République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

MAKHLOUF Khouloud

Titre :

Principe du maximum stochastique pour les EDS avec un coût terminal généralisé

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**GHERBAL Boulakhras**	UMKB	Président
Dr.	**KHELFALLAH Nabil**	UMKB	Encadreur
Dr.	**GHOUL Abdelhak**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A la mémoire de mon père qui a souhaité vivre pour longtemps juste pour nous voir Qu'est-ce que nous allons devenir.

A ma mère qui ne cessé de me consolider d'une parole dès ma tendre enfance. Ma mère que j'aime beaucoup m'a donne tous, j'aimerais cette bonne mère, ma vie entière.

A mes frères et sœurs et tous les membres de la famille Makhlouf

A tous ceux qui ont veillés sur ma réussite durant les années d'étude.

A mes amis en particulier : Dahbia, Lina, Zeyneb et Meriem.

Et mes collègues sans exception.

Makhlouf Khouloud

REMERCIEMENTS

Nous remercions Allah tout puissant qui nous donné la force et la volonté pour pouvoir finir ce mémoire de master.

Nous tenons à remercier vivement notre encadreur **Dr : KHALFELLAH Nabil** d'avoir accepté de diriger ce projet et pour la confiance qu'il nous accordées, ses encouragements, et ses précieux conseils.

Nous voudrions remercier également **Dr. GHERBAL Boulakhras** et **Dr. GHOUL Abdelhak**, membres de jury, de nous avoir fait l'honneur d'accepter de jures ce travail.

Nous tenons à remercier, tous ceux qui nous enseignés durant toutes notre études et en particuliers nos enseignants à l'université de Mohamed Khider Biskra.

Nous tenons aussi à remercier tous les personnes qui nous ont encouragés pendant la réalisation de ce travail, famille, collège, amis, sans exception.

Table des matières

Introduction

La théorie du contrôle optimal est utilisée pour modéliser beaucoup de situation en sciences de l'ingénieur, en sciences économie et sociales et de façon plus générale dans tout les domaines utilisant les applications des mathématiques. On peut citer : le traitement du signal, le traitement d'image, l'aéronautique, la mécanique, les réseaux routiers, la fluidité de la circulation et surtout en économie et en finance. Pour ces derniers, on peut citer, la théorie du risque, le taux de fluctuation en bourse, les problèmes d'investissements et de consommations dans un marché, l'actuariat et beaucoup d'autres problèmes. Ce travail a été consacré à l'étude de deux formes du principe du maximum stochastique, pour les systèmes d'EDS contrôlées de type suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dX(t) & = & b(t, X(t), u(t))\, dt + \sigma(t, X(t), u(t))\, dW(t), \\ X(0) & = & x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right.$$

Plus précisément, nous établissons les conditions nécessaires d'optimalité, ces conditions sont connue ce le nom de principe du maximum stochastique. Ce travail, consiste à minimiser (ou maximiser) une certaine fonction de coût J sur l'ensemble des contrôles admissibles. Sous forme de principe du maximum associe au contrôle optimal et sous forme de principe du maximum stochastique, avec un coût terminal généralisé. Dans le cas où le coefficient contrôlé et le domaine de contrôle n'est pas nécessairement convexe dans notre travail le coût fonctionnel est donnée respectivement par :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))\, dt + g(X(T))\right],$$
$$J(u(.)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(X(t), u(t))\, dt + g(X(T))\right],$$

où $X(T) = X(s)_{0 \leq S \leq T}$, désigne le chemin de X de 0 à T.

Ce mémoire est structuré de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on va expliquer la théorie du calcul stochastique, en donnant les définitions et les propriétés des processus continues ainsi que leurs résultats principaux qui nous permettre de définir l'intégrale stochastique. On parle aussi sur les théorèmes d'existence et d'unicité pour EDS, et $EDSR$ de façon générale.

Dans le deuxième chapitre nous allons traiter le problème du contrôle optimal stochastique pour EDS dans le cas où le coefficient contrôlé et le domaine de contrôle n'est pas nécessairement convexe. Ce principe consiste à introduire les équations adjointes. Le résultat obtenu dans ce chapitre est une inégalité maximale entre Hamiltonien.

Dans le dernière chapitre nous allons dérivés Fréchet un problème de contrôle optimal est stochastique entraîné par une équation différentielle stochastique avec coût terminal généralisé. En construisant une série de premier et de second ordre des équations du modèle adjoint, nous établissons le principe maximum stochastique et obtenir les systèmes de Hamiltonien.

Chapitre 1

Généralité sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre, nous présentons les concepts et résultats du calcul stochastique, en donnant les définitions et les propriétés des processus continues ainsi que leurs résultats principaux que nous permettent de définir l'intégrale stochastique. On parle aussi sur les théorèmes d'existence et d'unicité pour EDS, et $EDSR$ de façon générale.

1.1 Rappel sur calcul stochastique

1.1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 (Processus stochastique) *Un processus stochastique est une famille $\{X_t, t \in I\}$ des variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité tel que l'indice t est souvent interprété comme le temps.*

– *Si $I \subseteq \mathbb{N}$ on dit que le processus est à temps discret.*

– *Si $I \subseteq \mathbb{R}$ on dit que le processus est à temps continu.*

Définition 1.1.2 (Filtration) *On appelle filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une famille croissante de sous tribu de $\mathcal{F}$ i.e. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $\forall\ s \leq t$.*

Le quadruplet $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ est appelé espace de probabilité filtré.

Remarque 1.1.1 *Un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *muni d'une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *est satisfait les conditions habituelles si :*

– $\mathcal{F}$ *est complète : si* $B \subset A \in \mathcal{F}$ *et* $\mathbb{P}(A) = 0$ *alors* $B \in \mathcal{F}$.

– $\mathcal{F}_0$ *contient tous les ensembles* $\mathbb{P}-$*négligeables de* $\mathcal{F}$.

– *La filtration est continue à droite i.e.*

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \forall t \geq 0.$$

Définition 1.1.3 (Processus à trajectoire continue) *On dit que le processus* X *est à trajectoires continues (ou est continu) si les trajectoires* $t \mapsto X_t(w)$ *sont continues pour presque tout* w.

(i) *Un processus* X *est dit càdlàg (continu à droite et pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche pour presque tout* w.

(ii) *Un processus* X *est dit càglàd (continu à gauche et pourvu de limite à droite) si ses trajectoires sont continues à gauche et pourvues de limites à droite pour presque tout* w.

Définition 1.1.4 (Processus mesurable) *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit mesurable si l'application:*

$$\begin{aligned} X \quad : \quad & [0, \infty[\times \Omega \to \mathbb{R}^d \\ & (t, w) \to X_t(w), \end{aligned}$$

est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0, \infty[) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.1.5 (Processus adapté) *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit adapté par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si pour tout* $t \geq 0$, X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable.*

Définition 1.1.6 (Processus progressivement mesurable) *Un processus stochastique*

$(X_t)_{t\geq 0}$ *est progressivement mesurable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si pour tout* $t \geq 0$ *l'application:*

$$\begin{aligned} X \quad : \quad & [0,t] \times \Omega \to \mathbb{R}^d \\ & (s,w) \to X_s(w), \end{aligned}$$

est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.1.7 (Modification et indistinguable) *Soient* $(X_t)_{t\geq 0}$ *et* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *deux processus stochastique définies sur même espace* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

(***i***) *X est une modification de Y si, pour tout $t \geq 0$, les variables aléatoires X_t et Y_t sont égales $\mathbb{P}-p.s.$*

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

(***ii***) *X et Y sont indistinguables si, $\mathbb{P}-p.s$, les trajectoires de X et de Y sont les mêmes c'est à dire*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0) = 1.$$

1.2 Espérance conditionnelle

Soit X une variable aléatoire (intégrable) définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Définition 1.2.1 *On définit l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$, l'unique variable aléatoire $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ $\mathcal{G}-$mesurable sur Ω telle que :*

$$\int_A \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]\, d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P},\ \forall A \in \mathcal{G}.$$

