République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Miloudi Hakima

Titre :

Contrôle optimal stochastique pour les équations gouvernées par une martingale normale

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Tamer Lazhar	UMKB	Président
Dr.	Lakhdari Imad Eddine	UMKB	Encadreur
Dr.	Gatt Rafika	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce humble travail :

A Mes Parents ;Tahar et Aicha.

A mes très chers fréres.

A mes très chéres soeurs.

A toute ma famille : Miloudi.

A toute mes amies,

Soumia,Garmia,Hafsa,Aicha,

Mariam,Leila.

A toute la promotion de mathématiques.

REMERCIEMENTS

Au terme de cette étude, je voudrais d'abord remercier mon encadreur le

Dr : Lakhdari Imad Eddine pour ses précieux conseils, ses lectures attentives.

Ensuite, je tiens à remercier mes Professeurs et mes enseignants du département de mathématiques, pour l'intérêt qu'ils nous ont accordé.

Enfin, mes remerciements s'adressent également à ma soeur Guesmia Nour El Houda

Mes parents qui m'ont procuré leur aide au cours de ces années d'étude.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire de master, on s'intéresse a étudier un problème de contrôle stochastique où le système est de la forme suivante :

$$\begin{cases} dY(t) = b(t, Y(t), u(t), \pi(t))\, dt + \sigma(t, Y(t-), u(t), \pi(t))\, dM^u(t) \\ Y(0) = y, \end{cases} \tag{1.1}$$

où b et σ sont des fonctions déterministes, y est l'état initial, $M^u(\cdot)$ est une martingale satisfait l'équation

$$[M^u](t) = t + \int_0^t u(s)\, dM^u(s), \quad t \geq 0. \tag{1.2}$$

L'équation ci-dessus est appelée équation de structure d'Emery, $[M^u](\cdot)$ est la variation quadratique de $M^u(\cdot)$, et $u(\cdot)$ est un processus prévisible qui contrôle exactement les sauts de $M^u(\cdot)$. Soit $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont deux ensembles compacts non vides dans $\mathbb{R}$, et l'ensemble $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$. La variable de contrôle est un couple de processus (u, π) définie comme suit $u : [0, T] \times \Omega \to \mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}, \pi : [0, T] \times \Omega \to \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}$, et la fonction de côut minimiser est de la forme suivante

$$J(u, \pi) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, Y(t), u(t), \pi(t))dt + g(Y(T))\right]. \tag{1.3}$$

Le processus de contrôle qui résout ce problème est appelé optimal. Récemment, il y a eu une augmentation intérêt pour l'étude de ce type de problème où le système est gouverné par les martingales normales. Par exemple, dans les problèmes de réassurance optimal et d'investissement, le processus de réserve d'un compagnie d'assurance est décrite par une équation différentielle stochastique avec sauts, voir par exemple [20, 26]. Selon le paramètre u, nous avons des martingales normales distinctes satisfaisant l'équation de structure d'Emery comme suit : si $u \equiv 0$, alors $M(\cdot)$ est un mouvement brownien, si $u \equiv \alpha \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, donc $M(\cdot)$ est donnée par un processus de poisson et pour $u \equiv -M(t-)$, $M(\cdot)$ est une martingale Azéma, etc. Les differents changements des coefficients pour l'équation différentielle stochastique donnant lieu à la martingale normale signifie que pour chaque u nous avons un modèle aussi riche que le modèle standard. La construction des solutions aux équations de structure est étudiée par des plusieurs auteurs, voir par exemple Émery [13] dans un cas de dimension deux ($d = 2$). Dans le cas multidimensionnel Buckdahn et al [20] ont prouvé l'existence des solutions des équations dans un espace Wiener-Poisson. En conséquence, ils établissent le principe de programmation dynamique et obtiennent la nouvelle forme correspondante de l'équation EDP, qu'est dans ce cas est une EDP mixte de second ordre. Pour plus d'informations sur les martingales normales et leurs applications, nous référons à [5, 14, 18, 19].

Le principe du maximum stochastique pour les diffusions (sans sauts) a été fait par Kushner [17] et Bismut [7]. Bensoussan [1], Peng [23]. Pour les diffusions avec sauts, Le principe de maximum stochastique a été donné par Tang et Li [24], Kabanov [27] et Kohlmann [15]. Framstad et al [16] a formulé et appliqué le principe du maximum stochastique dans les problèmes d'optimisation de portefeuille quadratique. Zhang et al [25], ont prouvé le principe du maximum suffisant lorsque le processus est régi par un modèle de Markov à changement de régime à temps continu.

La relation entre le principe maximum et la programmation dynamique est essentiellement la relation entre la solution de l'équation adjointe, avec le gradient de la fonction de valeur évaluée selon la trajectoire optimale, voir [6] dans le cas classique. Pour les diffusions avec des sauts, la relation entre le principe maximum et la programmation dynamique, a été donnée par Framstad et al. [16], [3] et [9]. Pour le contrôle stochastique singulier, voir

Balahli et al. [11], pour le problème de contrôle stochastique récursive, voir Shi et Yu [10], et pour le jeu différentiel stochastique, on peut cité le travaille de Shi [8].

Notre présentons notre mémoire de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous avons donné un rappel sur le calcul stochastique (le mouvement brownien, les martingales, et la formule d'Itô pour les semi martingales).

Le deuxième chapitre, nous commençons par une formulation générale du problème, puis nous étudions le principe du maximum stochastique suffisant et le principe de la programmation dynamique, et le lien entre eux.

Dans le dernier chapitre, nous appliquons le principe maximum stochastique suffisant au problème de sélection de portefeuille moyenne-variance.

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t \in T}$ *est une famille de variables aléatoires* $X_t(\omega) : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ *indexée par un temps* $t \in T$ *:*

1. Pour t fixé, $\omega \in \Omega \to X_t(\omega)$ est une variable aléatoire.
2. Pour ω fixé, $t \in T \to X_t(\omega)$ est une fonction réelles, appelée trajectoire du processus.

- $T \subseteq \mathbb{N}$ le processus est à temps discret,
- $T = [0, a]$ tel que $a > 0$ le processus est à temps continu.

Définition 1.1.2 (Filtration) *Une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ *de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une famille croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *pour* $s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$,

- la filtration naturelle (ou canonique) de processus X_t est donner par

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t), \qquad t \in T,$$

c'est la plus petite σ-algèbre par rapport à laquelle X_s est mesurable pour tous $0 \leq s \leq t$.

Notation 1.1.1 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ *est appelé espace probabilisé filtré.*

Remarque 1.1.1 *La filtration est dite :*

1. Continue à droite si $\mathcal{F}_{t^+} := \cap_{s\geq t}\mathcal{F}s = \mathcal{F}_t$.
2. Satisfait les conditions habituelles si elle est continue à droite et si $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}-$négligeables de $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.3 *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit mesurable si l'application définie sur $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$ par $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ est mesurable.*

Définition 1.1.4 *On dit que un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est adapté par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \in T$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Définition 1.1.5 *Un processus est à trajectoire continue si*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; t \to X_t(\omega) \text{ est continue}\}) = 1.$$

Définition 1.1.6 *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}$ si $\forall\ t \in T$ l'application $(s, \omega) \to X_s(\omega)$ est mesurable sur $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$.*

Définition 1.1.7 *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit càdlàg (continue à droite et pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et pourvues de limite à gauche pour presque tout ω.*

Remarque 1.1.2 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

Proposition 1.1.1 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique dont les trajectoires sont continués à droite (ou à gauche), alors X_t est mesurable et progressivement mesurables s'il est de plus adapté.*

Définition 1.1.8 (processus gaussien) *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in T}$ est gaussien ssi toute combinaison linéaire de ses marginales $\alpha_1 X_{t_1} + ... + \alpha_n X_{t_n}$ suit une loi gaussienne (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_1, ...t_n \in T$ et $\alpha_1...\alpha_n \in \mathbb{R}$).*

1.2 Mouvement brownien

Définition 1.2.1 (mouvement brownien standard) *Le mouvement brownien $B = (B_t)_{t \geq 0}$ est un processus à trajectoires continues tel que :*

i- $B_0 = 0$.

ii- Pour tout $t \geq 0$: $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$.

iii- Pour tout $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$, les variables aléatoires $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

Proposition 1.2.1 *Soit B un mouvement brownien alors presque sûrement B n'est pas différentiable et n'est pas à variation finie en aucun point t.*

Proposition 1.2.2 *Soit B un mouvement brownien Standard :*

1. $\forall\ t \geq 0, X_t = tB_{\frac{1}{t}}$, *alors (X_t) est un mouvement brownien.*
2. *Soit $Z_t = cB_{\frac{t}{c^2}}$, tel que $c > 0$ alors (Z_t) est un mouvement brownien.*
3. *Pour tout $s > 0, \{B_{t+s} - B_s\}_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\sigma(B_u, u \leq s)$.*

Définition 1.2.2 (Processus de Poisson) *Un processus de Poisson $N = (N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité λ est un processus de comptage à trajectoires continues à droite tel que :*

- $N(0) = 0$.
- N est un processus à accroissements indépendants et stationnaires.
- Pour tout $t \geq 0$, $N_t \sim P(\lambda t)$.

