République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

NEZZAL Amel

Titre :

Equations différentielles stochastiques rétrogrades : existence et unicité

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	HAFAYED Mokhtar	UMKB	Président
Dr.	ABBA Abdelmadjid	UMKB	Encadreur
Dr.	TAMER Lazhar	UMKB	Examinateur

Juin 2019

REMERCIEMENTS

Louange à Allah qui nous a donné le courage, la puissance et la patience pour terminer ce modeste travail.

Je tiens à remercier particulièrement Mr ABBA Abdelmadjid, mon encadreur pour m'avoir bien suivi durant mon travail et de me faire profiter de son savoir, ainsi de ses conseils et pour toute l'aide, les remarques constructives qui m'ont permis d'améliorer ce travail.

Mes précieux remerciements vont aux président et membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'évaluer ce travail.

Mes grands remerciements s'adressent aussi à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude d'une classe particulière d'équations différentielles stochastiques dont la solution est donnée en temps terminal T . Ce type d'équations est appelé équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs). Les EDSRs ont apparu pour la première fois en (1973) dans un article de Bismut [1] dans le cas où le générateur est linéaire. Cependant le point de départ de la théorie des EDSRs est l'article de Pardoux et Peng [8] dans lequel le générateur est non linéaire.

Rappelons ici brièvement dans quel contexte la notion d'EDSR a été introduite. On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'un mouvement Brownien B (d-dimensionnel) dont la filtration naturelle et augmentée est notée $\mathbb{F}^B = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
Une EDSR à horizon déterministe T est définie par une équation dont la forme générique est la suivante

$$\begin{cases} -dY_t = f\left(t, Y_t, Z_t\right) dt - Z_t dB_t, \\ Y_T = \xi, \end{cases}$$

dont les paramètres sont la condition terminale $Y_T = \xi$ et la fonction f qui est le générateur.

Depuis le premier résultat d'existence et unicité, la théorie des EDSRs s'est considérablement développée en raison du lien existant avec les équations aux dérivées partielles (EDPs) et des applications possibles aux problèmes de contrôles stochastiques et aux problèmes de mathématiques financières : un grand nombre de travaux ont été consacrés pour étudier ces applications et élargir la classe d'EDSR admettant des solutions.
L'objectif de ce mémoire est l'étude des résultats d'existence et l'unicité des solutions des EDSRs dans le cadre classique dont le générateur est lipschitzien en y et z et d'évoquer le lien entre les EDSRs et les EDPs.

Ce travail est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la théorie du calcul stochastique, en donnant les définitions et les propriétés des processus continues ainsi que leurs résultats principaux (processus stochastiques, mouvement Brownien, martingales) qui nous permettre de définir l'intégrale stochastique et puis l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle stochastique (EDS).

Dans le deuxième chapitre, nous allons montrer l'existence et l'unicité de la solution d'une EDSR dans le cas linéaire puis dans le cas général et énoncer le théorème de comparaison.

Dans le troisième chapitre nous travaillons dans un cadre spécifique des EDSRs markoviennes pour établir le lien entre les EDSRs et les EDPs.

Chapitre 1

Rappels de calcul stochastique

Le but de ce chapitre est de présenter brièvement les notions de base et les résultats de calcul stochastique qui seront utilisées tout au long de ce travail.

1.1 Généralités

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité.

Définition 1.1 ***(Processus stochastique)*** *Soit $\mathbb{T}$ un ensemble.*
On appelle processus stochastique indexé par $\mathbb{T}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ une famille $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$; pour tout $t \in \mathbb{T}$, X_t est une variable aléatoire et pour chaque ω fixé , la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ est une trajectoire du processus X.

Remarque 1.1 *Le paramètre de temps t variant dans $\mathbb{T}$ peut être discret ou continu. Dans ce travail, on considère des processus stochastiques à temps continu et l'intervalle de variation du temps $\mathbb{T}$ est soit fini $\mathbb{T} = [0, T]$, $0 < T < +\infty$, soit infini $\mathbb{T} = [0, +\infty[$.*

Définition 1.2 *Soient X et Y deux processus. X est une* ***modification*** *de Y si, pour tout $t \in \mathbb{T}$, les variables aléatoires $(v.a)$ X_t et Y_t sont égales $\mathbb{P}.p.s$: $\forall t \in \mathbb{T}$, $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$.*
X et Y sont ***indistinguables*** *si, $\mathbb{P}.p.s$, les trajectoires de X et de Y sont les mêmes c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \in \mathbb{T}) = 1$.*

Remarque 1.2 *La notion d'indistinguabilité est plus forte que la notion de modification. Notons que si X est une modification de Y et si X et Y sont à trajectoires continues à droite (ou à gauche) alors X et Y sont indistinguables.*

Définition 1.3 ***(Filtration)*** *Une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ de sous tribus de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour tout $0 \leq s \leq t$ dans $\mathbb{T}$. On définit alors $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\cup_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{F}_t\right)$ ainsi que, pour tout t, $\mathcal{F}_{t+} = \cap_{s \geq t} \mathcal{F}_s$.*
Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité filtré.