1.2.1 Propriétés de l'espérance conditionnelle

Soit $X, Y \in (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ presque sûrement on a :

1. Linéarité : Si $X, Y \in (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors :

$$\mathbb{E}\left[(\alpha X + \beta Y) \mid \mathcal{G}\right] = \alpha \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] + \beta \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{G}\right].$$

2. Croissance : Soit X et Y deux variable aléatoire telle que $X \leq Y$, alors :

$$\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \leq \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{G}\right].$$

3. Si X est $\mathcal{G}$ mesurable alors :

$$\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] = X.$$

4. Si X est indépendante de $\mathcal{G}$ alors :

$$\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[X\right].$$

5. Si Y est $\mathcal{G}$ mesurable alors :

$$\mathbb{E}\left[XY \mid \mathcal{G}\right] = Y\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right].$$

1.3 Martingale

Définition 1.3.1 (Martingale, sous-martingale et sur-martingale) *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit martingale, sous-martingale ou sur-martingale si :*

– *pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

– *pour tout $t \geq 0$, X_t est intégrable i.e. $\mathbb{E}\left(|X_t|\right) < \infty$.*

– *pour tout* $0 \leq s \leq t$

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s, & \mathbb{P} - p.s \quad (si\ martingale), \\ \mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] > X_s, & \mathbb{P} - p.s \quad (si\ sous\text{-}martingale), \\ \mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] < X_s, & \mathbb{P} - p.s \quad (si\ sur\text{-}martingale). \end{cases}$$

1.4 Variation totale et variation quadratique

Définition 1.4.1 (Variation finie, bornée et quadratique) *Soit* $[0, T]$ *un intervalle et* $\pi_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = T\}$ *une subdivision* $[0, T]$ *de pas*

$$\|\pi_n\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left|t_i^n - t_{i-1}^n\right|.$$

On appelle variation infinitésimale d'ordre p *d'un processus* X *indexé par* $[0, T]$ *associé à* π_n

$$V_T^p(\pi_n) = \sum_{i=1}^{i=n} \left|X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right|^p.$$

Si $V_T^p(\pi_n)$ *admet une limite dans (en un certain sens) lorsque* $\|\pi_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *et la limite ne dépend pas de la subdivision choisie, on appelle* $V_T^p = \lim\limits_{\|\pi_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} V_T^p(\pi_n)$ *variation d'ordre* p.

– *Si* $p = 1$, *la limite* V_T^1 *est appelée variation totale de* X.

i) *Si* $\forall\ T$, V_T^1 *est fini on dit que* X *est variation finie.*

ii) *Si* $\forall\ T$, V_T^1 *est borné on dit que* X *est variation finie.*

– *Si* $p = 2$, *la limite est appelée variation quadratique de* X.

1.5 Mouvement Brownien

Définition 1.5.1 (Mouvement Brownien) *On appelle mouvement Brownien un processus stochastique* $(W_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs réelles telle que:*

i) La fonction $t \longmapsto W_t(w)$ *est une fonction continue* $\mathbb{P}-p.s$,

ii) pour $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ *est indépendant de la tribu* $\sigma\{W_u, u \leq s\}$ *et de loi gaussienne centrée de variance* $(t-s)$,

iii) pour $0 \leq s \leq t$, *la loi de* $W_t - W_s$ *est identique à celle de* $W_{t-s} - W_0$.

Remarque 1.5.1 *Un mouvement brownien est dit standard si :*

$$W_0 = 0,\ \mathbb{P}{-}p.s\ \mathbb{E}[W_t] = 0 \quad et \quad \mathbb{E}[W_t^2] = t.$$

Propriété 1.5.1 *Soit* W *est un mouvement Brownien, on a :*

(i) $t \rightarrow W_t(w)$ *est continu,*

(ii) $t \rightarrow W_t(w)$ *n'est pas dérivable en aucun point,*

(iii) $t \rightarrow W_t(w)$ *n'est pas à variation finie sur aucun intervalle* $[0,t]$.

1.6 Intégrale d'Itô

On définit l'intégrale stochastique par rapport au mouvement Brownien dû à Itô de la forme :

$$\int_0^T X(t)\, dW(t),$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$est un mouvement brownien, et $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique répondant à certains critères d'intégrabilité.

Définition 1.6.1 (Processus d'Itô) *On appelle processus d'Itô un processus* X *à valeurs réelles telle que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW(s),\ \mathbb{P}{-}p.s.\ \forall t \in [0,T].$$

On X_0 et $\mathcal{F}_0$-mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurable vérifiant les conditions, $\mathbb{P}-p.s.$

$$\int_0^T |b_s|\, ds < \infty \quad et \quad \int_0^T |\sigma_s|^2\, ds < \infty.$$

1.6.1 Formule d'Itô

Théorème 1.6.1 (Première formule d'Itô) *Supposons f de classe C^2. Alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, \sigma_s^2 ds.$$

Cette formule s'écrit sous forme condensée

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, \sigma_t^2 dt \\ &= \left(f'(X_t)\, b_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, \sigma_t^2 \right) dt + f'(X_t)\, \sigma_t dW_t \\ &= f'(X_t)\, b_t dt + \frac{1}{2} f''(X_t)\, d\langle X \rangle_t + f'(X_t)\, \sigma_t dW_t, \end{aligned}$$

avec la table de multiplication :

	dt	dW_t
dt	0	0
dW_t	0	dt

Théorème 1.6.2 (Deuxième formule d'Itô) *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x. On a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_x'(s, X_s)\, dX_s + \int_0^t f_t'(s, X_s)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)\, \sigma_s^2 ds.$$

On peut écrire cette formule sous la forme différentielle

$$\begin{aligned} df(t,X_t) &= \left(f_t^{'}(t,X_t) + \frac{1}{2} f_{xx}^{''}(t,X_t)\,\sigma_t^2 \right) dt + f_x^{'}(t,X_t)\,dX_t \\ &= f_t^{'}(t,X_t)\,dt + f_x^{'}(t,X_t)\,dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}^{''}(t,X_t)\,d\langle X\rangle_t \\ &= \left(f_t^{'}(t,X_t) + f_x^{'}(t,X_t)\,b_t + \frac{1}{2} f_{xx}^{''}(t,X_t)\,\sigma_t^2 \right) dt + f_x^{'}(t,X_t)\,\sigma_t dW_t. \end{aligned}$$

Proposition 1.6.1 (Formule d'Intégration par partie) *Soit X et Y deux processus d'Itô, alors*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X,Y\rangle_t\,,$$

cette formule est connue sous le nom d'intégration par partie.

1.7 Équations différentielles stochastiques

Les équations différentielles stochastiques (EDS) constituent une généralisation des équations différentielles ordinaires. Elles ont été introduites pour la première fois par Itô pour étudier les trajectoires des processus de diffusion. La formulation générale d'une équation différentielle stochastique est :

$$\begin{cases} dX(t) &= b(t,X(t))\,dt + \sigma(t,X(t))\,dW(t)\,, \\ X(0) &= x, \end{cases} \tag{1.1}$$

et pour la forme intégrale

$$X(t) = x + \int_0^t b(s,X(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s,X(s))\,dW(s)\,,\ pour 0 \le t \le T.$$

1.7.1 Existence et d'unicité

Notation et définitions

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet, $(W_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien à valeur dans $\mathbb{R}^d$ et X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^n$ indépendant de $(W_t)_{t\geq 0}$.
Soient aussi b et σ deux fonctions de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ à valeur dans $\mathbb{R}$ donnée par :

$$b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{M}^{n\times m}.$$

Le problème donc est de résoudre l'EDS :

$$dX(t) = b(t, X(t))\, dt + \sigma(t, X(t))\, dW(t), \text{ pour } 0 \leq t \leq T,$$

telle que : Le coefficient b s'appelle le drift et σ s'appelle la diffusion.
Soient n et m des entiers positifs, et soient σ et b deux fonctions mesurable localement bornées définies sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ et à valeur respectivement dans $\mathbb{M}^{n\times m}$ et $\mathbb{R}^n$, où $\mathbb{M}^{n\times m}$ désigne l'ensemble des matrices $n \times m$.
La solution de l'équation (1.1) est un processus X continue $\mathcal{F}_t-$adapté telle que les intégrale $\int_0^t b(s, X(s))\, ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X(s))\, dW(s)$ ont une sens et l'égalité

$$X(t) = x + \int_0^t b(s, X(s))\, ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))\, dW(s), \text{ pour } 0 \leq t \leq T,$$

est satisfaite pour tout t $\mathbb{P} - p.s.$
Quelle condition doit-on appliquer sur b et σ pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDS.
Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur b et σ pour avoir l'existence et unicité d'une solution de l'EDS.

