République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

NOM Prénom

Saad Nasr Eddine

Titre :

EDSR et Application

Dr.	Korichi Fatiha	UMKB	Président
Dr.	Tamer Lazhar	UMKB	Encadreur
Dr.	Gatt Rafika	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je tiens à dédié ce travail à

Ma mére source d'amour et graàce à son amour je Suis arrivé au bout dees mes réusites

Mon pére symbole de tous les sacrifices pour lui je Suis aujourd'hui plus ambitieux.

Mes soeurs et mes fréres

Que dieu les protége

Tous Mes amis

Tous mes collégues de promotion.

Tous que j'aime

Table des matières

Introduction

Les Equations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) ont été introduites en 1973 par J.M. Bismut dans le cas où f est linéaire par rapport aux variables Y et Z. Il a fallu attendre le début des années 1990 et le travail de E.Pardoux et S. Peng **[5]** pour avoir le premier résultat d'existence et d'unicité dans le cas où f n'est pas linéaire.

De nombreux mathématiciens ont contribué et contribuent toujours à la théorie des EDSR il m'est impossible de tous les citer. Néanmoins, signalons les travaux de E. Pardoux et S.Peng **[5]**,**[6]**,**[7]** et l'article de N. El Karoui, S. Peng et M.-C. Quenezction **[4]**

Donnons nous un mouvement Brownien $W, k-$dimensionnel défini sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dont la filtration naturelle augmentée est notée $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$.
Imaginons à présent que l'on souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} dY_t &= -f(t, Y_t)dt \qquad \forall t \in [0, T], \\ Y_T &= \xi \end{aligned} \tag{1.1}$$

ou ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$mesurable, c'est-à-dire une variable aléatoire connue à l'instant T. Le temps T est aussi parfois appelé horizon. Supposons pour simplifier que $f \equiv 0$, le problème (1.1) devient alors

$$\begin{aligned} dY_t &= 0 \qquad \forall t \in [0, T] \\ Y_T &= \xi \end{aligned} \tag{1.2}$$

Un candidat solution à ce problème est alors $Y_t = \xi$, $\forall t \in [0, T]$. Cependant, si nous demandons à la solution de ne pas dépendre du futur, c'est-à-dire d'être adapté à la filtration générée par le mouvement brownien $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, alors la solution proposée ne convient pas. Un moyen naturel de rendre adapté ξ sans changer sa valeur terminale est de considérer son espérance conditionnelle par rapport à la filtration du mouvement brownien. Un nouveau candidat solution est alors $Y_t = E(\xi|\mathcal{F}_t)$. Comme ce terme n'est a priori pas différentiable en temps au sens usuel, nous utilisons le théorème de représentation des martingales browniennes pour faire apparaître une intégrale stochastique. Y_t étant une martingale brownienne, il existe un processus Z adapté et de carré intégrable tel que, pour tout $0 \leq t \leq T$:

$$Y_t = E(\xi) + \int_0^t Z_s dW_s.$$

En différenciant la relation précédente il apparaît que $Y_t = E(\xi|\mathcal{F}_t)$ résout l'équation suivante :

$$dY_t = Z_t dW_t \qquad \forall t \in [0,T] \tag{1.3}$$
$$Y_T = \xi$$

Manifestement, la structure de l'équation initiale (1.2) a été modifiée, faisant apparaître un nouveau terme $ZtdWt$ qui permet de rendre adaptée la solution. Revenons à présent au problème initial (1.1), comme nous introduisons un terme supplémentaire Z dans l'équation, il est naturel d'autoriser la fonction f à dépendre de Z ce qui nous conduit au problème :

$$dY_t = -f(t, Y_t, Z_t)dt + Z_t dW_t \quad \forall t \in [0,T] \tag{1.4}$$
$$Y_T = \xi$$

ou encore en utilisant la formulation intégrale rétrograde faisant apparaître la condition terminale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s \tag{1.5}$$

Les données de cette équation sont, d'une part la condition terminale ξ qui est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ $-$mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^m$ et d'autre part le générateur f qui est une fonction $\Omega \times\ [0,T] \times\ \mathbb{R}^m \times\ \mathbb{R}^{m\times k} \to \mathbb{R}^m$ mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m\times k})$et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, où $\mathcal{P}$ est la tribu des événements prévisibles. L'inconnu d'une telle équation est le couple de processus $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ à valeur dans $\mathbb{R}^m \times\ \mathbb{R}^{m\times k}$

Dans ce qui suit , nous allons présenter une bréve des ce mémoire

Au début du premier chapitre constitue une Introduction aux Rappels de Calculs Stochastique for exemple (théorème de représentation des martingales par une intégrale stochastique) dans la suite le deuxiéme chapitre on donne une démonstration détaillée des principaux résltats de la théorie des Equations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) on s'intéresse en particulier au résultats d'existence et d'unicité de Pardoux–Peng ainsi que des différents tchnique de calcul et EDSR linéaire

Chapitre 1

RAPPELS DE CALCUL STOCHASTIQUE

1.1 GénéraliTés

1.1.1 Définitions.

Ici(Ω, F, P) est un espace de probabilité

Défintion (processus stochastique)

Soit T un ensemble. On appelle processus stochastique indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ Dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$; pour tout $t \in T$, X_t est une variable aléatoire.

Défintion (filtration)

Une filtration $\mathbb{F}= (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est une famille croissante de sous-tribus de

$\mathcal{F} : \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \cdots \subset \mathcal{F}_n \cdots \subset \cdots \subset \mathcal{F}$

Défintion (adapté)

Une processus $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite adapté par rapport à $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est $\mathcal{F}_n$ -mesurable

Il est inutile de dire qu'un processus est toujours adapté par rapport 'a sa filtration naturelle.

Défintion (temp d'arrét)

Soit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration de $\mathcal{F}$ un temp d'arrét pour $\mathbb{F}$ est une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$vérifiant : $\{T \geq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit T un $\mathbb{F}$-temps d'arrét l'ensemble $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : \forall n \geq 0, A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$.