Définition 1.4 *On dit qu'une filtration $\mathbb{F}$ satisfait les conditions habituelles si elle est continue à droite, i.e : $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ pour tout $t \in \mathbb{T}$ et si elle est complète, i.e. $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$–négligeables de $\mathcal{F}$, noté $\mathcal{N}$ dans la suite.*

Définition 1.5 ***(Processus adapté)*** *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est dit adapté (par rapport à $\mathbb{F}$) si pour tout $t \in \mathbb{T}$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Remarque 1.3 *Un choix minimal de filtration pour que le processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ soit adapté est la filtration naturelle (ou canonique) $\forall t \in \mathbb{T},\ \mathcal{F}_t = \sigma\left(X_s; s \leq t\right)$. Mais $\mathcal{F}_0$ ne contient pas nécessairement $\mathcal{N}$. C'est pour cela que l'on introduit souvent la filtration naturelle augmentée de X définie par $\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(\mathcal{N} \cup \mathcal{F}_t\right)$. Lorsqu'on parlerait de filtration naturelle il s'agira toujours de filtration naturelle augmentée $\mathbb{F}^X = \left(\mathcal{F}_t^X\right)_{t \in \mathbb{T}}$.*

Définition 1.6 ***(Processus mesurable)*** *Un processus X est mesurable si l'application $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.*

Définition 1.7 ***(processus progressivement mesurable)*** *Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $\mathbb{F}$ et on note $X \in L^0(\mathbb{F})$ si, pour tout $t \in \mathbb{T}$, l'application $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ de $[0, t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.*

Remarque 1.4 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. On peut également noter que si X est un processus mesurable et adapté alors il possède une modification progressivement mesurable.*

Proposition 1.1 *Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (ou continues à gauche) alors X est mesurable et X est progressivement mesurable s'il est de plus adapté.*

Définition 1.8 ***(Processus de Markov)*** *Soit X un processus progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$. On dit que X possède la propriété de Markov par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ si, pour toute fonction borélienne bornée f, et pour tout $s \leq t$, on a*

$$\mathbb{E}\left[f\left(X_t\right) \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[f\left(X_t\right) \mid X_s\right], \quad \mathbb{P}.p.s.$$

Définition 1.9 ***(Temps d'arrêt)*** *Soit τ une variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. τ est un $\mathbb{F}$–temps d'arrêt si, pour tout $t \in \mathbb{T}$:*

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega \colon \tau\left(\omega\right) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Si τ est un temps d'arrêt, la tribu $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty,\ A \cap \{\tau \leq t\},\ \forall t \in \mathbb{T}\}$ s'appelle tribu des évènements antérieurs à τ.

1.2 Espérance conditionnelle

Notons $L^1(\mathcal{F})$ l'ensembles des fonctions réelles $\mathcal{F}$-mesurables et intégrables par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}$, et $L^\infty(\mathcal{G})$ l'ensembles des fonctions réelles $\mathcal{G}$-mesurables bornées.

Définition 1.10 *Soit $X \in L^1(\mathcal{F})$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu. L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ de X quand $\mathcal{G}$ est l'unique variable aléatoire :*

a. *$\mathcal{G}$-mesurable*

b. *telle que* $\int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\, dP = \int_A X dP,\ \forall A \in \mathcal{G}.$

C'est aussi l'unique (à une égalité p.s. près) variable $\mathcal{G}$-mesurable telle que:

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) Y\right] = \mathbb{E}\left(XY\right) \quad, \forall Y \in L^\infty\left(\mathcal{G}\right).$$

1.2.1 Propriétés de l'espérance conditionnelle

1. *Linéarité.* Soit X,$Y \in L^1(\mathcal{F})$, alors $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}).$$

2. *Monotonie.* Soit X et $Y \in L^1(\mathcal{F})$ telles que $X \leq Y$. Alors

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}\ (Y \mid \mathcal{G}),$$

   en particulier

$$X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \geq 0.$$

3. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$,$\forall X \in L^1(\mathcal{F})$.

4. $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$, pour toute $X \in L^1(\mathcal{F})$ et Y $\mathcal{G}$-mesurable telles que $XY \in L^1(\mathcal{F})$.

5. Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.

1.3 Mouvement Brownien

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré.

Définition 1.11 *Un processus $B : \Omega \to \mathbb{T} = [0,T]$ est un mouvement brownien (MB) standard,si*:

(i) $B_0 = 0$, $\mathbb{P}.p.s.$

(ii) $\forall s \leq t$, $B_{s,t} := B_t - B_s \sim N(0, t-s)$.

(iii) Pour tout $0 = t_0 < t_1 ... < t_n \leq T$, les variables B_{t_1},B_{t_1,t_2},...,B_{t_{n-1},t_n} sont indépendantes.

De plus, on appelle B un $\mathbb{F}$-mouvement brownien si $B \in L^0(\mathbb{F})$ et pour tout $0 \leq s < t \leq T$, la variable $B_{s,t}$ est indépendante de la tribu du passé avant s, soit $\sigma(B_u, u \leq s)$.

