

Mes chers fréres nadjibe , baz ,zoubir , boukhari , amirouche , moustapha.

Mes Soeurs chers fouzia , farida , kanza , ikram .

Mes Amies :nour , hayet ,asile, kanza ,roukaia,maymona,maryem,hanane, fadila,hayet , somaia,randa, samer,hayet,nasira

Mes collégues de notre département de mathématique.

En un mot, à toute ma famille, mes amis et tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à ma formation..

REMERCIEMENTS

Table des matières

Table des figures

Introduction

Mon mémoire de master est consacré à l'étude du lien entre le Mouvement Brownien et le problème de Dirichlet dans des domaines bornés.

Ce mémoire se divise en trois chapitres. le premier est un chapitre introductif sur les processus stochastiques. dans le deuxième chapitre on définit le mouvement Brownien et on donne quelques propriétés de ce processus. Le troisième chapitre est la partie principale de ce mémoire, on utlise les propriétés du mouvement Brownien pour établir une liaison ou une connexion avec le problème de Dirichlet. Au début on démontre quelques résultats concernant le problème de Dirichlet dans des domaines bornés et le lien avec le mouvement Brownien.

Chapitre 1

processus stochastiques

1.1 Définitions

Ici $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité complet.

1.1.1 Généralités

Définition 1.1.1 *Soit T un ensemble. On appelle processus stochastique indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$; pour tout $t \in T$, X_t et une variable aléatoire.*

Définition 1.1.2 *Un processus X est mesurable si l'application :*

$$(t, \omega) \longrightarrow X_t(\omega) \text{ de } \mathbb{R}_+ \times \Omega \text{ dans } \mathbb{R}^d$$

est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.1.3 *Soient X et Y deux processus. X est une modification de Y si, pour tout $t \geq 0$,les v.a.X_t et Y_t sont égales P–p.s :*

$$\forall t \geq 0 \quad \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

X et Y sont indistinguables si, P–p.s., les trajectoires de X et Y de Y sont les mémes c'est à dire :

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

Définition 1.1.4 *Une Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une collection croissante de tribus (sous-tribus de A), i.e.$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \quad, \forall s \leq t$.*

Définition 1.1.5 *Un processus X est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$–mesurable.*

Définition 1.1.6 *Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si l'application :*

$$(s, w) \longrightarrow X_s(w) \text{ de } [0, t] \times \Omega \text{ dans } \mathbb{R}^d$$

est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 1.1.1 *Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (ou continues à gauche) alors X est mesurable et X est progressivement mesurable s'il est de plus adapté.*

1.1.2 Temps d'arrét

Définition 1.1.7 *(Temps d'arrêt) Une variable aléatoire T à valeurs dans $[0; +\infty]$ est un temps d'arrêt si pour tout $t \geq 0$ on a $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Définition 1.1.8 *On définit la tribu $\mathcal{F}_\tau$ par :*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \Sigma; \forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

1.2 Martingales en temps continu

1.2.1 Tribus, filtrations

Les filtrations que l'on utilisera pour étudier les processus en temps continu (et en particulier les martingales) vérifieront toujours les conditions suivantes :

- $\mathcal{F}_0$ est **compléte** : si N est un ensemble négligeable, $N \subset \mathcal{F}_0$,

- $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une **filtration** : $\forall t \geq s \geq 0, \mathcal{F}_s \leq \mathcal{F}_t$,

- La filtration est **continue à droite :** $\mathcal{F}_t = \cap_{s›t}\mathcal{F}_s$.

1.2.2 Les processus càdlàg

Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit **càd-làg** (continu à droite, limite à gauche) s'il existe un ensemble négligeable $N \in \Omega$ tel que, pour tout $\omega \in N$, la trajectoire $t \longrightarrow X_t(\omega)$ est continue à droite en tout $t \geq 0$ et admet une limite à gauche en tout $t > 0$.

1.2.3 Martingales

Un processus $(M_t)_t$ est **adapté** à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si pour tout t, la variable aléatoire M_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Une **martingale en temps continu** par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$ complète et continue à droite sera pour nous un processus $(M_t)_{t\geq 0}$ càd-làg et vérifiant les conditions suivantes :

1. Pour tout $t \geq 0$, M_t est intégrable,

2. Pour tout $t \geq 0$, M_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable (ou (M_t) est $\mathcal{F}_t$-adapté),

3. Pour toust$t \geq s \geq 0$, $\mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$.

1.2.4 Convergence

Théorème 1.2.1 *Soit $(M_t)_t$ une sous-martingale.*

1) Si $\sup_t E(M_t^+) < \infty$ alors M_t converge presque sûrement vers une variable aléatoire M_∞ intégrable.

2) Si pour un certain $p > 1$, (M_t) est uniformément bornée dans $\mathcal{L}^p$, c'est-à-dire si

$$\sup_t \mathbf{E}(|M_t|^p) < \infty,$$

alors (M_t) converge presque sûrement et dans $\mathcal{L}^p$.

3) Si (M_t) est une martingale uniformément intégrable , elle converge presque sûrement et dans $\mathcal{L}^1$ et on a $\mathbf{E}(M_\infty|\mathcal{F}_t) = M_t$.

Chapitre 2

Mouvement Brownien

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un processus $(B_t, t \geq 0)$ sur cet espace.

Définition 2.0.1 *Le processus $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien (standard) si*

a) $P(B_0 = 0) = 1$ (le mouvement Brownien est issu de l'origine).

b) $\forall s \leq t, B_t - B_s$ est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance $(t - s)$.

c) $\forall n$, $\forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, les variables$(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0})$ sont indéependantes.

La propriété b) est la stationarité des accroissements du mouvement Brownien, la propriéeté c) traduit que le mouvement Brownien est à accroissements indépendants. On peut aussi écrire c) sous la forme équivalente suivante :

c') Soit $s \leq t$. La variable $B_t - B_s$ est indépendante de la tribu du passé avant s,soit $\sigma(B_u, u \leq s)$.

