République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

DJEGHIDEL Ahlem

Titre :

Application du théorème de Girsanov dans processus de Lévy

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**BOUGHERARA Saliha**	UMKB	Présidente
Dr.	**CHALA Adel**	UMKB	Encadreur
Dr.	**BENABBA Fadhila**	UMKB	Examinatrice

Juin 2019

Dédicace

A homme le plus fort, le plus courageux et le plus important dans mon vie mon père "**DJEGHIDEL Mohamed** " qui ma toujours assistance pour présévérer dans mes études, et je le remercie pour ses eorts et ses sacrifices.

A chère mère, la femme qui sacrifie pour moi tout le temps, le soleil qui éclaire mon chemin et mon vie symbole d'amour elle est toujours dans mon coeur "**ZEROUAL Akila**"

A mon frère :**Mohamed Abd Elmadjide**.

A mes étoiles les plus brillantes, mon soeurs qui m'ont m'encouragée : **Fatina, Asma, Chaima**.

A mon fiancé : **GHABACHE Zohair.**

A toute la famille.A chères amis : **Halima, Abir, Khansa.**

Je tiens a remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion de math 2019.

En fin je dédie cette mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

REMERCIEMENTS

Je glorifie Allah le tout puissant de m'avoir donné la foi, la patience et le courage d'accomplir ce travail.

Il m'est particulièrement agréable aujourd'hui de remercier toutes les personnes qui ont intervenu de près ou de loin à mener à bien ce travail.

La première personne que je tiens à remercier très chaleureusement est mon encadreur Mr « **CHALA Adel** » pour sa disponibilité, ses orientations et ses précieux conseils dans ma carrière scientifique. Sincèrement Merci pour votre soutien et votre attention au moral de votre étudiante.

Mes vifs remerciements aux membres du jury M^{me}« **BOUGHERARA Saliha** », et M^{me} « **BENABBA Fadhila**». Merci sincèrement du temps et de l'énergie que vous avez consacrés à la lecture demon travail.

Mes remerciements vont également à tous les enseignants de département de mathématique à l'université de Biskra, qui m'ont apporté leur aide au bon acheminement de parcours éducatif et qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

J'exprime ma profonde gratitude à mes collègues et amis qui m'ont aidé pour l'achèvement de ce mémoire trouvent ici l'expression de mon sincère reconnaissance.

Table des matières

Introduction

En théorie des probabilités, un processus de Lévy, nommé d'après le mathématicien français Paul Lévy, est un processus stochastique à temps continu, continu à droite limité à gauche (càdlàg), partant de 0, dont les accroissements sont stationnaires et indépendants (cette notion est expliquée ci-dessous). Les exemples les plus connus sont le processus de Wiener et le processus de Poisson

Le théorème de Girsanov indique comment un processus stochastique change si l'on change de mesure. Ce théorème est particulièrement important dans la théorie des mathématiques financières. Ce type ont été prouvés pour la première fois dans les années 1940 par Cameron-Martin, puis en 1960 par Girsanov. Ce théorème peut être utilisé pour trouver l'unique probabilité risque neutre dans l'application à la finance

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le première chapitre est un chapitre introductive au processus stochastique. Dans le deuxième chapitre est difinit le processus d'Itô-Lévy, nous avons parlé de formule d'Itô-Lévy après ça I'equations différentielles stochastiques avec sauts . Le dernier chapitre on donne l'application de théorème de Girsanov dans processus d'Itô-Lévy a la financier, il se compose de deux exemples, le premier sur Marché financier de la sensibilité au risque, et le second sur le probabilité risque neutre.

Chapitre 1

Introduction au processus stochastique

Dans ce chapitre on peut donner quelques concepts de base au processus stochastique comme formule d'Itô, et le équations differentielles stochastique pour plus de détail voir le livre [4], et le livre [3].

1.1 Tribus

Soit E un ensemble quelconque.

Définition 1.1.1 *Soit $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$, on dit que $\mathcal{F}$ est un tribu si et seulment si :*

1.$E \in \mathcal{F}$.

2.Stabilité par passage au complémentaire. i.e : $\forall A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^C \in \mathcal{F}$.

3.Stabilité par union dénombrable. i.e : soit $A_1, A_2, A_3, \ldots.., A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

On appelle l'espace $(E, \mathcal{F})$ espace mesurable.

1.1.1 Mesures

Définition 1.1.2 *Soit* $(E,\mathcal{F})$ *un espace mesurable une mesure sur* $(E,\mathcal{F})$ *est un application* $\mu:\mathcal{F}\to\bar{\mathbb{R}}_+=[0,+\infty]$ *telle que :*

1) $\mu(\phi)=0.$

2) $\forall\,(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de parties deux à deux disjointes de* E *alors :*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)\,.$$

1.2 Processus stochastique

Soit $(E,\mathcal{F})$ un espace mesurable.

Définition 1.2.1 *(Filtration) Une filtration est une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$*, c'est à dire* $\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}_s$ *pour tout* $t\leq s$ *et* $\mathcal{F}_0=\{\phi,E\}$*.*

Définition 1.2.2 *(Processus adapté) Un prosessus stochastique* $X=\{X(t)\,,t\geq 0\}$ *est dit adapté par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Définition 1.2.3 *(Trajectoire continue) On dit que le processus* $X=\{X(t)\,,t\geq 0\}$ *est à trajectoire continue si l'application* $t\to X(t,\omega)$ *soit continue.*

Définition 1.2.4 *(Processus prévisible) On dit qu'un processus* $X=\{X(t)\,,t\geq 0\}$ *est prévisible pour* $\mathcal{F}_t$*, si* X_0 *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable et* X_t *est* $\mathcal{F}_{t-1}$*-mesurable pour chaque* $t>0$*.*

1.2.1 Martingale

Définition 1.2.5 *Un processus* X *à valeurs réelles est dite une martingale par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}$ *si :*

1. Pour tout $t\geq 0$*,* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

2. Pour tout $t\geq 0$*,* X_t *est intégrable.*

3. Pour tout $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s.$$

1.2.2 Mouvement Brownien

On se donne un espace de probabilite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et un processus $(B_t, t \geq 0)$ sur cette espace.

Définition 1.2.6 *Le processus* $(B_t, t \geq 0)$ *est un mouvement Brownien standard si :*

1) $\mathbb{P}\left(B_0 = 0\right) = 1$.

2) $\forall s \leq t$, $B_t - B_s$ *est une variable aléatoire de loi gaussienne centrée de variance* $(t - s)$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_i$, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq .... \leq t_n$, *les variable* $\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0}\right)$ *sont independants.*

4) B_t *est continue.*

1.3 Intégrale stochastique et formule d'Itô

Définition 1.3.1 *(Processus élémentaire) On appelle processus élémentaire* $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ *tout processus de la forme*

$$H_t\left(\omega\right) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i\left(\omega\right) \mathbf{1}_{]t_{i-1}, t_i[}\left(t\right),$$

où $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ..... < t_n = T$ *et* Φ_i *est un variable aléatoire* $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$*-mesurable et borné.*

Définition 1.3.2 *L'intégrale stochastique d'une processus élémentaire* H *est le processus continue* $\left(I\left(H_t\right)\right)_{0 \leq t \leq T}$ *définit par*

$$I\left(H\right)_t = \int_0^t H_s dB_s,$$

où bien s'écrit

$$I\left(H_t\right) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i\left(\omega\right)\left(B_{t_i \wedge t} - B_{t_{i-1} \wedge t}\right).$$

1.3.1 Processus d'Itô

Définition 1.3.3 *Soient* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *un espace filtré, et* B_t *une mouvement Brownien, on appelle processus d'Itô un processus* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall t \leq T \qquad X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

avec :

1) X_0 *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable.*

2) $(b_t)_{0\leq t\leq T}$ *et* $(\sigma_t)_{0\leq t\leq T}$ *deux processus adaptés à* $\mathcal{F}_t$*.*

3) $\int_0^t |b_s|\, ds < +\infty$ $\mathbb{P}-p.s$ $\int_0^t |\sigma_s|^2\, ds < +\infty$ $\mathbb{P}-p.s.$

1.3.2 Formule d'Itô

Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô, écrit sous la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s.$$

Alors

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t.$$

Théorème 1.3.1 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^2 *alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, \sigma_s^2 ds.$$

Alors

$$df(X_t) = f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} f''(X_s)\, \sigma_s^2 ds.$$

Théorème 1.3.2 *Soit f une fonction défine sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t et de classe C^2 par rapport à x on a*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\, d\langle X_s\rangle,$$

telle que

$$d\langle X_s\rangle = \langle dX_s, dX_s\rangle = \langle b_s ds + \sigma_s dB_s, b_s ds + \sigma_s dB_s\rangle = \sigma_s^2 ds.$$

Théorème 1.3.3 *Soient X_1 et X_2 deux processus d'Itô, et f une fonction dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 alors*

$$\begin{aligned} f(X_1(t), X_2(t)) = f(X_1(0), X_2(0)) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_1(s), X_2(s))\, dX_1(s) \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_1(s), X_2(s))\, dX_2(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X_1(s), X_2(s))\, d\langle X_1\rangle_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(X_1(s), X_2(s))\, d\langle X_2\rangle_s + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(X_1(s), X_2(s))\, d\langle X_1, X_2\rangle_s. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.4 *(Intégrale par partie) Soit X et Y deux processus d'Itô telle que*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \beta_s dB_s \quad et\ Y_t = Y_0 + \int_0^t \alpha_s' ds + \int_0^t \beta_s' dB_s.$$

Alors

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t,$$

avec

$$\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t \beta_s \beta_s' ds.$$

De plus la formule d'intégrale par partie s'écrit

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y\rangle_t.$$

Preuve. *On applique la formule d'Itô à la processus précédents*

$$\begin{aligned}(X_t+Y_t)^2 &= (X_0+Y_0)^2+2\int_0^t (X_s+Y_s)\,dX_s+2\int_0^t (X_s+Y_s)\,dY_s \\ &+\int_0^t d\langle X\rangle_s+\int_0^t d\langle Y\rangle_s+2\int_0^t d\langle X,Y\rangle_s \\ &= (X_0+Y_0)^2+2\int_0^t X_s dX_s+2\int_0^t Y_s dY_s+2\int_0^t X_s dY_s+2\int_0^t Y_s dX_s \\ &+\int_0^t \beta_s^2 ds+\int_0^t \beta_s'^2 ds+2\int_0^t \beta_s\beta_s' ds,\end{aligned}$$

avec

$$(X_t+Y_t)^2 = X_t^2+Y_t^2+2X_tY_t.$$

Alors

$$X_tY_t=\frac{1}{2}\left[(X_t+Y_t)^2-\left(X_t^2+Y_t^2\right)\right]. \tag{1.1}$$