Remarque 1.5

1. *La définition reste vraie pour $\mathbb{T} = [0, \infty[$.*

2. *On appelle* $B = \left(B^1, ..., B^d\right)^\top$ *un mouvement brownien d-dimentionnel si* $B^1, ..., B^d$ *sont des mouvements browniens independants.*

3. *Nous rappelons aussi que l'augmentation habituelle de la filtration naturelle* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *d'un mouvement brownien* B *est* $\mathbb{F}^B = (\sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{N}))_{t\in\mathbb{T}}$*. De plus,* B *reste un mouvement brownien par rapport à sa filtration augmentée. Par abus de language, l'augmentation de la filtration naturelle de* B *est encore appelée filtration naturelle de* B *ou filtration brownienne.*

1.4 Martingales

Définition 1.12 *On dit que* $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}} \in L^0(\mathbb{F})$ *est une* $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$*-martingale, ou simplement martingale si*:

$(i)\, \mathbb{E}[|M_t|] < +\infty$ $,\forall t \in \mathbb{T}$.

$(ii)\, \mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s$, *pour tout* $0 \leq s \leq t$.

Remarque 1.6

1. M *est une sous-martingale (resp sur-martingale) s'il vérifie* (i) *et si de plus* $\forall 0 \leq s \leq t$: $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \geq M_s$ *(resp* $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \leq M_s$*).*

2. M *est une martingale s'il est à la fois une sous-martingale et sur-martingale.*

3. *Si* M *est une martingale, alors* $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}$.

Proposition 1.2 *Si* B *est un MB, alors* B, $(B_t^2 - t)_{t\in\mathbb{T}}$ *et* $\left\{\exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right)\right\}_{t\in\mathbb{T}}$ *sont des martingales. Réciproquement, si* X *est un processus continu tel que* X *et* $(X_t^2 - t)_{t\geq 0}$ *sont des martingales,* X *est un mouvement Brownien.*

Définition 1.13 ***(Martingale locale)*** *Un processus* M *adapté càglàd (continu à gauche limité à droite) est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêts* $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_n = +\infty$ $\mathbb{P}$*.p.s et,* $(M_{t\wedge\tau_n}, t \geq 0)$ *est une martingale pour tout* n*.*
Une martingale locale positive est une surmartingale. Une martingale locale uniformément intégrable (u.i) est une martingale.

Définition 1.14 ***(Semimartingale)*** *Une semimartingale est un processus càdlàg adapté X admettant une décomposition de la forme :*

$$X = X_0 + M + A \tag{1.1}$$

où M est une martingale locale càdlàg nulle en 0 et A est un processus adapté à variation finie et nul en 0. Une semimartingale continue est une semimartingale telle que dans la décomposition (1.1), M et A sont continus. Une telle décomposition où M et A sont continus, est unique.

1.5 Processus d'Itô

Définition 1.15 *Un processus $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ à valeurs réelles est un processus d'Itô si $\mathbb{P}$.p.s*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \quad \forall 0 \leq t \leq T, \tag{1.2}$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable ; b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions, $\mathbb{P}$.p.s :

$$\int_0^T |b_s| \, ds < \infty \quad et \quad \int_0^T |\sigma_s|^2 \, ds < \infty,$$

c'est-à-dire $b \in L^1_{loc}(\mathbb{F})$ et $\sigma \in L^2_{loc}(\mathbb{F})$.
Le coefficient b est le drift ou la dérivée, σ est le coefficient de diffusion.

Si X et Y sont deux processus d'Itô,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_1(s) \, ds + \int_0^t \sigma_1(s) \, dB_s, \quad \text{et} \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t b_2(s) \, ds + \int_0^t \sigma_2(s) \, dB_s,$$

on pose

$$\langle X,Y\rangle_t = \int_0^t \sigma_1(s)\,\sigma_2(s)\,ds, \quad \text{et} \quad dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t.$$

Proposition 1.3 ***(Intégration par parties)****Si X et Y sont deux processus d'Itô, alors*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X,Y\rangle_t.$$

Théorème 1.1 ***(Formule d'Itô)*** *Soient $b \in L^1_{loc}(\mathbb{F})$, $\sigma \in L^2_{loc}(\mathbb{F})$, et X un processus d'Itô définit comme dans (1.2), on note $\langle X\rangle_t := \int_0^t |\sigma_s|^2\,ds$.*
Soit $f \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} df(t,X_t) &= \partial_t f(t,X_t)\,dt + \partial_x f(t,X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(t,X_t)\,d\langle X\rangle_t \\ &= \left[\partial_t f + \partial_x f b_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} f\,|\sigma_t|^2\right](t,X_t)\,dt + \partial_x f(t,X_t)\,\sigma_t dB_t. \end{aligned}$$

Ou bien sous la forme intégrale

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \left[\partial_t f + \partial_x f b_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} f\,|\sigma_t|^2\right](s,Xs)\,ds + \int_0^t \partial_x f(s,X_s)\,\sigma_s dB_s.$$

Nous finissons ce paragraphe en étendant la formule précédente au cas d'un mouvement brownien d–dimensionnel.