1.3 Martingale

Définition 1.3.1 (Temps d'arrêt) *Une variable aléatoire T à valeurs dans $[0, +\infty]$ est un temps d'arrêt si pour tout $t \geq 0$ on a $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Définition 1.3.2 (Martingale) *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ adapté par rapport une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et tel que pour tout $t \geq 0, X_t \in L^1$ est appelé :*

- Une martingale si pour $s \leq t$: $\mathbb{E}[X_t/\mathcal{F}_s] = X_s$.
- Une sur-martingale si pour $s \leq t$: $\mathbb{E}[X_t/\mathcal{F}_s] \leq X_s$.
- Une sous-martingale si pour $s \leq t$: $\mathbb{E}[X_t/\mathcal{F}_s] \geq X_s$.

Remarque 1.3.1 *Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien standard, alors B_t est une martingale par rapport à sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s \leq t)$.*

1.4 Intégrale stochastique

Proposition 1.4.1 (Propriétés d'intégrale stochastique) *Les plus importantes propriétés sur l'intégrale stochastique sont :*

1. Linéarité : :
$$\int_0^t \left(a\phi_s^1 + b\phi_s^2\right) dB_s = a\int_0^t \phi_s^1 dB_s + b\int_0^t \phi_s^2 dB_s.$$
2. Additivité : pour $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$
$$\int_s^t \phi_v dB_v = \int_s^u \phi_v dB_v + \int_u^t \phi_v dB_v.$$
3. Propriétés de martingale : Pour tout processus ϕ les processus :
$$t \rightarrow I_t(\phi), \quad \text{et} \quad t \rightarrow I_t(\phi)^2 - \int_0^t \phi_s ds,$$
sont des $(\mathcal{F}_t^B)$-martingale continues.
$$\mathbb{E}[(I_t(\phi) - I_s(\phi))^2/\mathcal{F}_s^B] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_u^2 du/\mathcal{F}_s^B\right].$$

4. Si $(x_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et $\mathbb{E}(\int_0^T |x_s|^2\, ds) < +\infty$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t |x_s|^2\, dB_s\right|^2\right] \leq 4\left(\int_0^T |x_s|^2\, ds\right),$$

5. Isométrie :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t \phi_s^2 ds\right).$$

1.4.1 Processus d'Itô

Définition 1.4.1 (processus d'Itô) *On dit processus d'Itô pour tout processus X_t de la forme suivante*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s \quad P-p.s,$$

avec X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, φ et θ deux processus $\mathcal{F}_t$-adapté telle que :

$$\int_0^t |\varphi_s|\, ds < +\infty \quad et \quad \int_0^t \|\theta_s\|^2\, ds < +\infty,$$

où Le coefficient φ est le drift ou la dérivée et θ est le coefficient de diffusion.

1.4.2 Formule d'Itô

Définition 1.4.2 (Formule d'Itô) *Soient X un processus d'Itô et $f : [0,+\infty[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{1,2}$. Alors*

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t f'_s(s,X_s)ds + \int_0^t f'_x(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s,X_s)d\langle X,X\rangle_s$$

Proposition 1.4.2 (Formule d'Itô pour les semi-martingales) *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une semi-*

martingale. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{1,2} : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
f(t, X_t) - f(t, X_0) = & \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_{s^-}) dX_s \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_{s^-}) d\left[X, X\right]_s^c + \\
& \sum_{0 \leq s \leq t, \Delta X_s \neq 0} \left[f(s, X_s) - f(s, X_{s^-}) - \Delta X_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_{s^-}) \right],
\end{aligned}
$$

où

$$
d\left[X, X\right]_s = d\left[X, X\right]_s^c + \sum_{0 \leq s \leq t} \left(\Delta X_s\right)^2 .
$$

Proposition 1.4.3 (Formule d'intégration par partie) *Soit* X *et* Y *deux processus d'Itô, alors la formule d'intégration par partie est donnée par*

$$
X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \left\langle X, Y \right\rangle_t .
$$

Chapitre 2

La relation entre le principe du maximum et la programmation dynamique

2.1 Hypothèses et formulation du problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\leq T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, satisfaisant les conditions habituelles. Tout élément $y \in \mathbb{R}^n$ sera identifié à un vecteur de colonne avec n composantes. Notons $A^\intercal$ la transposition de tout les vecteurs ou matrice A. Pour une fonction h, on note h_y le gradient ou jacobien de h par rapport à la variable y. Soit T un nombre réel strictement positif fixé, $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ étant deux ensembles compacts non vides dans $\mathbb{R}$, ensemble $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$.

On notera $\mathbb{M}_0^2\left((\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{R}\right)$ l'espace de toutes les martingales carrées intégrables à valeur dans $\mathbb{R}$, $M(\cdot)$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ telle que $M(0) = 0$.

Définition 2.1.1 *Retour à [14] qu'une martingale $M(\cdot) \in \mathbb{M}_0^2\left((\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{R}\right)$ est appelée normale si $\langle M\rangle(t) = t$. telle que $\langle M\rangle(t)$ est le processus de variation quadratique conditionnelle de $M(\cdot)$, ou le compensateur du processus de $[M](\cdot)$. Si $M(\cdot)$ a également la* *«propriété de représentation» alors qu'il y a un processus* $(\mathcal{F}_t)$ *-prévisible* $u(\cdot)$ *tel que*

$$d[M^u](t) = dt + u(t)dM^u(t), \forall t \geq 0.$$

$[M^u](\cdot)$ *c'est la variation quadratique de* $M^u(\cdot)$ *et* $u(\cdot)$ *est un processus prévisible représentant la taille de saut du processus* $M^u(\cdot)$*. la partie continue et la partie de saut de la martingale* $M^u(\cdot)$ *notée* $M^{u,c}(\cdot)$ *et* $M^{u,d}(\cdot)$*, respectivement sont données par :*

$$dM^{u,c}(t) = \mathbf{1}_{\{u(t)=0\}}dM^u(t) \text{ et } dM^{u,d}(t) = \mathbf{1}_{\{u(t)\neq 0\}}dM^u(t), \forall t \geq 0.$$

Pour $t \in [0,T]$ *l'état* $Y(t)$ *d'une diffusion contrôlée est décrit par l'équation différentielle stochastique suivante*

$$\begin{cases} dY(t) & = b(t, Y(t), u(t), \pi(t))dt + \sigma(t, Y(t-), u(t), \pi(t))dM^u(t) \\ y(0) & = y, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ sont donnés.

Le processus $M^u(\cdot) \in \mathbb{M}_0^2((\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{R})$ est une solution de l'équation qui est gouvernée par le processus

$$u(\cdot)[M^u](t) = t + \int_0^t u(s)\, dM^u(s) \quad t \geq 0.$$

Notant que le saut de l'état $Y(\cdot)$ est donnée par

$$\Delta Y(t) := \begin{cases} \sigma(t, Y(t-), u(t))\Delta M^u(t) & \text{si } M^u \text{ a un saut á } t, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

où

$$\Delta M^u(t) = M^u(t) - M^u(t-) = u(t).$$

Enfin, nous rappelons que

$$[M^u](t) = \sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta M^u(s))^2 + \langle M^{u,c} \rangle (t).$$

Définition 2.1.2 *Un contrôle admissible est un couple de processus mesurables et adaptés* $(u(\cdot), \pi(\cdot)) \in \mathcal{U}$, *où* $u : [0,T] \times \Omega \to \mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}$, $\pi : [0,T] \times \Omega \to \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}$ *tel que*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{ |u(s)|^2 + |\pi(s)|^2 \right\} ds\right] < \infty.$$

On note par $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ *l'ensemble de tous les contrôles admissibles,* $\mathcal{U}_1$*(resp* $\mathcal{U}_2$*) représente l'ensemble des contrôles admissibles* $u(\cdot)$ *(resp* $\pi(\cdot)$*).*

Considérons un critère de performance qui à la forme :

$$J(u(\cdot), \pi(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, Y(t), u(t), \pi(t)) dt + g(Y(T))\right], \tag{2.2}$$

où $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions mesurables. Le problème du contrôle stochastique est de trouver un contrôle optimal $(\hat{u}(\cdot), \hat{\pi}(\cdot)) \in \mathcal{U}$ comme

$$J(\hat{u}(\cdot), \hat{\pi}(\cdot)) = \inf_{(u(\cdot), \pi(\cdot)) \in \mathcal{U}} J(u(\cdot), \pi(\cdot)). \tag{2.3}$$

Supposons les conditions suivantes :

(H1) Les fonctions b, σ, f et g sont continues différentiables par rapport à (y, u, π).