1.7.2 Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 1.7.1 *Soit b et σ deux fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante K telle que pour tout $t \in [0,T]$, x, y dans $\mathbb{R}^n$:*

1. *Condition de Lipschitz en espace, uniforme en temps :*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K|x-y|,$$

2. *Croissance linéaire :*

$$|b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \leq K(1+|x|),$$

3. $\mathbb{E}|X_0|^2 < \infty$.

Alors l'EDS (1.1) possède une unique solution à trajectoires continues pour tout $t \leq T$. De plus cette solution vérifie :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\right] < +\infty.$$

1.8 Équations différentielles stochastiques rétrogrades

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades ($EDSR$) ont été introduites pour la première fois dans le cas linéaire dans un travail de J.M. Bismut. Et au début des années 90 elles ont connu un formidable développement, où le premier résultat général (le cas nom linaire) a été élaboré par E. Pardoux et S. peng.

Définition 1.8.1 *Soit T un réel strictement positif. Nous nous donnons une application aléatoire $f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}^m$ qui sont mesurables, on considère également une variable aléatoire ξ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.*

Une équation différentielle stochastique rétrograde est une équation de la forme:

$$\begin{cases} dY(t) &= f(t, Y(t), Z(t))\,dt + Z(t)\,dW(t), \\ Y(0) &= \xi. \end{cases} \tag{1.2}$$

La fonction f s'appelle le générateur de l'$EDSR$ et ξ la condition terminale.

Définition 1.8.2 *Une solution de l'EDSR (1.2) est un couple de processus* $\{(y(t), z(t))\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1. *y et z sont progressivement mesurable à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^{m\times d}$,*
2. *$\mathbb{P}-p.s$ $\int_0^T \left\{|f(s, Y(s), Z(s))| + \|Z(s)\|^2\right\} ds < \infty$,*
3. *$\mathbb{P}-p.s$, on a $Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y(s), Z(s))\,ds + \int_t^T Z(s)\,dW(s)$, $0 \leq t \leq T$.*

1.8.1 Existence et d'unicité

Notation 1.8.1 $\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{m\times d}\right)$ *celui formé par les processus Z progressivement mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^{m\times d}$ telle que* $\|Z\|^2_{\mathcal{M}^2} = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^T \|Z\|^2\right] < +\infty$, $M^2\left(\mathbb{R}^{m\times d}\right)$ *désigne l'ensemble des classes d'équivalence de* $\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{m\times d}\right)$, $\mathcal{M}^2$ *et* M^2 *sont des espaces de banach.*

Théorème 1.8.1 *Voici les hypothèses*

(H_1) *Condition de Lipschitz en (y, z) c'est-à-dire Il existe une constante $\theta > 0$ telle que $\mathbb{P}-p.s$ pour tout $t, y, \acute{y}, z$ et $\acute{z}$ on a*

$$|g(t, y, z) - g(t, \acute{y}, \acute{z})| \leq \theta\left(|y - \acute{y}| + \|z - \acute{z}\|\right),$$

(H_2) *Condition d'intégrabilité*

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |g(s, 0, 0)|^2\,ds\right] < +\infty.$$

Théorème 1.8.2 (Pardoux-Peng 1990**)** *sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *EDSR (1.2) possède une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$.

1.9 Quelques inégalités

Inégalité de Hölder

Soit p et q deux exposants conjugués $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1\right)$ avec $1 < p$, $q < \infty$. Soit X et Y deux variables aléatoires où XY est intégrable alors:

$$\mathbb{E}[XY] \leq (\mathbb{E}[X^p])^{\frac{1}{p}} . (\mathbb{E}[X^q])^{\frac{1}{q}} .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz est L'inégalité de Hölder pour $p = q = 2$ telle que :

$$\mathbb{E}[XY] \leq \left(\mathbb{E}\left[X^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\mathbb{E}\left[X^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Lemme de Gronwall

Soit f une application localement intégrable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, a et b deux applications croissantes et non négatives telle que $\forall\ 0 \leq t \leq T$,

$$f(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t f(s)\, ds.$$

Alors on a $\forall\ t \in [0, T]$,

$$f(t) \leq a(t)\, e^{b(t)t}.$$

Chapitre 2

Principe du maximum de Peng

Dans ce chapitre, on propose d'étudier la structure mathématique rigoureuse pour les problèmes des contrôles stochastiques dans le cas des coefficients différentiables et on va étudier le principe du maximum dans le cas où le coefficient de diffusion dépend du contrôle et aussi le domaine du contrôle $\mathcal{U}$ est n'est pas nécessairement convexe.

2.1 Formulation du problème de contrôle optimal stochastique

Soient $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé filtré $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$un mouvement Brownien de dimension m, T un réel strictement positif, et $\mathcal{U}$ un sous ensemble n'est pas nécessairement convexe de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} = \sigma\left(w\left(s\right),\ 0 \leq s \leq t\right)$ est la filtration naturelle du mouvement Brownien.

On considère le problème de contrôle suivant :

$$\begin{cases} dX\left(t\right) & = & b\left(t, X\left(t\right), u\left(t\right)\right) dt + \sigma\left(t, X\left(t\right), u\left(t\right)\right) dW\left(t\right), \\ X\left(0\right) & = & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.1}$$

où

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n \times m},$$

$\mathcal{U}$ l'ensemble des contrôles admissibles.

Supposons le problème est sans contrainte, alors le coût est donner par :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))\, dt + g(X(T))\right], \tag{2.2}$$

où

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R},$$

Le but de contrôle optimal est de minimiser la fonction de coût $J(u)$, sur l'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}$.

Un contrôle $\bar{u} \in \mathcal{U}$ est dit optimal, s'il vérifie :

$$J(\bar{u}) = \inf_{u \in U} J(u).$$

Définitions

Définition 2.1.1 (Contrôle) *On appelle contrôle tout processus $u = (u_t)_{t\in[0,T]}$ adapté par rapport à une filtration, de carré intégrable et prend ses valeurs dans un borélien $\mathbb{A}$ de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 2.1.2 (Contrôle admissible) *On appelle contrôle admissible tout processus $u = (u_t)_{t\in[0,T]}$ mesurable et $\mathcal{F}_t-$adapté à valeur dans un borélien $\mathbb{A}$ de $\mathbb{R}^n$. On note par $\mathcal{U}$*

l'ensemble de tous les contrôles admissibles

$$\mathcal{U} = \{u\colon\ [0,T] \times \Omega \to \mathbb{A},\ \textit{tel que } u \textit{ est mesurable et } \mathcal{F}_t - \textit{adapté}\}.$$

Définition 2.1.3 (Contrôle optimal) *On dit que le contrôle $\bar{u}$ est optimal si :*

$$J(\bar{u}) \leq J(u), \forall u \in \mathcal{U}.$$

Remarque 2.1.1 *Le problème de contrôle optimal consiste à minimiser une fonction coût $J(u)$ sur un ensemble de contrôle admissible $\mathcal{U}$.*

2.2 Quelques hypothèses

On suppose :

A$_0$) $(\mathcal{U}, d)$ espace métrique séparable.

