République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Hamida Fatma Zohra

Titre :

Sur La Dérivée fractionnaire

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Laadjel Baya**	UMKB	Président
Dr.	**Senouci Assia**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Ouaar Fatima**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut...

Tous les mots ne sauraient exprimer la statitude, la reconnaissance...

Aussi,c'est tout simplement que

Je dédie ce modeste travail à :

A mes chers parents, je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.

Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formules, les fruits de vos innombrables sacrifices, bien que je ne vous en acquitterai jamais assez.

A mes chers et adorables frères et sœurs :

Zineb, Sofien, lyes et **Ines**.

A toute ma famille, et tous mes amis, qui de prés ou de loin m'on supporté, soutenu et encouragé tout au long de ces années.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah, le tout puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.

Je remercie du fond de mon cœur, mes parents pour le soutien inconditionnel dont ils ont fait preuve depuis que mon projet professionnel est défini. Merci pour le soutien financier, moral, psychologique et matériel. Si je suis ici aujourd'hui c'est grâce à vous.

Je tiens à remercier le doctorat **Senouci Assia** d'avoir encadré ce travail, tout au long de ce mémoire, ses conseils m'ont été très précieux.

Je tiens à remercier les membres du jury : le docteur **Laadjel Baya** et le docteur **Ouaar Fatima** qui me font l'honneur de participer à l'examen de ce travail.

Mes remerciements s'adressent également à tous les enseignants du département de mathématiques qui m'ont aidée tout au long des années de ma scolarité.

Enfin, je remercie mes amies et mes camarades de promotion pour ces trois années passées ensemble, dans les meilleurs moments comme dans les pires.

Table des matières

Dédicace i

Remerciements ii

Table des matières iii

Introduction 1

1 La dérivation fractionnaire 3

1.1 Outils de base 3

1.1.1 La fonction Gamma 3

1.1.2 La fonction Bêta 4

1.1.3 La fonction Mittag-leffler 4

1.2 Formule de Dirichlet 5

1.3 Propriété a coefficients du binôme 6

1.4 Formule de Riemann 7

1.5 Approche de Grünwald-Letnikov (G-L) 7

1.5.1 Intégrale fractionnaire au sens de $(G\text{-}L)$ 11

1.5.2 Dérivée fractionnaire au sens de $(G\text{-}L)$ 12

1.5.3 Propriétés d'approche de (G-L) 13

1.6 Approche de Riemann-Liouville $(R\text{-}L)$ 14

1.6.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$ 14

1.6.2 L'intégrale de Riemann-Liouville $(R\text{-}L)$ 16

1.6.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville(R-L) 20
1.6.4 Propriétés d'approche de (R-L) 20
1.7 Approche de Caputo 22
1.7.1 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo 22
1.7.2 Propriétés d'approche de Caputo 22
1.8 Lien entre les dérivées fractionnaires de Caputo et de Riemann-Liouville . . . 23
1.9 Lien entre les dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov et de Riemann-Liouville 24

2 Exemples des dérivées fractionnaires 25

2.1 Exemples d'approche de Grünwald-Letnikov 25
2.1.1 Dérivée fractionnaire de la fonction $f = (x - a)^v$ 25
2.1.2 Dérivée fractionnaire d'une fonction constante 26
2.2 Exemples d'approche de Riemann-Liouville (R-L) 27
2.2.1 Intégrale fractionnaire de la fonction $f(x) = (x - a)^v$ 27
2.2.2 Dérivée fractionnaire de la fonction $f(x) = (x - a)^v$ 28
2.2.3 Dérivée fractionnaire d'une fonction constante 28
2.2.4 Dérivée fractionnaire de la fonction $f(x) = (x)^v$ 29
2.2.5 Dérivée fractionnaire de la fonction exponentielle 31
2.2.6 Dérivée fractionnaire de la fonction trigonométrique 33
2.3 Exemples d'approche de Caputo 34
2.3.1 Dérivée fractionnaire de la fonction $f(x) = (x - a)^v$ 34
2.3.2 Dérivée fractionnaire d'une constante 34
2.4 La transformé de Laplace 35
2.5 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires 36
2.5.1 Transformée de Laplace de l'intégral fractionnaire de (R-L) 36
2.5.2 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de (R-L) 37
2.5.3 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de caputo . . . 37

2.5.4 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov(G-L) 38
2.6 Propriétés générales des dérivées fractionnaires 39
2.6.1 Linéarité 39
2.6.2 La règle de Leibniz 39

Conclusion **40**

Bibliographie **41**

Annexe B : Abréviations et Notations **43**

Introduction

Quand on introduit la notion de dérivée, on se rende vite compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle-même, et par la même, et par la même introduire la dérivée seconde, puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration, opérateur inverse de la dérivée, peut éventuellement être considérée comme une dérivée d'ordre "moins un". On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordres successifs ont un équivalent d'ordre fractionnaire.

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{me} siècle, l'époque ou Newton et **Leibniz** ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n}{dt^n}$ pour désigne la n^{me} dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à **l'Hôspital** (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?.

Cette lettre de **l'Hôspital**, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que **l'Hôspital** a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est à dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des Mathématique. Une liste de mathématiciens qui ont fournit des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du $20^{éme}$ siècle, inclut :

`P.S.Laplace` (1812), `J.B.J. Fourier` (1822), `N.H. Abel` (1823-1826), `J.Liouville` (1832-1873),`B. Riemann`(1847), `H.Holomgren` (1865-1867), `A.K. Grunwald` (1867,1872), `A.V. Letnikov` (1868-1872), `H. Laurent` (1884), `P.A. Nekrassov` (1888), `A.Krug` (1890), `J.Hadamard` (1892), `O.Heaviside` (1892-1912), S.Pincherle (1902), G.H.Hardy et J.E.Littlewood (1917-1928), H.Weyl (1917), P.L'evy (1923), A.Marchaud (1927), H.T.Davis (1924-1936), A.Zygmund (1935-1945), E.R.Amour (1938-1996), A.Erdélyi (1939-1965), H.Kober (1940), D.V.Widder (1941), M.Riesz (1949).

Dans ce mémoire on introduit deux chapitres :

Dans le premier chapitre nous étudions quelque rappel sur les fonctions Gamma d'Euler et béta, et puis on étudie en détail les trois approches des dérivées fractionnaires les plus populaires et les plus pratiques (l'approche de Grünwald-Letnikov, de Riemann Liouville et celle de Caputo) ainsi que leurs propriétés.

Dans le deuxième chapitre nous présentons quelques exemples de calcul, et de plus la transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov, de Riemann Liouville et de Caputo.

Chapitre 1

La dérivation fractionnaire

1.1 Outils de base

Dans cette section nous présentons des définitions et quelques propriétés pour les fonctions : Gamma, Béta et Mittag-Leffler.

1.1.1 La fonction Gamma

Définition 1.1 *Pour $x \in \mathbb{C}$, la fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \qquad /Re(x) \succ 0. \tag{1.1}$$

Cette fonction généralise la factoriel $n!$ à tous les nombre réels.

