République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **probabilité**

Par

Djenien Aicha

Titre :

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades avec retard

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Khalfallah Nabil	UMKB	Président
Dr.	Yakhlef Samia	UMKB	Encadreur
Dr.	Gatt Rafika	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Je tiens à dédie ce travail à :

A l'esprit de ma mère, a mon père symbole de tous les sacrifices grâce à lui je suis aujourd'hui plus ambitieuse.

Pour ma belle mère une femme spéciale qui a occuper une place spéciale dans mon cœur et dans ma vie.

A mes frères et sœurs pour leur grand amour et leurs prières et leur soutien.

A tous les membres de ma famille petite ou grande, proche ou lointaine.

Tous mes amis.

Tous mes collègues de promotion.

Tous que j'aime.

Que dieu les protèges.

REMERCIEMENTS

Je remercie dieu tout puissant de m'avoir donné la forcés, le courage et la patience d'arrivé a la fin de mes études supérieurs.

Je tiens à remercies vivement tous mes professeurs.

Je remercie mon encadreur Dr Yekhlef Samia, pour m'avoir proposé ce projet et pour son encadrement, je le remercie vivement pour son écote, son aide et pour ses conseil.

Ainsi, je remercie les membres du jury qui ont accepte d'évaluer mon projet, je leurs présente toute mes gratitudes et mes profonds respects.

Je souhaite exprimer enfin ma gratitudes et mes vifs remerciements à toute la famille et mes amis pour leurs soutien.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs en abrégé) soient apparues pour le première fois en 1973 dans un travail de Bismut, la théorie associée doit son développement à E.Pardoux et S.Peng [5] qui ont établi le premier résultat d'existence et d'unicité dans le cas non-linéaire. Ceci est essentiellement du aux nombreuses applications qu'elles ont pu apporter dans divers domaines de mathématiques tels que les EDP et l'homogénéisation, les mathématiques financières, le contrôle optimal, les jeux différentiels et la géométrie différentielle, . . . etc.

Pour commencer, on donne une brève présentation des notions clés :

Comme indique leur nom, les EDSRs sont des équations différentielles stochastiques avec une donnée terminale.

Dans le début des années 90, E.Pardoux et S.Peng sont les premiers à considérer des équations non-linéaires :

$$\begin{cases} dY_t = -f\left(t, Y_t, Z_t\right) dt + Z_t dW_t,\ 0 \leq t < T, \\ Y_T = \xi, \end{cases}$$

où ξ est la valeur terminale et f est le générateur ou encore le coefficient de l'EDSR qui est une fonction nonlinéaire et globalement lipschitizienne par rapport aux variables (Y, Z).

La solution est un couple de processus (Y, Z). En effet comme la condition aux limites est donnée à l'instant terminal T, la présence du processus Z assure à Y d'être adapté par rapport à la filtration du mouvement brownien $(W_t)_{t\leq T}$ via le théorème de représentation des martingales.

Les premières études sur les EDSRs avaient pour but de déterminer les conditions que doivent satisfait f et ξ, sous lesquelles on a l'existence et l'unicité de la solution. Pardoux et Peng ont montré l'existence et l'unicité de la solution lorsque ξ est de carré intégrable et f est Lipschitzienne par rapport à (y, z). Leur outil principal était d'une part le théorème de représentation des martingales et d'autre part par la méthode du point fixe.

Dans ce mémoire, on s'intéresse aussi à la généralisation de ces EDSRs au cas où le générateur f à l'instant s dépend du passé de la solution plus précisément, pour une constante δ positive l'EDSR nommé une EDSR avec retard (EDSRR)

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\left(s, Y_s, Y_{s-\delta}, Z_s, Z_{s-\delta}\right) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad t \in [0, T].$$

Ce type d'équation a été étudié par Delong et Imkeller [1], Ce memoire est consacré à l'étude des EDSRR dans un environnement brownien.

Après ce bref historique sur les EDSRs, nous présentons le statut de ce mémoire qui se décompose de trois chapitres. Nous commencerons par un chapitre introductif dans lequel on va présenter une foule de définitions, propositions et théorèmes faits sans démonstrations car comme on a dit ce chapitre a pour finalité de mettre le lecteur dans le cadre théorique de notre étude ultérieure pour les EDSRs avec retard. Dans le deuxième chapitre, on abordera les EDSRs standards par la présentation du théorème de Pardoux et Peng. Finalement, le dernier chapitre sur les EDSRs avec retard, ce type qui généralise le modèle classique de EDSRs étudie par Pardoux et Pend [5], s'est révélée utile dans diverses applications, à savoir en finance et en contrôle stochatique, L'objectif de cette section est de donner le théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles stochastiques rétrogrades avec retard (EDSRRs).

Chapitre 1

Rappels et compléments de probabilités

Dans ce premier chapitre nous introduisons quelques notions fondamentales liées aux processus stochastique.

1.1 Généralités sur les processus stochastiques

Définition 1.1.1 (Filtration) *: Une filtration $\{\mathcal{F}_t;\ 0 \leq t \leq \infty\}$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$: pour tout $0 \leq s \leq t < \infty$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.*

Définition 1.1.2 (Processus stochastique) *: Soit T un ensemble. On appelle processus stochastique indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\left(\mathbb{R}^d, \beta\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$, pour tout $t \in T$, X_t est une variable aléatoire.*

Définition 1.1.3 (Processus adapté) *: Une processus $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite adapté par rapport à $F = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable.*

Il est inutile de dire qu'un processus est toujours adapté par rapport à sa filtration naturelle.

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(X_s,\ s \leq t\right).$$

Définition 1.1.4 (Processus mesurable) *: Un processus X est mesurable si l'application $(t, \omega) \rightarrow (\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $\beta(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $\beta\left(\mathbb{R}^d\right)$.*

Définition 1.1.5 (Processus progressivement mesurable) *: Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si pour tout $t \geq 0$, l'application $(s,\omega) \to X_s(\omega)$ de $[0,t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à ß$([0,t]) \otimes \mathcal{F}$ et ß$(\mathbb{R}^d)$.*

Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.