Théorème 1.2 *Soient $B = \left(B^1,...,B^d\right)^\top$ un MB d–dimensionnel, $b^i \in L^1_{loc}(\mathbb{F})$, $\sigma^{i,j} \in L^2_{loc}(\mathbb{F})$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d$. On note $b = (b^1,...,b^n)^\top$ et $\sigma := (\sigma^{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq d}$ qui prennent des valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n\times d}$ respectivement. Soit $X = (X^1,...,X^n)$ un processus d'Itô à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tel que*

$$dX_t^i := b_t^i dt + \sum_{j=1}^d \sigma_t^{i,j} dB_t^j, \quad i = 1,...,n; \quad \textit{ou équivalent}; \quad dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t.$$

On note

$$\langle X \rangle_t := \int_0^t \sigma_s \sigma_s^\top ds, \quad \text{une matrice qui prend valeurs dans } \mathbb{S}^n.$$

Si $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *appartient à* $C^{1,2}$ *alors*

$$\begin{aligned} df\left(t, X_t\right) &= \partial_t f\left(t, X_t\right) dt + \partial_x f\left(t, X_t\right) dX_t + \frac{1}{2} \partial_{xx} f\left(t, X_t\right) : d\langle X \rangle_t \\ &= \left[\partial_t f + \partial_x f b_t + \frac{1}{2} \partial_{xx} f : \left(\sigma_t \sigma_t^\top\right)\right]\left(t, X_t\right) dt + \partial_x f\left(t, X_t\right) \sigma_t dB_t. \\ &= \left[\partial_t f + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f b_t^i + \sum_{i,i=1}^n \sum_{k=1}^d \frac{1}{2} \partial_{x_i x_j} f \sigma_t^{i,k} \sigma_t^{j,k}\right]\left(t, X_t\right) dt + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \partial_{x_i} f\left(t, X_t\right) \sigma_t^{i,j} dB_t^j. \end{aligned}$$

On utilise les conventions : $\partial_x f = \left(\partial_{x_1} f, .., \partial_{x_n} f\right)$ *est un vecteur ligne et* $\partial_{xx} f$ *est une matrice qui prend des valeur dans* $\mathbb{S}^n$.

1.6 Equations différentielles stochastiques

Définition 1.16 *Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme*

$$X_t = x + \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s, \tag{1.3}$$

ou sous la forme

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Où X *est n-dimentionnel,* $x \in L^0\left(\mathcal{F}_0, \mathbb{R}^n\right)$, *et les fonctions* $b\colon [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma\colon [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times d}$ *sont* $\mathbb{F}$*-mesurables par rapport à* (t, ω, x).

Le coefficient b *s'appelle le* drift *et la matrice* $\sigma\sigma^\top$ *s'appelle la matrice de* diffusion.

L'inconnu est le processus X. *Le problème est, comme une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle a une unique solution.*

Définition 1.17 *On dit que* $X \in L^0\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^n\right)$ *est une solution de l'EDS* (1.3) *si* *(i)* $\mathbb{P}.p.s,\ \int_0^t \left[|b(s,X_s)|\,ds + \int_0^t |\sigma(s,X_s)|^2 \right] ds,$

(ii) X *vérifie* (1.3) *c'est-à-dire :*

$$X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dB_s, \quad \forall 0 \leq t \leq T, \mathbb{P}.p.s.$$

On note

$$S^2(\mathbb{F}) := \left\{ X \in L^0(\mathbb{F}) : X \text{ est continue, } p.s \text{ et } \|X\|^2_{\infty,2} := \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2 \right] < \infty \right\},$$

Théorème 1.3 ***(Existence et unicité)*** *Si b et σ sont des fonctions continues, telles qu'il existe $L < +\infty$, avec*

1. $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq L|x-y|$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$.
2. $|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq L(1+|x|)$.
3. $\mathbb{E}\left(|x|^2\right) < \infty$.

alors, pour tout $T \geq 0$, l'équation (1.3) possède une unique solution dans l'intervalle $[0,T]$. De plus cette solution $X = (X_t)_{0\leq t\leq T} \in S^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^n)$.

1.7 Changement de probabilité

Dans ce paragraphe, on va introduire une nouvelle mesure probabilité à partir de $\mathbb{P}$. Pour distinguer les deux mesures de probabilité, on va écrire $\mathbb{P}$ explicitement. Rappellons que B est un $(\mathbb{F},\mathbb{P})$-MB. Soit $\theta \in L^2_{loc}\left(\mathbb{F},\mathbb{P},\mathbb{R}^d\right)$, on définit :

$$M_t^\theta := \exp\left(\int_0^t \theta_s.dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\theta_s|^2\,ds \right),$$

ce qui implique

$$M_t^\theta = 1 + \int_0^t M_s^\theta \theta_s.dB_s, \tag{1.4}$$

donc M^θ est une $\mathbb{P}$-martingale locale. De plus on a

Lemme 1.1 *On note*

$$L^{p,q}(\mathbb{F},\mathbb{P},\mathbb{R}^n) := \left\{ X \in L^0(\mathbb{F},\mathbb{R}^n) : \left(\int_0^T |X_t|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \in L^q(\mathcal{F}_T,\mathbb{P}) \right\}.$$

Supposons $\theta \in L^\infty_{loc}(\mathbb{F},\mathbb{P},\mathbb{R}^d)$. *Alors* $M^\theta \in \cap_{1\le p<\infty} L^{\infty,p}(\mathbb{F},\mathbb{P})$. *En particulier,* M^θ *est une* $(\mathbb{F},\mathbb{P})$*-martingale uniformément intégrable.*