(H2) Toutes les dérivées de b, σ, f et g sont continues et uniformément bornées.

(H3) b, σ, f sont bornés par $K(1 + |y| + |u| + |\pi|)$ et g est borné par $K\left(1 + |y|^2\right)$ Pour un $K > 0$.

2.2 Principe du maximum stochastique suffisant

Dans cette section, nous prouvons le principe du maximum stochastique suffisant.

Nous définissons la fonction hamiltonienne $H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$H(t,y,u,\pi,p,q) = f(t,y,u,\pi) + b^{\intercal}(t,y,u,\pi)\,p + tr\left(\sigma^{\intercal}(t,y,u,\pi)\,q\right), \tag{2.4}$$

où $tr(A)$ désigne la trace de la matrice A. L'équation adjointe est donnée en termes de la dérivée du hamiltonien comme

$$\begin{cases} dp(t) &= -H_y(t,Y(t),u(t),\pi(t),p(t),q(t))dt + q(t)dM^u(t), \\ p(T) &= g_y(Y(T)). \end{cases} \tag{2.5}$$

Théorème 2.2.1 (condition suffisante d'optimalité) *soit $(\hat{u}(\cdot),\hat{\pi}(\cdot))$ est un contrôle admissible et $\hat{Y}(\cdot)$ le processus d'état contrôlé associé. Soit $(p(\cdot),q(\cdot))$ la solution unique de l'équation adjointe (2.5). Supposons que le hamiltonien H est convexe en $(y,\ u,\ \pi)$ et que la fonction de coût terminal g est convexe en y. d'après les conditions (H1)-(H3), un contrôle admissible $(\hat{u}(\cdot),\hat{\pi}(\cdot))$ est optimal si la condition suivante est*

$$H(t,\hat{Y}(t),\hat{u}(t),\hat{\pi}(t),p(t),q(t)) = \inf_{(u,\pi)\in\mathcal{U}} H(t,\hat{Y}(t),u,\pi,p(t),q(t)). \tag{2.6}$$

Preuve. Soit $(u(\cdot),\pi(\cdot))$ est un contrôle admissible, pour tout $t \in [0,T]$ notée par

$$\delta\Lambda(t,\hat{Y}(t)) = \Lambda(t,\hat{Y}(t),\hat{u}(t),\hat{\pi}(t)) - \Lambda(t,Y(t),u(t),\pi(t)), \text{ pour } \Lambda = b,f,\sigma,$$
$$\delta H(t) = H(t,\hat{Y}(t),\hat{u}(t),\hat{\pi}(t),p(t),q(t)) - H(t,Y(t),u(t),\pi(t),p(t),q(t)).$$

alors

$$J(\hat{u},\hat{\pi}) - J(u,\pi) = \mathbb{E}\left[\int_0^T \delta f(t)dt + (g(\hat{Y}(T)) - g(Y(T)))\right]. \tag{2.7}$$

Par la convexité du l'hamiltonien et (2.6), on a

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \delta H(t)dt\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^T (\hat{Y}(t) - Y(t))^\intercal (H_y(t, \hat{Y}(t), \hat{u}(t), \hat{\pi}(t), p(t), q(t))dt\right]. \tag{2.8}$$

Puisque g est convexe, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[g(\hat{Y}(T)) - g(Y(T))\right] &\leq \mathbb{E}\left[(\hat{Y}(T) - Y(T))^\intercal g_y(\hat{Y}(T))\right], \\ &= \mathbb{E}\left[(\hat{Y}(T) - Y(T))^\intercal p(T)\right]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

En utilisant la formule d'intégration par partie, on obtient en prenant les espérances

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\hat{Y}(T) - Y(T)\right)^\intercal p(T)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T (\hat{Y}(t) - Y(t))^\intercal dp(t)\right. \\ &\left. + \int_0^T p^\intercal(t) d(\hat{Y}(t) - Y(t)) + \int_0^T d\left[\hat{Y} - Y, p\right](t)\right], \end{aligned} \tag{2.10}$$

où $\left[\hat{Y} - Y, p\right](\cdot)$ représente la variation quadratique de $\hat{Y}(\cdot) - Y(\cdot)$ et $p(\cdot)$.Notant que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^T d\left[\hat{Y} - Y, p\right](t)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T tr((\delta\sigma(t, \hat{Y}(t-)))^\intercal q(t)) d\left[M^{\hat{u}}(t)\right]\right], \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T tr((\delta\sigma(t, \hat{Y}(t-)))^\intercal q(t))(dt + dM^{\hat{u}}(t))\right], \end{aligned}$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\left(\hat{Y}(T) - Y(T)\right)^\intercal p(T)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{(\hat{Y}(t) - Y(t))^\intercal (-H_y(t, \hat{Y}(t), \hat{u}(t), \hat{\pi}(t), p(t), q(t)))\right.\right. \\ &\left. + p^\intercal(t)(\delta b(t, \hat{Y}(t))) + tr((\delta\sigma(t, \hat{Y}(t-)))^\intercal q(t))\right\} dt \\ &+ \int_0^T \left\{p(t)(\delta\sigma(t, \hat{Y}(t-)))^\intercal + tr((\delta\sigma(t, \hat{Y}(t-)))^\intercal q(t))\right. \\ &\left.\left. + (\hat{Y}(t) - Y(t))^\intercal q(t)\right\} dM^{\hat{u}}(t)\right]. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Notant que le processus

$$\int_0^T \left\{ p(t)(\delta\sigma(t,\hat{Y}(t-)))^\intercal + tr((\delta\sigma(t,\hat{Y}(t-)))^\intercal q(t)) + (\hat{Y}(t) - Y(t))^\intercal q(t) \right\} dM^{\hat{u}}(t),$$

est une martingale avec une espérance nulle, d'après (2.11), (2.9) et (2.8) on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[g(\hat{Y}(T)) - g(Y(T)) \right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{ -\delta\hat{H}(t) + p^\intercal(t)(\delta b(t,\hat{Y}(t))) \right.\right. \\
&\left.\left. +\ tr((\delta\sigma(t,\hat{Y}(t)))^\intercal q(t)) \right\} dt \right].
\end{aligned}$$

D'autre part, par la définition du l'hamiltonien, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^T \delta f(t) dt \right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{ \delta\hat{H}(t) - p^\intercal(t)(\delta b(t,\hat{Y}(t))) \right.\right. \\
&\left.\left. -\ tr((\delta\sigma(t,\hat{Y}(t)))^\intercal q(t)) \right\} dt \right].
\end{aligned}$$

En ajoutant les inégalités ci-dessus, on obtient $J(\hat{u}(\cdot), \hat{\pi}(\cdot)) - J(u(\cdot), \pi(\cdot)) \leq 0$ ce qui signifie que $(\hat{u}(\cdot), \hat{\pi}(\cdot))$ est un contrôle optimal du problème (2.3). ■

2.3 Relation à la programmation dynamique

Dans cette section, nous rappelons un théorème de vérification, utile pour calculer les contrôles optimaux. Nous montrons ensuite que le processus adjoint $(p(\cdot), q(\cdot))$ est un solution unique au l'EDSR (2.5), peut être exprimé en termes de dérivées de la fonction de valeur, ce qui résout l'équation d'HJB.

Soit $Y(s) = Y^{t,y}(s)$ est la solution du EDS contrôlé (2.1) pour $s \geq t$, avec la valeur initiale $Y(t) = y$. Mettre le problème dans un cadre markovien pour qu'on puisse appliquer le principe de la programmation dynamique.