Définition 1.1.6 (Modification et indistinguables) *: Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ deux processus stochastique définie sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, X est une modification de Y si, pour tout t :*

$$\forall t \geq 0,\ P(X_t = Y_t) = 1,\ P\text{-}p\ s.$$

X et Y sont indistinguable si P-p s, les trajectoires de X et Y sont les mêmes c'est à dire

$$P(X_t = Y_t;\ \forall t \geq 0) = 1\ P\text{-}p\ s.$$

Définition 1.1.7 (Temps d'arrêt) *: Soit $F = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration de $\mathcal{F}$ un temps d'arrêt pour F est une variable aléatoire T à valeur dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ vérifiant :.$\{T \geq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Soit T un F-temps d'arrêt, l'ensemble $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : \forall n \geq 0,\ A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$.

1.2 Mouvement brownien et Martingales

Définition 1.2.1 (Mouvement brownien standard (MB)) *: Fixons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Un mouvement brownien, également appelé processus de Wiener, est un processus W.*

MB est Le processus $(W_t,\ t \geq 0)$est un mouvement brownien (standard) si :

- $P(W_0 = 0) = 1$, le MB est issue de l'origine.
- $\forall s < t$, $W_t - W_s$ est une variable réeles de loi gaussienne, centré de variance $(t-s)$. i.e $W_t - W_s \backsim N(0, t-s)$.
- $\forall n, \forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$. les variables $\left(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, ..., W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_0}\right)$ sont indépendantes.

Remarque 1.2.1 *On dit que W est un MB par rapport à x si $W_0 = x$.*

Proposition 1.2.1 *Un processus W est un mouvement brownien si et seulement si*

- $W_0 = 0$,
- W est continu,
- W est gaussien,
- pour $t, s \succ 0$, $E(W_t) = 0$ et $E(W_s^{tr}) = (t \wedge s)$.

Définition 1.2.2 (Martingale) *: Le processus X_t est une :*

1. $F-$martingale si les trois conditions suivants sont vérifies :

   a) Le processus X est $F-$adapté (i.e : X_n $\mathcal{F}_n-$mesurable)

   b) X_n est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (i.e :$\forall n \in \mathbb{N}$, $E|X_n| < +\infty$.)

   c) $E[X_{n+1}/\mathcal{F}_n] = X_n$ pour tout n.

2. $F-$sous martingale si elle vérifie a et b et $E[X_{n+1}/\mathcal{F}_n] \geq X_n$.

3. $F-$sur martingale si elle vérifie a et b et $E[X_{n+1}/\mathcal{F}_n] \leq X_n$.

Théorème 1.2.1 ***(D'arrêt de Doob) :*** *Si X est une martingale et si σ et τ sont deux temps d'arrêt bornés tels que $\sigma \leq \tau$, alors $E[X_\tau/\mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma$ P-p.s*

Théorème 1.2.2 (Inégalité de Doob) *: Si X est une martingale continue. Alors*

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2\right] \leq 4 \sup_{t\in[0,T]} E\left[|X_t|^2\right].$$

Définition 1.2.3 (Martingale locale) *: Soit X un processus $\mathcal{F}_t-$adapté continu. Supposons qu'il existe une suite non décroissante τ_n de temps d'arrêt. Si*

$$X^n = \{X_{t\wedge\tau_n}; t \geq 0\}$$

est une martingale, pour tout n, et si $P(\lim_n \tau_n = \infty) = 1$, alors X est appelé martingale locale continue.

- Toute martingale continue est une martingale locale.-
- Toute martingale locale positive est une sur martingale.
- Une martingale locale bornée est une martingale

Définition 1.2.4 (Semi-martingale) *: Une semi-martingale continue est un processus X qui s'écrit $X = M + V$, où M est une martingale locale continue et V est un processus continu adapté à variation bornée tel que : $V_0 = 0$.*

Théorème 1.2.3 (Inégalité Burkholder-Davis-Gundy "BDG") *: Soit $p \in]0, +\infty]$. Il existe deux constantes c_p et C_p telles que pour tout martingales continue X, nul en 0 :*

$$c_p E\left[\langle X, X\rangle_{\infty}^{\frac{P}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X, X\rangle_{\infty}^{\frac{P}{2}}\right].$$

Remarque 1.2.2 *En particulier, si $T > 0$,*

$$c_p E\left[\langle X, X\rangle_{T}^{\frac{P}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X, X\rangle_{T}^{\frac{P}{2}}\right].$$

Théorème 1.2.4 (Théorème de représentation des martingales) *: Soit $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ la filtration naturelle du mouvement brownien $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ et M_t est martingale continue de carré intégrable $F-$adapté. Alors il existe un processus adapté Z tel que :*

$$E\left(\int_0^T Z_s^2 ds\right) < \infty,$$

et pour tout $t \in [0, T]$:

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dW_S, \text{ P-p.s.}$$

1.3 Intégrale stochastique

On considère un mouvement brownien standard (W_t) définie dans l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ la filtration naturelle du mouvement brownien (W_t).

Définition 1.3.1 *Un processus* $\varphi_t(\omega)$ *défini sur* $[0,T]\times\Omega$ *(resp* $\mathbb{R}_+\times\Omega$ *) est dit progressivement mesurable si, pour tout* $t\in[0,T]$ *(resp* $\mathbb{R}_+\times\Omega$ *), l'application*

$$\begin{array}{ccc} [0,t]\times\Omega & \to & \mathbb{R} \\ (s,\omega) & \longrightarrow & \varphi_s(\omega), \end{array}$$

est $ß([0,t])\otimes\mathcal{F}_t-$mesurable.

Définition 1.3.2

(i) $M^2_{loc}(0,T)$ est l'espace des processus progressivement mesurables φ tels que

$$\int_0^T \varphi_t^2 dt < \infty \text{ p.s.}$$

(ii) $M^2(0,T)$ est l'espace des classes (touts les processus d'une même classe sont indistinguables) de processus progressivement mesurables φ tels que

$$E\int_0^T \varphi_t^2 dt < \infty.$$

(iii) ε est l'espace des processus en escalier, i.e.des processus φ de la forme

$$\varphi_t(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\omega)\, 1_{]t_k,t_{k-1}]}(t),$$

avec $n\in\mathbb{N}$, $0<t_0<t_1<...<t_n$ et $\alpha_k\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_{t_k},P)$, $0\le k\le n$.