Défintion (modificationetindistinguables)

Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ deux processus stochastique définie sur méme espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, X est une modification de Y si, pour tout t :

$$\forall\ t \geq 0, P\ (X_t = Y_t) = 1.P - p.s.$$

X et Y sont indistinguables si, $P - p.s.$, les trajectoires de X et de Y sont les mêmes c'est à dire

$$P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.P - p.s.$$

Défintion (progressivement mesurable)

Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$, l'application $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ de $[0, t] \times\ \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à aux tribus $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$

et $.\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Proposition

Soit T un temps d'arrêt . Si X est progressivement mesurable , le processus arrêté X^T défini par $X_t^T = X_{\ T\wedge t}$ est progressivement mesurable

Définition (variation)

Un processus $V = (V_t, t \geq 0)$ est dit à variation bornée sur $[0, t]$ si

$$\sup_{t_i} \sum_i |V_{t_i+1} - V_{t_i}| < K$$

Un processus $V = (V_t, t \geq 0)$ est dit à variation fini sur $[0, t]$ si

$$\sup_{t_i} \sum_i |V_{t_i+1} - V_{t_i}| < \infty$$

1.1.2 Mouvement Brownien Standard

Défintion (mouvement brownien (MB))

Un processus stochastique $\{B_t, t \geq 0\}$ est appellé un mouvement brownien (MB) s'il satisfait les conditions suivantes :

i) $B_0 = 0$

ii) $0 \leq t_1 \leq\ t_2\ \cdots \leq t$ les accroissements : $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}} \cdots, B_{t_2} - B_{t_1} B_0$, sont des V.a indépendants

iii) si $0 \leq s \leq t$ l'accroisement $B_t - B_s$ admet ne distribution normale $\mathcal{N}(0, t-s)$

iv) $(B_t)_{t \geq 0}=$ est à trajectoire continues

Proposition

. Soit W un MB standard.

1. pour tout $s > 0$, $\{B_{t+s} - B_s\}_{t \geq 0}$ est un MB indépendant de $\partial\{B_u, u \leq s\}$;

2. $-B$ est aussi un MB ;

3. pour tout $c > 0, \{cW_{t/c^2}\}_{t \geq 0}$ est un MB ;

4. le processus d´efini par $X_0 = 0$ et $X_t = tW_{1/t}$ est un MB.

5.B_t est un processus gaussien i.e pour tout n et tous $0 \leq t_0 \leq t_1 \cdots \leq t_n$ $(B_{t_0}, B_{t_1}, \cdots B_{t_n})$ est un vecteur gaussien .

Proposition

1) B_t est MB et seulment si c'est un processus gaussien centré de covariance

$$Cov\,(B_t, B_s) = t\ \wedge s = \min(s,t)$$

2) le MB standard $(B_t)_{t\geq 0}$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle

$$\mathcal{F}_t = \delta(B_t, s \leq t)$$

1.1.3 Martingale

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré et $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus stochastique définie sur set espace :

Défintion (martingale)

Le processus X est une :

1) $\mathbb{F}-$martingale si les trois conditions suivants sont vérifiés :

a) le processus X est $\mathbb{F}-$adapté (soit X_n $\mathcal{F}_n$-mesurable)

b) $X\ _n$ est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($ie : \forall n \in \mathbb{N}, E\,|X_n| < +\infty$)

c) $E\ [X_{n+1}/\mathcal{F}_n] = X_n$ pour tout n

2) $\mathbb{F}$-sous martingale si elle vérifie a et b et $E\ [X_{n+1}/\mathcal{F}_n] \geq X_n$

3) $\mathbb{F}-$sur martingale si elle vérifie a et b et $E\ \ [X_{n+1}/\mathcal{F}_n] \leq X_n$

exemple

Soit Z une V.a.r intégrable la suit $(X_n)_{n\geq 0}$ définie par $X_n = E\ [Z/\mathcal{F}_n]$ est un $\mathbb{F}-$martingale.

a) Il claire que X_n et $\mathcal{F}_n-$mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) $E\,|X_n| = E\,[|E[Z/\mathcal{F}_n]|] \leq E\,[E[|Z|\,/\mathcal{F}_n]] = E\,|Z| \leq +\infty$

c) $E(X_{n+1}/F_n) = E\,[E\ [Z\ /\mathcal{F}_{n+1}]/\mathcal{F}_n\ ] = E\ [Z\ /\mathcal{F}_n] = X\ _n$ car $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$.

Théoréme d'arrêt de Doob

Si X est une martingale et si ∂ et T sont deux

temps d'arrêt bornés tels que $\partial \leq T$, alors, $E(X_T|\mathcal{F}_\partial) = X_\partial$ P–p.s.

théoréme Inégalité de doob

Si X une martingale continue . Alors

$$E\Big[\sup_{t\in[0,T]}|X_t|^2\Big] \leq 4 \sup_{t\in[0,T]} E\left[|X_t|^2\right]$$

Définition (martingale locale)

Soit X un processus $\mathbb{F}-$adapté, à trajectoires continues à droite. On dit que X est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $\{T_n\}_{n\geq 1}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty.P - p.s$ et, pour tout $n, X_{T_n}1_n > 0$ est une martingale.

Définition (semi-martingale continue)

Un processus X est une $(\mathcal{F}_n)_{t\geq 0}$-semi martingale continue si X peut s'écrire $X = X_0+M+A$ avec X_0 une V.a $\mathcal{F}_0-$mesurable ,M une $(\mathcal{F}_n)_{t\geq 0}$ $-$martingale locale continue et A un processus continue $(\mathcal{F}_n)_{t\geq 0}$ $-$adapté et à variation finie.

Théorème (Inégalités de Burkholder–Davis–Gundy).

Soit $p \in]0,\infty[$. Il existe deux constantes c_p et C_p telles que, pour toute martingale locale continue X, nulle en zéro,

$$c_p E\left[\langle X,X\rangle_\infty^{p/2}\right] \leq E\left[sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X,X\rangle_\infty^{p/2}\right].$$

Remarque.

En particulier, si $T > 0$,

$$c_p E\left[\langle X,X\rangle_T^{p/2}\right] \leq E\left[sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X,X\rangle_T^{p/2}\right].$$

Théorème

Soit X une martingale locale continue. Il existe un unique processus croissant et continu, $\langle X,X\rangle$ nul en 0, tel que $X^2 - \langle X,X\rangle$ soit une martingale locale.

théoréme (représentation des martingale)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré et $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ est un MB standard soit M_t une martingale continue de carré intégrable $\mathbb{F}-$adapté. Alors il un processus unique adapté Z_t tq :

$$E(\int_0^T Z_s^2 ds) < \infty,$$

et pour tout $t \in \ [0, T]$:

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s \ , \ P - p.s$$

1.1.4 Intégrale stochastique

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un mouvement Brownien B sur cet espace. On désigne par

$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien.

Définition

On veut généraliser l'intégrale de Wiener et définir $\int_0^t \theta_s dB_s$ pour des processus stochastiques θ.