Notre objectif est de minimiser une fonction de côut donnée par

$$J(t,y,u,\pi)=\mathbb{E}\left[\int_t^T f(s,Y(s),u(s),\pi(s))ds+g(Y(T))\mid Y(t)=y\right]. \tag{2.12}$$

Nous définissons la fonction de valeur du problème de contrôle comme suit

$$V(t,y)=\inf_{(u,\pi)\in\mathcal{U}} J(t,y,u,\pi). \tag{2.13}$$

L'opérateur infinitésimal $\mathcal{L}^{(u,\pi)}$ associé à (2.1) est

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{(u,\pi)}\phi(t,y)\\
&=\sum_{i=1}^{n} b^i(t,y,u,\pi)\tfrac{\partial\phi}{\partial y^i}(t,y)\\
&+\tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\mathbf{1}_{\{u=0\}}\tfrac{\partial^2\phi}{\partial y^i\partial y^j}(t,y)\sum_{i=1}^{n}\sigma^i(t,y,u,\pi)\sigma^j(t,y,u,\pi)\\
&+\sum_{j=1}^{n}\mathbf{1}_{\{u\neq 0\}}\left(\phi(t,y+u\sigma(t,y,u,\pi))-\phi(t,y)-u\tfrac{\partial\phi}{\partial y^j}\sigma^j(t,y,u,\pi)\right)(u)^{-2},
\end{aligned}$$

où $\sigma^i(t,y,u,\pi)$ désigne la $i-ième$ composante du vecteur σ. A partir du principe de programmation dynamique standard (voir par exemple [20]), l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman est donnée par

$$\frac{\partial W}{\partial t}(t,y)+\inf_{(u,\pi)}\left\{\mathcal{L}^{(u,\pi)}W(t,y)+f(t,y,u,\pi)\right\}=0,\qquad\forall\,(t,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n, \tag{2.14}$$

avec la condition terminale

$$W(T,y)=g(y),\ \forall y\in\mathbb{R}^n. \tag{2.15}$$

Nous commençons par la définition des solutions classiques de (2.14).

Définition 2.3.1 *Considérons une fonction $W\in\mathcal{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, telle que W est une solution classique de (2.14) si*

$$\frac{\partial W}{\partial t}(t,y)+\inf_{(u,\pi)}\left\{\mathcal{L}^{(u,\pi)}W(t,y)+f(t,y,u,\pi)\right\}=0,\qquad\forall(t,y)\in[0,T]\times\ \mathbb{R}^n,$$

et la condition terminale (2.15) est vérifiée.

Théorème 2.3.1 (Théorème de vérification) *Soit W une solution classique de (2.14) avec condition terminale (2.15) et satisfaisant une condition de croissance quadratique, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\boldsymbol{C}$ telle que $|W(t,y)| \leq \boldsymbol{C}(1+|y|^2)$. Alors, pour tout $(t,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ et $(u,\pi) \in \mathcal{U}$*

$$W(t,y) \geq J^{(u,\pi)}(t,y). \tag{2.16}$$

De plus, s'il existe $(\hat{u}(\cdot), \hat{\pi}(\cdot)) \in \mathcal{U}$ telle que

$$(\hat{u}(t), \hat{\pi}(t)) \in \underset{(u,\pi)}{\arg\min} \left\{ \mathcal{L}^{(u,\pi)} W(t, Y(t)) + f(t, Y(t), u(t), \pi(t)) \right\}, \tag{2.17}$$

alors $W(t,y) = J(t,y,\hat{u},\hat{\pi})$.

Preuve. Soit $W \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, pour $0 \leq t \leq s \leq T$, on appliquons la formule d'Itô à $W(\cdot, Y(\cdot))$, on obtient

$$\begin{aligned} W(s,Y(s)) = W(t,y) &+ \int_t^s \frac{\partial W}{\partial t}(r,Y(r))dr \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_t^s \frac{\partial W}{\partial y^i}(r,Y(r))dY^i(r) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_t^s \frac{\partial^2 W}{\partial y^i \partial y^j}(r,Y(r)) \left(\sigma^i(r)\,\sigma^j(r)\right) dr \\ &+ \sum_{t \leq r \leq s} \left\{ W(r,Y(r)) - W(r,Y(r-)) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial y^i}(r,Y(r-))\Delta Y^i(r) \right\}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

où

$$\Delta Y^i(r) = Y^i(r) - Y^i(r-) = \sigma^i(r-)\,\Delta M^u(r), \text{ pour } i = 1...n. \tag{2.19}$$

D'autre côté, on peut écrire la dernière somme de (2.18) comme

$$\begin{aligned}
&\sum_{t\leq r\leq s}\left\{W(r,Y(r))-W(r,Y(r-))-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial y^i}(r,Y(r-))\Delta Y^i(r)\right\}\\
&=\sum_{t\leq r\leq s}\mathbf{1}_{\{u(r)\neq 0\}}\left(W(r,Y(r-)+\sigma(r-)\,u(r))-W((r,Y(r-))\right.\\
&\left.-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial y^i}(r,Y(r-))\sigma^i(r-)\,u(t)\right)\frac{\left(\Delta Y^i(r)\right)^2}{\left(u(r)\right)^2},\\
&=\sum_{i=1}^{n}\int_t^s\mathbf{1}_{\{u(r)\neq 0\}}\left(W(r,Y(r-)+\sigma(r-)\,u(r))-W(r,Y(r-))\right.\\
&\left.-\frac{\partial W}{\partial y^i}(r,Y(r-))\sigma^i(r-)\,u(r)\right)\frac{\mathbf{1}_{\{u(r)\neq 0\}}dr+u(r)dY^i(r)}{u(r)^2},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
W(s,Y(s))&=W(t,y)+\int_t^s\left\{\frac{\partial W}{\partial t}(r,Y(r))+\mathcal{L}^{(u,\pi)}W(r,Y(r))\right\}dr\\
&+\int_t^s\sum_{j=1}^{n}\left\{\mathbf{1}_{\{u(r)=0\}}\frac{\partial W}{\partial y^j}(r,Y(r))\,\sigma^j(r)\right.\\
&\left.+\mathbf{1}_{\{u(r)\neq 0\}}\left(W(r,Y(r-)+\sigma(r-)\,u(r))-W(r,Y(r-))\right)u(r)^{-1}\right\}dM^u(r).
\end{aligned}$$

De plus, le processus

$$\begin{aligned}
&\int_t^s\sum_{j=1}^{n}\left\{\mathbf{1}_{\{u(r)=0\}}\frac{\partial W}{\partial y^j}(r,Y(r))\,\sigma^j(r)+\mathbf{1}_{\{u(r)\neq 0\}}\left(W(r,Y(r-)+\sigma(r-)\,u(r))\right.\right.\\
&\left.\left.-\ W(r,Y(r-))\right)u(r)^{-1}\right\}dM^u(r),
\end{aligned}$$

est une martingale, a sa valeur attendue est zéro. Prenant l'espérance, nous obtenons

$$\mathbb{E}[W(s,Y(s))]=W(t,y)+\mathbb{E}\left[\int_t^s\left\{\frac{\partial W}{\partial t}(r,Y(r))+\mathcal{L}^{(u,\pi)}W(r,Y(r))\right\}dr\right].$$

En utilisant (2.14), on obtient

$$\frac{\partial W}{\partial t}\left(t,Y(t)\right)+\mathcal{L}^{(u,\pi)}W\left(t,Y(t)\right)+f\left(t,y,u,\pi\right)\leq 0\ ,\quad \forall\left(u,\pi\right)\in\mathcal{U},$$

alors

$$\mathbb{E}[W(T,Y(T))]\leq W(t,y)-\mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(r,Y(r),u(r),\pi(r)\right)dr\right].$$

Appliquez l'argument ci-dessus à $(\hat{u},\hat{\pi})\in\mathcal{U}$, et prenez la limite comme $s\to T$, puis par (2.14), (2.15) et (2.17) nous obtenons

$$W(t,y)=\mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(r,\hat{Y}(r),\hat{u}(r),\hat{\pi}(r)\right)dr+g\left(\hat{Y}(T)\right)\right].$$

Nous présentons maintenant un théorème qui établit la relation entre le principe du maximum stochastique et le principe de la programmation dynamique. Nous désignons les fonctions vectorielles $\left(t,\hat{Y}(t),\hat{u}(t),\hat{\pi}(t)\right)$ et $\left(t,\hat{Y}(t-),\hat{u}(t),\hat{\pi}(t)\right)$ par (t) et $(t-)$, respectivement. ■