2.1 Généralisation.

Le processus $X_t = a + B_t$ est un Brownien issu de a. On dit que X est un Brownien généralisé ou un MB de drift μ si $X_t = x + \mu t + \sigma B_t$ où B est un mouvement Brownien. La variable X_t est une variable gaussienne d'espérance $x + \mu t$ et de variance $\sigma^2 t$.

Les v.a.$(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}; t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n)$sont indépendantes.

2.2 Propriétés

Dans ce qui suit, $B = (B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien et $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}$ est sa filtration naturelle.

Proposition 2.2.1 *Le processus B est un processus gaussien, sa loi est caractérisée par son espérance nulle et sa covariance $cov(B_t, B_s) = s \wedge t$.*

Démonstration : Le caractère gaussien résulte de $\sum_{i=0}^{n} a_i B_{t_i} = \sum_{i=0}^{n} b_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)$ avec $a_i = b_i - b_{i+1}, i \leq n-1, a_n = b_n$ La covariance est égale à $E(B_t B_s)$ car le processus est centré. Si $s \leq t$,

$$E(B_t B_s) = E((B_t - B_s)B_s + B_s^2) = E(B_t - B_s)E(B_s) + E(B_s^2) = s$$

On peut généraliser : Le processus $(X_t = x + \mu t + \sigma B_t, t \geq 0)$ est un processus gaussien d'espérance $x + \mu t$ et de covariance $E[(X_t - E(X_t))(X_s - E(X_s))] = \sigma^2(s \wedge t)$.

2.2.1 Notation

Il nous arrivera de noter $E_x(f(B_s))$ l'espérance de $f(B_s)$ quand B est un Brownien issu de x, sans toujours faire cette précision. Cette quantité est égale à $E(f(x + B_s))$ où B est un Brownien issu de 0

De la même façon, nous utiliserons la notation $P_x(B_s \in A)$ pour $P(x + B_s \in A)$ et $P_x(B_s \in da)$ pour la densité de la v.a. B_s où B est un Brownien partant de x.

Proposition 2.2.2 *Si $(B_t; t \geq 0)$ est un mouvement Brownien, alors*

i) le processus $\widehat{B}$ défini par $\widehat{B}_t = -B_t$ est un mouvement Brownien.

ii) le processus $\widetilde{B}$ défini par $\widetilde{B}_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ est un mouvement Brownien. (Propriété de scaling)

iii) le processus $\overline{B}$ défini par $\overline{B}_t = tB_{\frac{1}{t}}, \forall t > 0, \overline{B}_0 = 0$ est un mouvement Brownien.

2.2.2 Propriété de Markov

La propriété de Markov du mouvement Brownien est utilisée sous la forme (un peu plus forte que la propriété de Markov) : pour tout s, le processus $(W_t, t \geq 0)$ défini par $W_t \overset{def}{=} B_{t+s} - B_s$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$.

Théorème 2.2.1 *Pour f borélienne bornée, $E(f(B_u) \mid \mathcal{F}_t) = E(f(B_u) \mid \sigma(B_t))$ pour $u > t$.*

Preuve. On fait apparaitre les accroissements et on utilise les propriétés de l'espérance conditionnelle :

$$E(f(B_u) \mid \mathcal{F}_t) = E(f(B_u - B_t + B_t) \mid \mathcal{F}_t) = \Phi(u - t, B_t)$$

avec $\Phi(u - t, x) = E(f(B_u - B_t + x)) = E(f(Y + x))$ où Y a même loi que $B_u - B_t$, soit une loi $\mathcal{N}(0, u - t)$. Par les mêmes arguments, $E(f(B_u) \mid \sigma(B_t)) = \Phi(u - t, B_t)$. On a très précisement

$$\Phi(s, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp - \frac{(y - x)^2}{2s} dy$$

Une autre façon de décrire cette propriété est de dire que, pour $u > t$, conditionnellement à B_t, la v.a. B_u est de loi gaussienne d'espérance B_t et de variance $u - t$.Alors

$$E(\mathbf{1}_{B_u \leq x} \mid \mathcal{F}_t) = E(\mathbf{1}_{B_u \leq x} \mid \sigma(B_t)) = E(\mathbf{1}_{B_u \leq x} \mid B_t)$$

pour $t \geq u$. ■

2.2.3 Equation de la chaleur

Soit $g(t,x)$ la densité gaussienne centré de variance t. On note

$$q(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp -\frac{(y-x)^2}{2t} = g(t, x-y)$$

la densité de transition du mouvement Brownien. C'est de façon heuristique, la probabilité pour que le mouvement Brownien soit en y sachant que t instants auparavant, il se trouvait en x, c'est aussi la densité conditionnelle

$$P(B_{t+s} \in dy \mid B_s = x) = q(t,x,y)dy$$

La densité de transition q vérifie l'équation "forward"

$$\frac{\delta q}{\delta t}(t,x,y) = \frac{1}{2}\frac{\delta q^2}{\delta y^2}(t,x,y)$$

et l'équation "backward"

$$\frac{\delta q}{\delta t}(t,x,y) = \frac{1}{2}\frac{\delta q^2}{\delta x^2}(t,x,y)$$

En utilisant cette notation et la stationarité des accroissements du MB, on obtient que pour toute fonction f borélienne bornée

$$E(f(B_T) \mid B_t = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) q(T-t,x,t) dy$$

Si l'on note $u(t,x;f)$ la fonction

$$u(t,x;f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) q(t,x,y) dy = E(f(B_t + x)) \tag{2.1}$$

$$= E(f(B_{t+s}) \mid B_s = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y) g(t,y) dy \tag{2.2}$$

cette fonction vérifie (utiliser 2.1, l'équation backward et le théorème de dérivation sous le signe intégrale)

$$\begin{cases} u(0,x;f) = f(x) \\ -\frac{\delta u}{\delta t} + \frac{1}{2}\frac{\delta u^2}{\delta x^2} = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Pour calculer $E(f(B_T))$, il suffit de résoudre l'équation aux dérivées partielles 2.3 et de remarquer que $E(f(B_T)) = u(T;0;f)$.