On applique formule d'Itô sur $f(X_t)=X_t^2$ *et* $g(Y_t)=Y_t^2$ *on trouve :*

$$X_t^2=X_0^2+2\int_0^t X_s dX_s+\int_0^t \beta_s^2 ds, \tag{1.2}$$

$$Y_t^2=Y_0^2+2\int_0^t Y_s dX_s+\int_0^t \beta_s'^2 ds. \tag{1.3}$$

On remplace (1.2)*et* (1.3) *dans* (1.1)*on trouve*

$$X_tY_t=X_0Y_0+\int_0^t X_s dY_s+\int_0^t Y_s dX_s+\langle X,Y\rangle_t\,.$$

La démonstration est terminer. ■

1.4 Equations differentielles stochastique

Définition 1.4.1 *L'équation differentielle stochastique est généralement équation differentielle ordinaire avec une partie aléatoire qui apelle Bruit Blanc, en générale c'est un mouve-*

ment Brownien, il est donné par

$$\begin{cases} dX_t = \alpha(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{1.4}$$

ou sous la forme intégrable

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha(t, X_t)\, dt + \int_0^t \sigma(t, X_t)\, dB_t.$$

Théorème 1.4.1 *(Théorème d'existence et unicité)*

On dit que l'equations differentielles stochastique (1.4) *admet unique solution si les condition suivante sont remplies :*

1)Les fonctions α et σ sont continues

2)Condition Lipschitz : S'il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$|\alpha(t, x) - \alpha(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq k\,|x - y|\,.$$

*3)Croissance lineaire **:** S'il existe une constante $c > 0$ telle que :*

$$|\alpha(t, x) - \alpha(t, y)| \leq c\,(1 + |x|)\,.$$

4)X_0 est independente à $(B_t, t \geq 0)$ et de carré integrable i.e :

$$\int_0^t |X_0|^2\, ds < +\infty.$$

Preuve. Voir Briand [1] ■

Chapitre 2

Processus de Lévy

L'objectif de ce chapitre est de défnir processus de Lévy et formule d'Itô-Lévy. Ce partie est actuallement prendre du polycopie de Rhodes [6] et du livre Øksendal [5].

2.1 Processus de Lévy

Définition 2.1.1 *Soit* $X = (X_t; t \geq 0)$ *un processus stochastique défini sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *On dit que* X *est à accroissements indépendants si, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et pour tous* $0 \leq t_1 \leq .... \leq t_n < +\infty$, *les variables aléatoires* $\{X_{j+1} - X_j; 1 \leq j \leq n-1\}$ *sont indépendantes.*

Définition 2.1.2 *On dit que* X *est à accroissements stationnaires si, pour tous* $t, s > 0$, *la variable aléatoire* $X_{t+s} - X_t$ *a même loi que* $X_1 - X_0$.

Définition 2.1.3 *On dit que* X *est un processus de Lévy si :*

1) $X_0 = 0$.

2) X *est á accroissement indépendants et stationnaires.*

3) X *est stochastiquement continu : pour tout* $\varepsilon > 0$ *et* $t \geq 0$ *:*

$$\lim_{h \to 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon) = 0.$$

Définition 2.1.4 *(Sauts de processus de Lévy)*

Si X est une processus de Lévy, on définit le processus de sauts associe

$$\Delta X = (\Delta X_t; t \geq 0) \quad \text{avec} \quad \Delta X_t = X_t - X_{t^-}.$$

2.2 Mesures aléatoires de Poisson

Soit $(S, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Définition 2.2.1 *Soient μ une mesure $\sigma-$finie sur $(S, \mathcal{A})$. Une mesure aléatoire de Poisson N sur $(S, \mathcal{A})$ est une collection de variables aléatoires $(M(B), B \in \mathcal{A})$ telle que :*

1) Pour tout $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(B) < +\infty$, $N(B)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(B)$.

2) Si $A_1, ..., A_m$ sont des ensembles disjoints de $\mathcal{A}$, les variables aléatoires $N(A_1), ..., N(A_m)$ sont indépendantes.

3) Pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $A \to N(A, \omega)$ est une mesure de comptage sur $(S, \mathcal{A})$.

Remarque 2.2.1 *Si X est un processus de Lévy, alors la quantité*

$$N(t, A) = \sum_{0 \leq s \leq t} \mathbf{1}_A (\Delta X_s),$$

est une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \left(\mathbb{R}^d / \{0\}\right)$ d'intensité $dt \otimes d\mu$ avec $\mu(\cdot) = \mathbb{E}[N([0,1], A)]$.

Pour $t \geq 0$ et A borné inférieurement, on définit la mesure aléatoire de Poisson compensée $\tilde{N}$ par :

$$\tilde{N}(t, A) = N(t, A) - t\mu(A).$$

2.3 Intégrale stochastique et formule d'Itô-Lévy

2.3.1 Processus d'Itô-Lévy

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace filtré, et B_t une movement Brownien, et $\tilde{N}$ une mesure aléatoire de Poisson compensée.

Définition 2.3.1 *On dit que X_t est un processus d'Itô-Lévy s'il est écrire de la forme :*

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \alpha(s)\, ds + \int_0^t \beta(s)\, dB(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma(s,z)\, \tilde{N}(ds, dz),$$

telle que

$$\int_0^t \left\{ |\alpha(s)| + |\beta(s)|^2 + \int_{\mathbb{R}} |\gamma(s,z)|^2 \mu(dz) \right\} ds < +\infty,$$

avec

$$\tilde{N}(ds, dz) = \begin{cases} N(ds,dz) - \mu(dz) & si \quad |z| < R, \\ N(ds,dz) & si \quad |z| \geq R, \end{cases} \qquad avec \quad R \in \mathbb{R}.$$

On peut défine une équation différentielle stochastique

$$dX_t = \alpha(t)\, dt + \beta(t)\, dB(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)\, \tilde{N}(dt, dz).$$

2.3.2 Intégration de Poisson

Soit N une mesure aléatoire de Poisson d'intensité $dt \otimes d\mu$ sur $\mathbb{R}_+ \times \left(\mathbb{R}^d / \{0\}\right)$.

Définition 2.3.2 *Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ est une fonction Borel-mesurable et si $A \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d / \{0\}\right)$ vérifie $\mu(A) < +\infty$, on définit pour tout $t \geq 0$ et $\omega \in \Omega$ l'intégrale de Poisson de f par :*

$$\int_A f(z)\, N(t, dz) = \sum_{z \in A} f(z)\, N(t, \{z\}).$$

Si N est associée à un processus de Lévy, cette intégrale coïncide avec :

$$\int_A f(z)\, N(t,dz) = \sum_{0\leq s\leq t} f(\Delta X_s)\, \mathbf{1}_A(\Delta X_s).$$

Théorème 2.3.1 *Soit A un ensemble borélien borné inférieurement. Alors :*

1) Si $f \in L^1(A,\mu)$ on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_A f(z)\, N(t,dz)\right] = t\int_A f(z)\, \mu(dz).$$

2) Si $f \in L^2(A,\mu)$ on a :

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_A f(z)\, N(t,dz)\right|^2\right] = t\int_A |f(z)|^2\, \mu(dz).$$

Preuve. *Si f est une fonction étagée de la forme $\sum_{j=1}^n c_j \mathbf{1}_{A_j}$ avec $c_j \in \mathbb{R}$ et les A_j boreliens deux à deux disjointes, on a :*

1)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N(t,A)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{0\leq s\leq t} \mathbf{1}_A(\Delta X_s)\right] = \sum_{0\leq s\leq t} \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(\Delta X_s)] = \sum_{0\leq s\leq t} \mu(A) \\ &= \mu(A)\sum_{0\leq s\leq t} 1 = \mu(A)\int_0^t 1ds = t\mu(A).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_A f(z)\, N(t,A)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n c_j N(t,A_j)\right] = \sum_{j=1}^n c_j \mathbb{E}[N(t,A_j)] = \sum_{j=1}^n c_j \mu(A_j)\, t \\ &= t\sum_{j=1}^n c_j \mu(A_j) = t\int_A f(z)\, \mu(dz).\end{aligned}$$

2)On a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(N(t,A_j))^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{0\leq s\leq t}\mathbf{1}_{A_j}(\Delta X_s)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{0\leq s\leq t}\left(\mathbf{1}_{A_j}(\Delta X_s)\right)^2 + 2\sum_{\substack{j,j'=1\\ j\neq j'}}^{n}\sum_{0\leq s\leq t}\mathbf{1}_{A_j}(\Delta X_s)\,\mathbf{1}_{A_{j'}}(\Delta X_s)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathrm{I}_1 + 2\mathrm{I}_2\right].
\end{aligned}
$$

D'un part

$$
\mathbb{E}[\mathrm{I}_1] = \mathbb{E}\left[\sum_{0\leq s\leq t}\left(\mathbf{1}_{A_j}(\Delta X_s)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{0\leq s\leq t}\mathbf{1}_{A_j}(\Delta X_s)\right] = \sum_{0\leq s\leq t}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{A_j}(\Delta X_s)\right] = t\mu(A_j).
$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathrm{I}_2] &= \mathbb{E}\left[\sum_{0\leq s\leq t}\sum_{0\leq s\leq t}\mathbf{1}_{A_j}(\Delta X_s)\,\mathbf{1}_{A_{j'}}(\Delta X_s)\right] \\
&= \sum_{0\leq s\leq t}\sum_{0\leq s\leq t}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{A_j}(\Delta X_s)\,\mathbf{1}_{A_j}(\Delta X_s)\right] = 0,
\end{aligned}
$$

car A_j sont disjointes.

Alors :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\int_A f(z)\,N(t,dz)\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_A f(z)\,N(t,dz)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} c_j N(t,A_j)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} \left(c_j N(t,A_j)\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[2\sum_{\substack{j,j'=1\\ j\neq j'}}^{n} c_j c_{j'} N(t,A_j)\,N(t,A_{j'})\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(c_j N(t,A_j)\right)^2\right] + 2\sum_{\substack{j,j'=1\\ j\neq j'}} \mathbb{E}\left[c_j c_{j'} N(t,A_j)\,N(t,A_{j'})\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j^2 \mathbb{E}\left[\left(N(t,A_j)\right)^2\right] + 2\sum_{\substack{j,j'=1\\ j\neq j'}} c_j c_{j'} \mathbb{E}\left[N(t,A_j)\,N(t,A_{j'})\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j^2 \mathbb{E}\left[\left(N(t,A_j)\right)^2\right] = \sum_{j=1}^{n} c_j t\mu(A_j) = t\int_A (f(z))^2\,\mu(dz) \\
&= t\int_A |f(z)|^2\,\mu(dz)\ .
\end{aligned}
$$

La preuve est terminée. ■

Proposition 2.3.1 *(Isométrié d'Itô) Soit F une fonction simple de la forme*

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} F_i(t_j)\,\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1}]}\mathbf{1}_{A_i}.$$

On définit alors

$$I_T(F) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} F(r,z)\,\tilde{N}(dr,dz) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} F_i(t_j)\,\tilde{N}\left([t_j,t_{j+1}],A_i\right),$$

pour tout $T > 0$ et F on a

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} F(r,z)\,\tilde{N}(dr,dz)\right] = 0,$$

et

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} F(r,z)\,d\tilde{N}(r,z)\right)^2\right]=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d/\{0\}}\mathbb{E}\left[|F(r,z)|^2\right]dt\mu(dz).$$