Théorème 2.3.2 *Soit W est une solution classique de (2.14), avec la condition terminale (2.15). Supposons que* $W\in\mathcal{C}^{1,3}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ *, et il existe $(\hat{u},\hat{\pi})\in\mathcal{U}$ tel que la condition (2.17) est satisfait. Alors la solution du EDSR (2.5) est donnée par*

$$p^k(t)=\frac{\partial W}{\partial y^k}\left(t,\hat{Y}(t)\right), \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} q^k\left(t\right)=&\ \mathbf{1}_{\{\hat{u}(t)=0\}}\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 W}{\partial y^k\partial y^j}\left(t,\hat{Y}\left(t\right)\right)\sigma^j\left(t\right) \\ &+\mathbf{1}_{\{\hat{u}(t)\neq 0\}}\left(\frac{\partial W}{\partial y^k}\left(t,\hat{Y}\left(t-\right)+\hat{u}\left(t\right)\sigma\left(t-\right)\right)-\frac{\partial W}{\partial y^k}\left(t,\hat{Y}\left(t-\right)\right)\right)\hat{u}\left(t\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Preuve. En utilisant la formule d'Itô à $\frac{\partial W}{\partial y^k}\left(\cdot,\hat{Y}\left(\cdot\right)\right)$, Voir [20], nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial y^k}\left(T,\hat{Y}\left(T\right)\right) = {} & \frac{\partial W}{\partial y^k}\left(0,\hat{Y}\left(0\right)\right)+\int_0^T\left\{\frac{\partial^2 W}{\partial t\partial y^k}\left(t,\hat{Y}\left(t\right)\right)+\sum_{i=1}^{n}b^i\left(t\right)\frac{\partial^2 W}{\partial y^k\partial y^i}\left(t,\hat{Y}\left(t\right)\right)\right.\\
&+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{\hat{u}(t)=0\}}\sum_{i,\ j=1}^{n}\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^k\partial y^i\partial y^j}\left(t,\hat{Y}\left(t\right)\right)\sigma^i\left(t\right)\sigma^j\left(t\right)\right) \qquad (2.22)\\
&+\mathbf{1}_{\{\hat{u}(t)\neq 0\}}\left(\frac{\partial W}{\partial y^k}\left(t,\hat{Y}\left(t-\right)+\sigma\left(t-\right)\hat{u}\left(t\right)\right)-\frac{\partial W}{\partial y^k}\left(t,\hat{Y}\left(t-\right)\right)\right.\\
&\left.\left.-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 W}{\partial y^k\partial y^j}\left(t,\hat{Y}\left(t-\right)\right)\sigma^j\left(t-\right)\hat{u}\left(t\right)\right)\hat{u}\left(t\right)^{-2}\right\}dt\\
&+\int_0^T\left\{\mathbf{1}_{\{\hat{u}(t)=0\}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 W}{\partial y^k\partial y^j}\left(t,\hat{Y}\left(t\right)\right)\sigma^j\left(t\right)\right.\\
&+\mathbf{1}_{\{\hat{u}(t)\neq 0\}}\left(\frac{\partial W}{\partial y^k}\left(t,\hat{Y}\left(t-\right)+\sigma\left(t-\right)\hat{u}\left(t\right)\right)\right.\\
&\left.\left.-\frac{\partial W}{\partial y^k}\left(t,\hat{Y}\left(t-\right)\right)\right)\hat{u}(t)^{-1}\right\}dM^{\hat{u}}\left(t\right).
\end{aligned}$$

On définie l'opérateur A par

$$\begin{aligned}
A\left(t,y,u,\pi\right) = {} & \frac{\partial W}{\partial t}\left(t,y\right)+\sum_{i=1}^{n}b^i\left(t\right)\frac{\partial W}{\partial y^i}\left(t,y\right)+f\left(t,y,u,\pi\right)\\
&+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{u=0\}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 W}{\partial y^i\partial y^j}\left(t,y\right)\sum_{l=1}^{n}\sigma^j\left(t,y,u,\pi\right)\sigma^i\left(t,y,u,\pi\right) \qquad (2.23)\\
&+\sum_{j=1}^{n}\mathbf{1}_{\{u\neq 0\}}\left(W\left(t,y+u\sigma\left(t,y,u,\pi\right)\right)-W\left(t,y\right)-u\frac{\partial W}{\partial y^j}\sigma^j\left(t,y,u,\pi\right)\right)u^{-2}.
\end{aligned}$$

On dérive $A(t,y,u,\pi)$ par rapport à y^k, et évaluer le résultat à $(y,u,\pi)=\left(\hat{Y},\hat{u},\hat{\pi}\right)$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \frac{\partial f}{\partial y^k}(t) + \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial y^k}\left(t, \hat{Y}(t)\right) + \sum_{i=1}^{n} b^i(t) \frac{\partial^2 W}{\partial y^k \partial y^i}\left(t, \hat{Y}(t)\right) \\
& + \frac{1}{2}\sum_{i,\, j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{\hat{u}(t)=0\}} \frac{\partial^3 W}{\partial y^k \partial y^i \partial y^j}\left(t, \hat{Y}(t)\right) \sigma^j(t)\,\sigma^i(t) \\
& + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{\hat{u}(t)\neq 0\}} \left(\frac{\partial W}{\partial y^k}\left(t, \hat{Y}(t-) + \sigma(t-)\,\hat{u}(t)\right) - \frac{\partial W}{\partial y^k}\left(t, \hat{Y}(t-)\right) \right. \\
& \left. - \hat{u}(t) \frac{\partial^2 W}{\partial y^k \partial y^j}\left(t, \hat{Y}(t-)\right) \sigma^j(t-) \right) \hat{u}(t)^{-2} \\
& + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b^i}{\partial y^k}(t) \frac{\partial W}{\partial y^i}\left(t, \hat{Y}(t)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,\, j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{\hat{u}(t)=0\}} \frac{\partial}{\partial y^k}\sigma^j(t)\,\sigma^i(t) \frac{\partial^2 W}{\partial y^i \partial y^j}\left(t, \hat{Y}(t)\right) \\
& + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{\hat{u}(t)\neq 0\}} \left(\frac{\partial W}{\partial y^j}\left(t, \hat{Y}(t-) + \sigma(t-)\,\hat{u}(t)\right) - \frac{\partial W}{\partial y^j}\left(t, \hat{Y}(t-)\right) \right) \frac{\partial \sigma^j}{\partial y^k}(t-)\,\hat{u}(t)^{-1}.
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Enfin, d'après (2.24) et (2.22), on trouve

$$
\begin{aligned}
& d\left(\frac{\partial W}{\partial y^k}\left(t, \hat{Y}(t)\right) \right) \qquad (2.25) \\
& = -\left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b^i}{\partial y^k}(t) \frac{\partial W}{\partial y^i}\left(t, \hat{Y}(t)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,\, j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{\hat{u}(t)=0\}} \frac{\partial}{\partial y^k}\left(\sigma^j(t)\,\sigma^i(t)\right) \frac{\partial^2 W}{\partial y^i \partial y^j}\left(t, \hat{Y}(t)\right) \right. \\
& \quad + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{\hat{u}(t)\neq 0\}} \left(\frac{\partial W}{\partial y^j}\left(t, \hat{Y}(t-) + \sigma(t-)\,\hat{u}(t)\right) - \frac{\partial W}{\partial y^j}\left(t, \hat{Y}(t-)\right) \right) \frac{\partial \sigma^j}{\partial y^k}(t-)\,\hat{u}(t)^{-1} \\
& \quad \left. + \frac{\partial f}{\partial y^k}(t) \right\} dt + \left\{ \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{\hat{u}(t)=0\}} \frac{\partial^2 W}{\partial y^k \partial y^j}\left(t, \hat{Y}(t)\right) \sigma^j(t) \right. \\
& \quad \left. + \mathbf{1}_{\{\hat{u}(t)\neq 0\}} \left(\frac{\partial W}{\partial y^k}\left(t, \hat{Y}(t-) + \sigma(t-)\,\hat{u}(t)\right) - \frac{\partial W}{\partial y^k}\left(t, \hat{Y}(t-)\right) \right) \hat{u}(t)^{-1} \right\} dM^{\hat{u}}(t).
\end{aligned}
$$

Notez que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y^{k}}\left(\sigma^{i}\left(t\right)\sigma^{j}\left(t\right)\right)\frac{\partial^{2}W}{\partial y^{i}\partial y^{j}}\left(t,\hat{Y}\left(t\right)\right) \\
&=\frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^{n}\left(\frac{\partial\sigma^{j}}{\partial y^{k}}\left(t\right)\sigma^{i}\left(t\right)+\sigma^{j}\left(t\right)\frac{\partial\sigma^{i}}{\partial y^{k}}\left(t\right)\right)\frac{\partial^{2}W}{\partial y^{k}\partial y^{i}}\left(t,\hat{Y}\left(t\right)\right) \\
&=\sum_{i,\ j=1}^{n}\sigma^{i}\left(t\right)\left(\frac{\partial^{2}W}{\partial y^{i}\partial y^{j}}\left(t,\hat{Y}\left(t\right)\right)\right)\frac{\partial\sigma^{j}}{\partial y^{k}}\left(t\right).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

D'autre part, à partir de (2.5), on peut écrire la $k-ième$ coordonnée du processus adjoint comme

$$\begin{cases} dp^{k}\left(t\right)=-\frac{\partial H}{\partial y^{k}}\left(t,\hat{Y}\left(t\right),\hat{u}\left(t\right),\hat{\pi}\left(t\right),p(t),q(t)\right)dt+q^{k}(t)dM^{\hat{u}}\left(t\right) \\ p^{k}\left(T\right)=\frac{\partial g}{\partial y^{k}}\left(\hat{Y}\left(T\right)\right). \end{cases} \tag{2.27}$$