On peut écrire, en utilisant

$$E(f(B_t + x)) = u(t,x;f)$$

$$E(f(B_T + x)) - f(x) = u(T,x;f) - u(0,x;f) = \int_0^T \frac{\delta u}{\delta t}(s,x;f)ds = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(s,x;f)ds.$$

En remarquant que (utiliser 2.2 et le théorème de dérivation sous le signe intégral)

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(t,x;f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f''(x+y)g(t,y)dy = u(t,x;f'') = E(f''(B_t + x)), \tag{2.4}$$

on obtient

$$E(f(B_T + x)) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^T E(f''(B_s + x))ds$$

Cette formule sera généralisée dans le prochain chapitre en utilisant le lemme d'Itô. La fonction $v(t;x;f) = u(T-t;x;f)$ est solution de

$$\begin{cases} v(T,x) = f(x) \\ \frac{\delta v}{\delta t} + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

et vérifie

$$v(0,x;f) = E(f(B_T + x)).$$

Proposition 2.2.3 *Si f est une fonction de classe C_b^1 en temps et C_b^2 en espace*

$$E(f(t,x+\mu t+\sigma B_t)) = f(0,x) + \int_0^t E[\mathcal{L}f(s,x+\mu s+\sigma B_s) + \delta_t f(s,x+\mu s+\sigma Bs)]ds$$

Théorème 2.2.2 *Si u est telle que $\mathcal{L}u = 0$ alors $u(t;B_t)$ est une martingale.*

Preuve. Les accroissements du Brownien sont indépendants.

$$E(u(t,B_t) \mid \mathcal{F}_s) = E(u(s+t-s, x+B_{t-s}) \mid x = B_s = E(us, x(t-s, B_{t\text{-}s})) \mid x = Bs$$

avec $u_{s,x}(t,y) = u(s+t, x+y)$. On a alors

$$E(u_{s,x}(t-s, B_{t-s})) = u_{s,x}(0,0) + \int_0^t \mathcal{L}u_{s,x}\,(\omega, B_\omega)$$

Par hypothμese, $\mathcal{L}(u) = 0$ donc $\mathcal{L}u_{s,x} = 0$. Il en résulte

$$E(u(t,B_t) \mid \mathcal{F}_s) = u_{s,x}(0;0) \mid_{x=B_s} = u(s,B_s)$$

et le théorème est établi. Nous verrons ce résultat important dans un contexte plus général en application du lemme d'Itô. ■

2.2.4 Trajectoires

Nous admettons les résultats suivants :

Les trajectoires du mouvement Brownien sont continues.

Les trajectoires du mouvement Brownien sont p.s. "nulle part différentiables".

Théorème 2.2.3 *Soit n fixé et $t_j = \frac{j}{2^n}$ pour j variant de 0 à 2^n. Alors $\sum_{j=1}^{2^n}[B(t_j) - B(t_{j-1})]^2 \longrightarrow t$ quand $n \longrightarrow 1$, la convergence ayant lieu en moyenne quadratique et p.s..*

Preuve. Soit $Z_t^n = \sum_{j=1}^{2^n}[B(t_j) - B(t_{j-1})]^2$. Pour établuir la convergence en moyenne quadratique, on doit montrer que $E((Z_t^n - t)^2) \longrightarrow 0$, soit, puisque $E(Z_t^n) = t, Var(Z_t^n) \longrightarrow 0$ ce qui se déduit de

$$Var(Z_t^n) = \sum_{j=1}^{2^n} var[B(t_j) - B(t_{j-1})]^2 = \sum_{j=1}^{2^n} 2(\frac{t}{2^n}) = 2^{n+1}\frac{t^2}{2^{2n}}$$

(Nous avons utilisé que si X est de loi$\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, la variance de X^2 est $2\sigma^4$). On en déduit que $E(\sum_{n=1}^{\infty}(Z_t^n - t)^2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t}{2^n} < \infty$. D'où $\sum_{n=1}^{\infty}(Z_t^n - t)^2 < \infty$ et le terme général de la série converge p.s. vers 0. ■

Proposition 2.2.4 *Soit σ une subdivision de l'intervalle $[0,t]$ caractérisée par $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = t$. Soit V_t la variation de la trajectoire du Brownien sur $[0,t]$ définie par $V_t(\omega) = \sup\limits_{\sigma}\sum_i \mid B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega) \mid$ Alors $V_t(\omega) = \infty$ p.s.*

Preuve. $\sup\limits_{\sigma}\sum_i \mid B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \mid \geq \sup_n \sum_{k=0}^{2^n} |Y_k|$ avec $Y_k = B_{t^*_{k+1}} - B_{t^*_k}$ où les points sont choisis comme précédemment : $t^*_k = \frac{k}{2^n}t$. On peut majorer Z_t^n :

$$Z_t^n \leq (\sup_k \sum_i \mid B_{t^*_{k+1}} - B_{t^*_k} \mid)\sum_{k=0}^{2^n}|Y_k|\,.$$

Quand $n \longrightarrow \infty$, le terme $\sup\limits_{\sigma} \mid B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \mid$ tend p.s. vers 0, par continuité uniforme des trajectoires sur $[0,t]$. Le terme $\sum_{k=0}^{2^n}|Y_k|$ est croissant en n et ne peut avoir de limite finie sans que Z_t^n ne converge vers 0, ce qui n'est pas le cas. ■

2.2.5 Propriétés du martingale

Proposition 2.2.5 *Le processus B est une martingale. Le processus $(B_t^2 - t, t \geq 0)$ est une martingale. Réciproquement, si X est un processus continu tel que X et $(X_t^2 - t, t \geq 0)$ sont des martingales, X est un mouvement Brownien.*

Preuve. Nous ne démontrons que la partie directe. La réciproque est plus diffcile à établir mais très utile.

