République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **probabilité**

Par

Bdirina Afaf

Titre :

Existence du contrôle optimal pour les EDSRs linéaires de type champ moyen

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Ghoul Abdelhak	UMKB	Président
Dr.	Gherbel Boulakhras	UMKB	Encadreur
Dr.	Tabet Moufida	UMKB	Examinateur

Juin 2018

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

BDIRINA/UMKB$_{l}ogo.wmf$

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

BDIRINA Afaf

Titre :

Existence du contrôle optimal pour les EDSRs linéaires de type champ moyen

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Khelfallah Nabil	UMKB	Président
Dr.	GHERBAL Boulakhras	UMKB	Encadreur
Dr.	Tabet Moufida	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Pour mes parents,

pour ma grand-mère,

pour mon marié,

pour mes fréres et soeurs,

pour toute ma famille,

pour mes amies.

REMERCIEMENTS

Mon premier remerciement vont naturellement vers mon encadreur de memoire,

Monsieur Gherbal Boulakhras, Docteur à l'université de Biskra.

Ses encouragements et sa disponibilité ont grandement contribué de ce travail.

Je le remercie du fond du coeur.

Je ne peux pas oublier Dr. Boubakeur Labed pour accepter aide moi.

Je n'oublierai jamais Dr. Hafayed Mokhtar pour ses aides.

Table des matières

Introduction

Notre objectif dans ce mémoire c'est l'étude d'un problème d'existence des contrôles optimaux pour un problème de contrôle dérigé par un système des équations différentielles stochastique rétrograde linéaire de type champ moyen (EDSRs) défini sous la forme suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T \left(AY_t + \widehat{A}\mathbb{E}\left[Y_t\right] + BZ_t + \widehat{B}\mathbb{E}\left[Z_t\right] + Cu_t + \widehat{C}\mathbb{E}\left[u_t\right] \right) dt - \int_t^T Z_t dW_t, \qquad (1)$$

avec

$A, \widehat{A},\ B, \widehat{B},\ C$, et $\widehat{C}$ sont des matrices suitables, $Y_T = \xi$ est un processus $\mathcal{F}_T$-mesurable représente la condition terminale et u_t c'est la variable de contrôle.

Alors notre problème de contrôle est minimiser une certainne fonction de côut $J(.)$ définie par :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[g(Y_0, \mathbb{E}(Y_0)) + \int_0^T h\left(t, Y_t, \mathbb{E}\left[Y_t\right], Z_t, \mathbb{E}\left[Z_t\right], u_t, \mathbb{E}\left[u_t\right]\right) dt \right]. \qquad (2)$$

La méthode de démonstration de notre résultat d'existence des contrôles optimaux pour les EDSRs linéaires dans ce mémoire est basée sur le fait que l'ensemble des valeurs des contrôles est compact donc la suite minimisante -qui appartient a cet ensemble- est relativement compact c'est-à-dire quelle admet une sous-suite qui converge faiblement et d'après le théorème de Mazur, il existe une suite de combinaisons convexes qui converge au moyen quadratique. Ainsi que l'utilisation de la convergence forte de la suite $\left(Y_t^n, \int_0^T Z_t^n dW_t \right)$. Cette méthode a été utilisé pour démontrer l'existence des contrôles optimaux pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires dans le travail de Bahlali et al. [1]. Aussi cette méthode a été utilisé pour démontrer l'existence des contrôles optimaux pour les équations différentielles stochastiques linéaires de type champ moyen dans le travail de Bahlali et al. [2]

Ce mémoire est divisée en deux chapitres comme suit :

- **Le premier chapitre** : c'est un chapitre introductif concernant le calcul stochastique, en donnant quelques notions et des définitions : processus stochastique, filtration, adaptation, mesurabilité, martingale, mouvement Brownien, intégrale stochastique, processus d'Itô et la formule d'Itô. Ce chapitre a été inspiré des travaux : [3] , [4] , [5] , [6] , [7] et [8] .

- Dans **le deuxième chapitre,** On démontre l'éxistence du contrôle stochastique optimal $\bar{u}$ qui minimise la fonction de coût (2) sur l'ensemble des contrôles admissibles U_{ad} telle que les trajectoires $(Y_t^{\bar{u}}, Z_t^{\bar{u}})$ associées à ce contrôle $\bar{u}$ vérifiant notre système d'EDSR linéaire de type champ moyen (1), c'est à dire

$$J(\bar{u}) = \inf_{u \in U_{ad}} J(u). \tag{3}$$

et

$$Y_t^{\bar{u}} = \xi + \int_t^T \left(AY_t^{\bar{u}} + \widehat{A}\mathbb{E}\left[Y_t^{\bar{u}}\right] + BZ_t^{\bar{u}} + \widehat{B}\mathbb{E}\left[Z_t^{\bar{u}}\right] + C\bar{u}_t + \widehat{C}\mathbb{E}\left[\bar{u}_t\right] \right) dt - \int_t^T Z_t^{\bar{u}} dW_t.$$

Chapitre 1

Calcul stochastique

1.1 processus stochastique

L'objet de la théorie des processus stochastique c'est l'etude des phénomènes dépendant d'aléatoire et du temps.

Définition 1.1.1 *On appel un processus stochastique toute famille des variables aléatoires* $X = (X_t)_{t\epsilon T}$ *définies sur un même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *à valeur dans un espace mesurable des états* (E, ε) *et indicées par un paramètre* t *appartenant à un ensemble* T :

$$\begin{aligned} X : T \times \Omega &\rightarrow E \\ (t, \omega) &\rightarrow X_t(\omega). \end{aligned}$$

1.1.1 Propriété des processus stochastique

* Si on fixé $t \in T$, $\omega \in \Omega \rightarrow X_t(\omega)$ le processus stochastique devient une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

* Si on fixé $\omega \in \Omega$, $t \in T \rightarrow X_t(\omega)$ le processus stochastique devient une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.

* On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \rightarrow X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout $\omega \in \Omega$.

* On dit qu'un processus est càdlàg (continue à droite, pourvu limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvu de limites à gauche. On dit aussi qu'un processus est càglàg (continue à gauche, pourvu limites à droite) si ses trajectoires sont continues à gauche, pourvu limites à droite.

Définition 1.1.2 *(**Processus indépendants)***

Deux processus $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ definis sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sont dits indépendants lorsque les tribus qu'ils engendrent $\sigma(X) = (X_t, t \geq 0)$ et $\sigma(Y) = (Y_t, t \geq 0)$, sont elles-mêmes indépendantes.