Preuve. *Soit F une fonction simple de la forme $F=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n F_i(t_j)\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1}]}\mathbf{1}_{A_i}$ comme $t\to\tilde{N}(t,A_i)$ est un $\mathcal{F}_t$-martingale, centreé et que $F_i(t_j)$ est $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable on a :*

1)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} F(r,z)\,\tilde{N}(dr,dz)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n F_i(t_j)\,\tilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)\right]\\
&=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\mathbb{E}\left[F_i(t_j)\,\tilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)\right]\\
&=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[F_i(t_j)\,\tilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)\mid\mathcal{F}_{t_j}\right]\right]\\
&=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\mathbb{E}\left[F_i(t_j)\,\mathbb{E}\left[\tilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)\mid\mathcal{F}_{t_j}\right]\right]\\
&=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\mathbb{E}\left[F_i(t_j)\,\mathbb{E}\left[\tilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)\right]\right]\\
&=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\mathbb{E}\left[F_i(t_j)\right]\mathbb{E}\left[\tilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)\right]=0.
\end{aligned}$$

2) De même, on a pour $j<j'$ et pour tout i,i'

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[F_i(t_j)\,\tilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)\,F_{i'}(t_{j'})\,\tilde{N}([t_{j'},t_{j'+1}],A_{i'})\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[F_i(t_j)\,\tilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)\,F_{i'}(t_{j'})\,\tilde{N}([t_{j'},t_{j'+1}],A_{i'})\mid\mathcal{F}_{t_j}\right]\right]\\
&=\mathbb{E}\left[F_i(t_j)\,\tilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)\,F_{i'}(t_{j'})\,\mathbb{E}\left[\tilde{N}([t_{j'},t_{j'+1}],A_{i'})\mid\mathcal{F}_{t_j}\right]\right]\\
&=\mathbb{E}\left[F_i(t_j)\,\tilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)\,F_{i'}(t_{j'})\right]\mathbb{E}\left[\tilde{N}([t_{j'},t_{j'+1}],A_{i'})\right]\\
&=0.
\end{aligned}$$

De plus pour $j = j\prime$ on trouve

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[F_i(t_j)\,\tilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)\,F_{i'}(t_j)\,\tilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_{i'})\right] \\
&= \mathbb{E}\left[F_i(t_j)\,F_{i'}(t_j)\,\mathbb{E}\left[\tilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_{i'})\,\tilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i) \mid \mathcal{F}_{t_j}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[F_i(t_j)\,F_{i'}(t_j)\right]\mathbb{E}\left[\tilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_{i'})\,\tilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)\right].
\end{aligned}$$

Pour $i = i'$

$$\mathbb{E}\left[\left[F_i(t_j)\,\tilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)\right]^2\right] = \mathbb{E}\left[(F_i(t_j))^2\right](t_{j+1}-t_j)\,\mu(A_i).$$

Alors pour tout valeur de i, i' et j, j' on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} F(r,z)\,\tilde{N}(dr,dz)\right)^2\right] \\
&= \sum_{i,i'=1}^{n}\sum_{j,j'=1}^{m}\mathbb{E}\left[F_i(t_j)\,\tilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)\,F_{i'}(t_{j'})\,\tilde{N}([t_{j'},t_{j'+1}],A_{i'})\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}\left[(F_i(t_j))^2\right](t_{j+1}-t_j)\,\mu(A_i) \\
&= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d/\{0\}}\mathbb{E}\left[|F(t,z)|^2\right]dt\mu(dz).
\end{aligned}$$

D'où la formule d'isometrie. ■

Théorème 2.3.2 *(Décomposition d'Itô-Lévy) Soit X_t un processus de Lévy. Alors X_t a la décomposition*

$$X_t = \alpha t + \sigma B(t) + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} z\tilde{N}(dr,dz) \tag{2.1}$$

pour certaines constantes $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}$

2.4 Formule d'Itô-Lévy

Començons par un exemple simple, on considère un intégrale stochastique de Poisson de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \int_A K(r,z)\, N(dz, dr), \tag{2.2}$$

où A est borné inférieurement et K est un processus prévisible à valeurs réelles.

Proposition 2.4.1 *Si X est une intégrale stochastique de Poisson du type* (2.2) *alors, pour tout fonction $f \in C(\mathbb{R})$ et tout $t \geq 0$, on a presque sûrement :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \int_A \left[f(X_{r^-} + K(r,z)) - f(X_{r^-}) \right] N(dr; dz).$$

Preuve. *On définit le processus de Poisson composé $L_t = \int_A zN(t,dz)$, on a $N(t, A \cap B)$ est la mesure de saut associée au processus L car*

$$\begin{aligned}
\Delta L_t = L_t - L_{t-} &= \int_A zN(t,dz) - \int_A zN\left(t^-, dz\right) = \sum_{z\in A} zN(t,\{z\}) - \sum_{z\in A} zN\left(t^-,\{z\}\right) \\
&= \sum_{z\in A} z\left[N(t,\{z\}) - N\left(t^-,\{z\}\right)\right] = \sum_{z\in A} z\left[\sum_{0\leq s\leq t} \mathbf{1}_z(\Delta L_s) - \sum_{0\leq s\leq t^-} \mathbf{1}_z(\Delta L_s)\right] \\
&= \sum_{z\in A} z\mathbf{1}_z(\Delta L_t) = \sum_{z\in A} zN(\{t\},\{z\}) = \sum_{z} z\mathbf{1}_A(z)\, N(\{t\},\{z\}).
\end{aligned}$$

Donc pour $z_0 \neq 0$ on a

$$\mathbf{1}_{\{\Delta L_s = z\}} = \mathbf{1}_A(z_0)\, N(\{t\},\{z\}).$$

On en déduit

$$N(t,B) = \sum_{0\leq s\leq t} \mathbf{1}_{\{\Delta L_s \in B\}} = \sum_{0\leq s\leq t}\sum_{z\in B} \mathbf{1}_{\{\Delta L_s = z\}} = \sum_{0\leq s\leq t}\sum_{z\in B} \mathbf{1}_A(z)\, N(\{t\},\{z\}) = N(t, A\cap B).$$

On consequent direct est que pour tout processus F on a

$$\int_0^t \int_A F(s,z)\, N(ds,dz) = \sum_{0\leq s\leq t} \mathbf{1}_A(\Delta L_s)\, F(s,\Delta L_s),$$

d'où

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{0\leq s\leq t} [f(X_s) - f(X_{s^-})] \\ &= \sum_{0\leq s\leq t} [f(X_{s^-} + \mathbf{1}_A(\Delta L_s)\, K(s,\Delta L_s)) - f(X_{s^-})] \\ &= \sum_{0\leq s\leq t} [f(X_{s^-} + K(s,\Delta L_s)) - f(X_{s^-})]\, \mathbf{1}_A(\Delta L_s) \\ &= \int_0^t \int_A [f(X_{s^-} + K(s,z)) - f(X_{s^-})]\, N(ds,dz). \end{aligned}$$

D'où la réponse. ■

Théorème 2.4.1 *(Formule d'Itô-Lévy)*

Soient $\{X_t, t\geq 0\}$ une processus Itô-Lévy écrire de la forme :

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \alpha(s)\, ds + \int_0^t \beta(s)\, dB(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma(s,z)\, \tilde{N}(ds,dz),$$

la fonction $f \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$ alors :

$$\begin{aligned} f(X_t) = f(X_0) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_{r^-})\, dr + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_{r^-})\,(b(r)\, dr + \sigma(r)\, dB_r) \\ &+ \int_0^t \int_{|z|<R} \left\{ f(r, X_{r^-} + \gamma(r,z)) - f(r, X_{r^-}) - \gamma(r,z)\frac{\partial f}{\partial x}(t, X_{r^-}) \right\} \mu(dz)\, dr \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left\{ f(r, X_{r^-} + \gamma(r,z)) - f(r, X_{r^-}) - \gamma(r,z)\frac{\partial f}{\partial x}(t, X_{r^-}) \right\} \tilde{N}(dr,dz) \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(r)\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_{r^-})\, dr, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} df(X_t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(X_{r^-})\,dr + \frac{\partial f}{\partial x}(X_{r^-})\left(b(r)\,dr + \sigma(r)\,dB_r\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(r)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_{r^-})\,dr \\ &+ \int_{|z|<R}\left\{f(r, X_{r^-} + \gamma(r,z)) - f(r, X_{r^-}) - \gamma(t,z)\,\frac{\partial f}{\partial x}(t, X_{t^-})\right\}\mu(dz)\,dt \\ &+ \int_{\mathbb{R}}\left\{f(r, X_{r^-} + \gamma(r,z)) - f(r, X_{r^-}) - \gamma(t,z)\,\frac{\partial f}{\partial x}(t, X_{t^-})\right\}\tilde{N}(dr, dz). \end{aligned}$$

Théorème 2.4.2 *(Intégrale par partie)*

Soit $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux processus de Itô-Lévy de la forme

$$\begin{aligned} X_1(t) &= X_1(0) + \int_0^t \alpha_1(t)\,dt + \int_0^t \sigma_1(t)\,dB_t + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \gamma_1(t,z)\,\tilde{N}(dt,dz), \\ \text{avec} \quad dX_1(t) &= \alpha_1(t)\,dt + \sigma_1(t)\,dB_t + \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(t,z)\,\tilde{N}(dt,dz), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} X_2(t) &= X_2(0) + \int_0^t \alpha_2(t)\,dt + \int_0^t \sigma_2(t)\,dB_t + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \gamma_2(t,z)\,\tilde{N}(dt,dz), \\ \text{avec} \quad dX_2(t) &= \alpha_2(t)\,dt + \sigma_2(t)\,dB_t + \int_{\mathbb{R}} \gamma_2(t,z)\,\tilde{N}(dt,dz). \end{aligned}$$

Soit $Y(t) = X_1(t)\,X_2(t)$ alors :

$$Y(t) = X_1(t)X_2(t) = X_1(0)X_2(0) + \int_0^t X_1(s^-)dX_2(s) + \int_0^t X_2(s^-)dX_1(s) + \langle X_1, X_2\rangle(t),$$

avec

$$dY(t) = d\left(X_1(t)X_2(t)\right) = X_1(t^-)dX_2(t) + X_2(t^-)dX_1(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(t,z)\,\gamma_2(t,z)\,N(dt,dz).$$