Nous définissons également les espaces

$$M^2 = \bigcap_{T\succ 0} M^2(0,T), \qquad M^2 = \bigcap_{T\succ 0} M^2_{loc}(0,T).$$

et de la même manière, nous définissons $M^2(\mathbb{R}_+)$ (resp.$M^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$) en remplaçant $[0,T]$ par $\mathbb{R}_+$.

Définition 1.3.3 *Soit* $\varphi_t = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k 1_{]t_k,t_{k-1}]}(t)$ *un processus en escalier, l'intégrale stochastique* *de φ est définie par*

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dW_s = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \left(W_{t\wedge t_{k+1}} - W_{t\wedge t_k}\right), t \geq 0.$$

On considère l'opérateur linéaire

$$\begin{array}{rccc} I: & \varepsilon & \rightarrow & L^2(\Omega, C([0,T])) \\ & \varphi & \rightarrow & I(\varphi) \end{array}$$

défini par :

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dW_s, 0 \leq t \leq T,$$

ε est dense dans $M^2(0,T)$, on peut alors prolonger I de manière unique en une application linéaire continue I définie sur $M^2(0,T)$ à valeur dans $L^2(\Omega, C([0,T]))$. Cette application sera également notée

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dW_s$$

Propriété 1.3.1 (Propriétés élémentaires de l'intégrale stochastique) *: Sur l'ensemble des processus élémentaires, l'intégrale stochastique satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\varphi \rightarrow \int_0^t \varphi_s dW_s$ est linéaire.
2. $t \rightarrow \int_0^t \varphi_s dW_s$ est continue p.s.
3. $\left(\int_0^t \varphi_s dW_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est un processus $F-$adapté.
4. $E\left(\int_0^t \varphi_s dW_s\right) = 0$ et $var\left(\int_0^t \varphi_s dW_s\right) = E\left(\int_0^t \varphi_s^2 dW_s\right)$.
5. propriété d'isométrie :

$$E\left[\left(\int_0^t \varphi_s dW_s\right)^2\right] = E\left(\int_0^t \varphi_s^2 dW_s\right).$$

6. $\left(\int_0^t \varphi_s dW_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est une $F-$martingale.
7. Le processus $\left(\left(\int_0^t \varphi_s dW_s\right)^2 - \left(\int_0^t \varphi_s^2 dW_s\right)\right)_{0\leq t\leq T}$ est une $F-$martingale.

1.4 Calcul d'Itô

Définition 1.4.1 (Processus d'Itô) *: On appelle Processus d'Itô un processus X à valeurs réelles tel que P-p.s $\forall 0 \leq t \leq T$:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s.$$

Où X_0 est F_0-mesurable, K et H sont deux processus progressivement mesurables vérifient les conditions, P-p.s :

$$\int_0^T |K_s| \, ds < \infty, \quad \int_0^T |H_s|^2 \, ds < \infty.$$

la forme différentielle du processus d'Itô devient

$$dX_t = X_0 + K_t dt + H_t dW_t.$$

Définition 1.4.2 (Intégrale d'Itô) *: La notion d'intégrale stochastique par rapport à un processus d'Itô se définit de la manière naturelle suivante :*

Pour ϕ élément de $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$ satisfaisant de bonnes conditions d'intégrabilité, on définit :

$$\int_0^t \phi_s dX_t = X_0 + \int_0^t \phi_s K_s ds + \int_0^t \phi_s H_s dW_s.$$

Théorème 1.4.1 (Formule d'Itô) *: Soit X un processus d'Itô de la forme $X_t = X_0 + \int_0^t f_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$ et $\phi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ et tout $0 \leq t \leq T$, nous avons presque surement*

$$\phi(t, X_t) = \phi(0, X_0) + \int_0^t \phi'_s(s, X_s) \, ds + \int_0^t \phi'_x(s, X_s) f_s ds \int_0^t \phi'_x(s, X_s) \sigma_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \phi''_{xx}(s, X_s) \sigma_s^2 ds.$$

où $C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues $\phi : (t,x) \to \phi(t,x) \in \mathbb{R}$, dont les dérivées d'ordre 1 en t et les dérivées jusqu'à l'ordre 2 en x sont continues par rapport à (t,x).

Lemme 1.4.1 (Gronwal) *: Soient $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout t :*

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds, \ a \in \mathbb{R}, \ b \geq 0.$$

Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ g(t) \leq a\exp(bt).$$

Théorème 1.4.2 (Girsanov) *: Soit $(K_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus progressivement mesurable, à valeur dans $\mathbb{R}^d$ tel que P-p s $\int_0^T |K_s|^2 ds < \infty$. On suppose que le processus $(D_t)_{0\leq t\leq T}$ définit par :*

$$D_t = \exp\left(\int_0^t K_s dW_r - \frac{1}{2}\int_0^t |K_s|^2 dr\right), \ t \in [0,T]$$

est une martingale. Soit P^* la mesure de densité D_T par rapport à P sur $\mathcal{F}_T$. Intoduisons le processus $B_t = W_t - \int_0^t K_s ds$. Alors, sous la probabilité P^*, B est MB standard.

Chapitre 2

Les équations différenetielles stochastiques rétrogrades

2.1 Introduction

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, $T \geq 0$, $B = (B_t)_{t\geq 0}$un mouvement brownien de $\mathbb{R}^d$, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle et $\xi \in \mathcal{F}_T$. Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{-dY_t}{dt} = f\left(Y_t\right), \quad t \in [0, T], \quad \text{avec}, Y_T = \xi \ ,$$

en imposant que la solution au moment t ne dépende que du passé, c'est à dire que le processus Y soit adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Prenons pour commencer le cas où $f \equiv 0$. On est tenté de donner comme solution $Y_t = \xi$ qui n'est adaptée que si ξ est déterministe. Nous n'avons qu'une approximation (dans L^2) qui soit adaptée et qui est la martingale $Y_t = E\left(\xi/\mathcal{F}_t\right)$.