Lemme 1.2 *Soit* $X \in L^0(\mathbb{F})$ *telle que* $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\theta}[|X_t|] < \infty$ *pour tout* t. *Alors* X *est une* $\mathbb{P}^\theta$*-martingale si et seulement si* $M^\theta X$ *est une* $\mathbb{P}$*-martingale. En particulier,* $(M^\theta)^{-1}$ *est une* $\mathbb{P}^\theta$*-martingale.*

Théorème 1.4 ***(Théorème de Girsanov)*** *Soit* $\theta \in L^\infty(\mathbb{F},\mathbb{P},\mathbb{R}^d)$. *Le processus* B^θ *définit comme suit :*

$$B_t^\theta := B_t - \int_0^t \theta_s ds,$$

est une $(\mathbb{P}^\theta,\mathbb{F})$*-mouvement Brownien.*

1.8 Résultats importants

Théorème 1.5 ***(Théorème de convergence dominée de Lebesgue)*** *Soit* $(X_n)_{n\ge1}$ *une suite de variables aléatoires convergeant p.s vers* X.
Supposons qu'il existe une variable aléatoire Y *intégrable telle que* $|X_n| < Y$, *alors* X *est intégrable et* $\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

Lemme 1.3 ***(Lemme de Fatou)*** *Soit* $(X_n)_{n\ge1}$ *une suite de v.a réelles positives, alors*

$$\int \lim_{n\to\infty} \inf X_n dY \le \lim_{n\to\infty} \inf \int X_n dY.$$

Théorème 1.6 ***(Inégalité de Doob)*** *Si* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale continue, alors*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|\right]\leq 4\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left[|X_T|^2\right].$$

Théorème 1.7 ***(Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy(BDG))*** *Soient* $p>0$ *et* $\sigma\in L^{2,p}\left(\mathbb{F},\mathbb{R}^d\right)\subset L^2_{loc}\left(\mathbb{F},\mathbb{R}^d\right)$, *on définit* $M_t:=\int\limits_0^t\sigma_s.dB_s$ *et* $M_T^*=\sup\limits_{0\leq t\leq T}|M_t|$.
Alors, il existe deux constantes universelles $0<c_p<C_p$ *telles que:*

$$c_p\mathbb{E}\left[\left(\int\limits_0^T|\sigma_t|^2.dB_t\right)^{\frac{p}{2}}\right]\leq\mathbb{E}\left[|M_T^*|^p\right]\leq C_p\mathbb{E}\left[\left(\int\limits_0^T|\sigma_t|^2.dB_t\right)^{\frac{p}{2}}\right].\tag{1.5}$$

Théorème 1.8 ***(Représentation des martingales browniennes)****.Pour tout* $\xi\in L^2\left(\mathcal{F}_T^B\right)$, *il existe un unique processus* $\sigma\in L^2\left(\mathbb{F}^B,\mathbb{R}^d\right)$, *tel que:*

$$\xi=\mathbb{E}[\xi]+\int\limits_0^T\sigma_t.dB_t.\tag{1.6}$$

Aussi, pour toutes $\mathbb{F}^B$*-martingale* M *telle que* $\mathbb{E}\left[|M_T|^2\right]<\infty$, *il existe un unique processus* $\sigma\in L^2\left(\mathbb{F}^B,\mathbb{R}^d\right)$, *tel que*

$$M_t=M_0+\int\limits_0^t\sigma_s.dB_s.\tag{1.7}$$

Lemme 1.4 ***(Lemme de Gronwall)*** *Soit* $T\geq 0$ *et* g *une fonction positive mesurable bornée telle que:*

$$g(t)\leq a+b\int\limits_0^t g(s)\,ds,\quad\forall t\leq T,$$

où a *et* b *sont des constantes positives. Alors,*

$$g(t)\leq ae^{bt},\quad\forall t\leq T.$$

Si $a=0$, *on a* $g=0$.

Théorème 1.9 ***(Continuité de Kolmogorov)*** *Soit* $X \in L^0(\mathbb{F})$*. Supposons qu'il existe trois constantes strictement positives,* α, β, C *telles que :*

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^{\alpha}\right] \leq C\,|t-s|^{1+\beta}\,, \quad \textit{pour tout } s,t \in [0,T]\,.$$

Alors pour tout $\gamma \in \left(0, \frac{\beta}{\alpha}\right)$, X *est* γ*-Hölderien continue p.s.*

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques rétrogrades

Dans ce chapitre on va étudier la théorie de base des EDSRs mais avant de donner des résultats d'existence et d'unicité et d'énoncer avec précision certaines hypothèses sur les coefficients, nous allons commenter la forme de l'équation.

2.1 Justification de la structure des EDSRs

Sur un intervalle de temps $\mathbb{T} = [0, T]$, on considère un mouvement Brownien d-dimensionnel, $B = (B_t)_{t \in \mathbb{T}}$, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On note $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ la filtration engendrée par le brownien et on suppose : $\mathbb{F} = \mathbb{F}^B$.

Imaginons à présent que l'on souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -\dfrac{dY_t}{dt} = f\left(t, Y_t\right), \qquad t \in \mathbb{T}, \\ Y_T = \xi, \end{cases} \tag{2.1}$$

où ξ est une variable aléatoire mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$. Supposons pour simplifier que $f \equiv 0$ le problème (2.1) devient alors

$$\begin{cases} -\dfrac{dY_t}{dt} = 0, \qquad t \in \mathbb{T}, \\ Y_T = \xi. \end{cases} \tag{2.2}$$

en imposant que, pour tout instant t, Y_t ne dépende pas du futur après t c'est-à-dire que le processus Y soit adapté par rapport à la filtration $\mathbb{F}$.