Preuve. *On applique formule d'Itô-Lévy pour $Y(t)$ on trouve :*

$$\begin{aligned}
dY(t) &= X_2(t^-)(\alpha_1(t)\,dt + \sigma_1(t)\,dB_t) + X_1(t^-)(\alpha_2(t)\,dt + \sigma_2(t)\,dB_t) + \sigma_1(t)\,\sigma_2(t)\,dt \\
&\quad + \int_{|z|<R} \left\{ \left(X_1\left(t^-\right) + \gamma_1(t,z)\right)\left(X_2\left(t^-\right) + \gamma_2(t,z)\right) - X_1(t^-)X_2(t^-) \right. \\
&\quad \left. -\gamma_1(t,z)\,X_1(t^-) - \gamma_2(t,z)\,X_2\left(t^-\right) \right\} dz\mu(dz) \\
&\quad + \int_{z\in\mathbb{R}} \left\{ \left(X_1\left(t^-\right) + \gamma_1(t,z)\right)\left(X_2\left(t^-\right) + \gamma_2(t,z)\right) - X_1(t^-)X_2(t^-) \right\} \tilde{N}(dt,dz).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
dY(t) &= X_2(t^-)(\alpha_1(t)\,dt + \sigma_1(t)\,dB_t) + X_1(t^-)(\alpha_2(t)\,dt + \sigma_2(t)\,dB_t) + \sigma_1(t)\,\sigma_2(t)\,dt \\
&\quad + \int_{|z|<R} \left\{ X_1\left(t^-\right)X_2\left(t^-\right) + X_2\left(t^-\right)\gamma_1(t,z) + X_1\left(t^-\right)\gamma_2(t,z) + \gamma_1(t,z)\,\gamma_2(t,z) \right. \\
&\quad \left. -X_1(t^-)X_2(t^-) - \gamma_1(t,z)\,X_1(t^-) - \gamma_2(t,z)\,X_2\left(t^-\right) \right\} dz\mu(dz) \\
&\quad + \int_{z\in\mathbb{R}} \left\{ X_1\left(t^-\right)X_2\left(t^-\right) + X_2\left(t^-\right)\gamma_1(t,z) + X_1\left(t^-\right)\gamma_2(t,z) \right. \\
&\quad \left. +\gamma_1(t,z)\,\gamma_2(t,z) - X_1(t^-)X_2(t^-) \right\} \tilde{N}(dt,dz).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
dY(t) &= X_2(t^-)(\alpha_1(t)\,dt + \sigma_1(t)\,dB_t) + X_1(t^-)(\alpha_2(t)\,dt + \sigma_2(t)\,dB_t) + \sigma_1(t)\,\sigma_2(t)\,dt \\
&\quad + \int_{z\in\mathbb{R}} X_2\left(t^-\right)\gamma_1(t,z)\,\tilde{N}(dt,dz) + \int_{z\in\mathbb{R}} X_1\left(t^-\right)\gamma_2(t,z)\,\tilde{N}(dt,dz) \\
&\quad + \int_{z\in\mathbb{R}} \gamma_1(t,z)\,\gamma_2(t,z)\,\tilde{N}(dt,dz) + \int_{|z|<R} \gamma_1(t,z)\,\gamma_2(t,z)\,dz\mu(dz).
\end{aligned}$$

En faisant le facteur commun dans l'équation précédent, on obtien

$$\begin{aligned}dY(t) &= X_2(t^-)\left[\alpha_1(t)\,dt + \sigma_1(t)\,dB_t + \int_{z\in\mathbb{R}} \gamma_1(t,z)\,\tilde{N}(dt,dz)\right] \\ &+ X_1(t^-)\left[\alpha_2(t)\,dt + \sigma_2(t)\,dB_t + \int_{z\in\mathbb{R}} \gamma_2(t,z)\,\tilde{N}(dt,dz)\right] \\ &+ \sigma_1(t)\,\sigma_2(t)\,dt + \int_{|z|\geq R} \gamma_1(t,z)\,\gamma_2(t,z)\,N(dt,dz) \\ &+ \int_{|z|<R} \gamma_1(t,z)\,\gamma_2(t,z)\,(N(dt,dz) - dt\mu(dz)) \\ &+ \int_{|z|<R} \gamma_1(t,z)\,\gamma_2(t,z)\,dz\mu(dz)\,.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}dY(t) &= X_2(t^-)dX_1(t) + X_1(t^-)dX_2(t) + \sigma_1(t)\,\sigma_2(t)\,dt + \int_{|z|\geq R} \gamma_1(t,z)\,\gamma_2(t,z)\,N(dt,dz) \\ &+ \int_{|z|<R} \gamma_1(t,z)\,\gamma_2(t,z)\,N(dt,dz) - \int_{|z|<R} \gamma_1(t,z)\,\gamma_2(t,z) + \int_{|z|<R} \gamma_1(t,z)\,\gamma_2(t,z)\,.\end{aligned}$$

On obtien, alors

$$\begin{aligned}dY(t) &= X_2(t^-)dX_1(t) + X_1(t^-)dX_2(t) + \sigma_1(t)\,\sigma_2(t)\,dt + \int_{|z|\geq R} \gamma_1(t,z)\,\gamma_2(t,z)\,N(dt,dz) \\ &+ \int_{|z|<R} \gamma_1(t,z)\,\gamma_2(t,z)\,N(dt,dz)\,.\end{aligned}$$

On trouve finalment

$$dY(t) = X_2(t^-)dX_1(t) + X_1(t^-)dX_2(t) + \sigma_1(t)\,\sigma_2(t)\,dt + \int_{z\in\mathbb{R}} \gamma_1(t,z)\,\gamma_2(t,z)\,N(dt,dz)\,.$$

Il est le résultat souhaité. ■

2.5 Equations différentielles stochastiques avec sauts

Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien standard et une mesure aléatoire de Poisson N. On note μ l'intensité de N, et $\tilde{N}$ la mesure de Poisson compensée associée.

Définition 2.5.1 *L'équation différentielle stochastique avec sauts, c'est une équation différentielle stochastique pour le processus d'Itô-Lévy, il est donnée par*

$$\begin{cases} dX_t = \alpha(t)\,dt + \beta(t)\,dB(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)\,\tilde{N}(dt,dz)\,. \\ X_t = X_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Théorème 2.5.1 *(Existence et unicité)*

On dit que l'EDS (2.3) *admet unique solution si et seulement si :*

- *Condition de Lipschitz (CL) : Il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $x, x' \in \mathbb{R}$:*

$$|b(x) - b(x')|^2 + |\sigma(x) - \sigma(x')|^2 + \int_{|z|<R} |\gamma(x,z) - \gamma(x',z)|^2 \mu(dz) \leq K\,|x - x'|^2\,.$$

- *Condition de croissance lineare (CC) : Il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:*

$$|b(x)|^2 + |\sigma(x)|^2 + \int_{|z|<R} |\gamma(x,z)|^2 \mu(dz) \leq K\left(1 - |x|^2\right).$$

- *Condition de continuité (CCO) : L'application $x \to \gamma(x,z)$ est continue pour tout $|z| \geq R$.*

Preuve. Voir Øksendal [5] ■

Chapitre 3

Applications du théorèmes de Girsanov dans processus de Lévy

Dans ce chapitre nous discuterons d'une résultat appelée le théorème de Girsanov pour les processus de Lévy qui joue également un rôle important dans l'application, notamment en économie et en contrôle optimal voir Chala [2]. Nous pouvons maintenant montrer les versions de Girsanov. Ce chapitre est tire du chapitre 03 du livre : Stochastic Differential Equation : Basics and Application [2] et du référence Rhodes [6].

3.1 Théorèmes de Girsanov

Définition 3.1.1 *(Absolument continue)*

Soit $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures sur l'éspace de probabilite $(\Omega, \mathcal{F})$, on dit que $\mathbb{P}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{Q}$ et on note $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ si :

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{Q}(A) = 0 \Longrightarrow \mathbb{P}(A) = 0.$$

Théorème 3.1.1 *(Théorèmé de Radon Nikodym)*

Soit $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures de probabilite sur l'éspace $(\Omega, \mathcal{F})$, avec $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$, alors il existe un *application f telle que*

$$\forall A \in \mathcal{F} \qquad \mathbb{P} = \int_A f d\mathbb{Q}.$$

Théorème 3.1.2 *(Théorème de Girsanov* I *pour processus d'Itô-Lévy)*

Soit $x(t)$ est processus d'Itô-Lévy de la forme

$$dx(t) = b(t, x(t), \omega) dt + \Lambda(t, x(t), \omega) dB(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, x(t), z, \omega) \tilde{N}(dt, dz). \tag{3.1}$$

Supposons qu'il existe des processus previsibleles $u(t) = u(t, \omega)$ et $\beta(t, z) = \beta(t, \lambda, \omega)$ tels que

$$\Lambda(t) u(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, x(t), z, \omega) \beta(t, z) \mu(dz) = b(t) \text{ pour tout } (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega, \tag{3.2}$$

et tels que le processus

$$\begin{aligned} Z(t) = \exp\Bigg\{ & -\int_0^t u(s) dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t u^2(s) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1 - \beta(s, z)) \tilde{N}(dt, dz) \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \{\ln(1 - \beta(s, z)) + \beta(s, z)\} \mu(dz) ds \Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

est bien defini et saisfait

$$\mathbb{E}[Z(T)] = 1. \tag{3.4}$$

Définisser la mesure de probabilite $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}_T$ par

$$d\mathbb{Q} = Z(T) d\mathbb{P}.$$

Alors $X(t)$ est une martingele locale par rapport a la mesure $\mathbb{Q}$.

Preuve. Voir Øksendal [5] ■

Théorème 3.1.3 *(Théorème de Girsanov* II *pour processus d'Itô-Lévy)*

Supposons qu'il esxiste des processus previsibleles $u(t)$ *et* $\beta(t,z) \leq 1$ *tels que le processus* (3.3) *existe pour* $0 \leq t \leq T$, *et satisfasse* (3.4), *Définissez le processus* $B_{\mathbb{Q}}$ *et la mesure aléatoire* $\tilde{N}_{\mathbb{Q}}(dt,dz)$ *par*

$$dB_{\mathbb{Q}} = u(t)\,dt + dB(t)\,, \tag{3.5}$$

et

$$\tilde{N}_{\mathbb{Q}}(dt,dz) = \beta(t,z)\,\mu(dz)\,dt + \tilde{N}(dt,dz)\,. \tag{3.6}$$

Alors $B_{\mathbb{Q}}(.)$ *est un movement Brownien par rapport à* $\mathcal{F}_T$ *et* $\mathbb{Q}$, *et* $\tilde{N}_{\mathbb{Q}}(.,.)$ *est* $(\mathcal{F}_t,\mathbb{Q})$*-mesure aléatoire de Poisson compensse de* $N(.,.)$, *dans le sens où le processus*

$$M(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma(s,z)\,\tilde{N}_{\mathbb{Q}}(ds,dz) \qquad 0 \leq t \leq T,$$

est un $(\mathcal{F}_t,\mathbb{Q})$*-martingale local pour touts les processus previsibleles* $\gamma(s,z)$ *tels que :*

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma(s,z)\,(1-\beta(s,z))\,\mu(dz)\,ds < \infty \qquad p.s$$

Preuve. Voir Øksendal [5] ■

Théorème 3.1.4 *(Théorème de Girsanov* III *pour processus d'Itô-Lévy)*

Soient $x(t)$ *define de la forme* (3.1) *dans le théorème* I, $u(t)$ *et* $\beta(t,z)$ *des processus previsibleles pour* $\mathcal{F}_t$, *satisfaisant* (3.2), *soit* $\mathbb{Q}$ *et* $B_{\mathbb{Q}}$ *et* $\tilde{N}_{\mathbb{Q}}$ *sont define dans le théorème* II, *alors en termes de* $B_{\mathbb{Q}}$ *et* $\tilde{N}_{\mathbb{Q}}$ *le processus* $X(t)$ *peut étre represente par*

$$dx(t) = f(t)\,dt + \Lambda(t)\,dB_{\mathbb{Q}}(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)\,\tilde{N}_{\mathbb{Q}}(dt,dz)\,.$$

tel que

$$f(t) = b(t) - \Lambda(t)\,u(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)\,\beta(t,z)\,\mu(dz)\,,$$

Preuve. Voir Øksendal [5] ■

Théorème 3.1.5 *(La condition de Novikov pour les processus d'Itô-Lévy)*

Soit le processus $Z(t)$ *de la forme* (3.3), *supposons que*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)\,ds + \int_0^T\int_{\mathbb{R}}\{(1-\beta(s,z))\ln(1-\beta(s,z)) + \beta(s,z)\}\,\mu(dz)\,ds\right)\right] < \infty,$$

où

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)\,ds + \int_0^T\int_{\mathbb{R}}\beta^2(s,z)\,N(ds,dz)\right)\right] < \infty.$$

Alors $Z(t)$ *vérifier* (3.4), *donc* $Z(t)$ *une martingale et la mesure* $\mathbb{Q}$ *définie par*

$$d\mathbb{Q} = Z(T)\,d\mathbb{P} \quad sur \quad \mathcal{F}_t,$$

est une mesure de probabilité.