Proposition 1.1.1 *Deux processus stochastique $(X_t)_{t\in T}$ et $(Y_t)_{t\in T}$ sont équivalents si et seulement si,*

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t_1, ..., t_n \in T^n$

$$(X_{t_1}, ..., X_{t_n}) \overset{\mathcal{L}}{=} (Y_{t_1}, ..., Y_{t_n}).$$

Définition 1.1.3 *Un processus $(X_t)_{t\epsilon T}$ est un modification d'un processus $(Y_t)_{t\epsilon T}$ si et seulement si,*

$$\forall t \in T,\ X_t = Y_t,\ P - p.s.(c\text{-}a\text{-}d : P(X_t = Y_t) = 1).$$

1.1.2 Accroissements de processus aléatoires

Définition 1.1.4 *On considère un processus stochastique en temps continue $(X_t)_{t\geq 0}$.*

i Les accroissements de ce processus $(X_t)_{t\geq 0}$ sont les processus stochastiques $X_t - X_s$ pour tout $0 \leq s \leq t < \infty$.

ii Ce processus est dit à accroissement indépendants lorsque pour tout n et tout $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n < \infty$, les variables $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

iii Ce processus est dit à accroissement stationnaire lorsque pour tout s et $t \geq 0$, la loi de l'accroissement $X_{t+h} - X_t$ ne dépend pas de t, c'est-à-dire

$$Loi(X_{t+h} - X_t) = Loi(X_h - X_0).$$

iiii Ce processus est dit stationnaire si pour tout $h \geq 0$, $(X_{t+h})_{t\geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_t)_{t\geq 0}$ ne dépend pas de $h > 0$ c-à-d

$\forall h > 0$ et $\forall t_1, ..., t_n \geq 0$ on a

$$(X_{t_1+h}, ..., X_{t_n+h}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_{t_1}, ..., X_{t_n}).$$

1.2 Filtration

Définition 1.2.1 *On appelle une filtration toute famille croissante de sous tribu $\mathcal{F}$, c'est-à-dire telle que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pour tout $s \leq t$.*

Définition 1.2.2 *On appelle une filtration engendrée par X, notée $\mathcal{F}^X$, c'est une suite croissance de tribu $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in[0,T]}$ engendrée par $(X_t)_{t\in[0,T]}$ c'est-à-dire*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t),$$

pour tout $t \in [0, T]$

Remarque 1.2.1 *La filtration $\mathcal{F}^X$ c'est la plus petite filtration qui rend le processus X adapté.*

Définition 1.2.3 *On appelle tribu des prévisibles, la tribu sur $(0, \infty) \times \Omega$ engendrée par les réctangles de la forme*

$$]s, t] \times A,\ 0 \leq s \leq t,\ A \in \mathcal{F}_s.$$

1.3 Mesurabilite et adaptation

Définition 1.3.1 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est dit progressivement mesurable si,* $\forall\ T>0$ *la fonction*

$$(t,\omega)\in([0,T]\,,\ \mathcal{B}([0,T]))\times(\Omega,\mathcal{F}_T)\to X_t(\omega)\in(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

est mesurable.

Définition 1.3.2 *Un processus stochastique* $X=(X_t)$ *est dit adapté (par rapport à une filtration* $\mathcal{F}_t$*) si* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable pour tout* t.

Proposition 1.3.1 *Si le processus stochastique* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *est* $\mathcal{F}_t$*-adapté, la variable aléatoire* X_s *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable pour tout* $s\in[0,T]$ *et tout* $t\in[0,T]$.

Définition 1.3.3 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *est dit prévisible si et seulement si l'application :*

$$(t,\omega)\to X_t(\omega),$$

est mesurable par rapport à la tribue des prévisibles.

Définition 1.3.4

1. On dit que deux processus X et Y sont égaux à une modification si

$$X_t=Y_t\ \ p.s\ \forall t.$$

2. Deux processus sont égaux en loi ($X\overset{loi}{=}Y$) si pour tout $(t_1,t_2,...,t_n)$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$(X_{t_1},X_{t_2},...,X_{t_n})\overset{loi}{=}(Y_{t_1},Y_{t_2},...,Y_{t_n}).$$

1.4 Martingale

1.4.1 A. Cas discret

On se donne une filtration, c'est-à-dire une famille de sous-tribus $\mathcal{F}_n$ croissante (telle que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$).

Définition 1.4.1 *On dit que le processus* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *est une* $\mathcal{F}_n-$*martingale si*

1. X_n est intégrable, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. X_n est $\mathcal{F}_n-$mesurable, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. $\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = X_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Propriété 1.4.1 $\mathbb{E}\left[X_{n+p} \mid \mathcal{F}_n\right] = X_n, \forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.4.1 *Si* $X_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ *où les* Y_i *sont indépendantes équidistribués et centrées,* X_n *est une martingale.*

1.4.2 B.Cas continu

On se donne une filtration, c'est-à-dire une famille de sous-tribu $\mathcal{F}_t$ croissante (telle que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \forall s \leq t$).

Définition 1.4.2 *Le processus stochastique* $(X_t, t \in [0, +\infty[)$ *est une martingale par rapport à* $\mathcal{F}_t$ *si*

i X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et intégrable pour tout t.

ii $\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s, \forall s \leq t$.

Propriété 1.4.2 *Si* X *est une martingale* $\mathbb{E}\left[X_t\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right], \forall t \geq 0$.

Définition 1.4.3 *Un processus stochastique* $(X_t, t \in [0, +\infty[)$ *est une sur-martingale* $($*resp sous-martingale*$)$ *par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si*

1. X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et intégrable pour tout t

2. $$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] \leq X_s, \forall s \leq t \text{ (respectivement } \mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] \geq X_s).$$

Exercice. Soit X une variable aléatoire intégrable. Montrer que $(\mathbb{E}([X \mid \mathcal{F}_t])_{t\geq 0})$ est une martingale.

Solution 1.4.1 *Soit $s \geq t$ et $X_t = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}_t\right]$. On a, en utilisant le fait que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$*

$$\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[(X \mid \mathcal{F}_s) \mid \mathcal{F}_t\right] = X_t = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Remarque 1.4.1 *Une martingale X_t est toujour adaptée à sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^X$.*

Exemple 1.4.2 *Le processus stochastique M est une sous-martingale si le processus $(-M)$ est une sur-martingale.*

Exercice. Montrer que si le processus M est une martingale et A un processus croissant adapté tel que $A_s \leq A_t, \forall s \leq t$, alors $M - A$ est une sur-martingale.

Solution 1.4.2 *Soit $X_t = M_t - A_t$.On a pour $t > s$*

$$\mathbb{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] = M_s - \mathbb{E}\left[A_t \mid \mathcal{F}_s\right],$$

et comme $A_s \leq A_t$ ou $-A_t \leq -A_s$,

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] \leq M_s - \mathbb{E}\left[A_s \mid \mathcal{F}_s\right] = M_s - A_s = X_{s.}$$

1.5 Mouvement Brownien

Définition 1.5.1 *Le processus $((W_t), t \geq 0)$ est un mouvement brownien MB (standard) si*

– $P(W_0 = 0) = 1$ (le mouvement brownien est issu de l'origine).

– $\forall s \leq t$, $W_t - W_s$ est une variable aléatoire de loi gaussienne, centrée de variance $(t-s)$.

– $\forall n, \forall t_i$, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, les variables $(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, ..., W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_0})$ sont indépendantes.

Définition 1.5.2 *Un mouvement Brownien (standard) réel est un processus gaussien centré* $(W_t)_{t \geq 0}$ *à trajectoire continues de fonction de covariance*

$$K(s,t) = \min(s,t) = s \wedge t.$$

On l'appelle aussi processus de Wiener.

- L'opérateur $K(s,t) = \min(s,t)$ est symétrique et de type positif.