Si $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration du mouvement brownien, on peut construire par le théorème de représentation des martingales un processus Z adapté de carré intégrable tel que :

$$Y_t = E(\xi/\mathcal{F}_t) = E(\xi) + \int_0^t Z_s dB_s \ .$$

On peut écrire ceci autrement, en effet :

$$Y_t = E(\xi) + \int_0^t Z_s dB_s \ , \quad \forall t \in [0,T] \ ,$$

d'où

$$\begin{aligned} Y_T = & \quad E(\xi) + \quad \int_0^T Z_s dB_s \ , \\ \xi = & \quad E(\xi) + \quad \int_0^t Z_s dB_s + \quad \int_0^T Z_s dB_s \ , \\ \xi = & \quad Y_t + \quad \int_0^T Z_s dB_s \ . \end{aligned}$$

On a alors

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s, \quad ie. - dY_t = -Z_t dB_t \quad avec, Y_T = \xi \ .$$

On voit donc apparaître le processus Z qui a pour rôle de rendre le processus Y adapté.

Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z. L'équation devient donc :

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)\, dt - Z_t dB_t, \quad avec, Y_T = \xi.$$

Notations

- Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$un espace de probabilité complet et un B MB- $d-$dimensionnel sur cet espace.
- $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du MB.
- $S^2(\mathbb{R}^k)$ désigne l'espace vectoriel formé par des processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tels que :

$$\|Y\|_{S^2}^2 = E\left[\sup |Y_t|^2\right] < \infty,$$

et $S_c^2(\mathbb{R}^k)$ le sous espace formé par les processus continus.

- $M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ désigne l'espace vectoriel formé par des processus Z progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tels que :

$$\|Z\|_{M^2}^2 = E\left[\int_0^T \|Z_t\|^2\, dt\right] < \infty,$$

où si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|z\|^2 = trace\,(zz^*)$.

- $f : \Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ t q ,$\forall\,(y,z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$, $(f\,(.,t,y,z))_{0\leq t\leq T}$ est progressivement mesurable.

- ξ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^k$ $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Soit l'EDSR

$$-dY_t = f\,(t,Y_t,Z_t)\,dt - Z_t dB_t, \quad 0\leq t\leq T, \quad Y_T=\xi,$$

ou sous la forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \textstyle\int_t^T f\,(r,Y_r,Z_r)\,dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0\leq t\leq T. \tag{2.1}$$

Définition 2.1.1 *Une solution de l'EDSR* (2.1) *est un couple de processus* $\{(Y_t,Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant*

1- Y et Z sont progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ respectivement.

2- P-p s $\int_t^T \left(|f\,(r,Y_r,Z_r)| + \|Z_r\|^2\right) dr < \infty$.

3- P-p s, on a $Y_t = \xi + \int_t^T f\,(r,Y_r,Z_r)\,dr - \int_t^T Z_r dB_r, 0\leq t\leq T$.

La proposition suivante montre, que sous une hypothèse relativement faible sur f, le processus Y appartient à S^2.

Proposition 2.1.1 *Supposons qu'il existe un processus* $(f_t)_{0\leq t\leq T}$ *positif, appartenant à* $M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ *et une constante positive* λ *tels que :*

$$\forall\,(t,y,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}, \quad |f\,(t,y,z)| \leq f_t + \lambda\,(|y| + \|z\|)\,.$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *est une solution de l'EDSR* (2.1) *telle que* $Z \in M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ *alors* Y *appartient à* S^2.

Preuve. On a pour tout $t \in [0, T]$,

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f\left(r, Y_r, Z_r\right) dr - \int_0^t Z_r dB_r.$$

En utilisant l'hypothèse sur f,

$$\begin{aligned}
|Y_t| &\leq |Y_0| + \int_0^t |f\left(r, Y_r, Z_r\right)| dr + \left|\int_0^t Z_r dB_r\right|, \\
&\leq |Y_0| + \int_0^T \left(f_r + \lambda \left\|Z_r\right\|\right) dr + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_r dB_r\right| + \lambda \int_0^t |Y_r|\, dr,
\end{aligned}$$

posons

$$\zeta = |Y_0| + \int_0^T \left(f_r + \lambda \left\|Z_r\right\|\right) dr + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_r dB_r\right|.$$

Par hypothèse, Z appartient à M^2 et donc via l'inégalité de Doob, le troisième terme est de carré intégrable ; il en est de même pour $(f_t)_{0\leq t\leq T}$et Y_0 est une constante, donc de carré intégrable,il s'en suit que ζest une variable aléatoire de carré intégrable.θComme Y est un processus continu qui vérifie,

$$|Y_t| \leq \zeta + \lambda \int_0^t |Y_r|\, dr.$$

Par le lemme de Gronwall, on aura

$$|Y_t| \leq \zeta e^{\lambda t},$$

et donc

$$\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t| \leq \zeta e^{\lambda T},$$

comme ζ est de carré intégrable, alors Y appartient à S^2. ■

2.2 Le cas lipschitzien

Le résultat de Pardoux-Peng

Dans ce paragraphe, nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité. Ce résultat est dû à **E**.**Pardoux** et **S**.**Peng** [5] c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR dans le cas où le générateur est non-linéaire.

Voici les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler

Hypothèse $(L1)$

Il existe une $\lambda > 0$, telle que P-p.s,

1. Condition de Lipschitz en (y, z) pour tous t, y, y', z, z'

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq \lambda \left(|y - y'| + \|z - z'\|\right),$$

2. Condition d'intégrabilité :

$$E\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(r, 0, 0)|^2 \, dr\right] < \infty.$$

Nous commençons par un cas trés simple où f ne dépend ni de y ni de z i.e. on se donne ξ de carré intégrable et un processus $(F_t)_{0\leq t\leq T}$ dans $M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et on veut trouver une solution de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \textstyle\int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.2}$$

Lemme 2.2.1 *Soient $\xi \in L^2$, $\mathcal{F}_T$-mesurable et $(F_t)_{0\leq t\leq T}$ dans $M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ L'EDSR* (2.2) *possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$.*

Preuve. soit (Y, Z) une solution de (2.2) telle que $Z \in M^2$ En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_t$, on a,

$$Y_t = E\left(\xi + \int_t^T F_r dr / \mathcal{F}_t\right),$$

Y est donc défini à l'aide de cette formule et il reste à trouver Z. $F = (F_t)_{0 \leq t \leq T}$ est de carré intégrable et $\left(\int_t^T F_r dr\right)_{t \in [0,T]}$ est un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, car il est progressivement mesurable

$$Y_t = E\left(\xi + \int_0^T F_r dr / \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_r dr = M_t - \int_0^t F_r dr.$$