Propriétés 1.1 *:*

1. *En intégrant la formule 1.1 par partie :*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad , \mathrm{Re}(x) \succ 0. \tag{1.2}$$

2. *en particulier :*

$$\Gamma(x) = (x-1)! \qquad , \forall x \in \mathbb{N}^*. \tag{1.3}$$

3. *Comme conséquence :*

$$\Gamma(x+1) = x! \qquad ,\forall x \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

4. $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,....\}, \forall m \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(x+m) = x(x+1)....(x+m-1)\Gamma(x). \tag{1.5}$$

5. *Pour* $x = \frac{1}{2}$,

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}. \tag{1.6}$$

1.1.2 La fonction Bêta

Définition 1.2 *La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tout complexes* x *et* y *par :*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \qquad /Re(x) \succ 0 \quad et \quad Re(y) \succ 0. \tag{1.7}$$

Elle est reliée aux fonctions Gamma par la relation suivante :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1.8}$$

1.1.3 La fonction Mittag-leffler

Définition 1.3 *Pour* $x \in \mathbb{C}, \alpha \in]0,1[$, *la fonction Mittag-leffler est définie par :*

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \qquad /Re(x) \succ 0. \tag{1.9}$$

Propriétés 1.2 *:*

- *Si* $\alpha = 1$:

$$E_1(x) = e^x. \tag{1.10}$$

- *Si* $\alpha \succ 0,\ \beta \succ 0$:

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \tag{1.11}$$

1.2 Formule de Dirichlet

Définition 1.4 *Soient* $h(x, y)$ *une fonction continue et* α, β *deux réels positifs. L'expression suivante est dite formule de Dirichlet.*

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1} h(x,y) dy = \int_0^t dy \int_y^t (t-x)^{\alpha-1} (x-y)^{\beta-1} h(x,y) dx. \tag{1.12}$$

Certains cas particuliers de la formule de Dirichlet sont d'un intérêt particulier.

Par exemple, si on prend

$$h(x, y) = g(x)f(y),$$

et

$$g(x) \equiv 1.$$

Alors :

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1} f(y) dy = B(\alpha, \beta) \int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1} f(y) dy, \tag{1.13}$$

où B *est la fonction Bêta.*

1.3 Propriété a coefficients du binôme

La formule du binôme généralisée $\binom{\alpha}{r}$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$, et $r \in \mathbb{N}$, $\alpha \succ r$ est donne par :

• Si $r = 0$:

$$\binom{\alpha}{0} = 1. \tag{1.14}$$

• Si $r \in \mathbb{N}^*$:

$$\binom{\alpha}{r} = \frac{\alpha!}{(\alpha - r)!r!} = \frac{\alpha(\alpha-1).....(\alpha-r+1)}{r!}. \tag{1.15}$$

• Si $\alpha < r$:

$$\binom{\alpha}{r} = 0. \tag{1.16}$$

• Soit :

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)....(\alpha+r-1) &= (-1)^r(-1-r-\alpha), \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

•

$$(-1)^r\binom{\alpha}{r} = \binom{r-\alpha-1}{r}. \tag{1.18}$$

•

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{\alpha}{r}\binom{\beta}{n-r} = \binom{\alpha+\beta}{n}. \tag{1.19}$$

•

$$\binom{\alpha}{r} = \binom{\alpha-1}{r} + \binom{\alpha-1}{r-1}. \tag{1.20}$$

• Si $\alpha < 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{\alpha}{r} &= (-1)^n\binom{\alpha-1}{n}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(n+1)}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

1.4 Formule de Riemann

Définition 1.5 *La fonction f est donc aussi intégrable si ses somme de Riemann convergent. L'intégrale de f est alors aussi la limite des sommes de Riemann.*

Souvent, on prend la subdivision uniforme et $\int_a^b f(x)dx$ est vue comme limite des sommes de Riemann classiques :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)dx, \tag{1.22}$$

car le pas de la subdivision uniforme est $\frac{b-a}{n}$ qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

1.5 Approche de Grünwald-Letnikov (G-L)

L'idée de cette approche est de généralisation la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires.

Soit $f(x)$ la fonction continue sur $[a, b]$, la dérivée première de la fonction $f(x)$ est définie par :

$$f'(x) = D^{(1)}f(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \tag{1.23}$$

et la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} D^{(2)}f(x) &= \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h}, \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Et, par récurrence, la dérivée d'ordre entier n si n est un nombre entier positif ou nul :

$$D^{(n)}f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(x-rh). \tag{1.25}$$

Cette formule représente la dérivée d'ordre entière n si n est positif, et l'intégrale répétée-n fois si n est négatif.

Où $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ coefficients du binôme.

En général, si α est un entier arbitraire, n est aussi un entier :

$$D^{(\alpha)}f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} f(x - rh). \tag{1.26}$$

Cette formule représente la dérivée d'ordre non entière d'ordre α.

• Si $\alpha \leq n$:

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)}f(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} f(x - rh), \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{r=0}^{\alpha} (-1)^r \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} f(x - rh) + \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{r=\alpha+1}^{n} (-1)^r \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} f(x - rh)}_{=0 d'aprés 1.16}, \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{r=0}^{\alpha} (-1)^r \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} f(x - rh), \\ &= D^{(n)}f(x). \end{aligned}$$

• Si $\alpha > 0$:

Par la relation :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)....(\alpha+r-1)}{r!}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -\alpha \\ r \end{pmatrix} &= \frac{-\alpha(-\alpha-1)(-\alpha-2)....(-\alpha-r+1)}{r!} = (-1)^r \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix}, \\ &= \frac{\Gamma(r-\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-\alpha)}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Cette expression généralisée aux cas entiers négatif ou nul.

En remplaçant α dans 1.26 par $(-\alpha)$:

$$\begin{aligned} D^{(-\alpha)}f(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{-\alpha}}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{-\alpha}{r}f(x-rh),\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{-\alpha}}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\left[\underbrace{(-1)^r\binom{\alpha}{r}}_{d'apres1.27}\right]f(x-rh),\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{-\alpha}}\sum_{r=0}^{n}(1)^r\binom{\alpha}{r}f(x-rh), \end{aligned}$$

$$D^{(-\alpha)}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{-\alpha}}\sum_{r=0}^{n}\binom{\alpha}{r}f(x-rh).$$

D'après 1.27 :

$$D^{(-\alpha)}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{-\alpha}}\sum_{r=0}^{n}\frac{\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(\alpha)}f(x-rh),$$

où α est un nombre entier positif.

Si α est fixé alors $D^{(-\alpha)}f(x)$ tend vers une limite intéressante 0 quand h tend vers 0.Pour arriver à une limite non nulle, nous devons supposer que $n \to +\infty$ quand $h \to 0$ (on peut prendre $h = \frac{x-a}{n}$ ou a est une constante réel).

Considérons quelques cas particuliers :

Pour $\alpha = 1$, et d'après 1.14 on a :

$$D^{(-1)}f(x) = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=0}^{n} f(x-rh).$$

D'après 1.22, en tenant compte de $h = \frac{x-a}{n}$

$$D^{(-1)}f(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Prenons $\alpha = 2$, dans ce cas manifold :

$$\binom{2}{r} = \frac{2.3...(2+r-1)}{r!} = r+1,$$

et on a :

$$D^{(-2)}f(x) = \lim_{h\to 0} h \sum_{r=0}^{n} (r+1)hf(x-rh),$$

on notant par $x+h=y$:

$$\begin{aligned}
D^{(-2)}f(x) &= \lim_{h\to 0} h \sum_{r=0}^{n} (r+1)hf[(x+h)-h-rh],\\
&= \lim_{h\to 0} h \sum_{r=0}^{n} (r+1)hf[(x+h)-h(r+1)],\\
&= \lim_{h\to 0} h \sum_{r=0}^{n+1} (rh)f(y-rh),\\
&= \int_a^x (x-t)f(t)dt.
\end{aligned}$$

Et par récurrence :

$$\begin{aligned}
D^{(-\alpha)}f(x) &= \frac{1}{(\alpha-1)!}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt,\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt.
\end{aligned}$$

On adopte alors, la définition suivante :