Généralisation :

On dit que le processus stochastique X_t est un Brownien de drift μ et de coefficient de diffusion σ si

$$X_t = x + \mu t + \sigma W_t,$$

où W est un mouvement Brownien standard.

Le processus stochastique X_t est une variable aléatoire gaussiene d'espérance $x + \mu t$ et de variance $\sigma^2 t$.

De plus pour tout (t,s), la variable aléatoire $(X_{t+s} - X_t)$ sont indépendante de $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$.

1.5.1 Propriétés immédiates

1. $W = (W_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien (MB) et sa filtration naturel est

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s, s \leq t\}$$

2. $W_0 = 0$ car la loi de W_0 est $N(0,0) = \delta_0$.

3. $W_t \sim N(0,t)$ puisque $\mathbb{E}[W_t] = 0$ et $var(W_t) = K(t,t) = t$.

4. $(W_t)_{t\geq 0}$ est un processus à accroissement indépendants. En effet, soit $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, on a

$$\begin{aligned} cov(W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_4} - W_{t_3}) &= \mathbb{E}\left[(W_{t_2} - W_{t_1})(W_{t_4} - W_{t_3})\right] \\ &= \mathbb{E}\left[W_{t_2} W_{t_4}\right] - \mathbb{E}\left[W_{t_2} W_{t_3}\right] \\ &- \mathbb{E}\left[W_{t_1} W_{t_4}\right] + \mathbb{E}\left[W_{t_1} W_{t_3}\right] \\ &= t_2 - t_2 - t_1 + t_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Les variables $W_{t_2} - W_{t_1}$ et $W_{t_4} - W_{t_3}$ sont donc non corrélées. Comme elles sont gaussiennes, elles sont indépendantes.

5. Si $s \leq t$, on a $W_t - W_s \sim W_{t-s}$. En effet,

$$\mathbb{E}\left[W_t - W_s\right] = \mathbb{E}\left[W_t\right] - \mathbb{E}[W_s] = 0$$

et

$$\begin{aligned} Var(W_t - W_s) &= cov(W_t - W_s, W_t - W_s) \\ &= cov(W_t, W_t) - 2cov(W_t, W_s) + cov(W_s, W_s) \\ &= t - 2s + s, \\ &= t - s. \end{aligned}$$

donc

$$W_t - W_s \sim N(0, t-s) \sim W_{t-s}.$$

Théorème 1.5.1 *Le mouvement Brownien standard $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^W$.*

Preuve. On applique l'inégalité de Cauchy-Schartz. On a

$$\mathbb{E}\left[|W_t|\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[|W_t|^2\right]\right)^{1/2} = t^{1/2} < \infty, \forall t \geq 0$$

Pour $t > s \geq 0$, on a aussi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[W_t \mid \mathcal{F}_s^W\right] &= \mathbb{E}(W_t - W_s + W_s \mid \mathcal{F}_s^B) \\
&= \mathbb{E}\left[W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s^W\right] + \mathbb{E}\left[W_s \mid \mathcal{F}_s^W\right] \\
&= \mathbb{E}\left[W_t - W_s\right] + W_s \\
&= W_s.
\end{aligned}$$

■

1.5.2 Brownien multidimensionnel

Définition 1.5.3 *Soit $W_t = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, ..., W_t^{(n)})^T$ un processus n-dimensionnel (l'exposant (^{T}) note la transposition d'un vecteur). On dit que W est un mouvement Brownien multidimensionnel si les processus $(W^{(i)}, i \leq n)$ sont des Browniens indépendants. Leurs accroissements sont indépendants. Pour chaque (a, b), le processus $aW_t^{(1)} + W_t^{(2)}$ est un processus gaussien.*

Théorème de lévy : Soit (X_t) un processus à trajectoires continues, adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)$ et telle que :

i) X_t est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)$,

ii) $X_t^2 - t$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)$,

Alors (X_t) est un mouvement Brownien standard.

Théorème 1.5.2 (Inégalités maximales) *Soit X une martingale (ou une sous-martingale positive) continue à droite. Alors,*

1. $\forall p \geq 1, \forall a > 0,\ a^p \mathbb{P}\left(\sup_t |X_t|^p \geq a\right) \leq \sup_t \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right],$
2. $\forall p > 1, \mathbb{E}\left[\sup_t |X_t|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_t \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right].$

Théorème 1.5.3 (Théorème d'arrêt) *Si X est une martingale et si σ et τ sont deux temps d'arrêt bornés tels que $\sigma \leq \tau$, alors,*

$$\mathbb{E}[X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma, P - p.s.$$

Définition 1.5.4 (Martingale locale) *Soit X un processus $\mathcal{F}$–adapté, à trajectoires continues à droite. On dit que X est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = +\infty$, $\mathbb{P} - p.s$ pour tout n, $X^{\tau_n} 1_{\{\tau_n > 0\}}$ est une martingale.*

Théorème 1.5.4 (Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy "BDG") *Soit $p > 0$ un réel. Il existe deux constantes C_p et c_p telles que pour toute martingale locale continue X, nulle en zéro,*

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{P}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{P}{2}}\right].$$

Remarque 1.5.1 *En particulier, si $T > 0$*

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{P}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{P}{2}}\right].$$

1.6 Intégrale stochastique

1.6.1 Définition d'intégrale stochastique

Soit φ un processus. On dit qu'un processus φ est étagé (élémentaire) s'il existe une suite des réels

$$t_j, \quad 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n,$$

et une suite de variable aléatoire φ_j telles que φ_j soit $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable, appartienne à $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et que $\varphi_i = \varphi_j$ pour tout $t \in \left]t_j, t_{j+1}\right]$, soit

$$\varphi_s(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(\omega) \mathbf{1}_{]t_j;t_{j+1}[}(s).$$

On définit alors

$$\int_0^\infty \varphi_s dW_s = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j (W(t_{j+1}) - W(t_j)).$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \varphi_s dW_s\right] &= 0, \\ var\left[\int_0^\infty \varphi_s dW_s\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \varphi_s^2 ds\right]. \end{aligned}$$

et

$$\int_0^t \varphi_s dW_s = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j (W(t_{j+1} \wedge t) - W(t_j \wedge t)).$$

Ce qui établit la continuité de l'application $t \to \int_0^\infty \varphi_s dW_s$. Si τ_j, $0 \leq \tau_0 \leq \tau_1 \leq ... \leq \tau_n$ est une suite croissante de temps d'arrêt, et si

$$\varphi_s = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(\omega) \mathbf{1}_{\left]\tau_j, \tau_{j+1}\right]}(s),$$

où φ_j est une suite des variables aléatoires telles que φ_j soit $\mathcal{F}_{\tau_j}$-mesurable, appartienne à $\mathcal{L}^2(\Omega)$, on définit alors

$$\int_0^t \varphi_s dW_s = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j (W(\tau_{j+1} \wedge t) - W(\tau_j \wedge t)).$$

1.6.2 Propriété d'intégrale stochastique

Propriété 1.6.1 *On note par* Γ *l'ensemble* $\mathcal{L}^2_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ *des processus* φ *adaptés càglàd vérifiant*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \varphi_s^2(\omega)ds\right] < \infty, \ \forall t.$$

Linéarité.