3.2 Exemple 1 :Marché financier de la sensibilité au risque

Définition 3.2.1 *(Self–Financial) Il n'y a pas de retrait ou d'augmentation de la période de paiement* $[0,T]$. *Nous supposons que le marché s'autofinance, on note par* $V(t)$ *le montant de la richesse de l'investisseur, et* $u(t)$ *est le proportion de la richesse investie dans le stock au temps* t *alors* $\pi(t) = u(t)V(t)$, *est le montant du stock et* $(1-u(t))V(t)$, *est le montant dans le lien, ce qui signifie que l'investisseur a*

$$V(t) - u(t)V(t) = V(t) - \pi(t).$$

-L'application de transformation de Girsanov se retrouve dans l'économie, en fait en tant que dynamique de la valeur de la diffusion de la richesse, à cette fin nous étudierons certaines application. La dynamique du processus de diffusion par saut peut être décrite comme un

EDS suivant avec diffusion des sauts

$$\begin{cases} dx\left(t\right)=b\left(t,x\left(t^{-}\right)\right)dt+\Lambda\left(t,x\left(t^{-}\right)\right)dB\left(t\right)+\int_{\mathbb{R}}\gamma\left(t,x\left(t\right),z,\omega\right)\tilde{N}\left(dt,dz\right), \\ x\left(0\right)=x. \end{cases} \tag{3.7}$$

Nous considérons un marché financier dans lequel deux actifs peuvent être des choix deux actifs (titres) peuvent être des choix d'investissement, le premier est appelé un actif sans risque appelé aussi obligation (dépôt en devise étrangére par exemple), dont le prix $S_0\left(t\right)$ au temps t est donne par

$$\begin{cases} \frac{dS_0(t)}{S_0(t)}=r\left(t,x\left(t\right)\right)dt, \\ S_0\left(0\right)=s_0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Le deuxieme actif risque est appelé action, dont le prix $S_1\left(t\right)$ au temps t est donne par

$$\begin{cases} \frac{dS_1(t)}{S_1(t)}=\upsilon\left(t,x\left(t\right)\right)dt+\sigma\left(t,x\left(t\right)\right)dB\left(t\right)+\int_{\mathbb{R}}\delta\left(t,z\right)\tilde{N}\left(dt,dz\right), \\ S_1\left(0\right)=s_1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Où $r\left(t,x\left(t\right)\right)$ est le taux d'intérêt de fonction obligation, $\sigma\left(t,x\left(t\right)\right)$ est le taux volatilité du cours de l'action, et $\upsilon\left(t,x\left(t\right)\right)$ est appelé le taux de rendement attendu, et $\delta\left(.,z\right)\in\mathbb{R}$, satisfie $-1\leq\pi\left(t\right)\delta\left(.,z\right)\leq+\infty$, en plus la fonction $\delta\left(.,z\right)$ satisfie

$$\int_{\Gamma}\left|\delta\left(.,z\right)\right|^2\mu\left(dz\right)<+\infty,\text{ avec }\Gamma\subset\mathbb{R}-\left\{0\right\}.$$

Considérons maintenant un investisseur (agent) qui veut investir dans le dépôt sans risque (depot en monnaie étrangère par exemple) ne peut pas affecte les prix sur le marché financier, nous supposons aussi que notre marche doit être autofinance. Nous notons $V\left(t\right)$ le montant de la richesse de l'investisseur et $u\left(t\right)$ la proportion de la richesse investie dans le stock dans le temps t, puis $\pi\left(t\right)=u\left(t\right)V\left(t\right)$ est la montant du stock, et $\left(1-u\left(t\right)\right)V\left(t\right)$ est la montant de obligation ce qui signifie que l'investisseur a $V\left(t\right)-u\left(t\right)V\left(t\right)=V\left(t\right)-\pi\left(t\right)$ epargne en banque d'apries [(3.8) et (3.9)].

Ensuite la dynamique de la richesse de l'investisseur qui souhaite investir sur le marche financier prend la forme suivant :

$$\frac{dV(t)}{V(t^-)} = (V(t) - \pi(t)) \frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + \pi(t) \frac{dS_1(t)}{S_1(t)}.$$

En fait, la richesse de l'investisseur est décrit par

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{V(t^-)} &= (V(t) - \pi(t)) \frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + \pi(t) \frac{dS_1(t)}{S_1(t)} \\
&= (V(t) - \pi(t)) r(t, x(t)) dt + \pi(t) \Big[\nu(t, x(t)) dt + \sigma(t, x(t)) dB(t) \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \delta(t, z) \tilde{N}(dt, dz) \Big] \\
&= (V(t) - \pi(t)) r(t, x(t)) dt + \pi(t) \nu(t, x(t)) dt + \pi(t) \sigma(t, x(t)) dB(t) \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \pi(t) \delta(t, z) \tilde{N}(dt, dz) \\
&= V(t) r(t, x(t)) dt - \pi(t) r(t, x(t)) dt + \pi(t) \nu(t, x(t)) dt + \pi(t) \sigma(t, x(t)) dB(t) \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \pi(t) \delta(t, z) \tilde{N}(dt, dz) \\
&= \{V(t) r(t, x(t)) + [\nu(t, x(t)) - r(t, x(t))] \pi(t)\} dt + \pi(t) \sigma(t, x(t)) dB(t) \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \pi(t) \delta(t, z) \tilde{N}(dt, dz),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{V(t^-)} &= \{V(t) r(t, x(t)) + [\nu(t, x(t)) - r(t, x(t))] \pi(t)\} dt + \pi(t) \sigma(t, x(t)) dB(t) \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \pi(t) \delta(t, z) \tilde{N}(dt, dz).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Alors

$$\begin{aligned}
dV(t) &= \{V(t) r(t, x(t)) + [\nu(t, x(t)) - r(t, x(t))] \pi(t)\} V\left(t^-\right) dt + V\left(t^-\right) \pi(t) \sigma(t, x(t)) dB(t) \\
&+ \int_{\mathbb{R}} V\left(t^-\right) \pi(t) \delta(t, z) \tilde{N}(dt, dz).
\end{aligned}$$

Définition 3.2.2 *Un strategie admissible est* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-adapté de carré integrable a valeurs dans* $\mathbb{R}$*, le processus* π *tel que* (3.10) *admet un solution fort* $(V(t))_{t\in[0,T]}$*, qui satisfait* $\mathbb{E}\int_0^T |V(t)|\,dt < +\infty$*. Ensuite l'ensenble de toutes les strategies admissibles est note* $\mathcal{U}_{ab}$*.*

L'investisseur souhait maximiser son utilite attendue (aversion hyperbolique pour le risque absolu) de type HARA sur l'ensemble $\mathcal{U}_{ab}$ *dans un certain temps terminal* $T>0$

$$J^{\theta}(\pi(.)) = \frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left(V^{\theta}(T)\right). \tag{3.11}$$

En choisissant un strategie de choix de protefeuille $\pi(.)$ où l'exposant $\theta > 0$ est appele parametre sensible au risque. Si nous mettons $\theta = 1$ l'utilitaire (3.11) reduit au cas de risque neutre hebituel, l'espérance sous la mesure de probabilite $\mathbb{P}$ est indique par $\mathbb{E}$.

Lemme 3.2.1 *Nous pouvons reécrire l'espérance* $\mathbb{E}\left(V^{\theta}(T)\right)$ *decrite dans l'équation* (3.11) *en terme de l'exponentielle attendue du critère integral*

$$J^{\theta}(\pi(.)) = \frac{1}{\theta}V^{\theta}(0)\,\tilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left(\theta\int_0^T h(t,x(t),\pi(t),z)\,dt\right)\right],$$

où $\tilde{\mathbb{E}}$ *est la nouvelle espérance par rapport à la mesure de probabilité* $\tilde{\mathbb{P}}$*, et la fonction* h *définie de la forme*

$$\begin{aligned} h(t,x(t),\pi(t),z) &= \frac{1}{2}(\theta-1)\pi^2(t)\sigma^2(t,x(t)) + V(t)r(t,x(t)) \\ &+ [\nu(t,x(t)) - r(t,x(t))]\pi(t) \\ &+ \int_{|z|<R}\left\{\frac{1}{\theta}\left[(1+\pi(t)\sigma(t,z))^{\theta} - 1\right] - \pi(t)\sigma(t,z)\right\}\mu(dz). \end{aligned}$$

Preuve. On applique formule d'Itô-Lévy pour $\ln\left(V^{\theta}(t)\right) = \theta \ln(V(t)) = \theta f(t, V(t))$ on trouver

$$\begin{aligned}
\theta df(t,V(t)) &= \theta \ln(V(t)) \\
&= \theta \frac{\partial f}{\partial t}(t,V(t))\,dt + \theta \frac{\partial f}{\partial x}\left(t,V\left(t^{-}\right)\right) dV^{c}(t) + \theta \frac{1}{2}\frac{\partial^{2} f}{\partial x^{2}}\left(t,V\left(t^{-}\right)\right)\langle dV(t), dV(t)\rangle \\
&+ \theta \int_{|z|<R}\left[f\left(t,V\left(t^{-}\right)+V\left(t^{-}\right)\pi(t)\delta(t,z)\right) - f\left(t,V\left(t^{-}\right)\right)\right. \\
&\left. -\frac{\partial f}{\partial x}\left(t,V\left(t^{-}\right)\right)V\left(t^{-}\right)\pi(t)\delta(t,z)\right]\mu(dz)\,dt \\
&+ \theta \int_{\mathbb{R}}\left[f\left(t,V\left(t^{-}\right)+V\left(t^{-}\right)\pi(t)\delta(t,z)\right) - f\left(t,V\left(t^{-}\right)\right)\right]\tilde{N}(dt,dz).
\end{aligned}$$