A partir la définition de l'hamiltonien H par (2.4), nous avons

$$\frac{\partial H}{\partial y^{k}}\left(t,y,u,\pi,p,q\right)=\frac{\partial f}{\partial y^{k}}\left(t,y,u,\pi\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b^{i}}{\partial y^{k}}\left(t,y,u,\pi\right)p^{i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\sigma^{i}}{\partial y^{k}}\left(t\right)q^{i}.$$

Par conséquent, l'unicité de la solution de (2.27) et des relations (2.25) et (2.26) permet d'obtenir (2.20) et (2.21). ■

Remarque 2.3.1 *Les deux exemples de base d'équations de structure sont prises en compte dans un processus constant dans (1.2).*

1. Considérons le cas où ($u\equiv 0$), on peut écrire l'équation (1.2) comme $[M,M](t)=t$, et montre que $[M,M](\cdot)$ est continu, donc $M(\cdot)$ est une martingale continue avec variation quadratique t, $M(\cdot)$ est un mouvement brownien. Dans ce cas, le résultat classique sur la relation entre PMS et PPD est prouvé par Bensoussan [1].
2. Le cas où $u\equiv\alpha\in\mathbb{R}^{*}\triangleq\mathbb{R}\backslash\{0\}$, l'équation (1.2) est maintenant

$$[M,M](t)=t+\alpha(M(t)-M(0)),$$

où $M(t) = \alpha\left(N\left(t/\alpha^2\right) - t/\alpha^2\right)$, où $N(\cdot)$ est un processus de Poisson standard. Dans ce cas, la relation entre le PMS et le PPD a été rapportée dans Framstad et al. [16] où les systèmes sont gouvernée par un mouvement brownien et une mesure aléatoire de Poisson.

Chapitre 3

Application au problème de la sélection de portefeuille moyenne-variance

Dans ce chapitre nous utilisons le principe du maximum stochastique pour résoudre le problème de la sélection de portefeuille moyenne variance où le système est gouverné par des martingales normales.

Nous considérons un marché avec un actif risqué et un compte bancaire sans risque. Le prix de l'actif sans risque $S^0(t)$, et le prix de actif risqué $S^1(t)$ à temps $t \in [0, T]$ évolue selon l'équation

$$\begin{cases} dS^0(t) = \rho(t) S^0(t) dt \ , \ S^0(0) = 1. \\ dS^1(t) = \sigma(t-) S^1(t) dM^u(t) , \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\rho(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont des fonctions déterministes. Dans ce qui suit, nous notons à $\pi(\cdot)$ le montant d'argent investi dans l'actif risqué à l'instant t. Le processus $M(\cdot)$ est une martingale unidimensionnelle qui satisfait l'équation de structure suivante

$$[M^u](t) = t + \int_0^t u dM^u(s) , \qquad \forall t \in [0, T] ,$$

où $u \in \mathbb{R}$, le processus de la richesse $Y(\cdot)$ correspondant au portefeuille $\pi(\cdot)$ est décrit par

$$\begin{cases} dY(t) = (\rho(t)(Y(t) - \pi(t)))\,dt + \sigma(t-)\,\pi(t)\,dM^u(t), \\ Y(0) = y_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

L'objectif est de trouver un portefeuille admissible $\pi(\cdot)$ de sorte que la richesse finale satisfait cette contrainte $\mathbb{E}(y(T)) = d$, pour certains $d \in \mathbb{R}$, et le risque mesuré par la variance de la richesse terminal

$$var[y(T)] := \mathbb{E}(y(T) - \mathbb{E}(y(T)))^2 = \mathbb{E}(y(T) - d)^2$$

est minimisé.

Trouver un tel portefeuille $\pi(\cdot)$ est appelé le problème de sélection de portefeuille moyenne-variance, en particulier, nous formulons le problème de sélection de portefeuille moyenne-variance comme suit.

Définition 3.0.2 *Le problème de sélection de portefeuille moyenne-variance est un problème d'optimisation stochastique avec contrainte, paramétré par $d \in \mathbb{R}$, donné comme suit*

$$\begin{cases} \textit{minimiser } J_{MV}(y_0, \pi(\cdot)) := \mathbb{E}_{y_0}\left((y(T) - d)^2\right) \\ \textit{sujet à } \begin{cases} \mathbb{E}[y(T)] = d, \\ \pi(\cdot) \in \mathcal{U}, \\ (Y(\cdot), \pi(\cdot)) \ \textit{ satisfait (3.2)}, \end{cases} \end{cases} \tag{3.3}$$

où $\mathbb{E}_{y_0}$ est l'espérance par rapport à une mesure de probabilité $\mathbb{P}_{y_0} := \mathbb{P}(\cdot|Y(0) = y_0)$.

Notez que le problème de moyenne-variance (3.3) est un problème d'optimisation dynamique avec une contrainte $\mathbb{E}(y(T)) = d$. Maintenant nous appliquons la technique du multiplicateur de Lagrange pour gérer cette contrainte. Définissons

$$J_{MV}(y_0, \pi(\cdot), \zeta) := \mathbb{E}_{y_0}\left((Y(T) - d)^2\right) + 2\zeta\mathbb{E}_{y_0}((Y(T) - d)).$$

De cette façon, le problème de moyenne variance (3.3) peut être résolu via le problème de contrôle optimal stochastique suivant (pour chaque fixe de ζ).

$$\begin{cases} \text{minimiser } J_{MV}\left(y_0, \pi\left(\cdot\right), \zeta\right) = \mathbb{E}_{y_0}\left(\left(Y\left(T\right) - \left(d - \zeta\right)\right)^2\right) - \zeta^2 \\ \text{sujet à } \pi\left(\cdot\right) \in \mathcal{U} \text{ et } \left(Y\left(t\right), \pi\left(\cdot\right)\right) \text{ satisfait (3.2).} \end{cases} \tag{3.4}$$

Il est clair que ce problème à la même stratégie optimale que le problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \text{minimiser } J_{MV}\left(y_0, \pi\left(\cdot\right), \vartheta\right) = \mathbb{E}_{y_0}\left(\left(Y\left(T\right) - \vartheta\right)^2\right) \\ \text{sujet à } \pi\left(\cdot\right) \in \mathcal{U} \text{ et } \left(Y\left(\cdot\right), \pi\left(\cdot\right)\right) \text{ satisfait (3.2).} \end{cases} \tag{3.5}$$

soit $\vartheta = d - \zeta$. Ainsi, le problème de contrôle optimal ci-dessus se révèle être un problème de minimisation des pertes quadratiques et nous allons le résoudre en utilisant le principe du maximum stochastique.

3.1 Problème de minimisation des pertes quadratique

Nous commençons par écrire l'hamiltonien pour ce système

$$H(t, y, u, \pi, p, q) = \rho\left(t\right)\left(Y(t) - \pi(t)\right)p + \pi(t)\sigma(t)q.$$

Par conséquent, l'équation adjointe (2.5) devient

$$\begin{cases} d\rho(t) = -\rho(t)p(t)dt + q(t)dM^u(t), 0 \leq t < T, \\ p(T) = \quad 2(Y(T) - \vartheta), \end{cases} \tag{3.6}$$

Nous cherchons la solution $(p(\cdot), q(\cdot))$ à (3.6). Nous essayons un processus $p(\cdot)$ de la forme suivante

$$p(t) = \Phi(t)Y(t) + \Psi(t), \qquad \forall t \in [0, T], \tag{3.7}$$

où $\Phi\left(\cdot\right)$ et $\Psi\left(\cdot\right)$ sont des fonctions déterministes avec $\Phi\left(T\right) = 2$ et $\Psi\left(T\right) = -2\vartheta$.