1.5.1 Intégrale fractionnaire au sens de (*G-L*)

Définition 1.6 *:*

• *Soit $\alpha > 0$, et $f(x)$ est une fonction continue, l'intégrale fractionnaire de (G-L) est définie par :*

$$ {}^{G}D^{(-\alpha)}f(x) = \lim_{h\to 0} h^{\alpha} \sum_{r=0}^{n} \binom{\alpha}{r} f(x-rh), \tag{1.28} $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \tag{1.29} $$

où $\binom{\alpha}{r} = \frac{\alpha(\alpha+1).....(\alpha+r-1)}{r!}$, *et les valeurs de n et h sont reliées par $nh = x - a$.*

• Si la dérivée $f'(x)$ est continue dans $[a, b]$, alors l'intégration par parties donne :

$$ {}^{G}D^{(-\alpha)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, $$

en intégrant par partie :

$$ f(t) \to f'(t), $$
$$ (x-t)^{\alpha-1} \to \frac{-1}{\alpha}(x-t)^{\alpha}, $$

$$ {}^{G}D^{(-\alpha)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-f(t)}{\alpha}(x-t)^{\alpha}\Big|_a^x + \frac{1}{\alpha}\int_a^x (x-t)^{\alpha} f'(t)dt \right], $$
$$ = \frac{f(a)}{\underbrace{\alpha\Gamma(\alpha)}_{d'apr\acute{e}s 1.2}}(x-a)^{\alpha} + \frac{1}{\underbrace{\alpha\Gamma(\alpha)}_{d'apr\acute{e}s 1.2}} \int_a^x (x-t)^{\alpha} f'(t)dt, $$

$$ {}^{G}D^{(-\alpha)}f(x) = \frac{f(a)(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha} f'(t)dt. \tag{1.30} $$

• Si la fonction $f(x)$ est de classe C^n, on obtient :

$$ {}^{G}D^{(-\alpha)}f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+n-1} f^{(n)}(t)dt. \tag{1.31} $$

1.5.2 Dérivée fractionnaire au sens de (*G-L*)

Soit $\alpha \succ 0$, et $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle finie $[a,b]$, la dérivée fractionnaire de (G-L) est définie par :

$$^{G}D^{(\alpha)}f(x) = \lim_{h\to 0} h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{\alpha}{r}f(x-rh). \tag{1.32}$$

D'après 1.20 :

$$^{G}D^{(\alpha)}f(x) = \lim_{h\to 0} h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\left[\binom{\alpha-1}{r}+\binom{\alpha-1}{r-1}\right]f(x-rh),$$

$$\begin{aligned}
^{G}D^{(\alpha)}f(x) &= \lim_{h\to 0}\left[h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{\alpha-1}{r}f(x-rh)+h^{-\alpha}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\binom{\alpha-1}{r-1}f(x-rh)\right],\\
&= \lim_{h\to 0}\left[h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{\alpha-1}{r}f(x-rh)+h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r+1}\binom{\alpha-1}{r}f(x-(r+1)h)\right],\\
&= \lim_{h\to 0}\left[(-1)^n\binom{\alpha-1}{n}h^{-\alpha}f(a)+h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{\alpha-1}{r}\Delta f(x-rh)\right],
\end{aligned}$$

où

$$\Delta f(x-rh) = f(x-rh)-f(x-(r+1)h),$$

$$\begin{aligned}
^{G}D^{(\alpha)}f(x) = \lim_{h\to 0}&\left[(-1)^n\binom{\alpha-1}{n}h^{-\alpha}f(a)+(-1)^{n-1}\binom{\alpha-2}{n-1}h^{-\alpha}\Delta f(a+h)\right.\\
&\left.+h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r\binom{\alpha-2}{r}\Delta^2 f(x-rh)\right],\\
&= \dots\dots\dots\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\sum_{k=0}^{m}(-1)^{n-k}\binom{\alpha-k-1}{n-k}h^{-\alpha}\Delta^k f(a+kh)\right.\\
&\left.+h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r\binom{\alpha-m-1}{k}\Delta^{m+1}f(x-rh)\right].
\end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{h\to 0}\left[(-1)^{n-k}\binom{\alpha-k-1}{n-k}h^{-\alpha}\Delta^k f(a+kh)\right]=\frac{f^{(k)}(x-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)},$$

et

$$\lim_{h\to 0}\left[h^{-p}\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r\binom{\alpha-m-1}{r}\Delta^{m+1}f(x-rh)\right]=\frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)}\int_a^x(x-t)^{m-\alpha}f^{(m+1)}(t)dt.$$

Donc :

$$^G D^{(\alpha)}f(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)}\int_a^x(x-t)^{m-\alpha}f^{(m+1)}(t)dt. \quad (1.33)$$

La formule 1.33 est obtenue sous l'hypothèse que les dérivées $f^{(k)}(x)$, $(k=\overline{1,m+1})$ sont continues dans l'intervalle fermé $[a,x]$ et que m est un nombre entier vérifiant la condition $m\succ\alpha-1$. La plus petite valeur possible de m est déterminée par l'inégalité :

$$m<\alpha<m+1.$$

• Donc, Si la fonction $f(x)$ est de classe C^n, on obtient :

$$^G D^{(\alpha)}f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(-\alpha+n)}\int_a^x(x-t)^{-\alpha+n-1}f^{(n)}(t)dt. \quad (1.34)$$

1.5.3 Propriétés d'approche de (G-L)

Composition avec les dérivées d'ordre entier

Pour m entier positif et α non entier on a :

$$\frac{d^m}{dx^m}(^G D^{(\alpha)}f(x))=^G D^{(m+\alpha)}f(x),$$

et
$$^{G}D^{(\alpha)}(\frac{d^m}{dx^m}f(x)) =^{G} D^{(m+\alpha)}f(x) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha-m}}{\Gamma(k-\alpha-m+1)}.$$

Composition avec les dérivées fractionnaires

Soit m, n deux nombre entiers et α, β non entier.

• Si $\beta \prec 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

$$^{G}D^{(\alpha)}(^{G}D^{(\beta)}f(x)) =^{G} D^{(\alpha+\beta)}f(x).$$

• Si $0 \preceq m-1 \prec \beta \prec m$, $\alpha \prec 0$, $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = \overline{0, m-2}$, alors :

$$^{G}D^{(\alpha)}(^{G}D^{(\beta)}f(x)) =^{G} D^{(\alpha+\beta)}f(x).$$

• Si $0 \preceq m-1 \prec \beta \prec m$, $0 \preceq n-1 \prec \alpha \prec n$ et $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = \overline{0, r-2}$ avec $r = \max(m,n)$ alors :

$$^{G}D^{(\alpha)}(^{G}D^{(\beta)}f(x)) =^{G} D^{(\beta)}(^{G}D^{(\alpha)}f(x)) =^{G} D^{(\alpha+\beta)}f(x).$$

1.6 Approche de Riemann-Liouville (*R-L*)

Cette section sera consacrée aux définitions élémentaires pour les intégrales et les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville, et quelques propriétés de ces notions.

1.6.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

Propriétés 1.3 *Soit $f \in C([a,b])$, $x \in]a,b[$ la primitive d'ordre 1 de f est donnée par :*

$$I_a^{(1)}f(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{1.35}$$

Et la primitive d'ordre n est définie par :

$$I_a^{(n)}f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{(n-1)}f(t)dt. \tag{1.36}$$

Preuve. On montre la première égalité.

Vérifions que la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Calculons,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt],\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt. \qquad \text{(relation de Chalese)}\end{aligned}$$

D'après le théorème de la moyenne, $\exists\varepsilon \in [x,\, x+h]$ tel que :

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\varepsilon).$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{\epsilon\to x} f(\varepsilon) = f(x).$$

On montre maintenant la deuxième égalité.