L'idée est d'utiliser l'indépendance des accroissements pour calculer les espérances conditionnelles, et d'utiliser la propriété $E(X \mid \mathcal{G}) = E(X)$ quand X et $\mathcal{G}$ sont indépendantes.

Soit $s \leq t$.

$$E(B_t \mid \mathcal{F}_s) = E(B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s) + E(B_s \mid \mathcal{F}_s) = 0 + B_s$$

■

De même $E((B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s) = t - s$ et

$$E((B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s) = E(B_t^2 + B_s^2 - 2B_tB_s \mid \mathcal{F}_s) = E(B_t^2 \mid \mathcal{F}_s) + B_s^2 - B_sE(B_t \mid \mathcal{F}_s) = E(B_t^2 \mid \mathcal{F}_s) + B_s^2$$

On obtient alors

$$E(B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s) = B_s^2 - s$$

Proposition 2.2.6 *Soit B_1 et B_2 deux MB indépendants. Le produit B_1B_2 est une martingale.*

Définition 2.2.1 *On dit que B est un $(\mathcal{G}_t)$-mouvement Brownien si B et $(B_t^2 - t, t \geq 0)$ sont des $(\mathcal{G}_t)$-martingales.*

Les propriétés données dans la définition 2.1. sont vérifiées. Si B est un $(\mathcal{G}_t)$-mouvement Brownien, c'est bien sûr un MB pour sa propre filtration.

Proposition 2.2.7 *Pour tout λ réel, le processus*

$$\exp\left(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right), t \geq 0$$

est une martingale.

Réciproquement, si X est un processus continu tel que , $\left(\exp\left(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right), t \geq 0\right)$ est une martingale pour tout λ réel, le processus X est un brownien.

Proposition 2.2.8 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ et B un $(\mathcal{F}_t)$-brownien sur cet espace. Si $X_t = \mu t + \sigma B_t$, alors,*

pour tout β réel, $\left(\exp\left(\beta X_t - (\mu\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2)t\right), t \geq 0\right)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale. Réciproquement, si X est un processus continu tel que $\left(\exp\left(\beta X_t - (\mu\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2)t\right), t \geq 0\right)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale, il existe un $(\mathcal{F}_t)$-brownien B tel que $X_t = \mu t + \sigma B_t$.

2.2.6 Temps d'atteinte

a. Cas du Brownien

Proposition 2.2.9 *Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement Brownien et a un nombre réel. Soit*

$$T_a = \inf\{t \geq 0; B_t = a\}.$$

Alors T_a est un temps d'arrêt fini p.s. tel que $E(T_a) = \infty$ et pour $\lambda \geq 0$

$$E(\exp -\lambda T_a) = \exp(- \mid a \mid \sqrt{2\lambda}). \tag{2.6}$$

b. Généralisation

Si $X_t = \mu t + B_t$ et $T = \inf\{t \geq 0; X_t = a\}$ on peut montrer, en utilisant la martingale $\left(\exp\left(\beta X_t - (\mu\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2)t\right), t \geq 0\right)$ que pour $\mu > 0; \lambda > 0$ (on pose $\lambda = \mu\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2$))

$$E(\exp -\lambda T_a^\mu) = \exp(\mu a - \mid a \mid \sqrt{\mu^2 + 2\lambda}). \tag{2.7}$$

On obtient $P(T_a < \infty)$ en faisant $\lambda = 0$. Cette quantité n'est égale à 1 que si μ et a sont de même signe.

2.2.7 Mouvement Brownien multidimensionnel

Soit $B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, ..., B_t^{(n)})^T$ un processus n-dimensionnel. On dit que B est un Brownien multidimensionnel si les processus $(B^{(i)}, i \leq n)$ sont des browniens indépendants. C'est un processus à accroissements indépendants. Pour chaque (a, b), le processus $aB_t^{(1)} + bB_t^{(2)}$ est un processus gaussien. Il est facile de vérifier que $B_t \stackrel{def}{=} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(aB_t^{(1)} + bB_t^{(2)})$ est un MB
Si B est un Brownien n-dimensionnel, on a $E(B_t^T B_s) = n(s \wedge t)$.
Le processus n-dimensionnel B est un mouvement Brownien si et seulement si les processus $B^{(i)}$ et $B^{(i)}B^{(j)} - \delta_{i,j}t$ sont des martingales (avec $\delta_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ et $\delta_{i,j} = 1$).

Définition 2.2.2 *Les mouvements Browniens à valeurs réelles B_1 et B_2 sont corrélés de coefficient de corrélation ρ si $B_1(t)B_2(t) - \rho t$ est une martingale.*

On "décorrele" les MB en introduisant le processus B_3 défini par $B_3(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(B_1(t) - \rho B_2(t))$

Ce processus est une martingale ; en écrivant

$$(B_3(t))^2 - t = \frac{1}{1-\rho^2}[(B_2(t))^2 + \rho^2 (B_1(t))^2 - 2\rho B_2(t) - t(1-\rho^2)] = \frac{1}{1-\rho^2}[(B_2(t))^2 - t + \rho^2[(B_1(t))^2 - t] -$$

on montre que $(B_3(t))^2 - t$ est une martingale, d'où B_3 est un MB. On peut montrer que B_3 est indépendant de B_1, nous donnerons une démonstration plus tard. Il est facile de vérifier que le produit $B_1 B_3$ est une martingale. Dans ce cas, il existe un Brownien $B^{(3)}$, indépendant de $B^{(2)}$ tel que $B^{(1)} = \rho B^{(2)} + p1 - \rho^2 B^{(3)}$ et, pour tout (a, b) le processus $B_t \stackrel{def}{=} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+2\rho ab}}(aB_t^{(1)} + bB_t^{(2)})$ est un mouvement Brownien.