Par remplacer les dérivés, on obtient

$$\begin{aligned}
\theta df(t,V(t)) &= \theta \frac{1}{V(t^{-})} dV^{c}(t) + \theta \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{V^{2}(t^{-})}\right) V^{2}\left(t^{-}\right)\pi^{2}(t)\sigma^{2}(t,z)\,dt \\
&+ \theta \int_{|z|<R}\left[\ln\left(V\left(t^{-}\right)+V\left(t^{-}\right)\pi(t)\delta(t,z)\right) - \ln\left(V\left(t^{-}\right)\right)\right. \\
&\left. -\frac{1}{V(t^{-})}V\left(t^{-}\right)\pi(t)\delta(t,z)\right]\mu(dz)\,dt \\
&+ \theta \int_{\mathbb{R}}\left[\ln\left(V\left(t^{-}\right)+V\left(t^{-}\right)\pi(t)\delta(t,z)\right) - \ln\left(V\left(t^{-}\right)\right)\right]\tilde{N}(dt,dz).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\theta df(t,V(t)) &= \theta\left\{V(t)\,r(t,x(t)) + \left[\nu(t,x(t)) - r(t,x(t))\right]\pi(t)\right\}dt \\
&+ \pi(t)\sigma(t,x(t))\,dB(t) - \theta \frac{1}{2}\pi^{2}(t)\sigma^{2}(t,z)\,dt \\
&+ \theta \int_{|z|<R}\left[\ln\left(V\left(t^{-}\right)+V\left(t^{-}\right)\pi(t)\delta(t,z)\right) - \ln\left(V\left(t^{-}\right)\right) - \pi(t)\delta(t,z)\right]\mu(dz)\,dt \\
&+ \theta \int_{\mathbb{R}}\left[\ln\left(V\left(t^{-}\right)+V\left(t^{-}\right)\pi(t)\delta(t,z)\right) - \ln\left(V\left(t^{-}\right)\right)\right]\tilde{N}(dt,dz).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
&\theta \int_{|z|<R} \left[\ln\left(V\left(t^{-}\right)+V\left(t^{-}\right)\pi(t)\,\delta(t,z)\right)-\ln\left(V\left(t^{-}\right)\right)-\pi(t)\,\delta(t,z)\right]\mu(dz)\,dt \\
&=\theta \int_{|z|<R} \left[\ln\left(V\left(t^{-}\right)(1+\pi(t)\,\delta(t,z))\right)-\ln\left(V\left(t^{-}\right)\right)-\pi(t)\,\delta(t,z)\right]\mu(dz)\,dt \\
&=\theta \int_{|z|<R} \left[\ln\left(V\left(t^{-}\right)\right)+\ln(1+\pi(t)\,\delta(t,z))-\ln\left(V\left(t^{-}\right)\right)-\pi(t)\,\delta(t,z)\right]\mu(dz)\,dt \\
&=\theta \int_{|z|<R} [\ln(1+\pi(t)\,\delta(t,z))-\pi(t)\,\delta(t,z)]\,\mu(dz)\,dt \\
&=\int_{|z|<R} [\theta\ln(1+\pi(t)\,\delta(t,z))-\theta\pi(t)\,\delta(t,z)]\,\mu(dz)\,dt \\
&=\int_{|z|<R} \left[\ln(1+\pi(t)\,\delta(t,z))^{\theta}-\theta\pi(t)\,\delta(t,z)\right]\mu(dz)\,dt \\
&=\int_{|z|<R} \Big[\ln(1+\pi(t)\,\delta(t,z))^{\theta}+1-1-(1+\pi(t)\,\delta(t,z))^{\theta} \\
&+(1-\pi(t)\,\delta(t,z))^{\theta}-\theta\pi(t)\,\delta(t,z)\Big]\,\mu(dz)\,dt.
\end{aligned}
$$

Par la linéarité de l'intégrale, on a

$$
\begin{aligned}
&\theta \int_{|z|<R} \left[\ln\left(V\left(t^{-}\right)+V\left(t^{-}\right)\pi(t)\,\delta(t,z)\right)-\ln\left(V\left(t^{-}\right)\right)-\pi(t)\,\delta(t,z)\right]\mu(dz)\,dt \\
&=\int_{|z|<R} \left[\ln(1+\pi(t)\,\delta(t,z))^{\theta}+1-(1+\pi(t)\,\delta(t,z))^{\theta}\right]\mu(dz)\,dt \\
&+\theta \int_{|z|<R} \left\{\frac{1}{\theta}\left[(1-\pi(t)\,\delta(t,z))^{\theta}-1\right]-\pi(t)\,\delta(t,z)\right\}\mu(dz)\,dt.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

En substituant l'équation (3.13) dans (3.12), on a

$$
\begin{aligned}
V^{\theta}(T) &= \exp(\theta \ln(V(T))) \\
&= \exp\left\{\theta \ln(V(0)) + \theta \int_0^T [V(t) r(t, x(t)) + [\nu(t, x(t)) - r(t, x(t))] \pi(t)] \, dt \right. \\
&- \frac{1}{2}\theta \int_0^T \pi^2(t) \sigma^2(t, z) \, dt + \theta \int_0^T \pi(t) \sigma(t, x(t)) \, dB(t) \\
&+ \int_0^T \int_{|z|<R} \left[\ln(1 + \pi(t) \delta(t, z))^{\theta} + 1 - (1 + \pi(t) \delta(t, z))^{\theta}\right] \mu(dz) \, dt \\
&+ \theta \int_0^T \int_{|z|<R} \left\{\frac{1}{\theta}\left[(1 - \pi(t) \delta(t, z))^{\theta} - 1\right] - \pi(t) \delta(t, z)\right\} \mu(dz) \, dt \\
&\left. + \ \theta \int_0^T \int_{|z|<R} [\ln(1 + \pi(t) \delta(t, z))] \tilde{N}(dt, dz)\right\}.
\end{aligned}
$$

Ensuite, nous obtenons aprés avoir pris l'attente

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[V^{\theta}(T)\right] &= \frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[\exp(\theta \ln(V(T)))\right] \\
&= \frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[\exp\left\{\ln V^{\theta}(0)\right\} \exp\left\{\theta \int_0^T [V(t) r(t, x(t)) + [\nu(t, x(t)) - r(t, x(t))] \pi(t)] \, dt \right.\right. \\
&- \frac{1}{2}\theta \int_0^T \pi^2(t) \sigma^2(t, z) \, dt + \theta \int_0^T \pi(t) \sigma(t, x(t)) \, dB(t) \\
&+ \int_0^T \int_{|z|<R} \left[\ln(1 + \pi(t) \delta(t, z))^{\theta} + 1 - (1 + \pi(t) \delta(t, z))^{\theta}\right] \mu(dz) \, dt \\
&+ \theta \int_0^T \int_{|z|<R} \left\{\frac{1}{\theta}\left[(1 - \pi(t) \delta(t, z))^{\theta} - 1\right] - \pi(t) \delta(t, z)\right\} \mu(dz) \, dt \\
&\left.\left. + \ \theta \int_0^T \int_{|z|<R} [\ln(1 + \pi(t) \delta(t, z))] \tilde{N}(dt, dz)\right\}\right].
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[V^{\theta}(T)\right] &= \frac{1}{\theta}V^{\theta}(0)\,\mathbb{E}\left[\exp\left\{\theta\int_0^T \left[V(t)\,r(t,x(t)) + \left[\nu(t,x(t)) - r(t,x(t))\right]\pi(t)\right]dt\right.\right.\\
&+\theta\int_0^T \pi(t)\,\sigma(t,x(t))\,dB(t) - \frac{1}{2}\theta\int_0^T \pi^2(t)\,\sigma^2(t,z)\,dt\\
&-\frac{1}{2}\theta^2\int_0^T \pi^2(t)\,\sigma^2(t,z)\,dt + \frac{1}{2}\theta^2\int_0^T \pi^2(t)\,\sigma^2(t,z)\,dt\\
&+\int_0^T\int_{|z|<R}\left[\ln\left(1+\pi(t)\,\delta(t,z)\right)^{\theta} + 1 - \left(1+\pi(t)\,\delta(t,z)\right)^{\theta}\right]\mu(dz)\,dt\\
&+\theta\int_0^T\int_{|z|<R}\left\{\frac{1}{\theta}\left[\left(1-\pi(t)\,\delta(t,z)\right)^{\theta} - 1\right] - \pi(t)\,\delta(t,z)\right\}\mu(dz)\,dt\\
&\left.\left.+\;\theta\int_0^T\int_{|z|<R}\left[\ln\left(1+\pi(t)\,\delta(t,z)\right)\right]\tilde{N}(dt,dz)\right\}\right].
\end{aligned}
$$

Par les proprietés de l'exponentielle, on trouve

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[V^{\theta}(T)\right] &= \frac{1}{\theta}V^{\theta}(0)\,\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\theta^2\int_0^T \pi^2(t)\,\sigma^2(t,z)\,dt + \theta\int_0^T \pi(t)\,\sigma(t,x(t))\,dB(t)\right.\right.\\
&+\int_0^T\int_{|z|<R}\left[\ln\left(1+\pi(t)\,\delta(t,z)\right)^{\theta} + 1 - \left(1+\pi(t)\,\delta(t,z)\right)^{\theta}\right]\mu(dz)\,dt\\
&\left.+\;\theta\int_0^T\int_{|z|<R}\left[\ln\left(1+\pi(t)\,\delta(t,z)\right)\right]\tilde{N}(dt,dz)\right\}\\
&\exp\left\{\theta\int_0^T \left[V(t)\,r(t,x(t)) + \left[\nu(t,x(t)) - r(t,x(t))\right]\pi(t)\right]dt\right.\\
&-\frac{1}{2}\theta\int_0^T \pi^2(t)\,\delta^2(t,z)\,dt + \frac{1}{2}\theta^2\int_0^T \pi^2(t)\,\sigma^2(t,z)\,dt\\
&\left.\left.+\theta\int_0^T\int_{|z|<R}\left\{\frac{1}{\theta}\left[\left(1-\pi(t)\,\delta(t,z)\right)^{\theta} - 1\right] - \pi(t)\,\delta(t,z)\right\}\mu(dz)\,dt\right\}\right]\\
&= \frac{1}{\theta}V^{\theta}(0)\,\mathbb{E}\left[\mathrm{I}_1 \times \mathrm{I}_2\right],
\end{aligned}
$$

tels que

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_1 = \exp\Bigg\{ & -\frac{1}{2}\theta^2 \int_0^T \pi^2(t)\,\sigma^2(t,z)\,dt + \theta \int_0^T \pi(t)\,\sigma(t,x(t))\,dB(t) \\
& + \int_0^T \int_{|z|<R} \left[\ln(1+\pi(t)\,\delta(t,z))^\theta + 1 - (1+\pi(t)\,\delta(t,z))^\theta \right] \mu(dz)\,dt \\
& + \theta \int_0^T \int_{|z|<R} \left[\ln(1+\pi(t)\,\delta(t,z)) \right] \tilde{N}(dt,dz) \Bigg\},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_2 = \exp\Bigg\{ & \theta \int_0^T \frac{1}{2}(\theta-1)\,\pi^2(t)\,\sigma^2(t,z)\,dt \\
& + \theta \int_0^T \left[V(t)\,r(t,x(t)) + \left[\nu(t,x(t)) - r(t,x(t))\right]\pi(t) \right] dt \\
& + \theta \int_0^T \int_{|z|<R} \left\{ \frac{1}{\theta}\left[(1-\pi(t)\,\delta(t,z))^\theta - 1 \right] - \pi(t)\,\delta(t,z) \right\} \mu(dz)\,dt \Bigg\} \Bigg] \\
= \exp\Bigg\{ & \theta \int_0^T h(t,x(t),\pi(t),z)\,dt \Bigg\},
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
h(t,x(t),\pi(t),z) = {} & \frac{1}{2}(\theta-1)\,\pi^2(t)\,\sigma^2(t,z) + V(t)\,r(t,x(t)) + \left[\nu(t,x(t)) - r(t,x(t))\right]\pi(t) \\
& \int_{|z|<R} \left\{ \frac{1}{\theta}\left[(1-\pi(t)\,\delta(t,z))^\theta - 1 \right] - \pi(t)\,\delta(t,z) \right\} \mu(dz).
\end{aligned}$$