Propriétés

On note Λ l'ensemble $L^2_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ des processus θ adaptés càglàd vérfiant $E(\int_0^t \theta_s^2 (\omega) \, ds) < \infty; \forall t$

Linéarité Soit a et b des constantes et $(\theta^i \, ; \, \mathrm{i} = 1 \, ; \, 2)$ deux processus de Λ. On a :

$$\int_0^t (a\theta_s^1 + b\theta_s^2) \, dBs = a \int_0^t \theta_s^1 dBs + b \int_0^t \theta_s^2 dBs$$

Propriétés de martingale

Proposition Soit $M_t = \int_0^t \theta_s dB_s$

ou $\theta \in \Lambda$

a) Le processus M est une martingale à trajectoires continues

b) Soit

$$N_t = \left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds$$

Le processus $(N_t; t \geq 0)$ est une martingale.

Démonstration : Toutes ces propriétés se démontrent pour des processus étagés, puis pour les

processus de Λ par passage à la limite.

La propriété de martingale s'écrit

$$E\left[\int_0^t \theta_u dB_u / F_s\right] = \int_0^s \theta_u dB_u \quad \forall t \geq s;$$

ou

$$E\left[\int_s^t \theta_u dB_u / F_s\right] = 0$$

et implique en particulier que

$$E\left[\int_s^t \theta_u dB_u\right] = 0$$

La propriété b) équivaut à

$$E\left[\left(\int_s^t \theta_u dB_u\right)^2 / F_s\right] = E\left[\int_s^t \theta_u^2 du / F_s\right].$$

Si l'on veut définir M_t pour $t \leq T$, il suffit de demander que $\theta \in L^2(\Omega \times [0;T])$, c'est à dire $E\left[\int_0^T \theta_t^2 dt\right] < \infty$ et que θ soit adapté. Sous cette condition, $(M_t; t \leq T)$ est encore une martingale

1.1.5 processus d'Ito et formule d'Itô

processus d'Itô

un processus $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

$K = \{K_s : 0 \leq t \leq T\}$ et $H = \{H_s : 0 \leq t \leq T\}$ sont des processus adaptés à la filltration $\{\mathcal{F}_t\}$, satisfaisant $\int_0^T |K_s| ds < \infty$ et $\int_0^T |H_s|^2 ds < \infty$

écrit sous sa forme différentielle, le processus d'Itô devient

$$dX_t = X_0 + K_t d_t + H_t dW_t$$

formule d'Itô

1) Soit X, un processus d'Itô et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction dont les deux premières dérivées existent et sont continues. Alors $\forall 0 \leq t \leq T$

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \frac{df}{dX}(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2 f}{dX^2}(X_s)\, d\langle X\rangle_s$$
$$= f(X_0) + \int_0^t \frac{df}{dX}(X_s)\, H_s dW_s + \int_0^t \left(\frac{df}{dX}(X_s)\, K_s + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dX^2}(X_s)\, H_s^2\right) ds$$

2) Soit X, un processus d'Itô, c'est-à-dire que $dX_t = K_t dt + H_t dW_t$,et $f : \mathbb{R} \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$, une fonction dont les dérivées partielles

premières et deuxièmes existent et sont continues. Alors $\forall 0 \leq t \leq T$,

$$f(X_t, t) = f(X_0, 0) + \int_0^t \frac{df}{dX}(X_s, s)\, dX_s + \int_0^t \frac{df}{dt}(X_s, s)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2 f}{dX^2}(X_s, s)\, d\langle X\rangle_s$$
$$= f(X_0, 0) + \int_0^t \frac{df}{dX}(X_s, s)\, H_s dW_s + \int_0^t \left(\frac{df}{dX}(X_s, s)\, K_s + \frac{df}{dt}(X_s, s) + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dX^2}(X_s, s)\, H_s^2\right) ds$$

Remarque.

Premièrement, notons que si $E\left[\int_0^T |H_s|^2\, ds\right] < \infty$ alors le processus $M = \{M_t : 0 \leq t \leq T\}$ où $M_t = \int_0^t |H_s|\, dw_s$ est une $(\mathcal{F}_t)-$martingale.

proposition (Formule d'intégration par partie)

Soit B_s MB reél standard $(X_t)_{0 \leq t \leq T}\,(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ deux processus d'Itô

$$dX_t = K_t dt + H_t dB_t \;\; X_0 = X(0)$$
$$dY_t = K_t' dt + H_t' dB_t \;\; Y_0 = Y(0)$$

Alors

$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t$ tel que $\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t H_s H_s' ds$

où

$dX_t Y_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + \int_0^t H_s H_s' ds$

lemme de Gronwal

Soient et $y : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ deux fonction continues vérifiant

$$c \geq 0 / \forall t \in [a, b]\,, y(t) \leq c + \int_0^t \Psi(s) y(s) ds$$

Alors

$$\forall\ t \in [a,b]\,, y\,(t) \leq cE(\int_0^t \Psi(s)ds)$$

Théoréme de Girsanov

Soit $(k_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus progressivement mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que $P-p.s.$ $\int_0^T |k_s|^2 ds < +\infty$. On suppose que le processus $(D_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par :

$$D_T = \exp\left(\int_0^t k_s{\cdot}dW_r - \frac{1}{2}\int_0^t |k_s|^2 dr\right)$$

est une martingale. Soit P^* la mesure de densité D_T par rapport à P sur $\mathcal{F}_T$. Introduisons le processus $B_t = W_t - \int_0^t k_s ds$. Alors, sous la probabilité P^* , B est un MB standard

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR)

2.1 Présentation du problème.

Soient $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace probabilisé filtré et V.a ξ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\tfrac{-dYt}{dt} = f(Y_t),\ t \in [0, T],\ \text{avec}\ ,\ Y_T = \xi,$$

en imposant que, pour tout instant t, Y_t ne dépende pas du futur après t c'est à dire que le processus Y soit adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Prenons l'exemple le plus simple à savoir $f = 0$. Le candidat naturel est $Yt = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe. La meilleure approximation – disons dans L^2 – adaptée est la martingale $Y_t = E(\xi|\mathcal{F}_t)$. Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théorème de représentation des martingales browniennes permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = E(\xi|\mathcal{F}_t) = E[\xi] + \textstyle\int_0^t Z_s dW_s.$$

Un calcul élémentaire montre alors que

$$Y_t = \xi - \textstyle\int_t^T Z_T dW_s,\ i.e.\ -dY_t = -ZtdW_t,\ \text{avec},\ Y_T = \xi.$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z ; l'équation devient donc :