Puisque l'unique solution de cette EDS est $Y_t = \xi$, pour tout t, Y est par conséquent n'est pas une solution adapté à (2.2) car ξ n'est pas déterministe (par hypothèse).

Supposont $\xi \in L^2(\mathbb{F})$, la meilleure approximation – disons dans L^2 – adaptée est la martingale $Y_t = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t)$ Comme ce terme n'est à priori pas différentiable en temps au sens usuel, nous utilisons le théorème de représentation des martingales browniennes on peut construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que:

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dB_s.$$

Un calcul élémentaire nous donne l'EDSR simple dans sa forme intégrale:

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s, \tag{2.3}$$

la forme différentielle de cette équation est:

$$\begin{cases} -dY_t = -Z_t dB_t, \qquad t \in [0, T], \\ Y_T = \xi. \end{cases} \tag{2.4}$$

On voit donc apparaître sur la structure de l'équation initiale (2.2) une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté c'est-à-dire au lieu de regarder seulement Y comme la solution à l'EDSR on peut considérer le couple (Y, Z) comme une solution de (2.2).

Par conséquent, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z ; l'équation devient donc :

$$\begin{cases} -dY_t = f\left(t, Y_t, Z_t\right) dt - Z_t dB_t, \\ Y_T = \xi, \end{cases} \tag{2.5}$$

ou encore en utilisant la formulation intégrale rétrograde faisant apparaître la condition terminale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.6}$$

Les données de cette équation sont, d'une part f le générateur et d'autre part ξ la condition terminale de l'EDSR. L'inconnu d'une telle équation est le couple de processus $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$.

Définition 2.1 *Une solution de l'EDSR* (2.6) *est un couple de processus* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$;
2. $\mathbb{P}.p.s \displaystyle\int_0^T \left\{|f(s, Y_s, Z_s)| + |Z_s|^2\right\} ds < \infty$;
3. $\mathbb{P}.p.s$, on a :
$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Remarque 2.1 *Les intégrales de l'équation* (2.6) *sont bien définies et Y est une semi-martingale continue. Comme Y est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier Y_0 est une quantité déterministe.*

Dans la suite de ce chapitre, On travaillera avec deux espaces de processus :

* $L^{p,q}(\mathbb{F}) := \left\{ X \in L^0(\mathbb{F}) : \|X\|_{p,q}^q := \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |X|^p dt\right)^{\frac{q}{p}}\right] < \infty \right\}$ où $|X| := \sqrt{tr\left(XX^\top\right)}$ et $p, q \geq 1$.

En particulier si $p = q$, on note $L^p(\mathbb{F}) := L^{p,p}(\mathbb{F})$ et $\|X\|_p := \|X\|_{p,p}$ pour $X \in L^p(\mathbb{F})$.

* $S^2(\mathbb{F}) := \left\{ X \in L^0(\mathbb{F}) : X \text{ est continue, } p.s \text{ et } \|X\|_{\infty,p}^2 := \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\right] < \infty \right\}.$

Voici les hypothèses sous les quelles nous allons travailler dans la suite.

2.1.1 Hypothèses

(i) $\mathbb{F} = \mathbb{F}^B$;

(ii) $f\colon [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$ est $\mathbb{F}$-mesurable pour toutes ses variables ;

(iii) f est uniformément lipschitzienne et continue en (y, z) avec une constante de Lipschitz $L > 0$;

(iv) $\xi \in L^2\left(\mathcal{F}_T, \mathbb{R}^k\right)$ et $f^0 := f(0,0) \in L^{1,2}\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k\right)$.

Remarque 2.2

1. *Dans la littérature standard, l'article de Pardoux et Peng [8] par exemple, il est requit que* $f^0 \in L^2(\mathbb{F})$. *Notre condition est relativement faible.*

2. *Pour simplifier les notations, on va supposer* $k = d = 1$ *dans la plupart des preuves.*

Lemme 2.1 *Soient* $Y \in S^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k\right)$ *et* $Z \in L^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k\times d}\right)$. *Alors* $\left\{ \int_0^t Y_s.Z_s dB_s, t \in [0,T] \right\}$ *est une martingale uniformément intégrable.*

Démonstration. L'inégalité **BDG** donne

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_s.Z_s dB_s\right|\right] \leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Y_s|^2 |Z_s|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t| \left(\int_0^T |Z_s|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

par suite, comme $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_s.Z_s dB_s\right|\right] \leq C'\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Z_s|^2 ds\right)\right]\right).$$

Or cette dernière quantité est finie par hypothèse ; d'où le résultat. ■

2.2 EDSR lineaire

Dans cette section nous étudions le cas particulier des EDSRs linéaires pour lesquelles nous allons donner une formule plus ou moins explicite.