Chapitre 3

Problème de Dirichlet

Ce chapitre est consacré au problème de Dirichlet continu, en liaison avec le mouvement Brownien. La motivation est l'étude de la répartition de la température dans un solide. Considérons donc un solide homogène identifié à l'adhérence $\overline{D}$ d'un ouvert connexe borné D de $\mathbb{R}^d$ dont on fixe la température de surface non nécessairement constante égale à une fonction b. La température à l'intérieur du solide converge vers un équilibre thermique que l'on souhaite exprimer en fonction de D et b. Intuitivement, la température en un point intérieur du solide est égale à la moyenne des températures prises sur toute boule centrée en ce point et incluse dans le solide : la température Φ vérifie la formule de la moyenne. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout réel $r \geq 0$, la boule et la sphère de centre x et de rayon r sont notées

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| < r\} \text{ et } S(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| = r\},$$

tandis que la boule fermée de centre x et de rayon r est notée

$$\overline{B(x,r)} = B(x,r) \cup S(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| \leq r\}.$$

On notera parfois $\partial B(x,r) = S(x,r)$. On dit que Φ est harmonique sur D si elle est localement intégrable et vérifie la formule de la moyenne :

$$\forall x \in D, \forall r < \text{dist }(x, \partial D), \Phi(x) = \frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)} \Phi(x+y)dy.$$

La température devrait être continue sur l'ensemble du solide si b l'est au bord ∂D de D. On peut donc formuler ainsi le problème de Dirichlet :

une fonction Φ définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ est solution du problème de Dirichlet si

1) pour tout point x de ∂D $\Phi(x) = b(x)$,

2 Φ est continue sur $\overline{D}$,

3 Φ est harmonique sur D.

Il existe de nombreux théorèmes étudiant l'existence et/ou l'unicité de la solution du problème de Dirichlet mais bien sûr la solution n'est en général pas explicite. Dans certains cas très particuliers, il est cependant possible de donner une représentation intégrale relativement explicite de la solution. Dans les autres cas, des méthodes numériques, déterministes ou probabilistes, permettent de résoudre le problème de manière approchée.

Théorème 3.0.4 ***(fonction harmonique)*** *Pour toute fonction $\Phi : D \to \mathbb{R}$ les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1 Moyenne sur les boules Φ est harmonique

2 Moyenne sur les sphères Φ est localement intégrable sur D et vérifie

$$\forall x \in D, \forall r < \text{dist }(x, \partial D), \Phi(x) = \int_{s(0,r)} \Phi(x+y)\sigma_r(dy),$$

où σ_r est la loi uniforme sur la sphère centrée de rayon r ;

3 Laplacien nul Φ est de classe C^∞ sur D et $\Delta\Phi = 0$ sur D. De plus, si Φ est harmonique sur D alors toutes ses dérivées partielles sont harmoniques sur D. Enfin, si $|\Phi|$ est bornée sur $\overline{D}$ alors il en va de même pour toutes les dérivées partielles de Φ

Le théorème 3.0.4 permet de reformuler le problème de Dirichlet en termes d'équations aux dérivées partielles (ÉDP).

Corollaire 3.0.1 ***(probléme de Dirichlet et EDP)*** *Une fonction Φ est solution du problème de Dirichlet sur D avec conditions aux bords b, si et seulement si elle est de classe C^∞ sur D et continue sur D et vérifie*

$$\begin{cases} \Delta\Phi(x) = 0 & \text{pour tout} \quad x \in D \\ \Phi(x) = b(x) & \text{pour tout} \quad x \in \partial D \end{cases}$$

3.1 Mouvement Brownien et le problème de Dirichlet

3.1.1 Solution du problème de Dirichlet sur des domaines bornés

Définition 3.1.1 *Soit $f : \partial D \to \mathbb{R}$ une fonction. Une fonction h s'appelle la solution au problème de Dirichlet sur D avec les valeurs limites f si elle est harmonique sur D et satisfait*

$$\lim_{\substack{x \to z \\ x \in D}} h(x) = f(z), z \in \partial D$$

Définition 3.1.2 *Supposons que D est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et on va trouver $h \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ avec*

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{dans } D \\ h = f & \text{sur } \partial D. \end{cases}$$

Remarque 3.1.1 *La continuité jusqu'à la frontière signifie dans ce cas*

$$\lim_{\substack{x \to z \\ x \in D}} h(x) = f(z), z \in \partial D$$

Considérons le mouvement Brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ de dimensions n Définissons

$$\tau_D = \inf\{t > 0, B_t \in D^c\}$$

comme le temps de sortie de D. D (τ_D est un temps d'arrêt)

Théorème 3.1.1 *Supposons que D soit borneé chaque point sur ∂D est régulier et*

$$f : \partial D \to \mathbb{R}$$

est continue. Alors la solution unique au problème de Dirichlet est donnée par

$$h(x) = \mathbb{E}^X f(B_{\tau_D}).$$

Formule d'Itô

Supposons que $h \in C^2$ $(\mathbb{R}^n)$ est une solution au problème de Dirichlet sur D avec valeurs limites f.