Soit a et b des constantes et $(\varphi^i; i = 1, 2)$ deux processus de Γ. On a

$$\int_0^t (a\varphi_s^1 + b\varphi_s^2)dW_s = a\int_0^t \varphi_s^1 dW_s + b\int_0^t \varphi_s^2 dW_s.$$

Propriétés de martingale

Proposition 1.6.1 *Soit*

$$M_t = \int_0^t \varphi_s dW_s \text{ où } \varphi \in \Gamma.$$

a)

Le processus M *est une martingale à trajectoire continue.*

b) Soit $N_t = (\int_0^t \varphi_s dW_s)^2 - \int_0^t \varphi_s^2 ds$. Le processus $(N_t, t \geq 0)$ est une martingale.

1.7 Processus d'Itô

On dit que X est un processus d'Itô si

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

où b est un processus adapté tel que $\int_0^t |b_s|\, ds$ existe (au sens de Lebesgue) $p.s.$ Pour tout $t > 0$, et σ un processus appartenant à Γ.

On utilise la notation déffirentielle suivante :

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t,$$
$$X_0 = x,$$

telle que ;

b : le drift (la dérive),

σ : le coefficient de diffusion.

L'écriture

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t,$$

est unique (les processus b et σ vérifient les conditions d'intégrabilité).

Propriété 1.7.1 *Si σ appartient à Γ, on a*

$$\mathbb{E}\left[X_t\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right] + \int_0^t \mathbb{E}\left[b_s\right] ds,$$

et

$$\begin{aligned}\forall t \geq s,\ \mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] &= X_0 + \int_0^s b_r dr + \mathbb{E}\left[\int_s^t b_r dr \mid \mathcal{F}_s\right] + \int_0^s \sigma_r dW_r \\ &= X_s + \mathbb{E}\left[\int_s^t b_r dr \mid \mathcal{F}_s\right].\end{aligned}$$

Si $b \equiv 0$ et $\sigma \in \Gamma$, le processus X est une martingale continue.

Exercice. Écrire les processus suivants comme des processus d'Itô en précisant leur drift et le coefficient de diffusion

1. $X_t = W_t^2$
2. $X_t = t + e^{W_t}$
3. $X_t = W_t^3 - 3tW_t$.

Solution 1.7.1 *Soit*

1. $X_t = W_t^2$. On posant $f(x) = x^2$, alors

$$dX_t = f^{'}(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f^{''}(W_t)dt = 2W_tdW_t + dt.$$

2. $X_t = t + e^{W_t}$. On posant $f(t,x) = t + e^x$ alors

$$dX_t = dt + \exp W_t dW_t + \frac{1}{2}\exp W_t dt.$$

3. $X_t = W_t^3 - 3tW_t$. On posant $f(t,x) = x^3 - 3tx$ alors

$$dX_t = 3W_t^2dW_t - 3tdW_t - 3W_tdt + \frac{1}{2} \times 3(2W_tdW_tdW_t) = (3W_t^2 - 3t)dW_t.$$

1.7.1 Intégrale par rapport à un processus d'Itô

Soit X un processus d'Itô de la forme

$$dX_t = b_tdt + \sigma_tdW_t.$$

On note

$$\int_0^t \varphi_s dX_s \overset{déf}{=} \int_0^t \varphi_s b_s ds + \int_0^t \varphi_s\sigma_s dW_s.$$

1.7.2 Formule d'Itô

Première forme

Théorème 1.7.1 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de class C^2 à dérivées bornées. Alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f^{'}(X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(X_s)\sigma_s^2 ds.$$

La règle de multiplication :

$$dW_t.dW_t = dt,$$
$$dt.dW_t = 0,$$
$$dt.dt = 0.$$

Deuxiéme formule d'Itô

Théorème 1.7.2 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de class C^1 par rapport à t, de class C^2 par rapport à x. On a*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_t^{'}(s, X_s)ds + \int_0^t f_x^{'}(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}^{''}(s, X_s)\sigma_s^2 ds.$$

La forme différentielle correspondante est :

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= \left(f^{'}(t, X_t) + \frac{1}{2} f_{xx}^{''}(t, X_t)\sigma_t^2 \right) dt + f_x^{'}(t, X_t)dX_t \\ &= f^{'}(t, X_t)dt + f_x^{'}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}^{''}(t, X_t) d\left\langle X \right\rangle_t . \end{aligned}$$

Proposition 1.7.1 *Supposons que*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s,$$

où b et σ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornées. Si f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de class C^2 à dérivées bornées et vérifiant :

$$\forall x, \quad b(x)f^{'}(x) + \frac{1}{2}\sigma(x)^2 f^{''}(x) = 0,$$

le processus $f(x)$ est une martingale.

Formule de base

Théorème 1.7.3 *Soit*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (f'(W_s))^2 ds\right] < \infty, \forall t > 0. \tag{4}$$

Alors $\forall t \geq 0$

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds. \tag{5}$$

Nous remarquons que $(f'(W_t), t \geq 0)$ *est un processus continue et adapté à* $(\mathcal{F}_t)$ *et que la condition (4) est vérifiée,* $\int_0^t f'(W_s)dW_s$ *est bien définie (et* $\int_0^t f''(W_s)ds$ *est aussi car l'application* $s \to f''(W_s)$ *est continue).*

Le second terme du membre de droite dans (5) est appelé terme d'Itô.

Exemple 1.7.1 *Soit*

1. $f(x) = x$; d'après (5) on trouve :

$$\begin{aligned} W_t - W_0 &= \int_0^t 1 dW_s + 0 \\ &= \int_0^t dW_s. \end{aligned}$$

2. $f(x) = x^2$, on a d'après (5)

$$\begin{aligned} W_t^2 - W_0^2 &= \int_0^t 2W_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds \\ &= 2\int_0^t W_s dW_s + t, \end{aligned}$$

en plus, $W_t^2 - t = 2\int_0^t W_s dW_s$ est une martingale (la condition (4) est vérifiée) puisque ;

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (2W_s)^2 ds\right] = \int_0^t 4s ds = 2t^2 < \infty.$$

3. $f(x) = e^x$: $f^{'}(x) = f^{''}(x) = e^x$, donc

$$e^{W_t} - 1 = \int_0^t e^{W_s} dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{W_s} ds.$$

Noter qu'ici aussi la condition est vérifiée (4), car

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (e^{W_s})^2 ds\right] = \int_0^t \mathbb{E}\left[e^{2W_s}\right] ds = \int_0^t e^{2s} ds = \frac{e^{2t}-1}{2} < \infty.$$

Si on pose $X_t = e^{W_t}$, alors la formule ci-dissus devient :

$$X_t - 1 = \int_0^t X_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t X_s ds.$$

Autrement dit, on a trouvé une équation pour le processus (X_t). Sous forme différentielle, celle-ci s'écrit

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t dW_t + \frac{1}{2} X_t dt \\ X_0 &= 1. \end{aligned}$$

Sachant que $\frac{dW_t}{dt}$ n'existe pas, "on ne divise pas par dt". Noter que la forme différentielle ci-dessus n'a aucun sens en tant que telle et ne constitue qu'une notation pour la forme intégrale donnée plus haut.