En effet, les primitives d'ordre supérieur sont données par :

$$I_a^{(2)} = \int_a^x \left[I_a^{(1)}f(s)\right] ds = \int_a^x \left[\int_a^s f(t)dt\right] ds,$$

en utilisant la formule de Dirichlet 1.13 on a :

$$I_a^{(2)}f(x) = \int_a^x \left[\int_t^x f(t)dt\right] ds = \int_a^x f(t)\left[\int_t^x ds\right] dt,$$

$$I_a^{(2)}f(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt.$$

De même on a :

$$\begin{aligned} I_a^{(3)} f(x) &= \int_a^x \left[I_a^{(2)} f(s) \right] ds, \\ &= \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f(t) dt. \end{aligned}$$

Par récurrence, on a :

$$I_a^{(n)} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t) dt.$$

■

On adopte alors, la définition suivante :

1.6.2 L'intégrale de Riemann-Liouville (*R-L*)

Définition 1.7 *: Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in C([a,b])$. On appelle intégrale de (R-L) d'ordre α de f l'intégrale suivante :*

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \qquad /x \in]a,b[. \tag{1.37}$$

Remarque 1.1 *On peut écrire $I_a^{(\alpha)}$ sous la forme suivante :*

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} t^{\alpha-1} f(x-t) dt. \tag{1.38}$$

Propriétés 1.4 *Pour toute fonction continue f, on a :*

- $$I_a^{(\alpha)} [I_a^{(\beta)} f(x)] = I_a^{(\alpha+\beta)} f(x) \qquad ,\alpha, \beta > 0, \tag{1.39}$$

- $$\frac{d}{dx} [I_a^{(\alpha)} f(x)] = I_a^{(\alpha-1)} f(x) \qquad ,\alpha > 1. \tag{1.40}$$

Preuve. On montre la première égalité.

$$\begin{aligned}
I_a^{(\alpha)}[I_a^{(\beta)}f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}[I^{\beta}f(s)]ds, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^s (s-t)^{\beta-1}f(t)dt\right]ds, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}ds\int_a^s (s-t)^{\beta-1}f(t)dt.
\end{aligned}$$

D'après la formule de Dirichlet 1.13, on a :

$$\begin{aligned}
I_a^{(\alpha)}[I_a^{(\beta)}f(x)] &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1}f(t)dt, \\
&= I_a^{(\alpha+\beta)}f(x).
\end{aligned}$$

D'où la première égalité.

On montre maintenant la deuxième égalité.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[I_a^{(\alpha)}f(x)] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt\right], \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dx}\left[\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt\right].
\end{aligned}$$

Puisque $f(t)$ et $(x-t)^{\alpha-1}$ sont continues donc l'application :

$$t \to (x-t)^{\alpha-1}f(t),$$

est continue, et on a Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[I_a^{(\alpha)}f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{d}{dx}[(x-t)^{\alpha-1}f(t)]dt, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2}f(t)dt, \\
&= \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2}f(t)dt, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2}f(t)dt, \\
&= I_a^{(\alpha-1)}f(x),
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ∎

Remarque 1.2 *:Nous avons, pour tout* $x \in [a,b]$:

$$I_a^{(\alpha)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt.$$

Par l'intégral par partie :

$$\begin{aligned}
f(t) &\rightarrow f'(t), \\
(x-t)^{\alpha-1} &\rightarrow \frac{-1}{\alpha}(x-t)^{\alpha},
\end{aligned}$$

donc :

$$I_a^{(\alpha)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{-f(t)}{\alpha}(x-t)^{\alpha}\bigg|_a^x + \frac{1}{\alpha}\int_a^x (x-t)^{\alpha}f'(t)dt\right], \tag{1.41}$$

$$I_a^{(\alpha)}f(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha} + I_a^{(\alpha+1)}f'(x).$$

• On déduit,

1. Pour $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned}
I_a^{(0)}f(x) &= f(a) + I_a^{(1)}f(x), \\
&= f(a) + \int_a^x f'(t)dt = f(x).
\end{aligned}$$

2. Pour $\alpha = -1$:

$$I_a^{(-1)} f(x) = f'(x) = \frac{d}{dx} f.$$

D'où

$$I_a^{(-1)} f(x) = \frac{d}{dx} f(x).$$

Remarque 1.3 *L'identité 1.39 n'est pas valable que si $\alpha >, \beta < 0$ car nous avons, par exemple (pour $\alpha = 1, \beta = -1$) :*

$$I_a^{(1)}(I_a^{(-1)} f(x)) = I_a^{(1)}(\frac{d}{dx} f(x)) = f(x) - f(a) \neq I_a^{(0)} f(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

• Une simple itération de la formule 1.41 donne :

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)} f^{(j)}(a) + I_a^{\alpha+1} f^{(n)}(x) \quad /x \in [a, b].$$

1.6.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville(R-L)

Définition 1.8 *:Soit $\alpha \in]n-1, n[, n \in \mathbb{N}$. La dérivée fractionnaire de (R-L) d'ordre α est définie par :*

$$
\begin{aligned}
{}^{R}D^{(\alpha)} f(x) &= D^{(n)}[I_a^{(n-\alpha)} f(x)], \\
&= (\frac{d}{dx})^n [I_a^{(n-\alpha)} f(x)] \qquad\qquad /x \in]a, b[.
\end{aligned} \tag{1.42}
$$

D'après 1.37 :

$$
{}^{R}D^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (\frac{d}{dx})^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad , \ n = [\alpha] + 1. \tag{1.43}
$$

Ou [.] est le partie entier d'un nombre réel.

• Si $0 < \alpha < 1$:

$$
{}^{R}D^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt.
$$

• Si f est de classe C^n, alors en faisant des intégrations par parties et des dérivations répétées on obtient :

$$
{}^{R}D^{(\alpha)} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt. \tag{1.44}
$$

1.6.4 Propriétés d'approche de (*R-L*)

Composition avec l'intégrale fractionnaire

Soit α, $\beta > 0$, telle que $\alpha \in [n-1, n]$, $\beta \in [m-1, m]$.

• L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire.

$$
{}^{R}D^{(\alpha)} (I_a^{(\beta)} f(x)) = f(x),
$$

en général on a :

$$^{R}D^{(\alpha)}(I^{(\beta)}f(x)) =^{R} D^{(\alpha-\beta)}f(x).$$

Et si $\alpha - \beta < 0$,

$$^{R}D^{(\alpha-\beta)}f(x) = I_a^{(\beta-\alpha)}f(x).$$

• En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas.

$$^{R}D^{(-\alpha)}(^{R}D^{(\beta)}f(x)) =^{R} D^{(\beta-\alpha)}f(x) - \sum_{k=1}^{m}[D^{(\beta-k)}f(x)]_{x=a}\frac{(x-a)^{\alpha-k}}{(\alpha-k+1)},$$

avec $m - 1 \leq \beta < m$.

Composition avec les dérivées d'ordre entier

Pour n un nombre entier et α non entier.