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t, \text{avec}, Y_T = \xi$$

2.2 Notations

On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet et W un mouvement brownien d–dimensionnel sur cet espace. On notera $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ la filtration naturelle du mouvement brownien W. On travaillera avec deux espaces de processus :

On notera tout d'abord $S^2(\mathbb{R}^k)$ l'espace vectoriel formé des processus Y , progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$:

$$\|Y\|_{S^2}^2 = E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2\right] < \infty$$

et $S_c^2(\mathbb{R}^k)$ le sous-espace formé par les processus continus. Deux processus indistinguables seront toujours identifiés et nous garderons les mêmes notations pour les espaces quotients.et ensuite $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ celui formé par les processus Z, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$:

$$\|Z\|_{M^2}^2 = E\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right] < \infty$$

où si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|z\|^2 = tr(zz^*)$.$M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$. $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ seront souvent omis; les espaces S^2, S_c^2 et M^2 sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons B^2 l'espace de Banach $S_c^2(\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$. Dans tout ce chapitre, ainsi que dans le suivant, nous nous donnons une application aléatoire f définie sur $[0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ telle que, pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t, y, z)\}_{0 \leq t \leq T}$ soit progressivement mesurable. On considére également une variable aléatoire , mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et 'a valeurs dans $\mathbb{R}^k$.Dans ce contexte, on veut résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) suivante :

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad Y_T = \zeta,$$

sous forme intégrale

$$Y_t - Y_T = \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dt - \int_t^T Z_t dW_t \quad 0 \leq t \leq T$$

si $Y_T = \zeta$,donc

$$Y_t = \zeta + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dt - \int_t^T Z_t dW_t \qquad 0 \leq t \leq T \tag{1}$$

La fonction f s'appelle le générateur de l'EDSR et la condition terminale. Sans plus tarder précisons ce que l'on entend par solution de l'EDSR (1).

Définition

. Une solution de l'EDSR (1) est un couple de processus $\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ vérifiant :

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k \times d}$.

2.$P.p.s$:

$$\int_0^T \left\{ |f(r, Y_r, Z_r)| + \|Z_r\|^2 \right\} dr < \infty \ .$$

3. $P.p.s$ on a :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)\, dr - \int_t^T Z_r dW_r \ .$$

Remarque.

Il est important de retenir les deux points suivants tout d'abord les intégrales de l'équation (1) étant bien définies, Y est une semi-martingale continue ; ensuite comme le processus Y est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier Y_0 est une quantité déterministe.

Avant de donner un premier théoréme d'existence et d'unicité, nous allons montrer, que sous une hypothése relativement faible sur le générateur f, le processus $Y \in S^2$.

Proposition (2.1)

Supposons qu'il existe un processus $\{f_t\}_{0 \leq t \leq T}$ positif appartenant à $\mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ et une constante positive λ tels que

$$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d},\ |f(t, y, z)| \leq f_t + \lambda(|y| + \|z\|).$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ est une solution de l'EDSR (1) telle que Z appartient à $\mathcal{M}^2$ alors Y appartient à S_c^2

Démonstration.

Y_0 est déterministe. En effet, on a, pour tout $t \in [0, T]$,

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(r, Y_r, Z_r)\, dr + \int_0^t Z_r dW_r,$$

utilisant l'hypothèse sur f :

$$|Y_t| \leq |Y_0| - \int_0^t (f_r + \lambda \|Z_r\|)\, dr + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_r dW_r \right| + \lambda \int_0^t |Y_t|\, dr \ ,$$

posons :

$$\zeta = |Y_0| - \int_0^T (f_r + \lambda \|Z_r\|)\, dr + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_r dW_r \right|$$

par suit :

$$|Y_t| \leq \zeta + \lambda \int_0^t |Y_t|\, dr$$

Si $Z \in \mathcal{M}^2$ d'aprés l'inégalité de doob ona

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_r dW_r \right|^2 \right] \leq 4E\left[\left| \int_0^T \|Z_r\|^2\, dr \right| \right]$$

le troisième terme est de carré intégrable ; il en est de même pour $\{f_t\}_{0 \leq t \leq T}$, et Y_0 est déterministe donc de carré intégrable ; il s'en suit ζ est une variable aléatoire de carré intégrable.

Y étant un processus continue le lemme de Gronwall fournit l'inégalité :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t| \leq \zeta \exp(\lambda T)$$

qui montre que Y appartient à S^2.

Lemme (2.1)

Soient $Y \in S^2(\mathbb{R}^k)$ et $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k \times d})$. Alors$\left\{ \int_0^t Y_s Z_s dW_s, t \in [0, T] \right\}$est une martingale uniformément intégrable.

Démonstration

En appliquant l'inégalités BDG :

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Y_r Z_r dW_r \right| \right] \leq CE\left[\left(\int_0^T |Y_r|^2 \|Z_r\|^2\, dr \right)^{1/2} \right]$$
$$\leq CE\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_r| \left(\int_0^T \|Z_r\|^2\, dr \right)^{1/2} \right]$$

et par suit en appliquant linégalité : $ab \leq a^2/2 + b^2/2$

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Y_r Z_r dW_r \right| \right] \leq C' \left(E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_r|^2 \right] + E\left[\int_0^T \|Z_r\|^2\, dr \right] \right)$$

2.3 Pardoux–Peng (existence et d'unicité)

Nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité quisera généralisé au chapitre suivant. Ce résultat est du à E. Pardoux et S. Peng **[5]** c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR dans le cas ou le générateur est non-linéaire.

Rappelons pour f est définie sur $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$:

pour tout $(y,z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ et $\{f(t,y,z)\}_{0\le t\le T}$ processus progressivement mesurable On considére ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$ −mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ allons travailler sur les hypothéses (L) Il existe une constante positive λ telle que $P-p.s.$

1) f uniformément lipshitzienne en $(y;z)$: pour tout $t,y,y^{'},z,z^{'}$

$$\left|f(t,y,z)-f(t,y^{'},z^{'})\right|\le\lambda\left(|y-y^{'}|+\left\|z-z^{'}\right\|\right)$$

2)condition d'intégrabilité :ξ et $f\,(r,0,0)$ carré intégrable :

$$E\left[|\xi|^2+\int_0^T|f(R,0,0)|^2\right]<\infty$$

Nous montrons à présent le théoréme de Pardoux et Peng

Nous commençons par un cas trés simple, celui ou f ne dépend ni de y et z i.e. on se donne ξ de carré intégrable ($\xi\in L^2$) et un processus $\{F_t\}_{0\le t\le T}$ dans $M^2(\mathbb{R}^k)$ et on veut trouver une solution de l'EDSR

$$Y_t=\zeta+\int_t^T F_r dt-\int_t^T Z_t dW_t \qquad 0\le t\le T \tag{2}$$

Lemme(3.1)

Soient ξ de carré intégrable ($\xi\in L^2(\mathcal{F}_T)$) et un processus $\{F_t\}_{0\le t\le T}$ dans $M^2(\mathbb{R}^k)$. L'EDSR (2) posséde une unique solution (Y,Z) telle que $Z\in M^2$.