Formule d'Itô pour le mouvement Brownien :

$$h(B_t) = h(B_0) + \int_0^t \nabla h(Bs)dBs + \frac{1}{2}\int_0^t \underbrace{\Delta h(Bs)}_{=1} ds$$

... avec le temps d'arrêt τ_D :

$$h(B_{\tau_D \wedge t}) = h(B_0) + \underbrace{\int_0^{\tau_D \wedge t} \nabla h(Bs)dBs}_{\text{Martingale dans t}} + \frac{1}{2}\int_0^{\tau_D \wedge t} \underbrace{\Delta h(Bs)}_{=0} ds$$

Définition 3.1.3 *Soit $x \in D$ et prenons les attentes :*

$$\mathbb{E}^x h(B_{\tau_D \wedge t}) = \mathbb{E}^X h(B_0) = h(x)$$

Puisque τ_D est nul et que h est borné sur D, laissant $t \to \infty$ alors

$$h(x) = \mathbb{E}^x h(B_{\tau_D}) = \mathbb{E}^x f(B_{\tau_D}).$$

Harmonicité de h

Forme EDP : h est harmonique dans $D \iff h$ satisfait la propriété de valeur moyenne dans D

Propriété de valeur moyenne :

$$h(x) = \int_{\partial B(X,r)} h(y)\sigma_{X,r}(dy) \qquad \text{pour chaque boule} \quad B(X,r) \subset D$$

Nous aurons besoin de la propriété de Markov forte. Notre contexte est dans le modele canonique c.-à-d.

$$\Omega = C_0\,[0,\infty] = \{\omega : [0,\infty] \to \mathbb{R}^n : \omega(t) \qquad \text{est continu et } \omega(0) = 0\}.$$

et $\mathbb{P}$ est choisi pour être la mesure de probabilité tels que

$$B_t(\omega) = \omega(t)$$

devient un mouvement Brownien.

Ingrédient nécessaire : Opérateur de décalage temporel

$$\theta_s : \Omega \to \Omega, \omega \to \omega(. + s)$$

Ceci signifie

$$\theta_s(\omega)(t) = \omega(t+s) = B_{t+s}(\omega).$$

Nous avons une famille des mesures de probabilité $(\mathbb{P}^X)_{X \in \mathbb{R}^n}$ avec

$$\mathbb{P}^X(B_0 = X) = 1.$$

Propriété de Markov forte Soit X une variable aléatoire borneé ,τ est un temps d'arrêt et $x \in D$.on a :

$$\mathbb{E}^X[X \circ \theta_\tau / \mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}^{B_\tau} X \qquad \mathbb{P}^X - \text{a.s} \quad \text{dans} \ \{\tau < \infty\}.$$

Prenons une boule

$$B = B(X, r) \subset D$$

et notons cela

$$B_{\tau_D} = B_{\tau_D} \circ \theta_{\tau_B}.$$

Prouvons la propriété de valeur moyenne pour

$$\begin{aligned}
h(X) &= \mathbb{E}^X f(B_{\tau_D}) \\
h(X) &= \mathbb{E}^X[\mathbb{E}^X[\underbrace{f(B_{\tau_D}) \circ \theta \mathcal{F}_{\tau_B}}_{=f(B_{\tau_D})}]] \overset{SMP}{=} \mathbb{E}^X[\mathbb{E}^{B_{\tau B}}[f(B_{\tau_D})]] \\
&= \mathbb{E}^X h(B_{\tau_B}) \\
&= \int_{\partial B(X,r)} h(y) \sigma_{X,r}(dy)
\end{aligned}$$

Fonctions harmoniques

Nous allons voir que l' harmonicité peut être définie de deux manières. Notre premier but est de montrer leur équivalence. Avant que nous commencions, laissez-nous clarifier une certaine notation.La boule fermée dans $\mathbb{R}^n$ est dénoté par $B(x, r)$ et sa frontière par $\partial B(x, r)$ et. définié comme suit :

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq r\}, \partial B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| = r\},$$

où $|\cdot|$ est la norme euclidienne sur le $\mathbb{R}^n$.

La mesure extérieure normale de la masse totale 1 sur le $\partial B(x,r)$ s'appelle $\sigma_{x,r}(dy)$, la mesure de Lebesgue sur $B(x,r)$ simplement dy. Le volume de $B(0,1)$ en n dimensions est noté V_n, donc le volume de $B(x,r)$ est $V_n r^n$. La surface de $B(x,r)$ en dimensions n est $nV_n r^{n-1}$

Définition 3.1.4 ***(Propriété de valeur moyenne)***

Une fonction continue h sur D satisfait la propriété de valeur moyenne si

$$h(x) = \int_{\partial B(x,r)} h(y)\sigma_{x,r}(dy)$$

pour tous x$\in D$ et $r > 0$ tels que $B(x,r) \subset D$.

Théorème 3.1.2 *Soit h être une fonction sur le D. Alors les affirmations suivantes sont équivalents :*

(a) h est continue et satisfait la propriété de valeur moyenne.

(b) $h \in C^2(D)$et satisfait $\Delta\ h = 0$ sur le D.

Définition 3.1.5 ***(Fonction harmonique)*** *Une fonction h sur D s'appelle harmonique s'il satisfait les propriétés équivalentes du théorème* 3.1.2

Voici quelques exemples typiques de fonctions harmoniques

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } n = 1, \\ \log|x| & \text{si } n = 2, \\ \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3, \end{cases}$$

Utilisant le critère (b) de dans le théorème 3.1.2, nous pouvons prouver que h est harmonique dans $\mathbb{R}$ si $n = 1$ et harmonique dans le $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si $n \geq 2$

Il y a un exemple contrastant de résultat de base intéressant.

Proposition 3.1.1 ***(Principe de maximum pour des fonctions harmoniques)*** *Soit h une fonction harmonique sur D.*

(a) si h atteint son maximum sur D, alors elle est constante sur D.