On a la condition de Novikov pour le processus d'Itô-Lévy

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)\,dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \beta^2(t,z)\,\tilde{N}(dt,dz) \right) \right] \leq \infty,$$

avec

$$u(t) = \theta\pi(t)\,\sigma(t,x(t)) \quad \text{et} \quad \beta^2(t,z) = \theta\left[\ln(1+\pi(t)\,\delta(t,z))\right].$$

En appliquant la transformation de Girsanov, le terme intégral stochastique peut être supprime et selon l'hypothese de la condition de Novikov, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} &= \left\{ -\frac{1}{2}\theta^2 \int_0^T \pi^2(t)\,\sigma^2(t,z)\,dt + \theta \int_0^T \pi(t)\,\sigma(t,x(t))\,dB(t) \right. \\
&+ \int_0^T \int_{|z|<R} \left[\ln\left(1+\pi(t)\,\delta(t,z)\right)^\theta + 1 - \left(1+\pi(t)\,\delta(t,z)\right)^\theta \right] \mu(dz)\,dt \\
&\left. + \theta \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[\ln\left(1+\pi(t)\,\delta(t,z)\right)\right] \tilde{N}(dt,dz) \right\}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
J^\theta(\pi(.)) &= \frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left(V^\theta(T)\right) \\
&= \frac{1}{\theta} V^\theta(0)\,\mathbb{E}\left[\mathrm{I}_1 \times \mathrm{I}_2\right] \\
&= \frac{1}{\theta} V^\theta(0)\,\mathbb{E}\left[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \exp\left\{\theta \int_0^T h(t,x(t),\pi(t),z)\,dt\right\}\right] \\
&= \frac{1}{\theta} V^\theta(0)\,\tilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{\theta \int_0^T h(t,x(t),\pi(t),z)\,dt\right\}\right],
\end{aligned}$$

où $\tilde{\mathbb{E}}$ est la nouvelle espérance par rapport à la mesure $\tilde{\mathbb{P}}$. ■

Lemme 3.2.2 *Notre dynamique* (3.1) *satisfait le EDS suivant avec le saut*

$$dx(t) = f(t,x(t),z,\pi(t))\,dt + \Lambda(t,x(t))\,d\tilde{B} + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)\,\hat{N}(dt,dz),$$

où la fonction f est donnée par

$$f(t,x(t),z,\pi(t)) = b(t,x(t)) - \theta\pi(t)\,\Lambda(t,x(t))\,\pi(t)\,\sigma(t,x(t)) + \int_{\mathbb{R}} \left(1+\pi(t)\,\delta(t,x(t))\right)^\theta \mu(dz).$$

Preuve. Application de la transformation de Girsanov donnée dans le théorème II. On note par

$$\tilde{B}(t) = B(t) + \theta \int_0^t \pi(s)\,\sigma(s,x(s))\,ds,$$

est un mouvement Brownien standard sous la mesure de probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$, et la $\tilde{\mathbb{P}}$-mesure aléatoire de Poisson compenseé est donnée par

$$\int_0^t \int_{|z|<R} \hat{N}(ds, dz) = \int_0^t \int_{|z|<R} \tilde{N}(ds, dz) + \int_0^t \int_{|z|<R} (1 + \pi(s)\,\delta(s, x(s)))^\theta \mu(dz)\,ds.$$

Pour tout $0 \le s \le t$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
dx(t) &= b(t, x(t))\,dt + \Lambda(t, x(t))\,dB(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z)\,\tilde{N}(dt, dz) \\
&= b(t, x(t))\,dt + \Lambda(t, x(t))\,d\left(\tilde{B}(t) - \theta \int_0^t \pi(s)\,\sigma(s, x(s))\,ds\right) \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z)\left(\hat{N}(dt, dz) - (1 + \pi(t)\,\delta(t, x(t)))^\theta \mu(dz)\,dt\right) \\
&= b(t, x(t))\,dt + \Lambda(t, x(t))\,d\tilde{B}(t) - \theta\Lambda(t, x(t))\,\pi(t)\,\sigma(t, x(t))\,dt \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z)\,\hat{N}(dt, dz) - \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z)\,(1 + \pi(t)\,\delta(t, x(t)))^\theta \mu(dz)\,dt \\
&= \left[b(t, x(t))\,dt - \theta\Lambda(t, x(t))\,\pi(t)\,\sigma(t, x(t)) - \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z)\,(1 + \pi(t)\,\delta(t, x(t)))^\theta \mu(dz)\right] dt \\
&+ \Lambda(t, x(t))\,d\tilde{B}(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z)\,\hat{N}(dt, dz).
\end{aligned}$$

Si on note par

$$f(t, x(t), z, \pi(t)) = b(t, x(t)) - \theta\pi(t)\,\Lambda(t, x(t))\,\pi(t)\,\sigma(t, x(t)) + \int_{\mathbb{R}} (1 + \pi(t)\,\delta(t, x(t)))^\theta \mu(dz).$$

Alors nous obtenons

$$\begin{cases} dx(t) = f(t, x(t), z, \pi(t))\,dt + \Lambda(t, x(t))\,d\tilde{B} + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z)\,\hat{N}(dt, dz), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

La preuve est terminée. ■

3.3 Exemple 2 : Probabilité risque neutre

Définition 3.3.1 *(Probabilité risque neutre) Cette probabilité peut s'interpréter comme celle qui régirait le processus de prix des sous-jacents de ces actifs si l'espérance du taux de rendement de ceux-ci était le taux d'intérêt sans risque (d'où le terme risque-neutre : aucune prime n'est attribuée à la prise de risque).*

Définition 3.3.2 *(Actif risqué) Un actif risqué est un actif qui ne peut garantir, de manière certaine, les flux de rémunération et de remboursement d'un investisseur (particuliers ou institutionnels).*

Définition 3.3.3 *(Actif non risqué) L'actif sans risque est un actif qui garantit les flux de rémunération et le remboursement de l'investisseur. Un actif sans risque est considéré comme sans risque de défaut.*

Corollaire 3.3.1 *On det que e^X est une martingale si et seulement si :*

$$b(t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t) + \int_{|z|<R} \left(e^{H(t,z)} - 1 - H(t,z)\right)\nu(dz) + \int_{|z|\geq R} \left(e^{K(t,z)} - 1\right)\nu(dz) = 0,$$

presque sûrement pour (Lebesgue) presque tout $t \geq 0$.

Définition 3.3.4 *(Exponentielle de Doleans-Dade)*

La question est de trouver un processus adapté tel que

$$dZ_t = Z_{t^-} dX_t.$$

On définit l'exponentielle de Doleans-Dade, pour $t \geq 0$:

$$Z_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(r)\,dr\right) \prod_{0\leq s\leq t} (1 + \Delta X_s)\, e^{-\Delta X_s}.$$

On fait l'hypothèse que

$$\inf \{\Delta X_t, t > 0\} > -1 \qquad \textit{presque sûrement.}$$

On considère un actif risqué $\{S_t, t \geq 0\}$ adapté à une filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, et un actif non risqué $\{S_t^0, t \geq 0\}$ qui croît selon la formule des intérêts composés

$$\forall t \geq 0 \quad S_t^0 = S_0 e^{rt},$$

où r est le taux d'intérêt instantané.

On définit le processus actualisé $\left\{\tilde{S}_t, t \geq 0\right\}$ par

$$\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t. \tag{3.14}$$

Théorème 3.3.1 *Si le marché est libre d'arbitrage, il existe une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle l'actif réactualisé $\tilde{S}$ est une martingale.*

Un marché est dit complet si tout actif contingent peut être répliqué par un porte-feuille auto-financé.

Théorème 3.3.2 *Le marché est complet si et seulement s'il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle l'actif réactualisé $\tilde{S}$ est une martingale.*

Une telle mesure est alors appelée mesure de risque neutre. Si $\mathbb{Q}$ existe mais n'est pas unique, le marché est dit incomplet.

On suppose que l'actif risqué satisfait l'EDS

$$dS_t = \sigma S_{t^-} dX_t + \mu S_{t-} dt,$$

où X est un processus de Lévy. On peut alors utiliser les exponentielles de Doleans-Dade pour modéliser S. Clairement, pour que les prix du stock soit non négatif, il faut imposer la condition $\Delta X_t > -\sigma^{-1}$, on pose $c = -\sigma^{-1}$. On impose également la condition suivante sur la mesure de Lévy ν associée à la mesure aléatoire de Poisson N représentant les sauts de X

$$\int_c^{+\infty} \left(x^2 \vee x\right) d\nu\left(x\right) < +\infty.$$

D'après la décomposition d'Ito-Lévy (2.1), on peut écrire

$$X_t = mt + kB_t + \int_0^t \int_c^{+\infty} z\tilde{N}\left(dr, dz\right),$$

où $k \geq 0$ et $m \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule d'Itô-Lévy sur $(\ln S_t) = f\left(t, x\right)$, on a

$$\begin{aligned} dS_t &= \sigma S_{t^-} dX_t + \mu S_{t^-} dt \\ &= \sigma S_{t^-} \left(mdt + kdB_t + \int_c^{+\infty} z\tilde{N}\left(dr, dz\right) \right) + \mu S_{t^-} dt \\ &= \left(\sigma m + \mu\right) S_{t^-} dt + k\sigma S_{t^-} dB_t + \int_c^{+\infty} \sigma S_{t^-} z\tilde{N}\left(dr, dz\right). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} d\left(f\left(t, S_t\right)\right) &= d\left(\ln\left(S_t\right)\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}\left(t, S_{t^-}\right) dt + \frac{\partial f}{\partial x}\left(t, S_{t^-}\right) dS_t^c + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(t, S_{t^-}\right) \langle dS_t, dS_t\rangle \\ &+ \int_{(-R\vee c)}^R \left[f\left(t, S_{t^-} + \sigma z S_{t^-}\right) - f\left(t, S_{t^-}\right) - \frac{\partial f}{\partial x}\left(t, S_{t^-}\right) \sigma z S_{t^-} \right] \nu\left(dz\right) dt \\ &+ \int_c^{+\infty} \left[f\left(t, S_{t^-} + \sigma z S_{t^-}\right) - f\left(t, S_{t^-}\right) \right] \tilde{N}\left(dt, dz\right). \end{aligned}$$