Théorème 1.7.4 *Soient* (W_t) *un mouvement Brownien standard et* $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *telle que*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s, W_s)\right)^2 ds\right] < \infty, \ \forall t > 0.$$

Alors $\forall t > 0$,

$$f(t, W_t) - f(0, W_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, W_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, W_s) dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, W_s) ds, \ p.s.$$

Exemple 1.7.2 *Soit* $f(t,x) = e^{x-\frac{t}{2}}$ *alors*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}f,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

donc

$$e^{W_t-\frac{t}{2}} - 1 = \int_0^t e^{W_s-\frac{s}{2}} dW_s.$$

Le processus stochastique $(Z_t = e^{W_t-\frac{t}{2}})$ *est une martingale exponentielle associée au mouvement Brownien standard, qui satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$Z_t - 1 = \int_0^t Z_s dW_s, \ \textit{i.e.}\ dZ_t = Z_t dW_t \ \textit{et}\ Z_0 = 1.$$

1.7.3 Formule d'intégration par parties

Soit $(X_t)_{t\geq 0}, (Y_t)_{t\geq 0}$ deux processus d'Itô. Alors

$$\forall t \geq 0 \text{ on a, } X_tY_t - X_0Y_0 = \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t\,,\ p.s.$$

Aussi la forme différentielle est :

$$d(X_t, X_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\,\langle X, Y\rangle_t\,.$$

Chapitre 2

L'existence des contrôles optimaux pour les EDSRs linéaires de type champ moyen

2.1 Introduction

Soit W_t un processus de Wiener r-dimensionnel défini sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On notera par $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle de (mouvement Brownien W_t) tel que $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles P-null de $\mathcal{F}$, et on considère une variable aléatoire ξ de carrée intégrable et $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Nous considérons un problème de contrôle optimal dans lequel le système est governé par l'$EDSR$ linéaire de type champ moyen suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T \left(AY_t + \hat{A}\mathbb{E}\left[Y_t\right] + BZ_t + \hat{B}\mathbb{E}\left[Z_t\right] + Cu_t + \hat{C}\mathbb{E}\left[u_t\right] \right) dt - \int_t^T Z_t dW_t, \quad (2.1)$$

avec

$A, \widehat{A}, B, \widehat{B}, C,$ et $\widehat{C}$ sont des matrices suitables.

L'équation (2.1), c'est une équation différentielle stochastique rétrograde linéaire de type champ moyen, avec $Y_T = \xi$.

Définition 2.1.1 *Un contrôle admissible u est un processus de carré intégrable et progressivement mesurable à valeurs dans certain sous-ensemble $U \subseteq \mathbb{R}^k$. Notons par U_{ad} l'ensemble de tous les contrôles admissibles.*

Remarque 2.1.1 *On a ajouté la condition du carré intégrable pour le contrôle juste pour assurer l'existence de solution de notre système (2.1).*

Notre problème de contrôle consiste a trouve parmi les contrôles admissibles, un contrôle $\bar{u}$ qui minimise sur l'ensemble des contrôles admissible U_{ad}, la fonction de côut J définie par :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[g(Y_0, \mathbb{E}[y_0]) + \int_0^T h(t, Y_t, \mathbb{E}[Y_t], Z_t, \mathbb{E}[Z_t], u_t, \mathbb{E}[u_t])dt\right], \tag{2.2}$$

telle que les trajectoires associées à ce contrôle $(\bar{Y}_t, \bar{Z}_t)$ vérifiant l'$EDSR$ linéaire de type champ moyen (2.1),

avec

$$h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k\times d} \times U \to \mathbb{R},$$

et

$$g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R},$$

sont des fonctions données.

Un contrôle qui résoudre ce probléme de contrôle est appele *contrôle optimal, c'est-à-dire*

$$J(\bar{u}) = \inf_{u \in U_{ad}} J(u). \tag{2.3}$$

Afin de résoudre le probléme de contrôle ci-dessus, nous considérons les hypothèses suivantes :

$$\textit{L'ensemble des valeurs des contrôles } U \subseteq \mathbb{R}^k \textit{ est convexe et compact.} \tag{2.1}$$

$$\textit{Les fonctions } h \textit{ et } g \textit{ sont continues et convexes.} \tag{2.2}$$

Considérons les espaces suivant :

$$M_2(0,T,\mathbb{R}^{n\times d}) := \left\{ \begin{array}{c} Z : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^d; Z \textit{ est progressivement mesurable} : \\ \mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_t|^2\, dt < \infty\right] \end{array} \right\},$$

$$S^2(0,T,\mathbb{R}^d) := \left\{ \begin{array}{c} Y : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^d; Y \textit{ est progressivement mesurable} : \\ \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} |Y_t|^2\right] < \infty \end{array} \right\},$$

$$L^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbb{R}^d) := \left\{ f(t,w)\ \mathcal{F}_t\textit{-adapté tel que} : \mathbb{E}\left[\int_0^T (f(t,w))^2\, dt\right] < \infty \right\},$$

$$U_{ad} := \left\{ u \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbb{R}^k); u_t \in U\ \forall t\in[0,T], P-p.s\right\},\ \text{avec } U \subseteq \mathbb{R}^k.$$

2.1.1 Le résultat d'existence d'un contrôle optimal

Théorème 2.1.1 *Supposons que les hypothèses (A1) et (A2) sont satisfaits, alors il existe un triple de processus* $(\bar{Y}_t, \bar{Z}_t, \bar{u}_t)$ $\mathcal{F}_t$*-adapté tel que*

i) $(\bar{Y}_t, \bar{Z}_t)$ est l'unique solution pour l'EDSR de type champ moyen (2.1).

ii) $\bar{u}_t$ minimise la fonction de coût J sur l'ensemble des contrôles admissibles U_{ad},

c'est-à-dire notre problème de contrôle $\{(2.1), (2.2), (2.3)\}$ admit une solution optimale.

Preuve. Soit $(Y_\cdot^n, Z_\cdot^n, u_\cdot^n)$ est une suite de minimisante c'est-à-dire, telle que

$$\lim_{n\to\infty} J(u^n) = \inf_{u\in U_{ad}} J(u) \text{ lorsque } \ n \to +\infty.$$

D'après le fait que l'ensemble des valeurs de contrôle U est un ensemble compact, donc il existe une constante positive k avec

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (u_t^n)^2 dt\right] \leq k \quad \forall n \geq 0,$$

c'est-à-dire, $(u_\cdot^n)$ est relativement compact ce qui implique quelle admit une sous-suite qu'on la note $(u_\cdot^n)$ telle que :

$$u^n \to \bar{u} \text{ faiblement en } L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R}^k).$$

D'après le théorème de Mazur, il existe une combinaison convexes

$$\tilde{u}^n = \sum_{m \geq 0} \alpha_{mn} u^{m+n} \text{ avec } \alpha_{mn} \geq 0 \text{ et } \sum_{m \geq 0} \alpha_{mn} = 1$$

telle que

$$\tilde{u}^n \to \bar{u} \text{ fortement (au moyenne quatratique) dans } L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R}^k). \tag{2.4}$$

Car l'ensemble $U \subseteq \mathbb{R}^k$ est convexe et compact, il s'ensuit que $\bar{u} \in U_{ad}$.