(b) si D est est borné et $h \in C(\overline{D})$ alors

$$\max_{\overline{D}} h = \max_{\partial D} h$$

Unicité

Appliquons le principe de maximum pour des fonctions harmoniques :

Supposons que D est borneé et soit $h \in C(\overline{D})$ soit harmonique.alors

$$\max_{x \in \overline{D}} h(x) = \min_{x \in D} h(x) \quad \text{et} \quad \min_{x \in \overline{D}} h(x) = \min_{x \in D} h(x).$$

Prenons deux solutions au problème de Dirichlet. h_1 et h_2 definons $h = h_1 - h_2$ qui est harmonique et appartient à $C(\overline{D})$ et $\equiv 0$ sur ∂D.Le principe de maximum donne

$$\max_{x \in \overline{D}} h(x) = \min_{x \in \overline{D}} h(x)$$

Ceci implique $h \equiv 0$ dans $\overline{D}$ et donc $h_1 = h_2$ de $\overline{D}$

Fonctions harmoniques et le problème de Dirichlet

Soit U être un domaine, c.-à-d. un sous-ensemble ouvert convenxe dans $\mathbb{R}^d$. Supposons que sa fermeture $\overline{U}$ est un corps homogène, et son ∂U de frontière est électriquement chargé, de la charge donnée par une certaine fonction continue

$$\Phi : \partial U \to \mathbb{R}$$

Le problème de Dirichlet est à $u(x)$ la tension u (x) à un certain point $x \in U$. Kirchhoff les lois déclarent cela

$$u : U \to \mathbb{R}^d$$

doit être harmonique sur de U.

Définition 3.1.6 *Soit $U \subset \mathbb{R}^d$soit un domaine et*

$$u : U \to \mathbb{R}^d$$

en est harmonique sur U si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et pour $x \in U$,on a

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) = 0.$$

Si au lieu de l'équation ci-dessus nous avons $\Delta u(x) \geq 0$, alors u est sous$-$ harmonique. Un fait important sur des fonctions harmoniques est qu'elles satisfont ce qui est connu comme propriété de valeur moyenne. Selon comment le formulons-nous, nous obtenons-nous deux De alternatif et équivalent définitions de harmonicité.
Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un domaine et un

$$u : U \to \mathbb{R}^d$$

une fonction mesurable et localement bornée.les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est harmonique ;

(ii) pour toute boule $\mathcal{B}(x, r) \subset U$, nous avons

$$u(x) = \frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{B}(x, r)} \int_{\mathcal{B}(x,r)} u(y)dy;$$

(iii) pour toute boule ,$\mathcal{B}(x,r) \subset U$,

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_{x,r}(\partial B(x,r))} \int_{\partial \mathcal{B}(x,r)} u(y) d\sigma_{x,r}(y),$$

où $\sigma_{x,r}$ est la mesure extérieure sur le $\mathcal{B}(x,r)$.

Théorème 3.1.3 ***(Principe de maximum)*** *Supposons que*

$$u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

est une fonction sous)- harmonique sur un domaine $U \subset \mathbb{R}^d$

(i) si u atteint son maximum dans$U$, alors u est une constante.

(ii) si u est continu sur $\overline{U}$ et U est borneé, puis

$$\max_{x \in \overline{U}} u(x) = \max_{x \in \partial U} u(x).$$

Théorème 3.1.4 ***(Problème de Dirichlet)*** *Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné tel que chaque point sur ∂D satisfait à la condition du cône de Poincaré, et soit*

$$\Phi : \partial U \to \mathbb{R}$$

une fonction continue.

soit

$$\tau(\partial U) = \inf\{t > 0 : B(t) \in \partial U\}$$

ce qui est presque sûrement un temps d'arrêt fini. Puis la fonction

$$u : \overline{U} \to \mathbb{R}$$

donné par

$$u(x) = \mathbb{E}_x \left[\Phi(B(\tau(\partial U))) \right], \quad \text{pour} \quad x \in \overline{U}$$

est la fonction continue unique harmonique sur U avec

$$u(x) = \Phi(x) \quad \text{pour} \quad x \in \partial U.$$

3.2 Interprétation probabiliste

La théorie des probabilités fournit les outils nécessaires à l'étude du problème de Dirichlet sous sa forme ÉDP, notamment une représentation probabiliste de la solution. Soit $(B_{t)t>0}$ un mouvement Brownien sur $\mathbb{R}^d$ et

$$\tau = \inf\{t > 0 : B_t \notin D\}$$

le temps de sortie de D pour $(B_{t)t>0}$. On notera $\mathbb{P}_x$la loi de $(B_{t)t\geq 0}$ sachant que $B_0 = x$ et $\mathbb{E}_x$ l'espérance par rapport à cette loi. Le mouvement Brownien est un processus de Markov fort et la formule d'Itô assure que si$f$ est une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ à dérivées bornées, alors

$$f(Bt) = f(B_0) + \int_0^t \frac{1}{2} \Delta f(B_s) ds + \int_0^t \nabla f(B_s) dB_s.$$

L'intégrale stochastique (dernier terme) ci-dessus est une martingale. La clé du lien entre probabilités et analyse est contenue dans la remarque suivante

$(f(B_t))_{t>0}$ est une martingale si f est une fonction harmonique.

Théorème 3.2.1 ***(Harmonicité de la représentation probabiliste)***

La fonction v définie sur D par

$$v(x) = \mathbb{E}_x[b(B_\tau)]$$

est harmonique sur D.

Il est délicat d'établir la continuité sur $\overline{D}$ de la fonction v donnée par le théorème . Cela fait intervenir les propriétés géométriques du domaine D.

Soit $x \in D$ et $r < dist(x, \partial U)$. Notons

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin B(x, r)\}$$

le temps de sortie de la boule centrée en$x$de rayon r pour le mouvement brownien issu de$x$. Voir la figure 24.1. La propriété de Markov forte de $(B_{t)t>0}$

assure alors que

$$v(x) = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x(b(B_\tau)/\mathcal{F}_{\tau_r})] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X\tau_r}(b(B_\tau))] = \mathbb{E}_x(v(B_{\tau_r})).$$

Enfin, comme la loi du mouvement Brownien est invariante par rotation, la v.a.B_{τ_r} est distribuée selon la loi uniforme sur $S(x, r)$. Cette propriété assure que la fonction v vérifie la formule de la moyenne sur les sphères.