La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne commutent que si : $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = \overline{0, n-1}$.

$$\frac{d^n}{dx^n}[^{R}D^{(\alpha)}f(x)] =^{R} D^{(n+\alpha)}f(x),$$

mais :

$$^{R}D^{(\alpha)}[\frac{d^n}{dt^n}f(x)] =^{R} D^{(n+\alpha)}f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}$$

Composition avec les dérivées fractionnaires

Pour α et β deux nombres non entiers tel que $\alpha \in [n-1; n]$, et $\beta \in [m-1; m]$, alors :

$$^{R}D^{(\alpha)}(^{R}D^{(\beta)}f(x)) =^{R} D^{(\alpha+\beta)}f(x) - \sum_{k=1}^{n}[^{R}D^{(\alpha-k)}f(x)]_{x=a}\frac{(x-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(-\alpha-k+1)},$$

et

$$^{R}D^{(\beta)}(^{R}D^{(\alpha)}f(x)) =^{R} D^{(\alpha+\beta)}f(x) - \sum_{k=1}^{n}[^{R}D^{(\alpha-k)}f(x)]_{x=a}\frac{(x-a)^{-\beta-k}}{\Gamma(-\beta-k+1)},$$

par la suite deux opérateurs de dérivation fractionnaire ${}^{R}D^{(\alpha)}$ et ${}^{R}D^{(\beta)}$ $(\alpha \neq \beta)$, ne commutent que si $[{}^{R}D^{(\beta-k)}f(x)]_{x=a}$ pour tout $k = \overline{1,n}$, et $[{}^{R}D^{(\alpha-k)}f(x)]_{x=a}$ pour tout $k = \overline{1,m}$.

1.7 Approche de Caputo

1.7.1 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.9 *:Soient $\alpha \in]n-1, n[$ et $n \in \mathbb{N}^*$et f une fonction de classe $C^n\left([a,b]\right)$,la dérivée de caputo d'ordre α de la fonction f est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{(\alpha)}f(t) &= I_a^{(n-\alpha)}(D^{(n)}f(x)), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-\alpha-1}dt. \end{aligned} \tag{1.45}$$

1.7.2 Propriétés d'approche de Caputo

Composition avec l'operateur d'intégration fractionnaire

Si $f(x)$ est une fonction continue on :

$${}^{C}D^{(\alpha)}[I_a^{(\alpha)}f(x)] = f(x),$$

et

$$I_a^{(\alpha)}[{}^{C}D^{(\alpha)}f(x)] = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!},$$

donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

1.8 Lien entre les dérivées fractionnaires de Caputo et de Riemann-Liouville

On a, pour $x \in [0, b]$:

$$I_0^{(m-\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t) dt.$$

En intégrons par partie :

$$\begin{aligned} f(t) &\to f'(t), \\ (x-t)^{m-\alpha-1} &\to \frac{-(x-t)^{m-\alpha}}{m-\alpha}. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} I_0^{(m-\alpha)} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left[[\frac{-(x-t)^{m-\alpha}}{m-\alpha} f(t)]_0^x + \frac{1}{m-\alpha} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha} f'(t) dt \right], \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} f(0) x^{m-\alpha} \\ &- \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+2)} f'(0) x^{m-\alpha+1} + (I^{(m-\alpha+2)} f'')(x). \end{aligned}$$

Par une simple itération on trouve :

$$I_0^{(m-\alpha)} f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x^{m-\alpha+j}}{\Gamma(m-\alpha+j+1)} f^{(j)}(0) + (I_0^{(2m-\alpha)} f^{(m)})(x).$$

En appliquant $\left(\frac{d}{dx}\right)^m$ on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^m (I_0^{(m-\alpha)} f)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[\sum_{j=0}^{m-1} \frac{x^{m-\alpha+j}}{\Gamma(m-\alpha+j+1)} f^{(j)}(0) + (I_0^{(2m-\alpha)} f^{(m)})(x) \right], \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x^{-\alpha+j}}{\Gamma(-\alpha+j+1)} f^{(j)}(0) + (I_0^{(m-\alpha)} f^{(m)})(x). \end{aligned}$$

Ainsi, la relation entre les deux approche est donnée par :

$$({}^{R}D_0^{(\alpha)} f)(x) = ({}^{C}D_0^{(\alpha)} f)(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x^{-\alpha+j}}{\Gamma(-\alpha+j+1)} f^{(j)}(0). \tag{1.46}$$

Alors, pour $x \in [a, b]$, et $\alpha > 0$, avec $\alpha \in [n-1; n[$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$^{R}D_a^{(\alpha)} f(x) =^{C} D_a^{(\alpha)} f(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x^{-\alpha+j}}{\Gamma(-\alpha+j+1)} f^{(j)}(a).$$

On déduit que si $f^{(j)}(a) = 0$ pour $j = \overline{0, m-1}$, on aura $^{R}D_a^{(\alpha)} f(x) =^{C} D_a^{(\alpha)} f(x)$.

1.9 Lien entre les dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov et de Riemann-Liouville

Si f est de classe C^n, alors en faisant des intégrations par parties et des différentiations répétées on obtient :

$$\begin{aligned} ^{R}D^{(\alpha)} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{n-\alpha} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt, \qquad (1.47) \\ &=^{G} D^{(\alpha)} f(x). \end{aligned}$$

Dans ce cas l'approche de (*G-L*) et l'approche de (*R-L*) sont équivalentes.

Chapitre 2

Exemples des dérivées fractionnaires

2.1 Exemples d'approche de Grünwald-Letnikov

2.1.1 Dérivée fractionnaire de la fonction $f = (x-a)^v$

Calculons la dérivée fractionnaire ${}^{G}D^{(\alpha)}f(x)$ au sens de Grünwald-Lutnikov de la fonction polynôme $f = (x-a)^v$,où v est un nombre réel, α est un nombre non entier.

On va commencer par considérer des valeurs négatives de α, ce qui veut dire qu'on va commencer par évaluer l'intégrale fractionnaire d'ordre $(-\alpha)$. Utilisons la formule 1.29 :

$$ {}^{G}D^{(\alpha)}(x-a)^v = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1}(t-a)^v dt, \tag{2.1} $$

supposons $v \succ -1$ pour la convergence de l'intégrale. En appliquant, dans 2.1 le changement de variable $t = a + \varepsilon + (x-a)$ et on utilisant la définition de fonction Bêta 1.7, on obtient :

$$ \begin{aligned} {}^{G}D^{(\alpha)}(x-a)^v &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}(x-a)^{v-\alpha} \int_0^1 \varepsilon^v (1-\varepsilon)^{-\alpha-1} d\varepsilon, \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} B(-\alpha, v+1)(x-a)^{v-\alpha}, \end{aligned} $$

$$ {}^{G}D^{(\alpha)}(x-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-\alpha+1)}(x-a)^{v-\alpha} \qquad / \ \alpha < 0; v \succ -1. \tag{2.2} $$

Si $\alpha \in [m, m+1], m \in \mathbb{N}$, d'après la formule 1.33, on a besoin d'imposer $v > m$ pour la convergence de l'integrale de 1.33. On a alors :

$$^{G}D^{(\alpha)}(x-a)^{v}=\frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)}\int_{a}^{x}(x-t)^{m-\alpha}\frac{d^{m+1}(t-a)^{v}}{dt^{m+1}}dt.$$

En tenant compte de

$$\begin{aligned}\frac{d^{m+1}(t-a)^{v}}{dt^{m+1}}&=v(v-1)......(v-m)(t-a)^{v-m+1},\\&=\frac{\Gamma(v+1)}{v-m}(t-a)^{v-m-1}.\end{aligned}$$

Par changement de variable $t=a+\varepsilon(x-a)$, on aura :

$$\begin{aligned}{}_{a}^{G}D_{t}^{(\alpha)}(x-a)^{v}&=\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-\alpha+m+1)}\int_{a}^{x}(x-t)^{m-\alpha}(t-a)^{v-m-1}dt,\\&=\frac{\Gamma(v+1)B(-\alpha+m+1,v-m)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-\alpha+m+1)}(x-a)^{v-\alpha},\\&=\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(-\alpha+v+1)}(x-a)^{v-\alpha}.\end{aligned}$$

Donc, pour $(\alpha<0,v\succ-1)$ ou bien $(0\leq m\leq\alpha\prec m+1,v\succ m)$

$$^{G}D^{(\alpha)}(x-a)^{v}=\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(-\alpha+v+1)}(x-a)^{v-\alpha}.$$

2.1.2 Dérivée fractionnaire d'une fonction constante

Soit $f(x)=c$, $f^{(k)}(x)=0$ pour $k=\overline{1,n}$, α non entier, on a :

$$\begin{aligned}^{G}D^{(\alpha)}f(x)&=\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}}_{=0}+\underbrace{\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt}_{=0},\\&=\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.\end{aligned}$$

En générale la dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est pas nulle ni constante.