Soient $(\tilde{Y}^n, \tilde{Z}^n, \tilde{u}^n)$ telle que $(\tilde{Y}^n, \tilde{Z}^n)$ l'unique solution de l'EDSR de type champ moyen suivante,

$$\tilde{Y}_t^n = \xi + \int_t^T (A\tilde{Y}_t^n + \hat{A}\mathbb{E}\left[\tilde{Y}_t^n\right] + B\tilde{Z}_t^n + \hat{B}\mathbb{E}(\tilde{Z}_t^n) + C\tilde{u}_t^n + \hat{C}\mathbb{E}\left[\tilde{u}_t^n\right])dt - \int_t^T \tilde{Z}_t^n dW_t, \tag{2.5}$$

et $(\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{u})$ telle que $(\bar{Y}, \bar{Z})$ l'unique solution de l'EDSR de type champ moyen suivante

$$\bar{Y}_t = \xi + \int_t^T (A\bar{Y}_t + \hat{A}\mathbb{E}\left[\bar{Y}_t\right] + B\bar{Z}_t + \hat{B}\mathbb{E}\left[\bar{Z}_t\right] + C\bar{u}_t + \hat{C}\mathbb{E}\left[\bar{u}_t\right])dt - \int_t^T \bar{Z}_t dW_t. \tag{2.6}$$

On a besoin de prouver que

$$\tilde{Y}_t^n \to \bar{Y}_t \text{ fortement dans } S^2(0,T,\mathbb{R}^n), \tag{2.7}$$

$$\text{et } \int_0^T \tilde{Z}_t^n dW_t \to \int_0^T \bar{Z}_t dW_t \text{ fortement dans } L^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbb{R}^{n\times d}). \tag{2.8}$$

Prouvons (2.7) :

on a

$$\begin{aligned} d\left(\tilde{Y}_t^n - \bar{Y}_t\right) = &-\Big(A(\tilde{Y}_t^n - \bar{Y}_t) + \hat{A}(\mathbb{E}\left[\tilde{Y}_t^n\right] - \mathbb{E}\left[\bar{Y}_t\right]) \\ &+ B(\tilde{Z}_t^n - \bar{Z}_t) + \hat{B}(\mathbb{E}\left[\tilde{Z}_t^n\right] - \mathbb{E}\left[\bar{Z}_t\right]) \\ &+C(\tilde{u}_t^n - \bar{u}_t) + \hat{C}\left(\mathbb{E}\left[\tilde{u}_t^n\right] - \mathbb{E}\left[\bar{u}_t\right]\right)\Big) dt \\ &+ (\tilde{Z}_t^n - \bar{Z}_t) dW_t. \end{aligned}$$

En appliquant l'intégration par parties à $\left(\tilde{Y}_t^n - \bar{Y}_t\right)^2$ on trouve

$$\begin{aligned} d\left(\tilde{Y}_t^n - \bar{Y}_t\right)^2 &= 2\left(\tilde{Y}_t^n - \bar{Y}_t\right) d\left(\tilde{Y}_t^n - \bar{Y}_t\right) + d\left\langle \tilde{Y}_t^n - \bar{Y}_t, \tilde{Y}_t^n - \bar{Y}_t\right\rangle \\ &= 2\Big\langle \tilde{Y}_t^n - \bar{Y}_t, -(A(\tilde{Y}_t^n - \bar{Y}_t) + \hat{A}(\mathbb{E}\left[\tilde{Y}_t^n\right] - \mathbb{E}\left[\bar{Y}_t\right]) \\ &+ B(\tilde{Z}_t^n - \bar{Z}_t) + \hat{B}(\mathbb{E}\left[\tilde{Z}_t^n\right] - \mathbb{E}\left[\bar{Z}_t\right]) + C(\tilde{u}_t^n - \bar{u}_t) \\ &+ \hat{C}(\mathbb{E}\left[\tilde{u}_t^n\right] - \mathbb{E}\left[\bar{u}_t\right])\Big\rangle dt + \left(\tilde{Z}_t^n - \bar{Z}_t\right)^2 dt, \end{aligned}$$

passant a l'intégrale entre $[t, T]$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_t^T d(\tilde{Y}_t^n - \bar{Y}_t)^2 dt = 2\int_t^T &\Big[-A(\tilde{Y}_s^n - \bar{Y}_s)^2 - \hat{A}(\tilde{Y}_s^n - \bar{Y}_s)(\mathbb{E}\left[\tilde{Y}_s^n\right] - \mathbb{E}\left[\bar{Y}_s\right]) \\ &- B(\tilde{Y}_s^n - \bar{Y}_s)(\tilde{Z}_s^n - \bar{Z}_s) - \hat{B}(\tilde{Y}_s^n - \bar{Y}_s)(\mathbb{E}\left[\tilde{Z}_s^n\right] - \mathbb{E}\left[\bar{Z}_s\right]) \\ &-C(\tilde{Y}_s^n - \bar{Y}_s)(\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s) - \hat{C}(\tilde{Y}_s^n - \bar{Y}_s)(\mathbb{E}\left[\tilde{u}_s^n\right] - \mathbb{E}\left[\bar{u}_s\right])\Big] ds \\ &+ \int_t^T (\tilde{Z}_s^n - \bar{Z}_s)^2 ds\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}(\tilde{Y}_T^n - \bar{Y}_T)^2 - (\tilde{Y}_t^n - \bar{Y}_t)^2 = 2\int_t^T &\Big[-A(\tilde{Y}_s^n - \bar{Y}_s)^2 - \hat{A}(\tilde{Y}_s^n - \bar{Y}_s)(\mathbb{E}\left[\tilde{Y}_s^n\right] - \mathbb{E}\left[\bar{Y}_s\right]) \\ &- B(\tilde{Y}_s^n - \bar{Y}_s)(\tilde{Z}_s^n - \bar{Z}_s) - \hat{B}(\tilde{Y}_s^n - \bar{Y}_s)(\mathbb{E}\left[\tilde{Z}_s^n\right] - \mathbb{E}\left[\bar{Z}_s\right]) \\ &-C(\tilde{Y}_s^n - \bar{Y}_s)(\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s) - \hat{C}(\tilde{Y}_s^n - \bar{Y}_s)(\mathbb{E}\left[\tilde{u}_s^n\right] - \mathbb{E}\left[\bar{u}_s\right])\Big] ds \\ &+ \int_t^T (\tilde{Z}_s^n - \bar{Z}_s)^2 ds,\end{aligned}$$

on sait d'après (2.5) et (2.6) que

$$\tilde{Y}_T^n = \bar{Y}_T = \xi \text{ alors } (\tilde{Y}_T^n - \bar{Y}_T)^2 = 0,$$