A$_1$) Les fonction :

$$b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n,$$
$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R},$$
$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

sont mesurable et il existe une constante $C > 0$ et un module de continuité $\bar{\omega}$: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ telle que pour $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u)\,,\ f(t,x,u)\,,\ g(x)$ on a :

$$\begin{cases} |\varphi(t,x,u) - \varphi(t,\hat{x},\hat{u})| & \leq C|x-\hat{x}| + \bar{\omega}(d(u,\hat{u}))\,, \\ & \forall\ t \in [0,T]\,,\ x,\hat{x} \in \mathbb{R}^n,\ u,\hat{u} \in \mathcal{U}, \\ |\varphi(t,0,u)| \leq C, & \forall\ (t,u) \in [0,T] \times \mathcal{U}. \end{cases}$$

$\mathbf{A}_2$) Les fonctions :

$$\begin{aligned}
&b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n, \\
&f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}, \\
&g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},
\end{aligned}$$

sont dérivable en x, et de plus, il existe $C > 0$ un module de continuité $\bar{\omega}\colon\ [0,\infty) \to [0,\infty)$ telle que $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u)\,,\ f(t,x,u)\,,\ g(x)$ on a :

$$\begin{cases}
|\varphi_x(t,x,u) - \varphi_x(t,\hat{x},\hat{u})| & \leq C\,|x-\hat{x}| + \bar{\omega}(d(u,\hat{u}))\,, \\
|\varphi_{xx}(t,x,u) - \varphi_{xx}(t,\hat{x},\hat{u})| & \leq \bar{\omega}\,|x-\hat{x}| + d(u,\hat{u})\,, \\
& \forall\ t \in [0,T]\,,\ \ x,\hat{x} \in \mathbb{R}^n,\ \ u,\hat{u} \in \mathcal{U}.
\end{cases}$$

2.3 Équations adjointes

Dans cette partie, nous introduisons les équations adjointes, impliquées dans le principe du maximum stochastique et le système Hamiltonien associé. Il s'agit d'équations différentielles stochastiques rétrogrades que l'on devra être capable de résoudre afin d'obtenir le contrôle optimal. Une discussion plus approfondie sur leur théorie est disponible dans (Yong et Zhou, 1999) [2]. On définit un processus adjoint par deux équations :

a) Première équation :

$$\begin{cases}
dp(t) = & -\Big\{ b_x\left(t,\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)^{\intercal} p(t) + \sum\limits_{j=1}^{m} \sigma_x^j\left(t,\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)^{\intercal} q_j(t) \\
& - f_x\left(t,\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)\Big\}\, dt + q(t)\, dW(t)\ \ t \in [0,T]\,, \\
p(T) = & -g_x\left(\bar{X}(T)\right).
\end{cases} \tag{2.3}$$

b) Deuxième équation :

$$\begin{cases} dP(t) = & -\left\{ b_x\left(t, \bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)^{\intercal} P(t) + P(t)\, b_x\left(t, \bar{X}(t), \bar{u}(t)\right) \right. \\ & + \sum\limits_{j=1}^{m} \sigma_x^j\left(t, \bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)^{\intercal} P(t)\, \sigma_x^j\left(t, \bar{X}(t), \bar{u}(t)\right) \\ & + \sum\limits_{j=1}^{m} \sigma_x^j\left(t, \bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)^{\intercal} Q_j(t) + Q_j(t)\, \sigma_x^j\left(t, \bar{X}(t), \bar{u}(t)\right) \\ & \left. + H_{xx}\left(t, \bar{X}(t), \bar{u}(t), p(t), q(t)\right) \right\} dt + \sum\limits_{j=1}^{m} Q_j(t)\, dW^j(t), \\ P(t) = & -g_{xx}\left(\bar{X}(T)\right), \end{cases} \tag{2.4}$$

où l'Hamiltonien H est défini par :

$$H(t, X, u, p, q) = \langle p, b(t, X, u) \rangle + tr\left[q^{\top} \sigma(t, X, u)\right] - f(t, X, u),$$

avec

$$(t, X, u, p, q) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m},$$
$$(p(\cdot), q(\cdot)) \in L_{\mathcal{F}}^2(0, T, \mathbb{R}^n) \times \left(L_{\mathcal{F}}^2(0, T, \mathbb{R}^n)\right)^m,$$

est la solution $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ −adaptée de (2.3)

$$(P(\cdot), Q(\cdot)) \in L_{\mathcal{F}}^2(0, T, S^n) \times \left(L_{\mathcal{F}}^2(0, T, S^n)\right)^m,$$

est la solution $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ −adaptée de (2.4). Et

$$S^n = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ tel que } A^{\top} = A \right\}.$$

Les équations (2.3) et (2.4) s'appellent équation adjointe du premier ordre et équation adjointe du second ordre, respectivement. Avant d'énoncer le principe du maximum stochastique, définissons la fonction $\mathcal{H}$ par :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(t,X,u) = \;& H(t,X(t),u(t),p(t),q(t)) - \frac{1}{2}tr\left[\sigma\left(t,\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)^{\intercal} P(t)\,\sigma\left(t,\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)\right] \\ & +\frac{1}{2}tr\left\{\left[\sigma\left(t,\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)-\sigma\left(t,\bar{X}(t),u\right)\right]^{\top} P(t)\left[\sigma(t,X,u)-\sigma\left(t,\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)\right]\right\}.\end{aligned}$$

Théorème 2.3.1 (Principe du maximum stochastique) *On suppose que les conditions* $(\mathbf{A}_0)$, $(\mathbf{A}_1)$ *et* $(\mathbf{A}_2)$ *sont satisfaites. Soit* $\left(\bar{X}(\cdot),\bar{u}(\cdot)\right)$ *une paire optimale, alors il existe des paires de processus*

$$\begin{gathered}(p(\cdot),q(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbb{R}^n) \times \left(L^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbb{R}^n)\right)^m, \\ (P(\cdot),Q(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbb{S}^n) \times \left(L^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbb{S}^n)\right)^m,\end{gathered}$$

satisfaisant les équations adjointes (2.3) et (2.4) respectivement, et telle que :

$$\begin{aligned}& H\left(t,\bar{X}(t),\bar{u}(t),p(t),q(t)\right) - H\left(t,\bar{X}(t),u,p(t),q(t)\right) \\ & -\frac{1}{2}tr\left(\left[\sigma\left(t,\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)-\sigma\left(t,\bar{X}(t),u\right)\right]^{\intercal} P(t)\right. \\ & \left.\left[\sigma\left(t,\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)-\sigma\left(t,\bar{X}(t),u\right)\right]\right) \geq 0.\end{aligned}$$

Pour tout $u \in \mathcal{U}$ *et* $t \in [0,T]$ *. Où, de manière équivalente*

$$\mathcal{H}\left(t,\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right) = \max_{u\in U} \mathcal{H}\left(t,\bar{X}(t),u\right), \;\; \forall t \in [0,T]. \tag{2.5}$$

La relation (2.5) est appelée la condition du maximum. Une démonstration détaillée de ce théorème se retrouve dans (Yong et Zhou, 1999) [*2*].

En utilisant l'Hamiltonien H, les systèmes (2.1) et (2.3) peuvent être réécrits de la manière suivante :

$$\begin{cases} dX(t) &= H_p(t, X(t), u(t), p(t), q(t))\, dt + H_q(t, X(t), u(t), p(t), q(t))\, dW(t), \\ dp(t) &= -H_x(t, X(t), u(t), p(t), q(t))\, dt + q(t)\, dW(t), \ t \in [0, T], \\ X(0) &= x, \\ p(T) &= -g_x(X(T)). \end{cases} \tag{2.6}$$

Définition 2.3.1 (Système Hamiltonien) *On appelle système Hamiltonien, le système d'équations différentielles obtenu par combinaison de, (2.4), (2.5) et (2.6).*

Théorème 2.3.2 (Deuxième version du principe du maximum) *On suppose que les conditions* $(\mathbf{A}_1)$ *et* $(\mathbf{A}_2)$ *sont satisfaites. Soit* $(\bar{X}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ *une paire optimal, alors le* 6-*uplet* $(X(t), u(t), p(t), q(t), P(t), Q(t))$, *satisfait le système Hamiltonien.*

Chapitre 3

Principe du maximum généralisé

Généralement, nous avons en utilisant les dérivés Fréchet, on étudie un problème de contrôle optimal stochastique entraîné par une équation différentielle stochastique avec un coût terminal généralisé. En construisant une série de premier ordre et de second ordre des équations du modèle adjoint, nous établissons le principe maximum stochastique et obtenir les systèmes de Hamiltonien. Ce résultat a été obtenu par Shuzhen Yang en 2016 [6].