2.2 Exemples d'approche de Riemann-Liouville (*R-L*)

2.2.1 Intégrale fractionnaire de la fonction $f(x) = (x-a)^v$

On va calculer l'intégrale fractionnaire $I_a^{(\alpha)} f(x)$ au sens de Riemann-Liouville de la fonction puissance $f(x) = (x-a)^v$, où v est un nombre réel.

Utilisons la formule 1.37

$$I_a^{(\alpha)}(x-a)^v = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^v dt, \tag{2.3}$$

et supposons que $v > -1$ pour la convergence de l'intégrale. En appliquant dans 2.3 le changement de variable $t = a + \zeta(x-a)$, $dt = (x-a)d\zeta$, $0 \leq \zeta \leq 1$, et en utilisant la définition de la fonction Bêta 1.7 nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_a^{(\alpha)}(x-a)^v &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [x-(a+\zeta(x-a))]^{\alpha-1}[\zeta(x-a)]^v (x-a)d\zeta, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x-a)(1-\zeta)]^{\alpha-1}\zeta^v (x-a)^{v+1} d\zeta, \end{aligned}$$

$$I_a^{(\alpha)}(x-a)^v = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+v} \int_0^1 (1-\zeta)^{\alpha-1}\zeta^v d\zeta, \tag{2.4}$$

où $\zeta = 0$ quand $t = a$, $\zeta = 1$ quand $t = x$ et $\zeta = \frac{t-a}{x-a}$.

Alors,

$$I_a^{(\alpha)}(x-a)^v = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} B(v+1, \alpha)(x-a)^{\alpha+v}. \tag{2.5}$$

L'utilisation de la formule 1.8 donne le résultat :

$$I_a^{(\alpha)}(x-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+\alpha+1)}(x-a)^{v+\alpha} \qquad ,\alpha > 0, v > -1. \tag{2.6}$$

2.2.2 Dérivée fractionnaire de la fonction $f(x) = (x-a)^v$

Calculons maintenant la dérivée fractionnaire $D^{(\alpha)}f(x)$, au sens de Riemann-Liouville de la fonction puissance $f(x) = (x-a)^v$, où v est un nombre réel.

Soit α non entier et $\alpha \in [n-1, n[, n \in \mathbb{N}$, d'après la formule 1.42 on pose $v > n$ pour la convergence de l'intégrale 1.37 . Nous avons alors :

$$^{R}D^{(\alpha)}(x-a)^v = \frac{d^n}{dx^n}(I^{(n-\alpha)}(x-a)^v). \tag{2.7}$$

L'utilisation de la formule 2.6 et 2.7 donne :

$$^{R}D^{(\alpha)}(t-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+n-\alpha+1)}\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{v+n-\alpha}. \tag{2.8}$$

En tenant compte de

$$\begin{aligned} \frac{d^n(x-a)^{v+n-\alpha}}{dx^n} &= (v+n-\alpha)(v+n-\alpha-1)....(v-\alpha+1)(x-a)^{v-\alpha}, \\ &= \frac{\Gamma(v+n-\alpha+1)}{\Gamma(v-\alpha+1)}(x-a)^{v-\alpha}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Nous substituons le résultat 2.9, dans la formule 2.8, nous obtenons :

$$^{R}D^{(\alpha)}(x-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-\alpha+1)}(x-a)^{v-\alpha}. \tag{2.10}$$

Alors, nous pouvons conclure que la dérivée fractionnaire au sens de (*R-L*) de la fonction $f(x) = (x-a)^v$ est :

$$^{R}D^{(\alpha)}(x-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-\alpha+1)}(x-a)^{v-\alpha}, \tag{2.11}$$

avec $0 \leq n-1 \leq \alpha < n, \beta > n$.

2.2.3 Dérivée fractionnaire d'une fonction constante

Si en prend la relation 2.11 et mettons $v = 0$ avec $\alpha \geq 0$, nous pouvons conclure que la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de (*R-L*) n'est pas nulle ni constante.

En générale :

$$^{R}D^{(\alpha)}(C) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} \quad ,0<\alpha<1. \tag{2.12}$$

2.2.4 Dérivée fractionnaire de la fonction $f(x) = (x)^v$

• Considérons la fonction $f(x) = (x)^v$, en remplaçant dans la définition de l'intégrale de (R-L), on obtient :

$$I^{(\alpha)}(x)^v = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}t^v dt.$$

En faisant le changement de variable :

$$u = \frac{t}{x}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} I^{(\alpha)}(x)^v &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}x^{\alpha-1}(xu)^v x du, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+v}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^v du, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}B(v+1,\alpha), \\ &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(\alpha+v+1)}x^{\alpha+v}. \end{aligned}$$

La formule précédente est une généralisation du cas $\alpha = 1$.

En effet, pour $\alpha = 1$ on obtient :

$$\begin{aligned} I^{(1)}(x)^v &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+2)}x^{v+1} = \frac{\Gamma(v+1)}{(v+1)\Gamma(v+1)}x^{v+1}, \\ &= \frac{1}{(v+1)}x^{v+1}. \end{aligned}$$

En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et pour $v = 0; 1; 2$ on a :

$$\begin{aligned} I^{(\frac{1}{2})}(x)^0 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}, \\ I^{(\frac{1}{2})}(x)^1 &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}, \\ I^{(\frac{1}{2})}(x)^2 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}. \end{aligned}$$

• Soit $0 < n-1 < \alpha < n$, $f(x) = (x)^u, u > 0$. La dérivée d'ordre α de f est donnée par :

$$^{R}D^{(\alpha)} f(x) = D^{(n)}[I^{(n-\alpha)}(x)^u].$$

Pour $n = 1$, on a :

$$\begin{aligned} ^{R}D^{(\alpha)} f(x) &= D^{(1)}[I^{(1-\alpha)}(x)^u], \\ &= D^{(1)}[I^{(\beta)}(x)^u] \quad , \beta = 1 - \alpha, \end{aligned}$$

par suit :

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)}(x)^u &= D^{(1)}\left[\frac{\Gamma(u+1]}{\Gamma(\beta+u+1]} x^{\beta+u}\right], \\ &= (\beta+u)\frac{\Gamma(u+1)}{(\beta+u)\Gamma(\beta+u)} x^{\beta+u-1}, \\ &= \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(\beta+u)} x^{\beta+u-1}. \end{aligned}$$

Comme $\beta = 1 - \alpha$, on obtient alors :

$$D^{(\alpha)}(x)^u = \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u-\alpha+1)} x^{u-\alpha}.$$

Si $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} D^1(x^u) &= \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u)} x^{u-1} = \frac{u\Gamma(u)}{\Gamma(u)} x^{u-1}, \\ &= u x^{u-1} = \frac{d}{dx} x^u. \end{aligned}$$

On retrouve alors la dérivation classique.

Si $u = 0$:

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)}(x)^0 &= D^{(\alpha)} 1 \\ &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Il est alors important de noter que la dérivée au sens de Riemann- Liouville d'une constante n'est pas forcément nulle.