donc

$$\begin{aligned}(\tilde{Y}_t^n - \bar{Y}_t)^2 + \int_t^T (\tilde{Z}_s^n - \bar{Z}_s)^2 ds = 2\int_t^T &\Big[A(\tilde{Y}_s^n - \bar{Y}_s)^2 + \hat{A}(\tilde{Y}_s^n - \bar{Y}_s)(\mathbb{E}\left[\tilde{Y}_s^n\right] - \mathbb{E}\left[\bar{Y}_s\right]) \\ &+ B(\tilde{Y}_s^n - \bar{Y}_s)(\tilde{Z}_s^n - \bar{Z}_s) + \hat{B}(\tilde{Y}_s^n - \bar{Y}_s)(\mathbb{E}\left[\tilde{Z}_s^n\right] - \mathbb{E}\left[\bar{Z}_s\right]) \\ &+C(\tilde{Y}_s^n - \bar{Y}_s)(\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s) + \hat{C}(\tilde{Y}_s^n - \bar{Y}_s)(\mathbb{E}\left[\tilde{u}_s^n\right] - \mathbb{E}\left[\bar{u}_s\right])\Big] ds,\end{aligned}$$

passant a l'espérence on a

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\tilde{Y}_t^n-\bar{Y}_t\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{Z}_s^n-\bar{Z}_s\right|^2ds\right]\\
&\leq 2\mathbb{E}\int_0^T\left[|A|\left|\tilde{Y}_s^n-\bar{Y}_s\right|^2+\left|\hat{A}\right|\left|\tilde{Y}_s^n-\bar{Y}_s\right|\cdot\left|\mathbb{E}\left[\tilde{Y}_s^n\right]-\mathbb{E}\left[\bar{Y}_s\right]\right|\right.\\
&+|B|\left|\tilde{Y}_s^n-\bar{Y}_s\right|\cdot\left|\tilde{Z}_s^n-\bar{Z}_s\right|+\left|\hat{B}\right|\left|\tilde{Y}_s^n-\bar{Y}_s\right|\cdot\left|\mathbb{E}\left[\tilde{Z}_s^n\right]-\mathbb{E}\left[\bar{Z}_s\right]\right|\\
&\left.+|C|\left|\tilde{Y}_s^n-\bar{Y}_s\right|\cdot\left|\tilde{u}_s^n-\bar{u}_s\right|+\left|\hat{C}\right|\left|\tilde{Y}_s^n-\bar{Y}_s\right|\cdot\left|\mathbb{E}\left[\tilde{u}_s^n\right]-\mathbb{E}\left[\bar{u}_s\right]\right|\right]ds,
\end{aligned}
$$

on utilise l'inégalité de Young ($2ab\leq a^2+b^2$) et ($2ab\leq\varepsilon a^2+\frac{1}{\varepsilon}b^2$) on trouve :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\tilde{Y}_t^n-\bar{Y}_t\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{Z}_s^n-\bar{Z}_s\right|^2ds\right]\\
&\leq 2\left|A\right|\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{Y}_s^n-\bar{Y}_s\right|^2ds\right]+\left|\hat{A}\right|\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\left|\tilde{Y}_s^n-\bar{Y}_s\right|^2+\left|\mathbb{E}\left[\tilde{Y}_s^n\right]-\mathbb{E}\left[\bar{Y}_s\right]\right|^2\right)ds\right]\\
&+\left|B\right|\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\frac{1}{\varepsilon}\left|\tilde{Y}_s^n-\bar{Y}_s\right|^2+\varepsilon\left|\tilde{Z}_s^n-\bar{Z}_s\right|^2\right)ds\right]\\
&+\left|\hat{B}\right|\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\frac{1}{\varepsilon}\left|\tilde{Y}_s^n-\bar{Y}_s\right|^2+\varepsilon\left|\mathbb{E}\left[\tilde{Z}_s^n\right]-\mathbb{E}\left[\bar{Z}_s\right]\right|^2\right)ds\right]\\
&+\left|C\right|\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\left|\tilde{Y}_s^n-\bar{Y}_s\right|^2+\left|\tilde{u}_s^n-\bar{u}_s\right|^2\right)ds\right]\\
&+\left|\hat{C}\right|\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\left|\tilde{Y}_s^n-\bar{Y}_s\right|^2+\left|\mathbb{E}\left[\tilde{u}_s^n\right]-\mathbb{E}\left[\bar{u}_s\right]\right|^2\right)ds\right],
\end{aligned}
$$

ce qui implique

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\tilde{Y}_t^n-\bar{Y}_t\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{Z}_s^n-\bar{Z}_s\right|^2ds\right]\\
&\leq (2\left|A\right|+2\left|\hat{A}\right|+\frac{|B|}{\varepsilon}+\frac{\left|\hat{B}\right|}{\varepsilon}+|C|+\left|\hat{C}\right|)\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{Y}_t^n-\bar{Y}_t\right|^2ds\right]\\
&+(\varepsilon\left|B\right|+\varepsilon\left|\hat{B}\right|)\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{Z}_s^n-\bar{Z}_s\right|^2ds\right]\\
&+\left(|C|+\left|\hat{C}\right|\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{u}_s^n-\bar{u}_s\right|^2ds\right]\\
&\leq C_1\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{Y}_t^n-\bar{Y}_t\right|^2ds\right]+c\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{Z}_s^n-\bar{Z}_s\right|^2ds\right]\\
&+C_2\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{u}_s^n-\bar{u}_s\right|^2ds\right],
\end{aligned}
$$

si on pose

$$
\varepsilon=\frac{1}{2c},
$$

on trouve

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\tilde{Y}_t^n-\bar{Y}_t\right|^2\right]+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{Z}_s^n-\bar{Z}_s\right|^2ds\right]\\
&\leq C_1\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{Y}_t^n-\bar{Y}_t\right|^2ds\right]+C_2\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{u}_s^n-\bar{u}_s\right|^2ds\right].
\end{aligned}
$$

D'après cette inégalité on peut trouver les inégalités suivantes

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\tilde{Y}_t^n-\bar{Y}_t\right|^2\right]\leq C_1\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{Y}_t^n-\bar{Y}_t\right|^2ds\right]+C_2\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{u}_s^n-\bar{u}_s\right|^2ds\right], \tag{2.9}
$$

et

$$
\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{Z}_s^n-\bar{Z}_s\right|^2ds\right]\leq C_1\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{Y}_t^n-\bar{Y}_t\right|^2ds\right]+C_2\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{u}_s^n-\bar{u}_s\right|^2ds\right]. \tag{2.10}
$$

On applique le lemme de *Gronwall* sur (2.9), on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\tilde{Y}_t^n-\bar{Y}_t\right|^2\right]\leq C_2\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{u}_s^n-\bar{u}_s\right|^2ds\right]\exp^{(T-t)C_1}$$
$$\to 0,\ \text{lorsque } n\to+\infty.$$

Alors

$$\tilde{Y}_t^n\to\bar{Y}_t \text{ fortement dans } S^2(0,T,\mathbb{R}^n). \tag{2.11}$$

Prouvons (2.8) :

En utilisant (2.4) et (2.11) dans l'inégalité (2.10), on trouve

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{Z}_s^n-\bar{Z}_s\right|^2ds\right]\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

d'après *l'isomètrie d'Itô*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\tilde{Z}_s^n-\bar{Z}_s\right)dW_t\right]^2=\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{Z}_s^n-\bar{Z}_s\right|^2ds\right]\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

ce qui nous donne

$$\int_0^T\tilde{Z}_s^ndW_t\to\int_0^T\bar{Z}_sdW_t \text{ au moyenne quatratique.}$$