Démonstration.

Supposons dans un premier temps que (Y,Z) soit une solution vérifiant $Z\in M^2$. Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement

$$Y_t=E\left[\xi+\int_t^T F_r dr/\mathcal{F}_t\right]$$

On définit donc Y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z, comme F est progressivement mesurable,

$\int_0^t F_r dr$ est un processus adapté à la filtration $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$, en fait dans S_c^2 puisque F est de carré intégrable.

On a alors, pour tout $t \in [0,T]$,

$$Y_t = E\left[\xi + \int_t^T F_r dr / \mathcal{F}_t\right] - \int_0^t F_r dr = M_t - \int_0^t F_r dr$$

si $M_t = E\left[\xi + \int_t^T F_r dr / \mathcal{F}_t\right]$ est une martingale brownienne ; via le théorème (représentation des martingales browniennes)

on construit un processus Z appartenant à M^2 :

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_r dr = \left(M_0 + \int_0^t Z_r dW_r\right) - \int_0^t F_r dr$$

On vérifie facilement que (Y,Z) ainsi construit est une solution de l'EDSR étudiée puisque comme $Y_T = \xi$

$$\begin{aligned} Y_t - Y_T = Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr - \left(M_0 + \int_0^T Z_r dW_r - \int_0^T F_r dr\right) \\ &= \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r \end{aligned}$$

L'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in M^2$.Nous montrons à présent le théorème de Pardoux et Peng

Théoréme(3.1)

Théorème Pardoux–Peng 90 **[5]** Sous l'hypothése (L).l'EDSR (1) posséde une unique solution

(Y, Z) telle que $Z \in M^2$.

Démonstration.

En appliquant théorème de point fixe sur l'espace de Banach $B^2 = S_c^2(\mathbb{R}^k) \times M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ en construisant une application Ψde B^2 dans lui-même de sorte que le couple $(Y, Z) \in B^2$ soit une solution de l'EDSR (1) si et seulement si est un point fixe de Ψ. Pour chaque $(U, V) \in B^2$, on définit $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ comme étant la solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, U_r, V_r)\, dr - \int_t^T Z_r dW_r \qquad 0 \le t \le T$$

Cette derniére EDSR posséde une unique solution qui est dans B^2. En effet, posons $F_r = f(r, U_r, V_r)$. Ce processus appartient à M^2 puisque,f étant Lipschitz,

$$|F_r| \leq |f(r,0,0)| + \lambda |U_r| + \lambda \|V_r\|$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, en appliquant le lemme (3.1) pour obtenir une unique solution(Y,Z) telle que $Z \in M^2$.(Y,Z) appartient à B^2 : l'intégrabilité de Z est obtenue par construction et, dàprés la Proposition (2.1), $Y \in S_c^2$ .ce qui implique L'application Ψde B^2 dans lui-même est donc bien définie.pour tout (U,V) et $(U_t^{'},V_t^{'})$ deux éléments de B^2 et $(Y,Z)=\Psi(U,V),(Y^{'},Z^{'})=\Psi(U^{'},V^{'})$. Notons $y=Y-Y^{'}$ et $z=Z-Z^{'}$. On a,$y_{_T}=0$ et

$$dy_t = -\left\{f(t,U_t,V_t) - f(t,U_t^{'},V_t^{'})\right\}dt + z_t dW_t$$

On applique la formule de Itô à $e^{\alpha t}|y_t|^2$ pour obtenir :

$$d\left(e^{\alpha t}|y_t|^2\right) = \alpha e^{\alpha t}|y_t|^2 dt - 2e^{\alpha t}y_t \cdot \left\{f(t,U_t,V_t) - f(t,U_t^{'},V_t^{'})\right\}dt + 2e^{\alpha t}y_t \cdot z_t dW_t + e^{\alpha t}\|z_t\|^2 dt$$

Par conséquent, intégrant entre t et T, on obtient

$$e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|Z_r\|^2 dr = \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha|y_t|^2 + 2y_r \cdot \left\{f(r,U_r,Vr) - f(r,Ur^{'},Vr^{'})\right\}\right)dr$$
$$- \int_t^T 2e^{\alpha r}y_r \cdot z_r dW_r$$

et, comme f est Lipschitz, il vient, notant u et v pour $U-U^{'}$ et $V-V^{'}$ respectivement

$$e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|Z_r\|^2 dr \leq \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha|y_r|^2 + 2\lambda|y_r||u_r| + 2\lambda|y_r|\|v_r\|\right)dr$$
$$- \int_t^T 2e^{\alpha r}y_r \cdot z_r dW_r$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on applique $2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$, donc, l'inégalité précédente donne

$$e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|Z_r\|^2 dr \leq \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha|y_r|^2 + \frac{(\lambda|y_r|)^2}{\varepsilon} + \varepsilon|u_r|^2 + \frac{(\lambda|y_r|)^2}{\varepsilon} + \varepsilon\|v_r\|^2\right)dr$$
$$- \int_t^T 2e^{\alpha r}y_r \cdot z_r dW_r$$
$$= \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha + 2\lambda^2/\varepsilon\right)|y_r|^2 dr - \int_t^T 2e^{\alpha r}y_r \cdot z_r dW_r$$
$$+\varepsilon \int_t^T e^{\alpha r}\left(|u_r|^2 + \|v_r\|^2\right)dr$$

et prenant $\alpha = 2\lambda^2/\varepsilon$ on a, notant $R_\varepsilon = \varepsilon\int_t^T e^{\alpha r}\left(|u_r|^2 + \|v_r\|^2\right)dr$

$$\forall t \in [0,T], e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|Z_r\|^2 dr \leq R_\varepsilon - \int_t^T 2e^{\alpha r}y_r \cdot z_r dW_r \tag{3}$$

Dàprés le Lemme (2.1), la martingale locale $\left\{\int_0^T e^{\alpha r}y_r \cdot z_r dW_r\right\}$ est en réalité une martingale nulle en 0 puisque $Y\ Y^{'}$ appartiennent à S^2 et $Z, Z^{'}$ appartiennent à M2 prenant l'espérance,il vient pour $t=0$,

$$E\left[\int_0^T e^{\alpha r}\|Z_r\|^2 dr\right] \leq E\left[R_\varepsilon\right] \tag{4}$$