Théorème 3.2.2 ***(unicité)***

Si Φ est une solution du problème de Dirichlet sur D de condition aux bords b, alors cette solution est unique et s'écrit

$$\forall x \in D, \Phi(x) = \mathbb{E}_x[b(B_\tau)].$$

Preuve. La formule d'Itô fournit la décomposition suivante :

$$\Phi(B_{t\curlywedge\tau}) = \Phi(x) + \int_0^{t\curlywedge\tau} \frac{1}{2}\Delta\Phi(B_s)ds + M_{t\curlywedge\tau} \tag{3.1}$$

■

où ($M_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$ est une martingale bornée d'après les propriétés de régularités automatiques des fonctions harmoniques (théorème 24.1). En effet, Φest harmonique
sur$D$ et bornée sur$\overline{D}$. Il en est alors de même pour ses dérivées. En prenant l'espérance et en faisant $t \to \infty$, on obtient le résultat annoncé.

3.2.1 Cas de la boule unité

Il existe très peu de domaines D pour lesquels une expression explicite de la solution du problème de Dirichlet est disponible. Cette section est consacrée au cas des boules euclidiennes.

Théorème 3.2.3 ***(Noyau de poisson des boules)***

Le problème de Dirichlet sur la boule centrée de rayon r dans $\mathbb{R}^d$ de condition aux bords b a pour solution

$$\Phi(x) = \int_{S(0,r)} b(y)P_r(x,y)\sigma_r(dy), \qquad \text{où} \qquad P_r(x,y) = \frac{r^{d-2}(r^2 - |x|^2)}{|y-x|^d}.$$

Ici encore$\Phi(x)$ s'écrit comme la moyenne de b sur ∂D contre la densité $P_r(x,y)$ par rapport à la mesure uniforme sur $S(0,r)$. Cette mesure donne plus de poids aux points de la sphère qui sont proches de x, ce qui correspond bien à l'intuition en termes de température du solide. Le problème de Dirichlet sur une boule de $\mathbb{R}^d$ se ramène ainsi au calcul d'une intégrale sur la sphère de dimension $d-1$. Lorsque $d > 1$, les méthodes de calcul approché déterministes deviennent très difficiles à mettre en place car elles demandent de discrétiser la sphère. La méthode de Monte-Carlo reste elle très simple à utiliser grâce au résultat suivant.

3.2.2 Récurrence, transience, et fonctions harmoniques

La connaissance des fonctions harmoniques radiales sur $\mathbb{R}^d$ permet d'obtenir des propriétés de récurrence et transience pour le mouvement brownien. Pour $r < |x| < R$, notons

$$T_{B(0,r)} = \inf\{t \geq 0 : B_t \in B(0,R)\} \quad \text{et}$$

$$\tau_{B(0,R)} = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin B(0,R)\}.$$

Le temps $S = T_{B(0,r)} \curlywedge \tau_{B(0,R)}$ est le temps de sortie de la couronne $C(0,r,R)$.

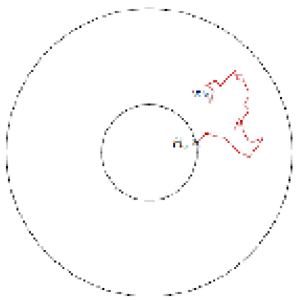

Fig. 24.2. Une trajectoire brownienne [illegible] d'une couronne.

Théorème 3.2.4 ***(Récurrence ou transience du mouvement brownien).***

Soit $(B_t)_{t>0}$ un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$.

1. si $d = 2$ et $r < |x| < R$, alors

a) $\mathbb{P}_x(T_{B(0,\tau)} < \tau_{B(0,R)}) = \dfrac{\log(R) - \log(|x|)}{\log(R) - \log(r)}$,

b) $\mathbb{P}_x(T_{\{0\}} < \infty) = 0$,

c) $\mathbb{P}_x(T_{B(0,\tau)} < \infty) = 1$,

d) $\mathbb{P}_x(T_{B(0,\tau)} < \infty i.s) = 1$,

2. si $d \geq 3$ et $r < |x| < R$, alors

a) $\mathbb{P}_x(T_{B(0,\tau)} < \tau_{B(0,R)}) = \dfrac{|x|^{2-d} - R^{2-d}}{r^{2-d} - R^{2-d}}$,

b) $\mathbb{P}_x(T_{\{0\}} < \infty) = 0$,

c) $\mathbb{P}_x(T_{B(0,\tau)} < \infty) = \dfrac{|x|^{2-d}}{r^{2-d}}$.

Le théorème 3.2.4 établit la récurrence du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$ s'il n'atteint aucun point donné, il atteint presque sûrement tout voisinage de ce point une infinité de fois ! Ceci n'est plus vrai en dimensions supérieures. Le comportement est semblable à celui de la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^d$

Bibliographie

[1] Djalil Chafaï , Florent Malrieu *Recueil de Modèles Aléatoires* Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016.

[2] Richard Durrett. *Probability : Theory and Examples*, volume 31 of Cambridgeseries in statistical and probabilistic mathematics. Cambridge Univ. Press,Cambridge, 4. ed. edition, 2010

[3] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of Graduate studies in mathematics. American Math. Soc, Providence, RI, 2. ed. edition,2010.

[4] Kakutani, S., *Two-dimensional Brownian motion and harmonic functions*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 20, 706-704

[5] Karatzas, I. and S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[6] Thomas M. Liggett. *Continuous Time Markov Processes : An Introduction*,volume v. 113 of Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, Providence, R.I., 2010.

[7] Lothar Partzsch, René L. Schilling, and Bjo■rn Bu■ttcher. *Brownian Motion : An Introduction to Stochastic Processes*. De Gruyter Textbook. De Gruyter,München, 2. aufl., 2nd revised and extended edition edition, 2014.

[8] Varadahn, S. R. S., *Diffusion Problems and Partial Differential Equations*, Narosa Publishing House, New Delhi, 1980