Il nous reste a prouver que $\bar{u}$ minimise le fonctionel de coût J sur l'ensemble des contrôles admissibles U_{ad}. Supposons que les hypothèses (A1) et (A2) sont satistaits. Posons

$$l=\inf_{u\in U_{ad}}J(u).$$

Considérons la suite minimisante (Y^n, Z^n, u^n) telle que

$$l = \lim_{n\to\infty} J(u^n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[g(Y_0^n, \mathbb{E}\left[Y_0^n\right]) + \int_0^T h(t, Y_t^n, \mathbb{E}\left[Y_t^n\right], Z_t^n, \mathbb{E}\left[Z_t^n\right], u_t^n, \mathbb{E}\left[u_t^n\right])dt\right].$$

On a déja

$$\begin{aligned} J(\bar{u}) &= \mathbb{E}\left[g(\bar{Y}_0, \mathbb{E}\left[\bar{Y}_0\right]) + \int_0^T h(t, \bar{Y}_t, \mathbb{E}\left[\bar{Y}_t\right], \bar{Z}_t, \mathbb{E}\left[\bar{Z}_t\right], \bar{u}_t, \mathbb{E}\left[\bar{u}_t\right])dt\right] \\ &= \mathbb{E}\left[g\left(\lim_{n\to\infty} \tilde{Y}_0^n, \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} \tilde{Y}_0^n\right]\right)\right. \\ &\left.+ \int_0^T h(t, \lim_{n\to\infty} \tilde{Y}_t^n, \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} \tilde{Y}_t^n\right], \lim_{n\to\infty} \tilde{Z}_t^n, \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} \tilde{Z}_t^n\right], \lim_{n\to\infty} \tilde{u}_t^n, \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} \tilde{u}_t^n\right])dt\right], \end{aligned}$$

puisque les fonctions g et h sont continues, il vient que

$$\begin{aligned} J(\bar{u}) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[g\left(\tilde{Y}_0^n, \mathbb{E}\left[\tilde{Y}_0^n\right]\right)\right. \\ &\left.+ \int_0^T h(t, \tilde{Y}_t^n, \mathbb{E}\left[\tilde{Y}_t^n\right], \tilde{Z}_t^n, \mathbb{E}\left[\tilde{Z}_t^n\right], \tilde{u}_t^n, \mathbb{E}\left[\tilde{u}_t^n\right])dt\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[g\left(\sum_{m\geq 0} \alpha_{mn} Y_0^{m+n}, \mathbb{E}\left[\sum_{m\geq 0} \alpha_{mn} Y_0^{m+n}\right]\right)\right. \\ &+ \int_0^T h\left(t, \sum_{m\geq 0} \alpha_{mn} Y_t^{m+n}, \mathbb{E}\left[\sum_{m\geq 0} \alpha_{mn} Y_t^{m+n}\right], \sum_{m\geq 0} \alpha_{mn} Z_t^{m+n},\right. \\ &\left.\left.\mathbb{E}\left[\sum_{m\geq 0} \alpha_{mn} Z_t^{m+n}\right], \sum_{m\geq 0} \alpha_{mn} u_t^{m+n}, \mathbb{E}\left[\sum_{m\geq 0} \alpha_{mn} u_t^{m+n}\right]\right)\right], \end{aligned}$$

utilisant le fait que g, h sont convexes, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
J(\bar{u}) &\leq \lim_{n\to\infty}\sum_{m\geq 0}\alpha_{mn}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[g\left(Y_0^{m+n},\mathbb{E}\left[Y_0^{m+n}\right]\right)\right.\\
&\left.+\int_0^T h\left(t,Y_t^{m+n},\mathbb{E}\left[Y_t^{m+n}\right],Z_t^{m+n},\mathbb{E}\left[Z_t^{m+n}\right],u_t^{m+n},\mathbb{E}\left[u_t^{m+n}\right]\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{m\geq 0}\alpha_{mn}J(u^{m+n})\\
&\leq \lim_{n\to\infty}\sum_{m\geq 1}\alpha_{mn}\max_{1\leq m\leq\lambda_n}J(u^{m+n})\\
&=\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq m\leq\lambda_n}J(u^{m+n})\sum_{m\geq 1}\alpha_{mn}\\
&=\lim_{n\to\infty}J(u^{n+\sigma(n)})\\
&=\inf_{u\in U_{ad}}J(u).
\end{aligned}$$

Alors

$$J(\bar{u})=\inf_{u\in U_{ad}}J(u).$$

■

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié un problème d'existence des contrôles stochastiques optimaux pour un problème de contrôle optimal qui consiste à étudier des systèmes governés par des équations différentielles stochastiques linéaires de type champ moyen.

La méthode de démonstration est basée sur le fait que l'ensemble des valeurs des contrôles a été supposé d'être convexe aussi les fonctions définissant le fonctionel de coût sont convexe ainsi que l'utilisation du théorème de Mazur.

Cette méthode a été utilisée pour prouve l'existence des contrôles optimaux pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques (EDSs) linéaires et des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs) linéaires, dans ce mémoire on a appliqué cette méthode pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs) linéaires de type champ moyen.

Bibliographie

[1] Bahlali. K, Gherbal. B and Mezerdi. B, (2010). *Exisrence and optimality conditions in stochastique control of linear BSDEs*. Random Operators and Stochastic Equation, 18(3), 185-197.

[2] Bahlali. K, Mezerdi. M, and Mezerdi. B, (2014). *Existence of optimal controls for systems governed by mean-field stochastic differential equations*, Afrika Statistika 9, 627–645.

[3] Breton, J. C. (2014). *Calcul stochastique. M2 mathématiques*, Université de Rennes, 1.

[4] Breton, J. C. (2013). *Processus stochastique*. Université de Rennes1.

[5] Jeanblanc. M, (2006). *Cours de calcul stochastique*. Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry. Avaible at http ://www.maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.

[6] Jeanblanc. M, (2005). *Exercices de calcul stochastique* DESS IM Evry, option finance.

[7] Jeanblanc. M, et Simon. T, (2005). *Eléments de calcul stochastique*. IRBID, septembre.

[8] Lévêque. O, (2005). *Cours de probabilités et calcul stochastique* (No. LTHI-TEACHING-2006-001).

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations utilisées tout au long de ce mémoire sont comme suit

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$	Espace de probabilité filtré.
W_t	Mouvement Brownien.
τ	Temps d'arrèt.
U_{ad}	Ensemble de contrôle admissible.
$\tilde{u}^n$	Suite des combinison convexe.
u^n	Suite minimisante.
$\overline{u}$	Contrôle optimal.
$J(.)$	fonction de coût.
$\langle ., . \rangle$	Crochet stochastique.
$P - p.s$	Presque sûrement pour la mesure de prpbabilité .
$p.s$	prêsque sûrement..
U	Un borélien de $\mathbb{R}^k$ (l'ensemble des valeurs de contrôle).
$EDSR$	équations différentielles stochastiques rétrograde.