Appliquons la formule d'Itô sur $p(\cdot)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} d\rho(t) = &\left\{\acute{\Phi}(t)\, Y(t) + \Phi(t)\rho(t)\left(Y(t) - \pi(t)\right) + \acute{\Psi}(t)\right\} dt \\ &+ \left\{\mathbf{1}_{\{u=0\}}\Phi(t)\sigma(t)\,\pi(t) + \mathbf{1}_{\{u\neq 0\}}\Phi(t)\sigma(t)\,\pi(t)\right\} dM^{u}(t)\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

En comparant les coefficients avec (3.6), on obtient

$$-\rho(t)\Phi(t)Y(t) - \rho(t)\Psi(t) = \acute{\Phi}(t)\, Y(t) + \Phi(t)\rho(t)\left(Y(t) - \pi(t)\right) + \acute{\Psi}(t)\,, \tag{3.9}$$

$$q(t) = \Phi(t)\sigma(t)\,\pi(t)\,. \tag{3.10}$$

Puisque H est une fonction linéaire en $\pi(\cdot)$, qui donne

$$-\rho(t)p(t) + \sigma(t)q(t) = 0. \tag{3.11}$$

D'après (3.7), (3.10) et (3.11), on trouve

$$\hat{\pi}(t) = \frac{\rho(t)}{\sigma^{2}(t)}\left[\frac{\Psi(t)}{\Phi(t)} + \hat{Y}(t)\right], \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.12}$$

Donc, en insérant (3.12) dans (3.9), on obtient

$$\acute{\Phi}(t) + \left(2\rho(t) - \Gamma(t)\right)\Phi(t) = 0, \qquad \Phi(T) = 2, \tag{3.13}$$

$$\acute{\Psi}(t) + \left(\rho(t) - \Gamma(t)\right)\Psi(t) = 0, \qquad \Psi(T) = -2\vartheta, \tag{3.14}$$

où

$$\Gamma(t) = \frac{\rho^{2}(t)}{\sigma^{2}(t)}. \tag{3.15}$$

Alors, les solutions à ce système d'équations différentielles sont :

$$\Phi(t) = 2\exp\left\{\int_{t}^{T}\left(\Gamma(s) - 2\rho(s)\right) ds\right\}, \quad \forall t \in [0, T], \tag{3.16}$$

$$\Psi(t) = -2\vartheta \exp\left\{\int_t^T (\Gamma(s) - \rho(s))\,ds\right\}, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.17}$$

Pour résoudre le problème original de moyenne variance, nous devons déterminer la fonction de valeur $V(t,y)$ du problème de minimisation des pertes quadratique, qui est définie par

$$V(t,y) := \inf_{\pi\in\mathcal{U}} \mathbb{E}\left[(Y(T) - \vartheta)^2 \mid Y(t) = y_0\right].$$

A partir de la relation entre $p(\cdot)$ et la fonction de valeur $V(\cdot,\hat{Y}(\cdot))$ (Voir théorème 2.14) et l'expression de $p(\cdot)$ dans (3.7), on obtient

$$V(t,\hat{Y}(t)) = \frac{1}{2}\Phi(t)\left(\hat{Y}(t)\right)^2 + \Psi(t)\hat{Y}(t) + k(t), \qquad V(T,y_0) = (y_0 - \vartheta)^2, \tag{3.18}$$

où $k(\cdot)$ est une fonction déterminée. Depuis les conditions de liaison dans (3.13) et (3.14), il est facile de voir

$$k(T) = \vartheta^2. \tag{3.19}$$

En utilisant la formule de Itô à $V(t,\hat{Y}(t))$, $\forall t \in [0,T]$, on obtient

$$\begin{aligned}
dV(t,\hat{Y}(t)) = &\left\{\frac{1}{2}\acute{\Phi}(t)\left(\hat{Y}(t-)\right)^2 + \acute{\Psi}(t)\hat{Y}(t-) + \acute{k}(t)\right.\\
&+ \left(\Phi(t)\hat{Y}(t-) + \Psi(t)\right)\left[\left(\rho(t)\left(\hat{Y}(t-) - \hat{\pi}(t)\right)\right)\right]\\
&+ \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{u=0\}}\Phi(t)\hat{\pi}(t)^2\sigma^2(t)\\
&\left.+ \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{u\neq 0\}}\Phi(t)\hat{\pi}(t)^2\sigma^2(t)\right\}dt\\
&+ \left\{(\mathbf{1}_{\{u=0\}}\left(\Phi(t)\hat{Y}(t) + \Psi(t)\right)\hat{\pi}(t)\sigma(t)\right.\\
&+ \mathbf{1}_{\{u\neq 0\}}(\Phi(t)\hat{Y}(t-)\sigma(t)\hat{\pi}(t)u + \frac{1}{2}\Phi(t)\hat{\pi}(t)^2\sigma^2(t)u^2\\
&\left.+ \Psi(t)\sigma(t)\hat{\pi}(t)u)u^{-1}\right\}dM^u(t).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Notant que $\Phi(\cdot)$ et $\Psi(\cdot)$ sont des solutions aux équations différentielles (3.16) et (3.17), on peut écrire (3.20) comme

$$
\begin{aligned}
dV(t,\hat{Y}(t)) = &\left\{\acute{k}(t) - \frac{1}{2}\frac{\Psi^2(t)}{\Phi(t)}\Gamma(t)\right\}dt \\
&+ \left\{(\mathbf{1}_{\{u=0\}}\left(\Phi(t)\hat{Y}(t) + \Psi(t)\right)\hat{\pi}(t)\sigma(t)\right. \\
&+ \mathbf{1}_{\{u\neq 0\}}(\Phi(t)\hat{Y}(t-)\sigma(t)\hat{\pi}(t)u + \frac{1}{2}\Phi(t)\hat{\pi}(t)^2\sigma^2(t)u^2 \\
&\left. + \Psi(t)\sigma(t)\hat{\pi}(t)u)u^{-1}\right\}dM^u(t).
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Puisque $\hat{\pi}(\cdot)$ est optimale, la fonction de valeur $V(\cdot,\hat{Y}(\cdot))$ devrait être une martingale. Et D'après la propriété martingale de $V(\cdot,\hat{Y}(\cdot))$ la partie dt doit être égale à 0, c'est-à-dire

$$
\acute{k}(t) - \frac{1}{2}\frac{\Psi^2(t)}{\Phi(t)}\Gamma(t) = 0 \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.22}
$$

A partir la condition terminal (3.19) et la méthode standard de Feyman-Kac, représentation d'un système d'équations différentielles, nous avons l'expression suivante pour $k(\cdot)$

$$
k(t) = \vartheta^2\left(1 - \mathbb{E}\left(\int_t^T \Gamma(s)\frac{\Psi^2(s)}{\Phi(s)}ds\right)\right), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.23}
$$

L'analyse ci-dessus donne le théorème suivant pour le problème de minimisation des pertes quadratique (3.5).

Théorème 3.1.1 *L'optimale $\hat{\pi}(\cdot)$ pour le problème de minimisation des pertes quadratiques (3.5) est donnée par*

$$
\hat{\pi}(t) = \frac{\rho(t)}{\sigma^2(t)}\left[\frac{\Psi(t)}{\Phi(t)} + \hat{Y}(t-)\right], \quad \forall t \in [0,T],
$$

et la fonction de valeur optimale correspondante est donnée par

$$
V(t,\hat{Y}(t)) = \frac{1}{2}\Phi(t)\left(\hat{Y}(t)\right)^2 + \Psi(t)\hat{Y}(t) + k(t), \quad \forall t \in [0,T],
$$

où $\Phi(t)$,$\Psi(t)$ et $k(t)$ sont les solutions d'un système des équations différentielle configurée respectivement par (3.16), (3.17) et (3.23).

3.2 La solution du problème de moyenne-variance

Désignée par $V_{MV}(0, y_0)$ et $V_{MVL}(0, y_0)$ les fonctions de valeur optimale pour le problème (3.3) et le problème (3.4), respectivement. En observant la relation entre le problème de contrôle (3.4) et le problème de contrôle (3.5) et la solution du problème de contrôle (3.5), nous avons le résultat suivant

$$\begin{aligned} V_{MVL}(0, y_0) &= V(0, y_0) - \zeta^2 \\ &= \frac{1}{2}\Phi(0)y_0^2 + \Psi(0)\, y_0 + k(0) - \zeta^2. \end{aligned}$$

Notez

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(t) &:= \frac{1}{2}\Phi(t), \\ \tilde{\Psi}(t) &:= -\frac{\Psi(t)}{2\vartheta} = -\frac{\Psi(t)}{2(d-\zeta)}, \\ \tilde{k}(t) &:= \frac{k(t)}{\vartheta^2} = -\frac{\Psi(t)}{(d-\zeta)^2}. \end{aligned}$$

Ensuite, nous pouvons écrire $V_{MVL}(0, y_0)$ comme

$$V_{MVL}(0, y_0) = \tilde{\Phi}(t)y_0^2 - 2(d-\zeta)\tilde{\Psi}(t)\, y_0 + (d-\zeta)^2\tilde{k}(t) - \zeta^2.$$