Revenant à l'inégalité (3), les inégalités BDG fournissent – avec C universelle –,

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2\right] \leq E\left[R_\varepsilon\right] + CE\left[\left(\int_0^T e^{\alpha r}\left|y_r\right|^2 \cdot \left\|z_r\right\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\leq E\left[R_\varepsilon\right] + CE\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\frac{\alpha t}{2}}\left|y_t\right| \cdot \left(\int_0^T e^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

puis, comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$,

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2\right] \leq E\left[R_\varepsilon\right] + \tfrac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] + \tfrac{C^2}{2}E\left[\int_0^T e^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr\right]$$

Prenant en considération l'inégalité (4), on obtient finalement

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\left\|Z_r\right\|^2 dr\right] \leq \left(3 + C^2\right) E\left[R_\varepsilon\right]$$

et par suite, revenant à la définition de R_ε,

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\left\|Z_r\right\|^2 dr\right] \leq \varepsilon\left(3 + C^2\right)(1 \vee T)\, E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|u_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\left\|v_r\right\|^2 dr\right].$$

Prenons ε tel que $\varepsilon(3+C^2)(1\vee T) = 1/2$, de sorte que l'application Ψest alors une contraction stricte de B^2 dans lui-même si on le munit de la norme

$$\left\|(U,V)\right\|_\alpha = \left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|U_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\left\|V_r\right\|^2 dr\right]^{\frac{1}{2}}$$

qui en fait un espace de Banach – cette derniére norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha = 0$.

Ψpossède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR (1) dans B^2.

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z \in M^2$ puisque la Proposition (2.1) implique

qu'un telle solution appartient à B^2.

Remarque.

Set partir de maintenant et sans plus insister, l'expression « la solution de l'EDSR » signifiera la solution de l'EDSR vérifiant Z appartientà M^2.

Le rôle de Z

Le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\int_t^T ZrdWr$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul

Proposition(3.1)

Soit (Y, Z) la solution de l'EDSR (1) et soit τ un temps d'arrêt majoré par T On suppose,outre l'hypothése (L), que est $\mathcal{F}_\tau$–mesurable et que $f(t, y, z) = 0$ des que t $\geq \tau$.

Alors $Y_t = Y_{t\wedge\tau}$ et $Z_t = 0$ si $t \geq \tau$

Démonstration

on a$P.p.s$

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r \qquad 0 \leq t \leq T$$

pour $t = \tau$, comme $f(t, y, z) = 0$ d'es que t$\geq \tau$

$$Y_\tau = \xi + \int_\tau^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^T Z_r dW_r = \xi - \int_\tau^T Z_r dW_r$$

Il vient alors $Y_\tau = E(\xi|\mathcal{F}_\tau) = \xi$ et par suite $\int_\tau^T Z_r dW_r = 0$:

$$E\left[\left(\int_\tau^T Z_r dW_r\right)^2\right] = E\left[\int_\tau^T \|Z_r\|^2 dr\right] = 0$$

et finalement que $Z_r 1_{r\geq\tau} = 0$.Il s'en suit immédiatement que, si t , $Y_t = Y_\tau$ puisque :

$$Y_\tau = \xi + \int_\tau^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^T Z_r dW_r = Y_t$$

Notons que dans le cas ou ξ et f sont déterministes alors Z est nul et Y est la solution de l'´equation diff´erentielle

$$\frac{dY_t}{dt} = f(t, Y_t, 0) \qquad Y_T = \xi$$

2.4 Une estimation à priori

Premiére estimation sur les EDSR : il s'agit en fait d'étudier la dépendance de la solution de l'EDSR par rapport aux données qui sont ξ et le processus $\{f(t, 0, 0)\}_{0\leq t\leq T}$. Cette étude sera reprise au chapitre suivant :

Proposition(4.1)

Supposons que (ξ, f) vérifie (L). Soit (Y, Z) la solution de l'EDSR (1) telle que$Z \in M^2$. Alors, il existe une constante C_u universelle telle que pour tout β si $\beta \geq 1 + 2\lambda + 2\lambda^2$:

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \exp(\beta t)|Y_t|^2 + \int_0^T \exp(\beta t)\|Z_r\|^2 dt\right] \leq C_u \mathrm{E}\Big[\exp(\beta T)|\xi|^2 + \int_0^T \exp(\beta t)|f(t, 0, 0)|^2 dt\Big].$$

Démonstration.

On applique la formule de Itô à e $\exp(\beta t)|Yt|^2$:

$\exp(\beta t)|Y_t|^2+\int_t^T \exp(\beta t)\left\|Z_r\right\|^2 dr = \exp(\beta T)|\xi|^2+\int_t^T \exp(\beta r)\left(-\exp(\beta r)|Y_r|^2+2Y_r f(r,Y_r,Z_r)\right)dr-$ $\int_t^T 2\exp(\beta r)Y_r Z_r dW_r$

Comme f est $\lambda-$Lipschitz on a pour tout (t,y,z)

$$2yf(t,y,z)\leq 2\left|y\right|\left|f(t,0,0)\right|+2\lambda\left|y\right|^2+2\lambda|y|\left\|z\right\|$$

et donc utilisant le fait que $2ab\leq\varepsilon a^2+b^2/\varepsilon$ pour $\varepsilon=1$ puis 2

$$2yf(t,y,z)\leq\left(1+2\lambda+2\lambda^2\right)\left|y\right|^2+\left|f(t,0,0)\right|^2+\tfrac{\|z\|^2}{2}$$

Pour $\beta\geq 1+2\lambda+2\lambda^2$ et pour tout $t\in[0,T]$ on obtient :

$\exp(\beta t)|Y_t|^2+\frac{1}{2}\int_t^T \exp(\beta r)\left\|Z_r\right\|^2 dr\leq\exp(\beta T)|\xi|^2+\int_0^T \exp(\beta r)\left|f(r,0,0)\right|^2 dr-2\int_t^T \exp(\beta r)Y_r Z_r dW_r$

(5)

La martingale locale $\left\{\int_0^t \exp(\beta r)Y_r Z_r dW_r, t\in[0,T]\right\}$ est une martingale (Lemme (2.1)) en particulier prenant l'espérance on obtient facilement pour$t=0$

$$E\left[\int_0^T \exp(\beta r)\left\|Z_r\right\|^2 dr\right]\leq 2E\left[\exp(\beta T)|\xi|^2+\int_0^T \exp(\beta r)\left|f(r,0,0)\right|^2 dr\right]$$