$(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale brownienne. On construit, à l'aide du théorème de représentation des martingales, un processus Z de M^2 tel que

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_r dB_r,$$

et donc

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_r dr = M_0 + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t F_r dr,$$

(Y, Z) ainsi construit est une solution de l'EDSR (2.2) puisque comme $Y_T = \xi$

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t F_r dr - \left(M_0 + \int_0^T Z_r dB_r - \int_0^T F_r dr\right) \\ &= \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r. \end{aligned}$$

Unicité : Si $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$ est une autre solution,

$$\tilde{Y}_t = Y_t = E\left(\xi + \int_t^T F_r dr / \mathcal{F}_t\right),$$

d'où l'unicité de Y. En ce qui concerne l'unicité Z, elle est garantie par le théorème de représentation des martingales. ■

Nous énonçons à présent le théorème d'existence de **Pardoux** et **Peng**.

Théorème 2.2.1 ***(PARDOUX-PENG90.)*** *: Sous l'hypothèse* $(L1)$*, l'EDSR* (2.1) *possède une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Preuve. Nous utilisons un argument de point fixe dans l'espace de Banach B^2 en construisant une application Ψ de β^2 dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in \beta^2$ est solution de l'EDSR (2.1) si et seulement si c'est un point fixe de Ψ. Pour (U, V) élément de β^2, on définit $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ comme étant la solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, U_r, V_r)\, dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Remarquons que cette dernière EDSR possède une unique solution qui est dans β^2 En effet, posons $F_r = f(r, U_r, V_r)$ .Ce processus appartient à M^2 puisque f étant Lipschitz,

$$|F_r| \leq |f(r, 0, 0)| + \lambda |U_r| + \lambda \|V_r\|,$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le Lemme (2.2.1) pour obtenir une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$, de plus (Y, Z) appartient à β^2. L'intégralité de Z est obtenue par construction et d'après la Proposition (2.1.1) Y appartient à S^2 L'application Ψ de β^2 dans lui-même est donc bien définie.

Soient (U, V) et (U', V') deux éléments de β^2 et $(Y, Z) = \Psi(U, V), (Y', Z') = \Psi(U', V')$. Notons $y = Y - Y'$ et $z = Z - Z'$. On a $y_T = 0$, et

$$dy_t = -\{f(t, U_t, V_t) - f(t, U'_t, V'_t)\}\, dt + z_t dB_t.$$

On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t} |y_t|^2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} d\left(e^{\alpha t} |y_t|^2\right) &= \alpha e^{\alpha t} |y_t|^2 dt - 2e^{\alpha t} y_t.\{f(t, U_t, V_t) - f(t, U'_t, V'_t)\}\, dt \\ &\quad + 2e^{\alpha t} y_t.z_t dB_t + e^{\alpha t} \|z_t\|^2 dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, intégrant entre t et T, on obtient,

$$e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha t}\left\|z_r\right\|^2 dr=\int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha\left|y_r\right|^2+2y_r.\left\{f\left(r,U_r,V_r\right)-f\left(r,U_r',V_r'\right)\right\}dr\right)$$
$$-\int_t^T 2e^{\alpha r}y_r.z_r dB_r,$$

et, comme f est Lipschitz, il vient, notant u et v pour $U-U'$ et $V-V'$ respectivement,

$$e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha t}\left\|z_r\right\|^2 dr\leq\int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha\left|y_r\right|^2+2\lambda\left|y_r\right|\left|u_r\right|+2\lambda\left|y_r\right|\left\|v_r\right\|\right)dr$$
$$-\int_t^T 2e^{\alpha r}y_r.z_r dB_r.$$

Pour tout $\varepsilon>0$, on a

$$2ab\leq\frac{a^2}{\varepsilon}+\varepsilon b^2,$$

et donc, l'inégalité précédente donne,

$$e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha t}\left\|z_r\right\|^2 dr\leq\int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha+\frac{2\lambda^2}{\varepsilon}\right)\left|y_r\right|^2 dr-\int_t^T 2e^{\alpha r}y_r.z_r dB_r$$
$$+\varepsilon\int_t^T e^{\alpha r}\left(\left|u_r\right|^2+\left\|v_r\right\|^2\right)dr,$$

et prenant $\alpha=\frac{2\lambda^2}{\varepsilon}$, on a, notant

$$R_\varepsilon=\varepsilon\int_0^T e^{\alpha r}\left(\left|u_r\right|^2+\left\|v_r\right\|^2\right)dr,$$

$$e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha t}\left\|z_r\right\|^2 dr\leq R_\varepsilon-2\int_t^T e^{\alpha r}y_r.z_r dB_r\quad\forall t\in[0,T]\,. \tag{2.3}$$

D'après le lemme (2.2.1), la martingale locale $\left\{\int_0^t e^{\alpha r}y_r.z_r dB_r\right\}_{t\in[0,T]}$ est en réalité une martingale nulle en 0, puisque Y,Y' appartiennent à S^2 et Z,Z' appartiennent à M^2.

En particulier, prenant l'espérance ce qui fait partir l'intégrale stochastique via la remarque précédente, on obtient facilement, pour $t = 0$,

$$E\left[\int_0^T e^{\alpha r} \left\|z_r\right\|^2 dr\right] \leq E\left[R_\varepsilon\right]. \tag{2.4}$$

Revenant à l'inégalité (2.3), les inégalités BDG fournissent :

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] &\leq E\left[R_\varepsilon\right] + CE\left[\left(\int_0^T e^{2\alpha r}\left|y_r\right|^2\left\|z_r\right\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq E\left[R_\varepsilon\right] + CE\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\frac{\alpha t}{2}}\left|y_t\right|\left(\int_0^T e^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right], \end{aligned}$$

puis, comme

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] \leq E\left[R_\varepsilon\right] + \frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\frac{\alpha t}{2}}\left|y_t\right|^2\right] \\ + \frac{C^2}{2}E\left[\int_0^T e^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr\right]. \end{aligned}$$

Prenant en considération l'inégalité (2.4), on obtient finalement

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr\right] \leq \left(3 + C^2\right) E\left[R_\varepsilon\right],$$

et par suite, revenant à la définition de R_ε,

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr\right] \leq \varepsilon\left(3 + C^2\right)(1 \vee T)\, E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|u_t\right|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\left\|v_r\right\|^2 dr\right].$$

Prenons ε tel que $\varepsilon\left(3 + C^2\right)(1 \vee T) = \frac{1}{2}$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de B^2 dans lui-même si on le munit de la norme,

$$\left\|(U, V)\right\|_\alpha = E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|U_t\right|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\left\|V_r\right\|^2 dr\right]^{\frac{1}{2}},$$

qui en fait un espace de Banach – cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha = 0$,

Ψ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR (2.1) dans β^2.