Premièrement, on commence par le résultat simple suivant

Proposition 2.1 *Soient* $\xi \in L^2\left(\mathcal{F}_T, \mathbb{R}^k\right)$ *et* $f^0 \in L^{1,2}\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k\right)$. *Alors l'EDSR linéaire suivante possède une unique solution* $(Y, Z) \in S^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k\right) \times L^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k\times d}\right)$.

$$Y_t = \xi + \int_t^T f_s^0 ds - \int_t^T Z_s dB_s. \tag{2.7}$$

Démonstration. Il est clair que

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T f_s^0 ds \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Or

$$\widetilde{Y}_t := Y_t + \int_0^t f_s^0 ds = \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T f_s^0 ds \mid \mathcal{F}_t\right]$$

est une martingale de carrée intégrable. Donc d'après le théorème de représentation des martingales, il existe un unique $Z \in L^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k\times d}\right)$ tel que :

$$d\widetilde{Y}_t := Z_t dB_t.$$

On peut vérifier directement que le couple (Y, Z) vérifie (2.7), et de la dérivation précédente, il est l'unique solution. ■

Maintenant, considérons l'EDSR linéaire générale avec $k = 1$:

$$Y_t = \xi + \int_t^T \left[\alpha_s Y_s + \beta_s Z_s + f_s^0\right] ds - \int_t^T Z_s dB_s. \tag{2.8}$$

On va donner la formule explicite de sa solution.

Proposition 2.2 *Soient* $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{R})$, $\alpha \in L^\infty(\mathbb{F}, \mathbb{R})$, $\beta \in L^\infty(\mathbb{F}, \mathbb{R}^d)$ *, et* $f^0 \in L^{1,2}(\mathbb{F}, \mathbb{R})$. *Si* $(Y, Z) \in L^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{1\times d})$ *vérifie l'EDSR linéaire* (2.8), *alors*

$$Y_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E}\left[\Gamma_T \xi + \int_t^T \Gamma_s f_s^0 ds \mid \mathcal{F}_t\right], \tag{2.9}$$

où

$$\Gamma_t = 1 + \int_0^t \Gamma_s [\alpha_s dt + \beta_s . dB_s], \quad ou\ bien, \quad \Gamma_t := \exp\left(\int_0^t \beta_s . dB_s + \int_0^t \left[\alpha_s - \tfrac{1}{2}|\beta_s|^2\right] ds\right) \tag{2.10}$$

Démonstration. On applique la formule d'Itô à $\Gamma_t Y_t$:

$$d(\Gamma_t Y_t) = -\Gamma_t f_t^0 dt + \Gamma_t \left[Y_t \beta_t^\top + Z_t\right] dB_t.$$

On note

$$\widehat{Y_t} := \Gamma_t Y_t; \quad \widehat{Z_t} := \Gamma_t \left[Y_t \beta_t^\top + Z_t\right]; \quad \widehat{\xi} := \Gamma_T \xi; \quad \widehat{f_t^0} := \Gamma_t f_t^0. \tag{2.11}$$

Donc, on peut réécrire (2.8) comme :

$$\widehat{Y_t} = \widehat{\xi} + \int_t^T \widehat{f_s^0} ds - \int_t^T \widehat{Z_s} dB_s.$$

C'est une EDSR linéaire de la forme (2.7). D'après les lemmes (1.1) et (2.1), il vient que $\int_0^t \widehat{Z_s} dB_s$ est une martingale. Alors,

$$\widehat{Y_t} := \mathbb{E}\left[\widehat{\xi} + \int_t^T \widehat{f_s^0} ds \mid \mathcal{F}_t\right],$$

ce qui implique directement la formule annoncée. ■

2.3 EDSR non linéaire

2.3.1 Estimation à priori

Théorème 2.1 *Sous les conditions* (2.1.1), *si* $(Y, Z) \in L^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k) \times L^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k\times d})$ *est solution de l'EDSR* (2.6). *Alors,* $Y \in S^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k)$ *et il existe une constante* C*, qui ne dépend que de* T*,*L*,*k *et* d *telle que*:

$$\|(Y,Z)\|^2 := \mathbb{E}\left[|Y_T^*|^2 + \int_0^T |Z_t|^2\, dt\right] \leq C I_0^2, \tag{2.12}$$

où

$$Y_T^* := \sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|, \quad et \quad I_0^2 := \mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \left(\int_0^T |f_t^0|\, dt\right)^2\right].$$

Démonstration. Supposons $k = d = 1$. La démonstration sera faite dans quelques étapes.

Etape.1. On montre tout d'abord que

$$\mathbb{E}\left[|Y_T^*|^2\right] \leq C\int_0^T \left(|Y_t|^2 + |Z_t|^2\right) dt + C I_0^2 < \infty. \tag{2.13}$$

Or

$$|Y_t| \leq |\xi| + \int_t^T \left(\left|f_s^0\right| + C|Y_s| + C|Z_s|\right) ds + \left|\int_t^T Z_s dB_s\right|.$$

Donc,

$$Y_T^* \leq C\left[|\xi| + \int_0^T \left(\left|f_t^0\right| + C|Y_t| + C|Z_t|\right) dt + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_s dB_s\right|\right].$$

Par applications de l'inégalité de **BDG**,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|Y_T^*|^2\right] &\leq C\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \left(\int_0^T |f_t^0|\, dt\right)^2 + \int_0^T \left(|Y_t|^2 + |Z_t|^2\right) dt\right] \\
&\leq C\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \left(\int_0^T |f_t^0|\, dt\right)^2\right] + C\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(|Y_t|^2 + |Z_t|^2\right) dt\right] \\
&\leq CI_0^2 + C\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(|Y_t|^2 + |Z_t|^2\right) dt\right].
\end{aligned}
$$