Revenant à l'inégalité (5), les inégalités BDG fournissent :

$E\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T}\exp(\beta t)|Y_t|^2\right]\leq E\left[\exp(\beta T)|\xi|^2+\int_0^T \exp(\beta r)\left|f(r,0,0)\right|^2 dr\right]+CE\left[\left(\int_0^T \exp(2\beta r)\left|Y_r\right|^2\left\|Z_r\right\|^2 dr\right.\right.$

si

$$\begin{aligned}CE\left[\left(\int_0^T \exp(2\beta r)\left|Y_r\right|^2\left\|Z_r\right\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right]&\leq CE\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T}\exp(\tfrac{\beta t}{2})|Y_t|\left(\int_0^T \exp(\beta r)\left\|Z_r\right\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\&\leq\tfrac{1}{2}E\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T}\exp(\beta t)|Y_t|^2\right]+\tfrac{C^2}{2}E\left[\int_0^T \exp(\beta r)\left\|Z_r\right\|^2 dr\right]\end{aligned}$$

alors

$$E\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T}\exp(\beta t)|Y_t|^2\right]\leq 2E\left[\exp(\beta T)|\xi|^2+\int_0^T \exp(\beta r)\left|f(r,0,0)\right|^2 dr\right]+C^2E\left[\int_0^T \exp(\beta r)\left\|Z_r\right\|^2 dr\right]$$

et finalement on obtient

$$E\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T}\exp(\beta t)|Y_t|^2+\int_0^T \exp(\beta r)\left\|Z_r\right\|^2 dr\right]\leq 2\left(2+C^2\right)E\left[\exp(\beta T)|\xi|^2+\int_0^T \exp(\beta r)\left|f(r,0,0)\right|^2 dr\right]$$

ce qui termine la preuve de la proposition prenant $C_u=2\left(2+C_2\right)$

2.5 Théorème de comparaison.

2.5.1 EDSR linéaires

Dans ce paragraphe nous étudions le cas particulier des EDSR linéaires pour lesquelles nous allons donner une formule plus ou moins explicite.

On se place dans le cas $k = 1$; Y est donc réel et Z est une matrice de taille $1 \times d$ c'est à dire un vecteur ligne de dimension d.

Proposition(5.1)

Soit $\{(a_t, b_t)\}_{t\in[0,T]}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, progressivement mesurable et borné. Soient $\{c_t\}_{t\in[0,T]}$ un élément de $M^2(\mathbb{R})$ et ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$–mesurable, de carré intégrable, à valeurs réelles.

L'EDSR linéaire

$$Y_t = \xi + \int_t^T \{a_r Y_r + Z_r b_r + c_r\}\, dr + \int_t^T z_r dW_r,$$

Une unique solution qui vérifie $\forall t \in [0, T]$:

$$Y_t = \Gamma_t^{-1} E\left[\xi\Gamma_T + \int_t^T c_r \Gamma_r dr / \mathcal{F}_t\right]$$

avec pour tout $t \in [0, T]$:

$$\Gamma_t = \exp\left(\int_0^t b_r dW_r - \frac{1}{2}\int_0^t |b_r|^2 dr + \int_0^t a_r dr\right)$$

Démonstration

Remarquer que le processus Γ vérifie :

$$d\Gamma_t = \Gamma_t \left(a_t dt + b_t dW_t\right) \qquad\qquad \Gamma_0 = 1,$$

D'autre part, comme b est borné, l'inégalité de Doob montre que $\Gamma \in S^2$.

De plus les hypothéses cette proposition assure l'existence d'une unique solution (Y, Z)à l'EDSR linéaire ; il suffit de poser

$f(t, y, z) = a_t y + z b_t + c_t$ et de vérifier que (L) est satisfaite.$Y \in S^2$.

La formule d'intégration par parties donne :

$$d\Gamma_t Y_t = \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d\left\langle \Gamma_t Y_t\right\rangle = -\Gamma_t c_t dt + \Gamma_t Z_t dW_t + \Gamma_t Y_t b_t dW_t$$

ce qui montre que le processus $\Gamma_t Y_t + \int_0^t \Gamma_r c_r dr$ est une martingale locale qui est en fait une

martingale car c appartientà M^2 et Γ, Y sont dans S^2.

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t \Gamma_r c_r dr = E\left[\Gamma_T Y_T + \int_0^T \Gamma_r c_r dr / \mathcal{F}_t\right],$$

ce qui donne la formule annoncée.

Remarque

Notons que si $\xi \geq 0$ et $c_t \geq 0$ alors la solution de l'EDSR linéaire vérifie $Y_t \geq 0$.

Cette remarque va nous permettre d'obtenir le théoréme de comparaison au paragraphe suivant.

Pour illustrer ce résultat prenons le cas ou a et c sont nuls..

On a alors :

$$Y_t = E\left[\xi \exp\left(\int_t^T b_r \cdot dW_r - \frac{1}{2}\int_t^T |b_r|^2 dr + \int_0^T a_r dr\right) / \mathcal{F}_t\right] = E^*\left[\xi / \mathcal{F}_t\right]$$

ou P^* est la mesure de densité par rapport à P

$$L_T = \exp\left(\int_t^T b_r \cdot dW_r - \frac{1}{2}\int_t^T |b_r|^2 dr + \int_0^T a_r dr\right)$$

Une autre façon de voir cela, plus dans l'esprit « probabilité risque neutre », est de regarder l'EDSR sous P^* . En effet, sous P *,$B_t = W_t - \int_t^T b_r dr$ est un MB– c'est le théoréme de Girsanov(page11)

Or l'équation peut s'écrire

$$-dY_t = Z_t b_t dt - Z_t dW_t = -Z_t dB_t, \qquad Y_T = \xi$$

Donc sous P^* , Y est une martingale, ce qui montre aussi la formule.On retrouve ainsi les changements de mesures de probabilité du type « transformation de Girsanov »

2.5.2 théorème de comparaison

cette théorème de comparaison qui permet de comparer les solutions de deux EDSR (dans $\mathbb{R}$) des que l'on sait comparer les conditions terminales et les générateurs. Ce théorème (5.1) est dû à l'origine a S. Peng [**6**].

Théoréme(5.1)

Supposons que $k=1$ et $(\xi,f),(\xi^{'},f^{'})$ vérifient l'hypothése (L).