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z \in M^2$ puisque la Proposition (2.1.1) implique qu'un telle solution appartient à β^2. ■

Remarque : À partir de maintenant et sans plus insister, l'expression « la solution de l'EDSR » signifiera la solution de l'EDSR vérifiant $Z \in M^2$.

Le rôle de Z

Nous allons voir dans la proposition suivante que le rôle de Z plus précisément celui du terme $\int_0^t Z_r dB_r$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.

Supposons $(L1)$ vérifiée, on a la proposition suivante :

Proposition 2.2.1 *Soit* (Y, Z) *la solution de l'EDSR* (2.1) *et soit* τ *un temps d'arrêt majoré par* T. *On suppose que* ξ *est* $\mathcal{F}_\tau -$ *mesurable et que* $f(0, y, z) = 0$ *dès que* $t \geq \tau$.

Alors

$$Y_t = Y_{t\wedge\tau},$$

et

$$Z_t = 0 \quad \text{si } t \geq \tau.$$

Preuve. Soit $t \in [0, T]$ On a P-p.s

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)\, dr - \int_t^T Z_r dB_r,$$

et donc, pour $t = \tau$, comme $f(t, y, z) = 0$ dés que $t \geq \tau$,

$$Y_t = \xi + \int_\tau^T f(r, Y_r, Z_r)\, dr - \int_\tau^T Z_r dB_r = \xi - \int_\tau^T Z_r dB_r.$$

On a alors

$$Y_\tau = E\left(\xi/\mathcal{F}_\tau\right) = \xi,$$

et par suite

$$\int_\tau^T Z_r dB_r = 0.$$

Ce qui donne

$$E\left[\left(\int_\tau^T Z_r dB_r\right)^2\right] = E\left[\int_\tau^T \left\|Z_r\right\|^2 d_r\right] = 0,$$

et finalement$Z_r 1_{r\geq\tau} = 0$.

Il s'en suit immédiatement que, si $t \geq \tau$,$Y_t = Y_\tau$, puisque par hypothèse,

$$Y_\tau = Y_t + \int_\tau^t f\left(r, Y_r, Z_r\right) dr - \int_\tau^t Z_r dB_r = Y_t + 0 - 0,$$

ce qui termine la preuve.Notons que dans le cas où ξ et f sont déterministes alors Z est nul et Y est la solution de l'équation différentielle

$$\tfrac{dY_t}{dt} = f\left(t, Y_t, 0\right), \quad Y_T = \xi.$$

■

Chapitre 3

Les équations différenetielles stochastiques rétrogrades avec retard

L'objectif de ce chapitre est de donner le théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles stochastiques rétrogrades avec retard (EDSRRs)

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet, W un MB standard, $F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sa filtration naturelle. Dans ce chapitre on considère les notations et les espaces suivants

- S^2 : L'espace vectoriel formé des processus Y, progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$, tels que :

$$\|Y\|_{S^2}^2 = E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2\right] < \infty.$$

- H^2 : L'espace vectoriel formé par des processus Z, progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$, tels que :

$$\|Z\|_{H^2}^2 = E\left[\int_0^T |Z_s|^2 \, ds\right] < \infty.$$

Alors

$$\begin{cases} Y_t = \xi + \int_t^T f\left(s, Y_s, Y_{s-\delta}, Z_s, Z_{s-\delta}\right) ds - \int_t^T Z_s dW_s, & t \in [0, T], \\ Y_t = Y_0, Z_t = 0, & t < 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où δ est une constante positive, $f \in \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ et la condition terminale ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ -mesurable.

Pour la preuve, nous utilisons l'argument du point fixe qui est un outil classsique pour prouver l'existence et l'unicité de EDSRRs

On considère les hypothèses suivants pour l'existence et l'unicité de l'EDSR (3.1) ;

Hypothèse $(L2)$

(i) $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$ et $f(.,.,.,.,.)$ est mesurable.

(ii) Condition de Lipschitz pour tout $t \in [0,T]$ et pour tout $u, u' \in \mathbb{R}^4$,il existe une constante $C > 0$,

$$|f(t,u) - f(t,u')| \leq C\,|u - u'|\,.$$

(iii) Condition d'intégrabilité

$$E\left[\int_0^T |f(t,0)|^2\,dt\right] < \infty \quad \text{où } 0 = (0,0,0,0) \in \mathbb{R}^4.$$

Le théorème suivant donné l'existence et l'unicité de la solution d'une EDSRR sous l'hypothèse $(L2)$

Théorème 3.0.2 *Sous l'hypothèse* $(L2)$, *il existe* $\delta' > 0$ *tel que, pour tout* $\delta \in (0, \delta')$, *l'EDSRR* (3.1) *admet une unique solution* $(Y, Z) \in S^2 \times H^2$.