On remplace les dérivés

$$\begin{aligned} d\left(f\left(t, S_t\right)\right) &= \frac{1}{S_{t^-}}\left(\left(\sigma m + \mu\right) S_{t^-} dt + k\sigma S_{t^-} dB_t\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S_{t^-}^2}\right) S_{t^-}^2 k^2 \sigma^2 dt \\ &+ \int_{(-R\vee c)}^R \left[\ln\left(S_{t^-} + \sigma z S_{t^-}\right) - \ln\left(S_{t^-}\right) - \frac{1}{S_{t^-}} \sigma z S_{t^-} \right] \nu\left(dz\right) dt \\ &+ \int_c^{+\infty} \left[\ln\left(S_{t^-} + \sigma z S_{t^-}\right) - \ln\left(S_{t^-}\right) \right] \tilde{N}\left(dt, dz\right). \end{aligned}$$

donc

$$d\left(f\left(t,S_t\right)\right)=\left(\sigma m+\mu\right)dt+k\sigma dB_t-\frac{1}{2}k^2\sigma^2dt+\int_{(-R\vee c)}^{R}\left[\ln\left(1+\sigma z\right)-\sigma z\right]\nu\left(dz\right)dt$$
$$+\int_c^{+\infty}\ln\left(1+\sigma z\right)\tilde{N}\left(dt,dz\right).$$

Alors

$$d\left(f\left(t,S_t\right)\right)=\left(\sigma m+\mu-\frac{1}{2}k^2\sigma^2\right)dt+k\sigma dB_t++\int_{(-R\vee c)}^{R}\left[\ln\left(1+\sigma z\right)-\sigma z\right]\nu\left(dz\right)dt$$
$$+\int_c^{+\infty}\ln\left(1+\sigma z\right)\tilde{N}\left(dt,dz\right).$$

On cherche maintenant à déterminer des mesures de probabilité $\mathbb{Q}$ équivalentes à $\mathbb{P}$ par rapport auxquelles l'actif risqué réactualisé est une martingale. Pour cela on va chercher des mesures de probbilités $\mathbb{Q}$ sous la forme

$$d\mathbb{Q}=e^{Y_T}d\mathbb{P},$$

où Y est un processus d'Itô-Lévy de la forme

$$\begin{cases} dY_t=G\left(t\right)dt+F\left(t\right)dB_t+\displaystyle\int_{\mathbb{R}}H\left(t,z\right)\tilde{N}\left(dt,dz\right), \\ Y\left(0\right)=y_0, \end{cases}$$

Avec H est privisible.

On suppose que les coefficients G, H, F sont tels que le processus e^Y soit une martingale. Ainsi G est uniquement déterminé par F et H d'après le corollaire 3.3.1. On peut donc définir une nouvelle mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ par

$$d\mathbb{Q}=e^{Y_T}d\mathbb{P}.$$

De plus, d'après le théorème de Girsanov

$$B_t^{\mathbb{Q}} = B_t - \int_0^t F(r)\, dr,$$

est un mouvement brownien sous Q et

$$\tilde{N}^{\mathbb{Q}}(t, E) = \tilde{N}(t, E) - \nu^{\mathbb{Q}}(t, E),$$

est une $\mathbb{Q}$-martingale où

$$\nu^{\mathbb{Q}}(t, E) = \int_0^t \int_E \left(e^{H(r,z)} - 1\right) \nu(dz)\, dr.$$

On peut alors réécrire le prix de l'actif réactualisé en fonctions de ces nouveaux processus pour obtenir :

$$\begin{aligned} d\ln\left(\tilde{S}\right) &= d\ln\left(e^{-rt}S_t\right) \\ &= d\ln\left(e^{-rt}\right) + d\ln(S_t) \\ &= d(-rt) + d\ln(S_t) \\ &= -rdt + (\sigma m + \mu)\, dt + k\sigma dB_t - \frac{1}{2}k^2\sigma^2 dt + \int_{(-R\vee c)}^{R} [\ln(1+\sigma z) - \sigma z]\, \nu(dz)\, dt \\ &+ \int_c^{+\infty} \ln(1+\sigma z)\, \tilde{N}(dt, dz). \end{aligned}$$

On applique théorème de Girsanov, on trouve

$$\begin{aligned} d\ln\left(\tilde{S}\right) = (\sigma m + \mu - r)\, dt + k\sigma\left(dB_t^{\mathbb{Q}} + F(t)\, dt\right) - \frac{1}{2}k^2\sigma^2 dt + \int_c^{+\infty} \ln(1+\sigma z)\, \tilde{N}^{\mathbb{Q}}(dt, dz) \\ + \int_c^{+\infty} \ln(1+\sigma z)\, \nu^{\mathbb{Q}}(dt, dz) + \int_{(-R\vee c)}^{R} [\ln(1+\sigma z) - \sigma z]\, \nu(dz)\, dt, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} d\ln\left(\tilde{S}\right) &= (\sigma m + \mu - r + k\sigma F(t))\,dt + k\sigma dB_t^{\mathbb{Q}} - -\frac{1}{2}k^2\sigma^2 dt \\ &+ \int_c^{+\infty} \ln(1+\sigma z)\,\tilde{N}^{\mathbb{Q}}(dt,dz) + \int_c^{+\infty} (\ln(1+\sigma z) - \sigma z)\left(e^{H(r,z)} - 1\right)\nu(dz)\,dt \\ &+ \int_c^{+\infty} \sigma z\left(e^{H(r,z)} - 1\right)\nu(dz)\,dt + \int_{(-R\vee c)}^{R} [\ln(1+\sigma z) - \sigma z]\,\nu(dz)\,dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} d\ln\left(\tilde{S}\right) &= (\sigma m + \mu - r + k\sigma F(t))\,dt + k\sigma dB_t^{\mathbb{Q}} - \frac{1}{2}k^2\sigma^2 dt \\ &+ \int_c^{+\infty} \ln(1+\sigma z)\,\tilde{N}^{\mathbb{Q}}(dt,dz) + \int_c^{+\infty} (\ln(1+\sigma z) - \sigma z)\,e^{H(r,z)}\nu(dz)\,dt \\ &- \int_c^{+\infty} (\ln(1+\sigma z) - \sigma z)\,\nu(dz)\,dt + \int_c^{+\infty} \sigma z\left(e^{H(r,z)} - 1\right)\nu(dz)\,dt \\ &+ \int_{(-R\vee c)}^{R} [\ln(1+\sigma z) - \sigma z]\,\nu(dz)\,dt. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} d\ln\left(\tilde{S}\right) &= k\sigma dB_t^{\mathbb{Q}} - \frac{1}{2}k^2\sigma^2 dt + \int_c^{+\infty} \ln(1+\sigma z)\,\tilde{N}^{\mathbb{Q}}(dt,dz) \\ &+ \int_c^{+\infty} (\ln(1+\sigma z) - \sigma z)\,e^{H(r,z)}\nu(dz)\,dt \\ &+ \Bigg[\sigma m + \mu - r + k\sigma F(t) + \int_c^{+\infty} \sigma z\left(e^{H(r,z)} - 1\right)\nu(dz) \\ &+ \int_{(-R\vee c)}^{R} [\ln(1+\sigma z) - \sigma z]\,\nu(dz) - \int_c^{+\infty} (\ln(1+\sigma z) - \sigma z)\,\nu(dz)\Bigg]\,dt. \end{aligned}$$

Pour simplifier les calcule, posons

$$\begin{aligned} C(t) &= \sigma m + \mu - r + k\sigma F(t) + \int_c^{+\infty} \sigma z\left(e^{H(r,z)} - 1\right)\nu(dz) \\ &+ \int_{(-R\vee c)}^{R} [\ln(1+\sigma z) - \sigma z]\,\nu(dz) - \int_c^{+\infty} (\ln(1+\sigma z) - \sigma z)\,\nu(dz) \end{aligned}$$

En appliquant la formule d'Itô-Lévy sur (3.14), on obtient :

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t k\sigma dB_t^{\mathbb{Q}} + \int_c^{+\infty} \tilde{S}_{t^-}\sigma z \tilde{N}^{\mathbb{Q}}(dt, dz) + \tilde{S}_t C\left(t\right) dt.$$

Ainsi, l'actif réactualisé $\tilde{S}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale si et seulement si $C(t) = 0$ ps. C'est même une martingale si l'on impose la condition

$$\forall t \geq 0, \quad \int_0^t \int_0^{+\infty} z^2 \mathbb{E}\left[e^{H(r,z)}\right] \nu\left(dz\right) dr < +\infty.$$

Il est important de remarquer que la condition $C\left(t\right) = 0$ possède (en général) une infinité de solutions (F, H). En effet, si $f \in L^1\left(\mathbb{R}, \nu\right)$ et si (F, H) est une solution, alors le couple

$$\left(F + \int_{\mathbb{R}} f d\nu, \ln\left(e^H - \frac{kf}{z}\right)\right),$$

est aussi solution. Donc il existe une infinité de mesure $\mathbb{Q}$, équivalentes à $\mathbb{P}$, sous lesquelles l'actif réactualisé est une martingale. D'une façon générale, les modèles d'actif de type Lévy sont donc des marchés incomplets.

Bibliographie

[1] Braiand, P. Equations Differentielles Stochastique Retrograde, Mars (2001)

[2] Chala, A., Hafayedy, D., Khallout, R. The Use of Girsanov's Theorem to Describe the Risk-Sensitive Problem and Application to Optimal Control. Stochastic Differential Equations : Basics and Applications. Nova Edition (2018)

[3] Foata, D., Fuchs, A. Processus stochastiques-Processus de Poisson, chaînes de Markov et martingales. Dunod, Parigi (2002).

[4] Jeanblanc, M. Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry (2006).

[5] Øksendal, B., Sulem, A. Applied stochastic control of jump diffusions. Vol. 498. Berlin : Springer, (2005).

[6] Rhodes, R. Processus de lévy et calcul stochastique. Document de travail, Université Paris-Dauphine (2010).

Annexe :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	espace de probabilité
$\mathcal{P}(E)$	tribu grossien
L^1	l'espace des fonction intégrable
$p.s$	presque surement
C^1, C^2	l'espace des fonction continue intégrable
F_t	filtration
B_t	mouvement brownien
$\mathbb{E}[X_s \mid \mathcal{F}_t]$	l'éspèrance conditionnelle
$\mathbb{P} - p.s$	presque surement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$