Notons (Y,Z) et $(Y^{'},Z^{'})$ les solutions des EDSR correspondantes. On suppose également que $P-p.s.$

$\xi\leq\xi^{'}$ et que $f(t,Y_t,Z_t)\leq f^{'}(t,Y_t,Z_t)$, $m\otimes P-p.p.$ (m mesure de Lebesgue). Alors :

$$Y_t\leq Y_t^{'}\qquad\forall t\in[0,T]\qquad P-p.s$$

Si de plus, $Y_0=Y_0^{'}$, alors $P-p.s.$, $Y_t=Y_t^{'},0\leq t\leq T$ et $f(t,Y_t,Z_t)=f^{'}(t,Y_t,Z_t)$ $m\otimes P-p.p.$ En particulier, des que $P(\xi<\xi^{'})>0$ ou $f(t,Y_t,Z_t)<f^{'}(t,Y_t,Z_t)$ sur un ensemble de$m\otimes P-$mesure strictement positive alors $Y_0<Y_0^{'}$.

Démonstration.

La preuve s'effectue par linéarisation ce qui permet de se ramener aux EDSR

linéaires. On cherche une équation satisfaite par $U=Y^{'}-Y$; on a notant $V=Z^{'}-Z$ et $\zeta=\xi^{'}-\xi$.

$$U_t=\zeta+\int_t^T\left(f^{'}(t,Y_r^{'},Z_r^{'})-f(r,Y_r,Z_r)\right)dr-\int_t^T V_rdW_r$$

On découpe l'accroissement des f en trois morceaux en écrivant

$$\begin{aligned}f^{'}(t,Y_r^{'},Z_r^{'})-f(r,Y_r,Z_r)&=f^{'}(t,Y_r^{'},Z_r^{'})+f^{'}(r,Y_r,Z_r^{'})-f^{'}(t,Y_r,Z_r^{'})+f^{'}(r,Y_r,Z_r)\\&\quad-f^{'}(t,Y_r,Z_r)-f(r,Y_r,Z_r)\text{ (qui est positif ici).}\end{aligned}$$

On introduit deux processus a et b tel que a est à valeurs réelles et b est un vecteur (colonne) de

dimension d posont :

$$a_r=\frac{f^{'}(t,Y_r^{'},Z_r^{'})+f^{'}(r,Y_r,Z_r^{'})}{U_r}\qquad\text{si } U_t\neq0 \text{ et } a_r=0 \text{ sinon}$$

définir b on doit introduire une autre notation pour $0\leq i\leq d$, si $Z_r^{(i)}$ est la ligne dont les $d-i$ derniéres composantes sont celles de $Z_r^{'}$et les i premiéres celles de Z_r. Pour $0\leq i\leq d$ on pose :

$$b_r^i=\frac{f^{'}(t,Y_r,Z_r^{(i+1)'})+f^{'}(r,Y_r,Z_r^{i})}{V_r^i}\qquad\text{si } V_r^i\neq0 \text{ et } b_r^i=0 \text{ sinon}$$

Remarquons que, puisque $f^{'}$ est Lipschitz, ces deux processus sont progressivement mesurables

et bornés. Avec ces notations on a :

$$U_t = \zeta + \int_t^T (a_r U_r + V_r b_r + c_r)dr - \int_t^T V_r dW_r$$

ou $c_r = f^{'}(t, Y_r, Z_r) - f(r, Y_r, Z_r)$. Par hypothése on a $\zeta \geq 0$ et $c_r \geq 0$. Utilisant la formule « explicite » pour les EDSR linéaires (Proposition 1), on a pour $t \in [0, T]$:

$$Y_t = \Gamma_t^{-1} E\left[\zeta \Gamma_T + \int_t^T c_r \Gamma_r dr / \mathcal{F}_t\right]$$

pour $0 \leq r \leq T$:

$$\Gamma_t = \exp\left(\int_0^r b_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^r |b_u|^2 du + \int_0^r a_u du\right)$$

Remarque suivant la (Proposition 1) cette formule montre que

$U_t \geq 0$, dés que $\zeta \geq 0$ et $c_r \geq 0$.

Pour la seconde partie du r´esultat, si de plus U0 $= 0$ on a :

$$E\left[\zeta \Gamma_T + \int_t^T c_r \Gamma_r dr\right] = 0$$

et la variable aléatoire intégrée est positive. Par conséquent, elle est nulle $P - p.s.$ ce qui termine

la preuve de ce théoréme en remarquant que dans ce cas $\zeta = 0$ et $c_r = 0$.

Remarque. On peut supposer que $f(t, Y_t^{'}, Z_t^{'}) \leq f^{'}(t, Y_t^{'}, Z_t^{'})$ au lieu de $f(t, Yt, Zt) f^{'}(t, Yt, Zt)$ pour obtenir le résultat précédent. Il suffit de faire une linéarisation en partant de l'écriture

$$\begin{aligned} f^{'}(t, Y_r^{'}, Z_r^{'}) - f(r, Y_r, Z_r) &= f^{'}(t, Y_r^{'}, Z_r^{'}) + f(r, Y_r^{'}, Z_r^{'}) - f(t, Y_r^{'}, Z_r^{'}) + f(r, Y_r, Z_r^{'}) \\ &\quad - f(r, Y_r, Z_r^{'}) - f(r, Y_r, Z_r) \text{ (supposé positif ici)} \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] I. Karatzas and S. E. Shreve, Brownian motion and stochastic calculus, 2nd ed., Grad. Texts in Math., vol. 113, Springer-Verlag, New York, 1991.

[2] D. Lamberton and B. Lapeyre, Introduction au calcul stochastique appliqu ́e ‘a la finance, second ed., Ellipses E’dition Marketing, Paris, 1997.

[3] D. Revuz and M. Yor, Continuous martingales and Brownian motion, Grundlehren Math. Wiss., vol. 293, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991.

[4] N. El Karoui, S. Peng, and M.-C. Quenez, Backward stochastic differential equations in finance, Math. Finance 7 (1997), no. 1, 1–71..

[5] E. Pardoux and S. Peng, Adapted solution of a backward stochastic differential equation, Systems Control Lett. 14 (1990), no. 1, 55–61..

[6] Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations, Stochastic partial differential equations and their applications (Charlotte, NC, 1991) (B. L. Rozovskii and R. B. Sowers, eds.), Lecture Notes in Control and Inform. Sci., vol. 176, Springer, Berlin, 1992, pp. 200–217..

[7] Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPDE’s, Probab. Theory Related Fields 98 (1994), no. 2, 209–227..

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\mathbb{E}[X]$	espérance mathématique ou moyenne du v.a. X.
exp	exponentiel
F	fonction de répartition
MB	Mouvment Brownien