2.2.5 Dérivée fractionnaire de la fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \exp(\lambda x) \quad , \lambda \succ 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} I_{-\infty}^{(\alpha)} \exp(\lambda x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-s)^{\alpha-1} \exp(\lambda s) ds, \end{aligned}$$

on pose $x - s = t \Longrightarrow s = x - t \Longrightarrow ds = -dt$

$$\begin{aligned} I_{-\infty}^{(\alpha)} \exp(\lambda x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp[\lambda(x-t)]dt, \\ &= \frac{\exp(\lambda x)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp(-\lambda t) dt. \end{aligned}$$

Posons :

$$y = \lambda t.$$

Alors :

$$dy = \lambda dt.$$

Par suit :

$$\begin{aligned} I_{-\infty}^{(\alpha)} \exp(\lambda x) &= \frac{\exp(\lambda x)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} (\frac{y}{\lambda})^{\alpha-1} \exp(-y) \frac{dy}{\lambda}, \\ &= \frac{\exp(\lambda x)}{\Gamma(\alpha)} [\int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} \exp(-y) dy] \frac{\lambda^{-\alpha+1}}{\lambda}, \\ &= \lambda^{-\alpha} \exp(\lambda x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D_{-\infty}^{(\alpha)} \exp(\lambda x) &= D^{(n)} \left(I_{-\infty}^{(n-\alpha)} \exp(\lambda x) \right), \\ &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left(I_{-\infty}^{(n-\alpha)} \exp(\lambda x) \right), \\ &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n \lambda^{\alpha-n} \exp(\lambda x), \\ &= \lambda^{\alpha-n} \lambda^n \exp(\lambda x), \\ &= \lambda^\alpha e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

C'est d'ailleurs cette dernière relation, extension de l'égalité suivante :

$$D^{(n)} \exp(\lambda x) = \lambda^n \exp(\lambda x).$$

Avec n un entier naturel.

2.2.6 Dérivée fractionnaire de la fonction trigonométrique

On a d'après 2.8 :

$$\begin{aligned} {}^{R}D^{(\alpha)}(e^{ibx}) &= (ib)^{\alpha} e^{ibx}, \\ &= i^{\alpha} b^{\alpha} e^{ibx}, \end{aligned}$$

On a :

$$e^{ibx} = \cos(bx) + i\sin(bx),$$

et

$$\begin{aligned} i &= [\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})], \\ i^{\alpha} &= [\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})]^{\alpha}, \\ &= [\cos(\frac{\alpha\pi}{2}) + i\sin(\frac{\alpha\pi}{2})]. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)}(e^{ibx}) &= \left[\cos(\alpha\frac{\pi}{2}) + i\sin(\alpha\frac{\pi}{2})\right] [\cos(bx) + i\sin(bx)]\, b^{\alpha}, \\ &= b^{\alpha}\left[\cos(\frac{\alpha\pi}{2})\cos(bx) + i\cos(\frac{\alpha\pi}{2})\sin(bx) + i\sin(\frac{\alpha\pi}{2})\cos(bx) + i^2\sin(\frac{\alpha\pi}{2})\sin(bx)\right]. \end{aligned}$$

On a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b),$$

Alors :

$$D^{(\alpha)}(e^{ibx}) = b^{\alpha}\left[\cos(bx + \alpha\frac{\pi}{2}) + i\sin(bx + \alpha\frac{\pi}{2})\right].$$

D'ou l'on déduit les identités suivantes :

$$D^{(\alpha)}[\cos(bx)] = b^{\alpha}\cos(bx + \alpha\frac{\pi}{2})$$
$$D^{(\alpha)}[\sin(bx)] = b^{\alpha}\sin(bx + \alpha\frac{\pi}{2})$$

2.3 Exemples d'approche de Caputo

2.3.1 Dérivée fractionnaire de la fonction $f(x) = (x-a)^v$

On va calculer la dérivée fractionnaire ${}^{C}D^{(\alpha)}f(x)$, au sens de Caputo de la fonction $f(x) = (x-a)^v$, $v \in \mathbb{R}$.

Supposons que $\alpha \in [n-1, n[, n \in \mathbb{N}$, nous avons besoin d'imposer $v > n$ pour la convergence de l'intégrale 1.37, on appliquons la formule 1.45 .

Nous avons alors :

$$ {}^{C}D^{(\alpha)}(x-a)^v = I^{(n-\alpha)}D^{(n)}(x-a)^v. \tag{2.13}$$

En tenant compte de

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{(\alpha)}(x-a)^v &= \frac{d^n(x-a)^v}{dx^n} = v(v-1)....(v-n+1)(x-a)^{v-n}, \\ &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-n+1)}(x-a)^{v-n}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Nous substituons le résultat 2.14, a la formule 2.13, et d'après la relation 2.6 nous obtenons :

$$ {}^{C}D^{(\alpha)}(x-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-\alpha+1)}(x-a)^{v-\alpha}. \tag{2.15}$$

2.3.2 Dérivée fractionnaire d'une constante

L'utilisation de la formule 1.45 pour calculer la dérivée fractionnaire de la constant k, $(k \in \mathbb{R})$ exprime que cette dérivée égale a zéro, c'est-a-dire :

$$ {}^{C}D^{\alpha}(k) = 0 \quad /k \in \mathbb{R}, \alpha > 0. \tag{2.16}$$

2.4 La transformé de Laplace

Définition 2.1 *Soit $f(x)$ une fonction réel de la variable temporelle x intégrable, et p un nombre complexe, la transformé de $f(x)$ notée : $TL[f(x)]$ ou $F(p)$ ou $\mathcal{L}\{f(x)\}$ est définie par :*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)dx \qquad /p \in \mathbb{C}, \tag{2.17}$$

$f(x)$ est appelée l'originale de $F(p)$.

• La transformée de Laplace inverse est donnée par :

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-px} f(x)dx \quad , c = \mathrm{Re}(s) \succ c_0, \tag{2.18}$$

où c_0 est réside dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace 2.17.

• La transformée de Laplace de la convolution

$$\begin{aligned} f(x) * g(x) &= \int_0^x f(x-t)g(t)dt, \\ &= \int_0^x f(t)g(x-t)dt, \end{aligned} \tag{2.19}$$

soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonction qui sont égale a zéro pour $x \prec 0$, est égale au produit de leur transformée de Laplace

$$\mathcal{L}[f(x) * g(x)] = F(p) \cdot G(p). \tag{2.20}$$

Sou l'hypothèse que $F(p)$ et $G(p)$ existant.

• La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier n de la fonction $f(x)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}(x)] &= p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0), \\ &= p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k f^{(n-k-1)}(0). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Remarque 2.1 *Transformation de Laplace permet de résoudre des équations différentielles, avec condition initiales prédéfinie, valable des fonctions causales.*
Les fonctions causales

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \varphi(x) & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

2.5 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires

Dans cette section on va prendre la borne inferieure $a = 0$.