Preuve. Pour tout $\rho > 1$, on choisit $t > 0$, tel que la relation suivante soit satisfait :

$$\frac{1}{2\rho}\left(1 + e^{\left(1+8\rho C^2\right)\delta}\right) < 1.$$

On défnit l'application

$$\phi : \left(L^2(\mathcal{F}_0) \times H^2\right) \times H^2 \to \left(L^2(\mathcal{F}_0) \times H^2\right) \times H^2$$
$$\phi\left(\left(U_0, U\right), V\right) = \left(\left(Y_0, Y\right), Z\right),$$

où pour $U_0 \in L^2(\mathcal{F}_0), U = (U_t) \in H^2, U_t = U_0, t < 0$, et $V_t \in H^2, V_t = 0, t < 0$, et le couple $(Y, Z) \in S^2 \times H^2$ est l'unique solution de l'EDSR

$$\begin{cases} Y_t = \xi + \int_t^T f\left(s, U_s, U_{s-\delta}, V_s, V_{s-\delta}\right) ds - \int_t^T Z_s dW_s, & t \in [0, T], \\ Y_t = Y_0, Z_t = Z_0, & t < 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

On remarque que cette solution (Y, Z) existe et elle est unique. On pose

$$h(s) = f\left(s, U_s, U_{s-\delta}, V_s, V_{s-\delta}\right) ds, \quad s \in [0, T],$$

et observons que, sous notre hypothèses $h \in H^2$. Si (Y, Z) est une solution de l'équation (3.2), en prenant l'espérance conditionnelle, on obtient

$$\begin{aligned} Y_t &= E\left[\xi + \int_t^T h(s)ds/\mathcal{F}_t\right], \\ &= E\left[\xi + \int_0^T h(s)ds/\mathcal{F}_t\right] - \int_0^t h(s)ds, t \in [0, T], \end{aligned}$$

et $Z \in H^2$ est uniquement déterminé par la représentation martingale brownienne de $\xi + \int_0^T h(s)ds \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$:

$$\xi + \int_0^T h(s)ds = E\left[\xi + \int_0^T h(s)ds\right] + \int_0^T Z_s dW_s \quad P - p.s.$$

Par contre on peut facilement vérifier que le couple $(Y, Z) \in S^2 \times H^2$ déffini par ces relations est une solution de l'EDSR (3.2)Pour $\beta > 0$ et $((U_0, U), V) \in (L^2(\mathcal{F}_0) \times H^2) \times H^2$ nous déffnissons la norme

$$\begin{aligned} \|(U_0, U), V)\| &= \|(U_0, U), V)\|_\beta \\ &= \left(E\left[|U_0|^2\right] + E\left[\int_0^T e^{\beta s}\left(|U_s|^2 + |V_s|^2\right) ds\right]\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Notons que, l'espace $((L^2(\mathcal{F}_0) \times H^2) \times H^2)$ muni de cette norme est un espace de Banach. On va démontrer que pour un certain choix de $\beta > 0$ et pour tout $\delta \in (0, \delta')$ l'application ϕ : $((L^2(\mathcal{F}_0) \times H^2) \times H^2, \|.\|) \to ((L^2(\mathcal{F}_0) \times H^2) \times H^2, \|.\|)$ est contractante, c.à.d, il existe une unique point fixe $((Y_0, Y), Z) \in ((L^2(\mathcal{F}_0) \times H^2) \times H^2)$ de ϕ Par conséquent,

$$\begin{cases} Y_t = \xi + \int_t^T f\left(s, Y_s, Y_{s-\delta}, Z_s, Z_{s-\delta}\right) ds - \int_t^T Z_s dW_s & t \in [0, T], \\ Y_t = Y_0, Z_t = Z_0 & t < 0, \end{cases}$$

En particulier Y est continu

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t|^2\right] \leq 3E\left[|\xi|^2\right] + 3TE\left[\int_0^T \left|f\left(s, Y_s, Y_{s-\delta}, Z_s, Z_{s-\delta}\right)\right|^2 dt\right] - 12TE\left[\int_0^T |Z_t|^2 dt\right] < \infty.$$

Par conséquent, $Y \in S^2$. Soient $(U_0, U, V), (U_0', U', V') \in (L^2(\mathcal{F}_0) \times H^2) \times H^2$ et notons par

$$\begin{aligned} \phi(U_0, U, V) &= (Y_0, Y, Z), \\ \phi(U_0', U', V') &= (Y_0', Y', Z'), \\ \left(\bar{U}_0, \bar{U}, \bar{V}\right) &= (U_0, U, V) - (U_0', U', V'), \\ \left(\bar{Y}_0, \bar{Y}, \bar{Z}\right) &= (Y_0, Y, Z) - (Y_0', Y', Z'). \end{aligned}$$

Appliquant la formule d'Itô à $e^{\beta t}\left|\bar{Y}_t\right|^2$, on obtient,

$$\begin{aligned} d\left(e^{\beta t}\left|\bar{Y}_t\right|^2\right) &= \beta e^{\beta t}\left|\bar{Y}_t\right|^2 dt \\ &\quad - 2e^{\beta t}\bar{Y}_t\left\{f\left(s, U_s, U_{s-\delta}, V_s, V_{s-\delta}\right) - f\left(s, U_s', U_{s-\delta}', V_s', V_{s-\delta}'\right)\right\} dt \\ &\quad + 2e^{\beta t}\bar{Y}_t\bar{Z}_t dW_t + e^{\beta t}\left|\bar{Z}_s\right|^2 dt, \end{aligned}$$

Intégrant entre t et T, et en utilisant la condition de Lipschitz (ii) de l'hypothèse $(L2)$