3.1 Formulation du problème de contrôle optimal stochastique

Soient $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé filtré $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien de dimension $1, T$ un réel strictement positif, et $\mathcal{U}$ un sous ensemble n'est pas nécessairement convexe de $\mathbb{R}$. On suppose que $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} = \sigma\left(w\left(s\right),\ 0 \leq s \leq t\right)$ est la filtration naturelle du mouvement Brownien.

On considère le problème de contrôle suivant :

$$\begin{cases} dX(s) & = & b(X(s), u(s))\, ds + \sigma(X(s), u(s))\, dW(s), \ s \in [0,T], \\ X(0) & = & x, \end{cases} \tag{3.1}$$

où

$$u(.) = \{u(s), \ s \in [0,T]\}.$$

Le coût fonctionnel est donner par:

$$J(u(.)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(X(t), u(t))\, dt + g(X(T))\right], \tag{3.2}$$

où $X(T) = X(s)_{0 \leq s \leq T}$, désigne le chemin de X de 0 à T et

$$\begin{aligned} b &= \mathbb{R}\times\mathcal{U} \to \mathbb{R}, \\ \sigma &= \mathbb{R}\times\mathcal{U} \to \mathbb{R}, \\ f &= \mathbb{R}\times\mathcal{U} \to \mathbb{R}, \\ g &= C[0,T] \to \mathbb{R}, \end{aligned}$$

où $C[0,T]$ est l'ensemble des fonctions continues sur $[0,T]$. Soit $h = b$, σ et f, sont uniformément continue satisfait les conditions de croissance linéaire et lipschitz.

Dans le cadre dérivés de Fréchet, pour $g(\bar{X}_T)$, par le théorème de représentation de Riesz, il y a une mesure de Borel finie unique μ sur $[0,T]$ telle que $\forall\ \eta_T \in C[0,T]$

$$Dg(\bar{X}_T)(\eta_T) = \int_{[0,T]} \eta(s)\, d\mu(s). \tag{3.3}$$

Parce que μ est une mesure finie sur $[0,T]$, la mesure de μ à la plupart des points dénombrables sont positifs. Désigné comme $\{u(\{t_i\})\}_{i=1}^{+\infty}$, et l'on suppose que $0 = \cdots < t_2 <$

$t_1 = T$. Et il n'y a forme bilinéaire $\beta : C[0,T] \times C[0,T] \to \mathbb{R}$ tel que :

$$D^2 g\left(\bar{X}_T\right)(\eta_T, \eta_T) = \int_{[0,T]\times[0,T]} \eta(t)\,\eta(s)\,d\beta(t,s). \tag{3.4}$$

Par la symétrie des dérivées secondes, nous avons $\beta(s,t) = \beta(t,s)$, $(t,s) \in [0,T] \times [0,T]$, $\beta(t,s)$ est une mesure finie sur $[0,T]\times[0,T]$, donc il n'y existent à la plupart des points de mesure des dénombrables sont positifs, indiquent les points de saut, comme $(s_i, k_j)_{i,j=1}^{\infty}$et supposons que $0 = \cdots < s_2 < s_1 = T$, $0 = \cdots < k_2 < k_1 = T$. Notez que

$$\beta(\{s\}, \{t\}) = \beta(\{t\}, \{s\}), (t,s) \in [0,T] \times [0,T],$$

et

$$\beta(\{s_i\}, \{s_i\}) + \beta(\{k_j\}, \{k_j\}) = \beta(\{s_i\}, \{k_j\}) + \beta(\{k_j\}, \{s_i\}) > 0. \tag{3.5}$$

Pour plus de commodité, nous notons les ensembles $(s_i, s_i)_{i=1}^{\infty}$ et $(k_j, k_j)_{i=1}^{\infty}$ comme $(l_i, l_i)_{i=1}^{\infty}$ puis l'ensemble $(l_i, l_i)_{i=1}^{\infty}$ contient tous les points de sauts β. Nous avons également indiquer les ensembles $(t_i)_{i=1}^{\infty}$ et $(l_i)_{i=1}^{\infty}$ comme $(h_i)_{i=1}^{\infty}$ avec $0 = \cdots < h_2 < h_1 = T$.

3.2 Hypothèses

On suppose :

$H_1)$ Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\left|h\left(x^1, u\right) - h\left(x^2, u\right)\right| \leq c\left|x^1 - x^2\right|, \forall\left(x^1, u\right), \left(x^2, u\right) \in \mathbb{R}\times\mathcal{U}.$$

$H_2)$ Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|h(x,u)| \leq c(1 + |x|), \forall(x,u) \in \mathbb{R}\times U.$$

Soit g est fonctions de valeur réelle uniformément continue sur $C[0,T]$, respectivement.

$H_3)$ Il existe une constante $c>0$ telle que

$$\left|g\left(\phi_T^1\right)-g\left(\phi_T^2\right)\right|\leq c\left\|\phi_T^1-\phi_T^2\right\|,\forall\left(\phi_T^1,\phi_T^2\right)\in C[0,T]\times C[0,T],$$

et $\|\cdot\|$ est la norme maximale sur $C[0,T]$.

$H_4)$ Soit h différentiable en x, g est Fréchet différentiable, et il existe une constante $c>0$ telle que :

$$\begin{aligned}
\left|h_x\left(x^1(t),u^1\right)-h_x\left(x^2(t),u^2\right)\right| &\leq c\left(\left|x^1(t)-x^2(t)\right|+\left|u^1-u^2\right|\right),\\
\left|\left(Dg\left(\phi_T^1\right)-Dg\left(\phi_T^2\right)\right)\left(1_{[0,T]}\right)\right| &\leq c\left\|\phi_T^1-\phi_T^2\right\|,\\
\left|\left(D^2g\left(\phi_T^1\right)-D^2g\left(\phi_T^2\right)\right)\left(1_{[0,T]},1_{[0,T]}\right)\right| &\leq c\left\|\phi_T^1-\phi_T^2\right\|,
\end{aligned}$$

$$\forall\left(t,x_T^1,x_T^2,u^1,u^2\right)\in[0,T]\times C[0,T]\times C[0,T]\times\mathcal{U}\times\mathcal{U}.$$

Problème 3.2.1 *Minimiser (3.2) sur $\mathcal{U}[0,T]$. S'il existe, on cherche le contrôle $\bar{u}(.)\in\mathcal{U}[0,T]$ telle que :*

$$J(\bar{u}(.))=\inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}[0,T]}J(u(.)). \tag{3.6}$$

3.3 Équations adjointes

$i)$ Première équation :

$$\begin{cases}
-dp(t)= & \left\{b_x\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)p(t)+\sigma_x\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)q(t)\right.\\
& \left.-\acute{\mu}(t)-f_x\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)\right\}d(t)-q(t)\,dW(t),t\in\left(h_{i+1},h_i\right),\\
-p(t_i)= & \mu\left(\{h_i\}\right)-p\left(h_i^+\right),\ i=1,2,3,\ldots
\end{cases} \tag{3.7}$$

Où h_i^+ est la limite droite de la h_i, $\acute{\mu}(t)$ est la dérivée de $\mu(t)$ et $p\left(h_1^+\right) = 0$.Indiquer que :

$$H(x,u,p,q) = b(x,u)\,p + \sigma(x,u)\,q - f(x,u)\,, \ \ (x,u,p,q) \in \mathbb{R}\times\mathcal{U}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