Notez que $J_{MV}(y_0, \pi(\cdot))$ est strictement convexe en $\pi(\cdot)$ et que la fonction de contrainte $\mathbb{E}[Y(t)] - d$ est affine en $\pi(\cdot)$. Par conséquent, nous pouvons appliquer le théorème well-known de la dualité de Lagrange (voir Luenberger [13], Théorème 1, p.224]) pour obtenir

$$V_{MV}(0, y_0) = \sup_{\zeta\in\mathbb{R}} V_{MVL}(0, y_0).$$

Observant que $V_{MVL}(0, y_0)$ est une fonction quadratique en ζ et que le coefficient quadratique est égal à

$$\tilde{k}(0) - 1 = -\mathbb{E}\left[\int_t^T -\Gamma(s)\frac{\Psi^2(s)}{\Phi(s)}ds\right] < 0,$$

donc $V_{MVL}(0, y_0)$ atteinte son maximum au point

$$\zeta^* = d + \frac{d - \tilde{\Psi}\,(0)\,y_0}{\tilde{k}(0) - 1}.$$

On remplassons ζ^* en $V_{MVL}(0, y_0)$, nous obtenons la valeur maximale comme suit

$$\sup_{\zeta\in\mathbb{R}} V_{MVL}(0, y_0) = \frac{\tilde{k}(0)}{1 - \tilde{k}(0)}\left[d - \frac{\tilde{\Psi}\,(0)}{\tilde{k}(0)}y_0\right]^2 + \frac{\tilde{\Phi}(0)\tilde{k}(0) - \tilde{\Psi}^2\,(0)}{\tilde{k}(0)}y_0^2.$$

donc,

$$V_{MV}(0, y_0) = \frac{\tilde{k}(0)}{1 - \tilde{k}(0)}\left[d - \frac{\tilde{\Psi}\,(0)}{\tilde{k}(0)}y_0\right]^2 + \frac{\tilde{\Phi}(0)\tilde{k}(0) - \tilde{\Psi}^2\,(0)}{\tilde{k}(0)}y_0^2.$$

L'analyse ci-dessus donne le théorème suivant.

Théorème 3.2.1 *Le portefeuille efficace du problème de moyenne variance (3.3) correspondant à la valeur terminale attendue d, en fonction du temps t, le montant de richesse y, est*

$$\hat{\pi}\,(t, y) = \left[y - (d - \zeta^*)\,\frac{\tilde{\Psi}\,(t)}{\tilde{\Phi}\,(t)}\right]\frac{\rho\,(t)}{\sigma^2\,(t)},$$

où

$$\zeta^* = d + \frac{d - \tilde{\Psi}\,(0)\,y_0}{\tilde{k}(0) - 1}.$$

De plus, la frontière efficiente (ou fonction de valeur optimale) pour le problème de variance moyenne (3.3) est

$$\begin{aligned} Var\hat{Y}(T) &= V_{MV}(0, y_0) \\ &= \frac{\tilde{k}(0)}{1 - \tilde{k}(0)}\left[d - \frac{\tilde{\Psi}\,(0)}{\tilde{k}(0)}y_0\right]^2 + \frac{\tilde{\Phi}(0)\tilde{k}(0) - \tilde{\Psi}^2\,(0)}{\tilde{k}(0)}y_0^2, \end{aligned}$$

où $\tilde{\Phi}(t)$, $\tilde{\Psi}(t)$ et $\tilde{k}(t)$ sont donnés par

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Phi}(t) = \mathbb{E}\left(\exp\left(\int_t^T \left(\Gamma(s) - 2\rho(s)\right) ds\right)\right), \\
&\tilde{\Psi}(t) = \mathbb{E}\left(\exp\left(\int_t^T \left(\Gamma(s) - \rho(s)\right) ds\right)\right), \\
&\tilde{k}(t) = 1 - \mathbb{E}\left(\int_t^T \Gamma(s) \frac{\Psi^2(s)}{\Phi(s)} ds\right).
\end{aligned}$$

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié un principe du maximum stochastique suffisant pour les problèmes de contrôle optimal et le système gouverné par une martingale normale. Et nous étudions la relation entre le principe du maximum stochastique et le principe de programmation dynamique pour les diffusions avec des sauts. A titre d'exemple, nous résolvons explicitement un problème de la sélection de portefeuille moyenne-variance.

Bibliographie

[1] A. Bensoussan, Maximum principle and dynamic programming approaches to the optimal control of partially observed diffusions, Stochastics. 9 (1983), pp. 169–222.

[2] B. Øksendal and A. Sulem, Applied Stochastic Control of Jump Diffusions, Springer, Berlin, Germany, 2005.

[3] F. Chighoub, Characterization of optimality for controlled Markovian jump diffusion processes, Nonlinear Studies. 22(3) (2015), pp. 525-541.

[4] F. Chighoub, I.E. Lakhdari, and J.T. Shi, 'Relationship between Maximum Principle and Dynamic Programming for Systems Driven by Normal Martingales', Mathematics in Engineering, Science & Aerospace (MESA), 8 (2017), pp. 91-107.

[5] J. Azéma, C. Rainer, Sur l'équation de structure $d[X, X]_t = dt - dX_t$, Séminaire de Probabilités XXVIII. Lecture Notes in Math. Springer. Berlin., 1583 (1994), pp. 236-255.

[6] J. Yong, X.Y. Zhou, Stochastic Controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations, Springer Verlag, Berlin, 1999.

[7] J.M. Bismut, Conjugate convex functions in optimal stochastic control, Journal of Mathematical Analysis and Applications. 44 (1973), pp. 384–404.

[8] J.T. Shi, Relationship between maximum principle and dynamic programming for stochastic differential games of jump diffusions, International Journal of Control. 87(4) (2014), pp. 693-703.

[9] J.T. Shi, Z.Wu, Relationship between MP and DPP for the optimal control problem of jump diffusions. Applied Mathematics and Optimization, 63(2) (2011), 151–189.

[10] J.T. Shi, Z.Y. Yu, Relationship between maximum principle and dynamic programming for stochastic recursive optimal control problems and applications. Math. Prob. Engin., Vol. 2013, Article ID 285241, 12 pages.

[11] K. Bahlali, F. Chighoub, and B. Mezerdi, On the relationship between the stochastic maximum principle and dynamic programming in singular stochastic control, Stochastics. 84 (2012), pp. 233–249.

[12] M. Dritschel and P. Protter, Complete markets with discontinuous security price, Finance and Stochastics. 3(2) (1999), pp. 203-214.

[13] M. Émery, Chaotic representation property of certain Azéma martingales, Illinois J. Math. 50 (2006), pp. 395-411.

[14] M. Émery, On the Azéma martingales. Séminaire de Probabilités XXIII, Lecture Notes in Math. Springer. Berlin. 1372 (1989), pp. 66-87.

[15] M. Kohlmann, Optimality Conditions in Optimal Control of Jump Processes- Extended Abstract, Proceedings in Operations Research, Physica, W¨urzburg, Germany. 7 (1978), pp. 48–57.

[16] N.C. Framstad, B. Øksendal, A. Sulem, Sufficient stochastic maximum principle for optimal control of jumps diffusions and applications to finance. J. Optim. Theory and Appl. 121, (2004), pp. 77-98.

[17] N.J. Kushner, Necessary conditions for continuous parameter stochastic optimization problems, SIAM J. Control Optim. 10 (1972), pp. 550–565.

[18] P. A. Meyer, Construction de solutions d'équations de structure. Séminaire de Probabilités XXIII, Lecture Notes in Math. Springer. Berlin. 1372 (1989), pp. 142-145.

[19] P. Protter, Stochastic Integration and differential Equations. Springer Verlage, (2003) Second Editions.

[20] R. Buckdahn, J. Ma, R. Catherine, Stochastic control problems for systems driven by normal martingales, The Annals of Applied Probability. 18 (2008), pp. 632-663.

[21] S. Attal, M. Emery, Equations de structure pour les martingales vectorielles. Séminaire de Probabilités XXVI I I.Lecture Notes in Math. 1583 (1994), pp. 256-278.

[22] S. Attal, M. Emery, Martingales d'Azéma bidimensionnelles, Hommage à P.-A. Meyer et J. Neveu. Astérisque. 236(1996), pp. 9-21.

[23] S. Peng, A general stochastic maximum principle for optimal control problems, SIAM J. Control Optim. 28 (1990), pp. 966–979.

[24] S. Tang and X. Li, Necessary conditions for optimal control for stochastic systems with random jumps, SIAM Journal on Control and Optimization. 32 (1994), pp. 1447-1475.

[25] X. Zhang, R.J. Elliott, T.K. Siu, A Stochastic Maximum principle for a markov regime-switching jump-diffusion model and its application to finance, SIAM Journal on Control and Optimization. 50 (2012), pp. 964–990.

[26] Y. Liu, J. Ma, Optimal reinsurance/investment problems for general insurance models, The Annals of Applied Probability. 19 (2009), pp. 1495–1528.

[27] Y.M. Kabanov, On the Pontryagin Maximum Principle for SDEs with a Poisson-Type Driving Noise, Statistics and Control of Stochastic Processes, Edited by B.L. Rozovskii, Y.M. Kabanov, and A.N. Shiryaev,World Scientific, River Edge, New Jersey (1997), pp. 173–190.