$$\begin{aligned} e^{\beta t}\left|\bar{Y}_t\right|^2 + \int_t^T e^{\beta s}\left(\beta\left|\bar{Y}_s\right|^2 + \left|\bar{Z}_s\right|^2\right) ds &= 2\int_t^T e^{\beta t}\bar{Y}_s\left\{f\left(s, U_s, U_{s-\delta}, V_s, V_{s-\delta}\right) - f\left(s, U_s, U_{s-\delta}, V_s, V_{s-\delta}\right)\right\} ds \\ &\quad -2\int_t^T e^{\beta t}\bar{Y}_s.\bar{Z}_s dW_s \\ &\leq 2C\int_t^T e^{\beta s}\left(\left|\bar{Y}_s\right|.\left|\bar{U}_s\right| + \left|\bar{Y}_s\right|.\left|\bar{U}_{s-\delta}\right| + \left|\bar{Y}_s\right|.\left|\bar{V}_s\right| + \left|\bar{Y}_s\right|.\left|\bar{V}_{s-\delta}\right|\right) ds \\ &\quad -2\int_t^T e^{\beta s}\bar{Y}_s.\bar{Z}_s dW_s. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Utilisation pour chaque terme l'intégrale de Lebesgue sur le coté droit de l'inégalité ci-dessus et l'estimation $2Cab \leq 2\rho C^2a^2 + \frac{1}{2\rho}b^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
&e^{\beta t}\left|\bar{Y}_t\right|^2 + \int_t^T e^{\beta s}\left(\beta\left|\bar{Y}_s\right|^2 + \left|\bar{Z}_s\right|^2\right)ds \\
&\leq \int_t^T e^{\beta s}(2\rho C^2\left|\bar{Y}_s\right|^2 + \frac{1}{2\rho}\left|\bar{U}_s\right|^2 + 2\rho C^2\left|\bar{Y}_s\right|^2 + \frac{1}{2\rho}\left|\bar{U}_{s-\delta}\right|^2 + 2\rho C^2\left|\bar{Y}_s\right|^2 \\
&+ \frac{1}{2\rho}\left|\bar{V}_s\right|^2 + 2\rho C^2\left|\bar{Y}_s\right|^2 + \frac{1}{2\rho}\left|\bar{V}_{s-\delta}\right|^2 ds) - 2\int_t^T e^{\beta s}\bar{Y}_s.\bar{Z}_s dW_s \\
&= \int_t^T e^{\beta s}\left(8\rho C^2\left|\bar{Y}_s\right|^2 + \frac{1}{2\rho}\left(\left|\bar{U}_s\right| + \left|\bar{U}_{s-\delta}\right| + \left|\bar{V}_s\right| + \left|\bar{V}_{s-\delta}\right|\right)\right)ds \\
&- 2\int_t^T e^{\beta t}\bar{Y}_s.\bar{Z}_s dW_s,
\end{aligned}$$

pour $\rho > 0$, on choisie $\beta = 1 + 8\rho C^2$ et en prenant l'espérence conditionnelle, on obtient

$$\begin{aligned}
e^{\beta t}\left|\bar{Y}_t\right|^2 + E\left[\int_t^T e^{\beta s}\left(\left|\bar{Y}_s\right|^2 + \left|\bar{Z}_s\right|^2\right)ds/\mathcal{F}_t\right] \\
\leq \frac{1}{2\rho}E\left[\int_t^T e^{\beta s}\left(\left|\bar{U}_s\right|^2 + \left|\bar{U}_{s-\delta}\right|^2 + \left|\bar{V}_s\right|^2 + \left|\bar{V}_{s-\delta}\right|^2\right)ds/\mathcal{F}_t\right]
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Par changement de variables $r = s - \delta$, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{\beta s}\left(\left|\bar{U}_{s-\delta}\right|^2 + \left|\bar{V}_{s-\delta}\right|^2\right)ds = \int_{-\delta}^{T-\delta} e^{\beta(r+\delta)}\left(\left|\bar{U}_r\right|^2 + \left|\bar{V}_r\right|^2\right)dr \\
= e^{\beta\delta}\left(\int_{-\delta}^0 e^{\beta r}\left(\left|\bar{U}_r\right|^2 + \left|\bar{V}_r\right|^2\right)dr + \int_0^{T-\delta} e^{\beta r}\left(\left|\bar{U}_r\right|^2 + \left|\bar{V}_r\right|^2\right)dr\right) \\
\leq \delta e^{\beta\delta}\left|\bar{U}_0\right|^2 + e^{\beta\delta}\int_0^T e^{\beta r}\left(\left|\bar{U}_r\right|^2 + \left|\bar{V}_r\right|^2\right)dr.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Combinant (3.5) avec (3.4), en prenant $t = 0$ et en prenant l'esperance, on obtient

$$E\left[\left|\bar{Y}_0\right|^2\right] + E\left[\int_0^T e^{\beta s}\left(\left|\bar{Y}_s\right|^2 + \left|\bar{Z}_s\right|^2\right)ds\right] \leq \frac{1}{2\rho}\left(1 + e^{\beta\delta}\right)\left(\left|\bar{U}_0\right|^2 + E\left[\int_0^T e^{\beta s}\left(\left|\bar{U}_s\right|^2 + \left|\bar{V}_s\right|^2\right)ds\right]\right)$$

pour $\delta < \delta_\rho \wedge 1$, Par conséquent, si

$$\frac{1}{2\rho}\left(1 + e^{\left(1+8\rho C^2\right)\delta}\right) < 1$$

$$\phi : \left(\left(L^2\left(\mathcal{F}_0\right) \times M^2\right) \times M^2, \|.\|_\beta\right) \to \left(\left(L^2\left(\mathcal{F}_0\right) \times M^2\right) \times M^2, \|.\|_\beta\right)$$

admet un unique point fixe $((Y_0, Y), Z) \in ((L^2(\mathcal{F}_0) \times H^2) \times H^2)$.

■

Bibliographie

[1] B. Delong and P. Imkeller. Backward stochastic differential equations with time delayed generators— Results and counter examples. The Annals of Applied Probability. Vol. 20, No. 4, 1512–1536, 2010.

[2] B. Øksendal, A. Sulem, and T. Zhang. Optimal control of stochastic delay equations and time-advanced backward stochastic differential equations. Adv. Appl. Prob, 43 :572–596,2011.

[3] B. Philipe, Equations Différentielles Stochastiques Rétrograde, cours, Mars 2001.

[4] D. Lamberton and B. Lapeyre, Introduction au calcul stochastique appliquée 'a la finance, second ed, Ellipses E'dition Marketing, Paris, 1997.

[5] E. Pardoux and S. Peng, Adapted solution of a backward stochastic differential equation, Systems Control Lett. 14, no. 1, 55–61, 1990.

[6] I. Karatzas and S. E. Shreve, Brownian motion and stochastic calculus, 2nd ed, Grad.Texts in Math, vol. 113, Springer-Verlag, New York, 1991.

[7] L. Delong. Applications of time-delayed backward stochastic differential equations to pricing, hedging and portfolio management.arXiv :1005.4417v3, 2011.

[8] Le Gall, J.F, Mouvement brownien et calcul stochastique. Notes de cours de Master 2, 2008 - 2009, Université Paris-Sud, Master Probabilités et Statistiques, Octobre 2008.