$ii)$ Deuxième équation :

$$\begin{cases} -dP(t) = & \left\{2b_x\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)P(t) + \sigma_x\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)P(t)\,\sigma_x\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)\right. \\ & \left. -\,\acute{\gamma}(t) + 2\sigma_x\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)Q(t) + H_{xx}\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t),p(t),q(t)\right)\right\}dt \\ & -Q(t)\,dW(t)\,, \ t\in(h_{i+1},h_i)\,, \\ -P(h_i) = & \beta\left(\{h_i\},\{h_i\}\right) - P\left(h_i^+\right), \ i=1,2,3,\ldots \end{cases} \tag{3.8}$$

où

$$\acute{\gamma}(t) = \int_{h_{i+1}}^{h_i} d\beta(s,t)\,,$$

et

$$p\left(h_1^+\right) = 0, \ t\in(h_{i+1},h_i)\,, \ i=1,2,3,\ldots$$

Théorème 3.3.1 (Principe du maximum) *Soient les hypothèses* $(H_1)-(H_4)$ *et* $\left(\bar{u}(\cdot),\bar{X}(\cdot)\right)$ *est un couple optimal (3.6), alors il existe* $(p(\cdot),q(\cdot))$ *et* $(P(\cdot),Q(\cdot))$ *répandant à l'ensemble des équations de premier ordre adjoint (3.7) et second ordre adjoint des équations (3.8) et respectivement, telle que*

$$\begin{gathered}\left(H\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t),p(t),q(t)\right)\right) - H\left(\bar{X}(t),u,p(t),q(t)\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\sigma\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right) - \sigma\left(\bar{X}(t),u\right)\right)^2 P(t) \geq 0,\end{gathered} \tag{3.9}$$

pour tout $u\in\mathcal{U}$ *et* $t\in(h_{i+1},h_i)\,, \ i=1,2,3,\ldots$

Exemple 3.3.1 *Soient* $T=1$, *l'équation différentielle stochastique contrôlée est comme suit :*

$$dX^u(s) = u(s)\,X^u(s)\,dW(s)\,, \ \ 0\leq s\leq 1,$$

avec la condition l'initiale de $X(0) = 1,$ *où* $u(.) = \{u(s), s \in [0,1]\}$ *est un contrôle prise de processus de valeurs dans un ensemble compact* $[0,1]$. *Le coût fonctionnel est :*

$$J(u(.)) = \min_{u \in \mathcal{U}[0,1]} \mathbb{E}\left[-X^u\left(\frac{1}{2}\right)^2 + X^u(1)^2\right], \tag{3.10}$$

et nous pouvons vérifier que

$$\left(\bar{u}(t), \bar{X}(t)\right) = \begin{cases} \left(1, e^{-\frac{1}{2}+W(t)}\right) & si \quad 0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\ \left(0, e^{-\frac{1}{4}+W\left(\frac{1}{2}\right)}\right) & si \quad \dfrac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

est une paire optimale de systèmes (3.10). Ensuite, nous présentons ce qui suit-l'ordre du premier et du deuxième ordre équations de l'adjoint. Les équations du premier ordre adjoint sont :

$$\begin{aligned} -dp(t) &= \bar{u}(t)\, q(t)\, dt - q(t)\, dW(t), \ \frac{1}{2} \le t \le 1, \\ -p(1) &= 2\bar{X}(1), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -dp(t) &= \bar{u}(t)\, q(t)\, dt - q(t)\, dW(t), \ 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ -p\left(\frac{1}{2}\right) &= -2\bar{X}\left(\frac{1}{2}\right) - p\left(\frac{1}{2}^+\right). \end{aligned}$$

Les équations de deuxième ordre adjoint sont :

$$\begin{aligned} -dP(t) &= 2\bar{u}(t)\left(P(t) + Q(t)\right) dt - Q(t)\, dW(t), \ \frac{1}{2} \le t \le 1, \\ -P(1) &= 2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -dP(t) &= 2\bar{u}(t)\left(P(t) + Q(t)\right) dt - Q(t)\, dW(t), \ 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ -p\left(\frac{1}{2}\right) &= -2 - p\left(\frac{1}{2}^+\right). \end{aligned}$$

Les solutions des équations de premier et de second ordre adjoint sont comme suit :

$$(p(t), q(t)) = \begin{cases} \left(-2e^{\frac{1}{4}+W\left(\frac{1}{2}\right)}, 0\right) & \frac{1}{2} \le t \le 1, \\ (0,0) & 0 < t \le \frac{1}{2}, \end{cases}$$

et

$$(P(t), Q(t)) = \begin{cases} (-2, 0) & \frac{1}{2} \le t \le 1, \\ (0,0) & 0 < t \le \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que la paire de contrôle optimal $\left(\bar{u}(.), \bar{X}(.)\right)$ *satisfait aux.*

3.4 Principe du maximum

Pour obtenir des conditions nécessaires d'optimalité, on définit un contrôle $u^{\varepsilon}(t)$ par la perturbation suivante :

$$u^{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \bar{u}(t), & \text{si } t \in [0,T] \setminus E_{\varepsilon}, \\ u(t), & \text{si } t \in E_{\varepsilon}, \end{cases}$$

où $\varepsilon > 0$ et $E_{\varepsilon} = [v, v+\varepsilon] \subset [0,T]$, $v \notin \{h_i\}_{i=1}^{\infty}$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]$ est n'importe quel contrôle donnée. De toute évidence, $u^{\varepsilon}(.) \in \mathcal{U}[0,T]$.

Lemme 3.4.1 *Soient les hypothèses* $(H_1) - (H_3)$ *prise et* $X^{\varepsilon}(\cdot)$ *est la solution d'équation (3.1) dans le contrôle* $u^{\varepsilon}(\cdot)$ *et* $p(\cdot)$, $P(\cdot)$ *est les solutions des équations suivantes :*

$$\begin{cases} dy^1(t) &= b_x\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right) y^1(t)\, dt + \left[\sigma_x\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right) y^1(t)\right. \\ & + \left.\sigma\left(\bar{X}(t), u^{\varepsilon}(t)\right) - \sigma\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)\right] dW(t), \\ y^1(0) &= 0, \ t \in [0,T], \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} dy^2(t) &= \Big[b_x\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)y^2(t) + \frac{1}{2}b_{xx}\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)\left(y^1(t)\right)^2 \\ &+ \ b\left(\bar{X}(t), u^\varepsilon(t)\right) - b\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)\Big]dt \\ &+ \ \Big\{\sigma_x\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)y^2(t) + \frac{1}{2}\sigma_{xx}\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)\left(y^1(t)\right)^2 \\ &+ \ \left(\sigma_x\left(\bar{X}(t), u^\varepsilon(t)\right)\right) - \sigma_x\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)y^1(t)\Big\}dW(t), \\ y^2(0) &= 0, \ t \in [0,T], \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \max\limits_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|y^1(t)\right| = & O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \\ \max\limits_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|y^2(t)\right| = & O(\varepsilon), \\ \max\limits_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|X^\varepsilon(t) - \bar{X}(t) - y^1(t)\right| = & O(\varepsilon), \\ \max\limits_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|X^\varepsilon(t) - \bar{X}(t) - y^1(t) - y^2(t)\right| = & o(\varepsilon), \end{cases} \tag{3.11}$$

et

$$\begin{aligned} & J\left(u^\varepsilon(\cdot) - J(\bar{u}(\cdot))\right) \\ &= \mathbb{E}\sum_{i=1}^{\infty}\Big\{\mu(\{h_i\})\left(y^1(h_i) + y^2(h_i)\right) \\ &+ \int_{(h_{i+1},h_i)}\left(y^1(s) + y^2(s)\right)d\mu(s)\Big\} \\ &+ \mathbb{E}\sum_{i=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{2}\beta(\{h_i\},\{h_i\})\left(y^1(h_i)\,y^1(h_i)\right) \\ &+ \int_{(h_{i+1},h_i)\times(h_{i+1},h_i)}\left(y^1(s)\,y^1(t)\right)d\beta(s,t)\Big\} \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T\Big\{f_x\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)\left(y^1(t) + y^2(t)\right) \\ &+ \frac{1}{2}f_{xx}\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)\left(y^1(t)\right)^2 + f\left(\bar{X}(t), u^\varepsilon(t)\right) - f\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)\Big\}dt \\ &+ o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Preuve. on suppose :