2.5.1 Transformée de Laplace de l'intégral fractionnaire de (*R-L*)

Théorème 2.1 *Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f \in l^1[0, b], b > 0$,la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de (R-L) de f est donné par :*

$$\mathcal{L}[I_0^{(\alpha)} f](p) = p^{-\alpha} \mathcal{L} f(p). \tag{2.22}$$

Preuve. :On peut écrire $I_a^{(\alpha)} f$ comme une convolution de deux fonction, $g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}$ et $f(t)$

$$\begin{aligned} I_0^{(\alpha)} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \\ &= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t). \end{aligned}$$

Alors, d'après 2.20 :

$$\mathcal{L}[I_0^{(\alpha)} f(x)](p) = \mathcal{L}[\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}](p) \cdot \mathcal{L} f(p).$$

Comme,

$$\mathcal{L}[x^{\alpha-1}](p) = \Gamma(\alpha) p^{-\alpha}.$$

Donc :

$$\mathcal{L}[I_0^{(\alpha)} f](p) = p^{-\alpha} \mathcal{L} f(p).$$

■

2.5.2 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de (*R-L*)

Théorème 2.2 *:Si $f \in L^1[0,b], b > 0$,la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de (R-L) de f est donné par :*

$$\mathcal{L}(D_0^{(\alpha)} f)(p) = p^\alpha (\mathcal{L} f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k [D^{(\alpha-k-1)} f(x)]_{x=0}, \tag{2.23}$$

avec $n - 1 < \alpha < n$.

Preuve. par la définition on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(D_0^{(\alpha)} f)(p) &= \mathcal{L}(D^{(n)} I_0^{(n-\alpha)} f)(p), \\ &= p^n \mathcal{L}(I_0^{(n-\alpha)} f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{k-n-1} \left[D^{(k)} (I_0^{(n-\alpha)} f)(x) \right]_{x=0}, \\ &= p^\alpha (\mathcal{L} f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{k-n-1} \left[D^{(k)} (I_0^{(n-\alpha)} f)(x) \right]_{x=0}. \end{aligned}$$

■

2.5.3 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de caputo

Théorème 2.3 *Si $f \in C[0,b]$, pour tout $b > 0$, alors, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo de f est :*

$$\mathcal{L}({}^c D_0^{(\alpha)} f)(p) = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} f^k (0^+).$$

Preuve. pour $\alpha \in]n-1, n], n \in \mathbb{N}^*, x > 0$, alors :

$$^{c}D_0^{(\alpha)} f(x) = I_0^{(n-\alpha)} f^{(n)}(x).$$

Donc, d'après 2.22 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(^{c}D_a^{(\alpha)} f)(p) &= \mathcal{L}(I_0^{(n-\alpha)} f^{(n)})(p), \\ &= p^{-n+\alpha}(\mathcal{L}f^{(n)})(p). \end{aligned}$$

Et d'après 2.21 :

$$\mathcal{L}(^{c}D_a^{(\alpha)} f)(p) = p^{\alpha}(\mathcal{L}f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0^+).$$

■

2.5.4 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov(*G-L*)

Théorème 2.4 *La formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de (G-L) est donnée par :*

$$\mathcal{L}[D_{0^+}^{(\alpha)} f(x)] = p^{\alpha} F(p) \quad /p \in [n-1; n].$$

Preuve. *:*

Dans le premier cas où $0 < \alpha < 1$, on a vu que la dérivée (sur $\mathbb{R}^+$) peut s'écrire la forme :

$$D_{0^+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{f(0)(x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt,$$

en utilisant la transformée de Laplace de la fonction polynôme, et celle de convolution on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D_{0^+}^{(\alpha)} f(x)] &= \frac{f(0)}{p^{1-\alpha}} + \frac{1}{p^{1-\alpha}}[pF(p) - f(0)], \\ &= p^{\alpha} F(p). \end{aligned}$$

Si $\alpha > 1$ la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov n'existe pas dans le sens classique, car dans un tel cas on a des fonctions non intégrable dans la somme. ■

2.6 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

2.6.1 Linéarité

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire :

$$D^{(\alpha)}[\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda D^{(\alpha)} f(x) + \mu D^{(\alpha)} g(x).$$

2.6.2 La règle de Leibniz

Pour n entier on a :

$$\frac{d^n(fg)}{dx^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

La généralisation de cette formule nous donne :

$$D^{(\alpha)}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(x) D^{(\alpha-k)} g(x) + R_n^{(\alpha)}(x),$$

où $n \succeq \alpha + 1$ et

$$R_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} g(t) dt \int_t^x f^{n+1}(\varepsilon)(t-\varepsilon)^n d\varepsilon,$$

avec $lim_{n\to+\infty} R_n^{(\alpha)}(x) = 0$. Si f et g sont continues dans $[a, x]$ ainsi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

$$D^{(\alpha)}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(x) D^{\alpha-k} g(x).$$

$D^{(\alpha)}$ est la dérivée fractionnaire au sens de au sens de (R-L).

Conclusion

Dans ce mémoire, la dérivée non entière a été introduite à partir de quelques rappels sur les fonctions Gamma, Béta, Mittag-leffler plus les trois approches des dérivées fractionnaires les plus populaires (l'approche de Grünwald-letnikov, Riemann-Liouville et de Caputo).On a étudier ces approche, définition, propriétés, et quelques exemples illustratifs. Ainsi que leurs transformés de Laplace.

Enfin, on peut dire que grâce à notre connaissance de la dérivation entière, on a pu identifier un nouveau sujet : la dérivation fractionnaire, afin que a été découvert des exemples de fait qui indiquent l'importance de cette question et qui a été utilisé dans de nombreux domaines.

Bibliographie

[1] Artin E.(1964) Einfuhrung in die Theorie des Gamma function.Teubner, Leipzig English translation : The Gamma Function. Holt, Rinehart and Winston, New york.

[2] A.V.Letnikov. (1868) Theory of differentiation of an arbitrary order. Maths Sb vol 3, pp1-68

[3] B.Ross.(1975) Fractional Calculus and its Applications. Lecture Notes in Mathematics. Chapter A brief history and exposition of the fundamental theory of the fractional calculus, vol 457, pp1-36. Springer-Verlag, New york.

[4] D.del-Castillo-Negrete. (2005) Fractional calculus : basic theory and applications, in : Lectures Presented at the Institute of Mathematics UNAM, Mexico.

[5] Huynh Kim Long, Alex. (2005) Analyse du comportement dynamique d'un élastomère : modélisation et identification. Thèse de Doctorat. Ecole des Ponts Paris Tech (ENPC).

[6] Ibrahima N. doye. (2011) Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires. Thèse de Doctorat. Université Henri Poincaré Nancy 1.

[7] Kamel Haouam. (2007) Existence et non-existence de solutions des équations différentielles fractionnaires, thèse de Doctorat. Université de Constantine.

[8] K.S.Miller, B. Ross. (1993) An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley and Sons.

[9] L.SCHWARTZ. (1966) Théorie des distributions, Hermann. Paris.

[10] Patricia Saad. (2003) Modélisation et identification du comportement non linéaire des cales en caoutchouc. Thése de Doctorat. L'école centrale de Lyon Spécialité : Mécanique Numéro d'ordre :2003-09.

[11] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\Gamma(x)$	Fonction Gamma de la variable x.
$\beta(x, y)$	Fonction Béta du variable x et y.
$f'(x)$	La dérivée d'ordre 1 de la fonction f.
$f^{(\alpha)}(x)$	La dérivée de la fonction f d'ordre α.
${}^{G}D^{(\alpha)}$	La dérivée de la fonction d'ordre α de la définition de Grunwald-Letnikov.
$I_a^{(\alpha)}$	L'intégration d'ordre α.
${}^{R}D^{(\alpha)}$	Dérivée fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville.
${}^{C}D^{(\alpha)}$	Dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo.
$R_n^{(\alpha)}$	Le reste de série.
$\mathcal{L}\{f(x\}$	La transformé de Laplace de la fonction f.
$\mathcal{L}^{-1}\{f(p\}$	Transformé de Laplace inverse.
$(f * g)(x)$	Convolution des fonctions f et g.
$R - L$	Riemann-Liouville.
$G - L$	Grünwald-Letnikov.