$$
\begin{aligned}
&J\left(u^{\varepsilon}\left(\cdot\right)-J\left(\bar{u}\left(\cdot\right)\right)\right) \\
&=\mathbb{E}\left[g\left(X_T^{\varepsilon}\right)-g\left(\bar{X}_T\right)+\int_0^T\left\{f\left(X^{\varepsilon}\left(t\right),u^{\varepsilon}\left(t\right)\right)-f\left(\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)\right\}dt\right].
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Par équation (3.11), on a :

$$
\begin{aligned}
&J\left(u^{\varepsilon}\left(t\right)-J\left(\bar{u}\left(t\right)\right)\right) \\
&=\mathbb{E}\left[Dg\left(\bar{X}_T\right)\left(y_T^1+y_T^2\right)+\frac{1}{2}D^2g\left(\bar{X}_T\right)\left(y_T^1,y_T^1\right)\right. \\
&+\int_0^T\left\{f_x\left(\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)\left(y^1\left(t\right)+y^2\left(t\right)\right)+\frac{1}{2}f_{xx}\left(\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)\left(y^1\left(t\right)\right)^2\right. \\
&\left.\left.+\ f\left(\bar{X}\left(t\right),u^{\varepsilon}\left(t\right)\right)-f\left(\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)\right\}dt\right]+o\left(\varepsilon\right),
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

puis par équation (3.3) et (3.4), nous avons :

$$
\begin{aligned}
Dg\left(\bar{X}_T\right)\left(y_T^1+y_T^2\right) &= \int_{[0,T]}\left(y^1\left(s\right)+y^1\left(s\right)\right)d\mu\left(s\right), \\
D^2h\left(\bar{X}_T\right)\left(y_T^1,y_T^1\right) &= \int_{[0,T]\times[0,T]}y^1\left(s\right)y^1\left(t\right)d\beta\left(s,t\right),
\end{aligned}
$$

on pose que $\{\mu(\{h_i\})\}_{i=1}^{\infty}$ et $\{\beta(\{h_i\},\{h_i\})\}_{i=1}^{\infty}$ avec $0=\cdots<h_2<h_1=T$ contient tous les points de saut de μ et β. Ainsi par équation (3.14) peut être récrit sous la forme :

$$
\begin{aligned}
& J\left(u^{\varepsilon}(\cdot)-J\left(\bar{u}(\cdot)\right)\right) \\
& =\mathbb{E}\left[g\left(X_T^{\varepsilon}\right)-g\left(\bar{X}_T\right)+\int_0^T\left\{f\left(X^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t)\right)-f\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)\right\} dt\right] \\
& =\mathbb{E} \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(\left\{h_i\right\}\right)\left(y^1\left(h_i\right)+y^2\left(h_i\right)\right) \\
& +\int_{\left(h_{i+1}, h_i\right)}\left(y^1(s)+y^2(s)\right) d\mu(s) \\
& +\mathbb{E} \sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2} \beta\left(\left\{h_i\right\},\left\{h_i\right\}\right) y^1\left(h_i\right) y^1\left(h_i\right)\right. \\
& \left.+\int_{\left(h_{i+1}, h_i\right) \times\left(h_{i+1}, h_i\right)}\left(y^1(s) y^1(t)\right) d\beta(s, t)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +\mathbb{E} \int_0^T\left\{f_x\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)\left(y^1(t)+y^2(t)\right)\right. \\
& +\frac{1}{2} f_{xx}\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)\left(y^1(t)\right)^2 \\
& \left.+f\left(\bar{X}(t), u^{\varepsilon}(t)\right)-f\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)\right\} dt \\
& +o(\varepsilon) .
\end{aligned}
$$

■

3.4.1 Preuve du théorème

Preuve. Pour $t \in (h_{i+1}, h_i)$, l'application de la règle de la chaîne du différentiel à $p(t)(y^1(t) + y^2(t))$, et par hypothèse (H_4), nous avons :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(p(h_i)\left(y^1(h_i) + y^2(h_i)\right) - p\left(h_{i+1}^+\right)\left(y^1(h_{i+1}) + y^2(h_{i+1})\right)\right) \qquad (3.15)\\
&= \mathbb{E}\left\{-\mu(\{h_i\})\left(y^1(h_i) + y^2(h_i)\right) + p\left(h_i^+\right)\left(y^1(h_i) + y^2(h_i)\right)\right.\\
&\left.- p\left(h_{i+1}^+\right)\left(y^1(h_{i+1}) + y^2(h_{i+1})\right)\right\}\\
&= \mathbb{E}\int_{h_{i+1}}^{h_i}\left\{\left(y^1(t) + y^2(t)\right)\acute{\mu}(t) + f_x\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)\left(y^1(t) + y^2(t)\right)\right.\\
&+ \frac{1}{2}p(t)\, b_{xx}\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)\left(y^1(t)\right)^2 + \frac{1}{2}q(t)\,\sigma_{xx}\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)\left(y^1(t)\right)^2\\
&+ p(t)\left(b\left(\bar{X}(t), u^\varepsilon(t)\right) - b\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)\right)\\
&\left.+ q(t)\left(\sigma\left(\bar{X}(t), u^\varepsilon(t)\right) - \sigma\left(\bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)\right)\right\} dt.
\end{aligned}
$$

Ajout de i sur le deux côtés de équation (3.15), il suit :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{(p(h_i))\left(y^1(h_i) + y^2(h_i)\right) - p\left(h_{i+1}^+\right)\left(y^1(h_{i+1}) + y^2(h_{i+1})\right)\right\}\\
&= \mathbb{E}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{-\mu(\{h_i\})\left(y^1(h_i) + y^2(h_i)\right)\right.\\
&\left.+ p\left(h_i^+\right)\left(y^1(h_i) + y^2(h_i)\right) - p\left(h_{i+1}^+\right)\left(y^1(h_{i+1}) + y^2(h_{i+1})\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{-\mu\left(\{h_i\}\right)\left(y^1\left(h_i\right)+y^2\left(h_i\right)\right)\right\} \\
&= \mathbb{E}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{h_{i+1}}^{h_i}\left\{\left(y^1\left(t\right)+y^2\left(t\right)\right)\acute{\mu}\left(t\right)\right. \\
&+ f_x\left(\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)\left(y^1\left(t\right)+y^2\left(t\right)\right) \\
&+ \frac{1}{2}p\left(t\right)b_{xx}\left(\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)\left(y^1\left(t\right)\right)^2 \\
&+ \frac{1}{2}q\left(t\right)\sigma_{xx}\left(\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)\left(y^1\left(t\right)\right)^2 \\
&+ p\left(t\right)\left(b\left(\bar{X}\left(t\right),u^{\varepsilon}\left(t\right)\right)-b\left(\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)\right) \\
&+ \left. q\left(t\right)\left(\sigma\left(\bar{X}\left(t\right),u^{\varepsilon}\left(t\right)\right)-\sigma\left(\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)\right)\right\}dt. \\
&= \mathbb{E}\int_0^T\left\{\left(y^1\left(t\right)+y^2\left(t\right)\right)\acute{\mu}\left(t\right)+f_x\left(\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)\left(y^1\left(t\right)+y^2\left(t\right)\right)\right. \\
&+ \frac{1}{2}p\left(t\right)b_{xx}\left(\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)\left(y^1\left(t\right)\right)^2+\frac{1}{2}q\left(t\right)\sigma_{xx}\left(\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)\left(y^1\left(t\right)\right)^2 \\
&+ p\left(t\right)\left(b\left(\bar{X}\left(t\right),u^{\varepsilon}\left(t\right)\right)-b\left(\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)\right) \\
&+ \left. q\left(t\right)\left(\sigma\left(\bar{X}\left(t\right),u^{\varepsilon}\left(t\right)\right)-\sigma\left(\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)\right)\right\}dt.
\end{aligned}
$$

Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{-\mu\left(\{h_i\}\right)\left(y^1\left(h_i\right)+y^2\left(h_i\right)\right)\right\} \\
&= \mathbb{E}\int_0^T\left\{\left(y^1\left(t\right)+y^2\left(t\right)\right)\acute{\mu}\left(t\right)\right. \\
&+ f_x\left(\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)\left(y^1\left(t\right)+y^2\left(t\right)\right) \\
&+ \frac{1}{2}p\left(t\right)b_{xx}\left(\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)\left(y^1\left(t\right)\right)^2 \\
&+ \frac{1}{2}q\left(t\right)\sigma_{xx}\left(\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)\left(y^1\left(t\right)\right)^2 \\
&+ p\left(t\right)\left(b\left(\bar{X}\left(t\right),u^{\varepsilon}\left(t\right)\right)-b\left(\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)\right) \\
&+ \left. q\left(t\right)\left(\sigma\left(\bar{X}\left(t\right),u^{\varepsilon}\left(t\right)\right)-\sigma\left(\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)\right)\right\}dt.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Maintenant, soient $u(t) = u$ est une constant, et note que $E_\varepsilon = [v, v+\varepsilon] \subset [0,T]$. Combinant les équations.(3.12) par (3.16) et notant l'optimalité des $\bar{u}(.)$, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
0 &\leq J\left(u^\varepsilon(\cdot) - J\left(\bar{u}(\cdot)\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\mu\left(\{h_i\}\right)\left(y^1(h_i) + y^2(h_i)\right) + \int_{(h_{i+1},h_i)}\left(y^1(s) + y^2(s)\right) d\mu(s)\right\} \\
&+ \mathbb{E}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\beta\left(\{h_i\},\{h_i\}\right) y^1(h_i)\, y^1(h_i) + \int_{(h_{i+1},h_i)\times(h_{i+1},h_i)} y^1(s)\, y^1(t)\, d\beta(s,t)\right\} \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T\left\{f_x\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)\left(y^1(t) + y^2(t)\right) + \frac{1}{2}f_{xx}\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)\left(y^1(t)\right)^2\right. \\
&+ \left. f\left(\bar{X}(t),u^\varepsilon(t)\right) - f\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)\right\} dt + o(\varepsilon). \\
&= \mathbb{E}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\int_{(h_{i+1},h_i)}\left(y^1(s) + y^2(s)\right) d\mu(s)\right\} \\
&+ \mathbb{E}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2}\beta\left(\{h_i\},\{h_i\}\right) y^1(h_i)\, y^1(h_i) \\
&+ \left.\int_{(h_{i+1},h_i)\times(h_{i+1},h_i)} y^1(s)\, y^1(t)\, d\beta(s,t)\right\} \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T\left\{f_x\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)\left(y^1(t) + y^2(t)\right) + \frac{1}{2}f_{xx}\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)\left(y^1(t)\right)^2\right. \\
&+ \left. f\left(\bar{X}(t),u^\varepsilon(t)\right) - f\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)\right\} dt + o(\varepsilon)\cdot \\
&- \mathbb{E}\int_0^T\left\{\left(y^1(t) + y^2(t)\right)\acute{\mu}(t) + f_x\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)\left(y^1(t) + y^2(t)\right)\right. \\
&+ \frac{1}{2}p(t)\, b_{xx}\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)\left(y^1(t)\right)^2 + \frac{1}{2}q(t)\,\sigma_{xx}\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)\left(y^1(t)\right)^2 \\
&+ p(t)\left(b\left(\bar{X}(t),u^\varepsilon(t)\right) - b\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)\right) \\
&+ \left. q(t)\left(\sigma\left(\bar{X}(t),u^\varepsilon(t)\right) - \sigma\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)\right)\right\} dt.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \beta \left(\{h_i\}, \{h_i\} \right) y^1 (h_i) \, y^1 (h_i) \right. \\
&\left. + \int_{(h_{i+1}, h_i) \times (h_{i+1}, h_i)} y^1 (s) \, y^1 (t) \, d\beta (s, t) \right\} \\
&+ \frac{1}{2} f_{xx} \left(\bar{X} (t), \bar{u} (t) \right) \left(y^1 (t) \right)^2 + f \left(\bar{X} (t), u^\varepsilon (t) \right) - f \left(\bar{X} (t), \bar{u} (t) \right) dt \\
&- \left\{ \frac{1}{2} p (t) \, b_{xx} \left(\bar{X} (t), \bar{u} (t) \right) \left(y^1 (t) \right)^2 + \frac{1}{2} q (t) \, \sigma_{xx} \left(\bar{X} (t), \bar{u} (t) \right) \left(y^1 (t) \right)^2 \right. \\
&+ p (t) \left(b \left(\bar{X} (t), u^\varepsilon (t) \right) - b \left(\bar{X} (t), \bar{u} (t) \right) \right) \\
&\left. + q (t) \, \sigma \left(\bar{X} (t), u^\varepsilon (t) \right) - \sigma \left(\bar{X} (t), \bar{u} (t) \right) \right\} dt + o (\varepsilon) .
\end{aligned}
$$

Rappelons que

$$
\begin{aligned}
&H (x, u, p, q) = b (x, u) \, p + \sigma (x, u) \, q - f (x, u) , \\
&\quad (x, u, p, q) \in \mathbb{R} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Notons

$$
\bar{H} (t) = H \left(\bar{X} (t), \bar{u} (t), p (t), q (t) \right) ,
$$

et

$$
H^\varepsilon (t) = H \left(\bar{X} (t), u^\varepsilon (t), p (t), q (t) \right) ,
$$

donc

$$
\begin{aligned}
&J (u^\varepsilon (\cdot) - J (\bar{u} (\cdot))) \\
&= \mathbb{E} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \beta \left(\{h_i\}, \{h_i\} \right) y^1 (h_i) \, y^1 (h_i) \right. \\
&\left. + \int_{(h_{i+1}, h_i) \times (h_{i+1}, h_i)} y^1 (s) \, y^1 (t) \, d\beta (s, t) \right\} \\
&- \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \bar{H}_{xx} (t) \left(y^1 (t) \right)^2 + H^\varepsilon (t) - \bar{H} (t) \right\} dt \\
&+ o (\varepsilon) .
\end{aligned}
$$

Similaires avec lemme, en appliquant la formule d'Itô à $P(t)\left(y^1(t)\right)^2$ sur (h_{i+1}, h_i), nous avons :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\beta\left(\{h_i\},\{h_i\}\right)y^1(h_i)\,y^1(h_i)+\int_{(h_{i+1},h_i)\times(h_{i+1},h_i)}\left(y^1(t)\right)^2 d\beta(s,t)\right\}\\
&=\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T\left[-P(t)\,\sigma\left(\bar{X}(t),u^{\varepsilon}(t)\right)-\sigma\left(\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)\right)^2+H_{xx}(t)\left(y^1(t)\right)^2\right]+o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Alors, nous obtenons :

$$0\geq\mathbb{E}\int_0^T\left\{H^{\varepsilon}(t)-\bar{H}(t)+\frac{1}{2}P(t)\,\sigma\left(\bar{X}(t),u^{\varepsilon}(t)\right)-\sigma\left(\left(\bar{X}(t),\bar{u}(t)\right)\right)^2\right\}dt.$$

■

Bibliographie

[1] H. Pham. (2000). Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[2] J. Yong and X. Y. Zhou. 1999. Stochastic Controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations. Springer-Verlag, New York.

[3] M. Jeanblanc. (2006). Cours de calcul stochastique. Cours de master.

[4] P. Briand. (2001). Équations différentielles stochastiques rétrogrades.

[5] P.Tchuakem (2010) , Optimisation stochastique et application financière, univ, Québec à montréal.

[6] Sh.Yong (2016), The maximun principle for stochastic differential systems with general cost functional, Systems & Control letters 90.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité filtré.
W	Mouvement Brownien.
EDS	Èquation différentielle stochastique.
$EDSR$	Èquation différentielle stochastique rétrograde.
$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$	Tribu Borélienne sur $\mathbb{R}^d$.
b	Drift ou la dérive.
σ	Terme de diffusion.
$J(\cdot)$	Fonction de coût
$\mathcal{U}$	Ensemble des contrôles admissibles.
$\bar{u}$	Contrôle optimal.
u^{ε}	Contrôle perturbé.
$H(t, X, u, p, q,)$	Hamiltonien.
$\min$	Minimum.
$\lim$	Limite.