Etape.2 Ensuite, on va montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$
\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left[|Y_t|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_t|^2\, dt\right] \leq \varepsilon\left[|Y_T^*|^2\right] + C\varepsilon^{-1}I_0^2. \tag{2.14}
$$

Pour ce faire, on applique la formule d'Itô à $|Y_t|^2$

$$
d\,|Y_t|^2 = 2Y_t dY_t + |Z_t|^2\, dt = -2Y_t f_t\left(Y_t, Z_t\right) dt + 2Y_t Z_t dB_t + |Z_t|^2\, dt. \tag{2.15}
$$

Donc,

$$
|Y_t|^2 + \int_t^T |Z_s|^2\, ds = |\xi|^2 + 2\int_t^T Y_s f_s\left(Y_s, Z_s\right) ds + 2\int_t^T Y_s Z_s dB_s. \tag{2.16}
$$

Par (2.13) et lemme (2.1) on sait que $\int_0^t Y_s Z_s dB_s$ est une martingale. Donc, en prenant l'espérence par les deux côtés de (2.16) et du fait que $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|Y_t|^2 + \int_t^T |Z_s|^2\, ds\right] &= \mathbb{E}\left[|\xi|^2 + 2\int_t^T Y_s f_s\left(Y_s, Z_s\right) ds + 2\int_t^T Y_s Z_s dB_s\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[|\xi|^2 + C\int_t^T |Y_s|\left[\left|f_s^0\right| + |Y_s| + |Z_s|\right] ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[|\xi|^2 + CY_T^*\int_0^T \left|f_s^0\right| ds + C\int_t^T \left[|Y_s|^2 + |Y_s Z_s|\right] ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[|\xi|^2 + CY_T^*\int_0^T \left|f_s^0\right| ds + C\int_t^T |Y_s|^2\, ds + \frac{1}{2}\int_t^T |Z_s|^2\, ds\right].
\end{aligned}$$

Ceci nous conduit à

$$\mathbb{E}\left[|Y_t|^2 + \frac{1}{2}\int_t^T |Z_s|^2\, ds\right] \leq \mathbb{E}\left[C\int_t^T |Y_s|^2\, ds + |\xi|^2 + CY_T^*\int_0^T \left|f_s^0\right| ds\right]. \tag{2.17}$$

Le théorème de Fubini imlique

$$\mathbb{E}\left[|Y_t|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[|\xi|^2 + CY_T^*\int_0^T \left|f_s^0\right| ds\right] + C\int_t^T \mathbb{E}\left[|Y_s|^2\right] ds.$$

On en déduit alors grâce à l'inégalité de Granwall que

$$\mathbb{E}\left[|Y_t|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + Y_T^*\int_0^T |f_s^0|\, ds\right], \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.18}$$

Par suite, prenons $t = 0$ et en reportant (2.18) dans (2.17), on obtient

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_s|^2\, ds\right] \leq C\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + Y_T^*\int_0^T \left|f_s^0\right| ds\right]. \tag{2.19}$$

Par (2.18) et (2.19) et le fait que $2ab \leq \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2$, on en déduit (2.14).

Etape.3 En reportant (2.14) dans (2.13), on trouve

$$\mathbb{E}\left[|Y_T^*|^2\right] \leq C\varepsilon\mathbb{E}\left[|Y_T^*|^2\right] + C\varepsilon^{-1}I_0^2.$$

Où pour $\varepsilon = \frac{1}{2C}$,

$$\mathbb{E}\left[|Y_T^*|^2\right] \leq CI_0^2.$$

Ceci, avec (2.14), donne la preuve de (2.12) ■

Remarque 2.3 *Le résultat du théorème* (2.1) *est encore valable lorsqu'on remplace la condition* (*iii*) *dans* (2.1.1) *par la condition de croissance linéaire :*

$$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}, \quad |f_t(y, z)| \leq |f_t^0| + L(|y| + |z|). \tag{2.20}$$

Théorème 2.2 *Pour* $i = 1, 2$, *on suppose que* (ξ^i, f^i) *vérifient* (2.1.1) *et* $(Y^i, Z^i) \in L^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k\right) \times L^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k\times d}\right)$ *est une solution de l'EDSR* (2.6) *avec des coefficients* (ξ^i, f^i). *Alors*

$$\|(\Delta Y, \Delta Z)\|^2 \leq C\mathbb{E}\left[|\Delta\xi|^2 + \left(\int_0^T \left|\Delta f_t\left(Y_t^1, Z_t^1\right)\right| dt\right)^2\right], \tag{2.21}$$

Où

$$\Delta Y := Y^1 - Y^2, \quad \Delta Z := Z^1 - Z^2, \quad \Delta\xi := \xi^1 - \xi^2, \quad \Delta f_t := f^1 - f^2.$$

Démonstration. On suppose $d = k = 1$.

Or

$$\begin{aligned}\Delta Y_t &= \Delta\xi + \int_t^T \left[f_s^1\left(Y_s^1, Z_s^1\right) - f_s^2\left(Y_s^2, Z_s^2\right)\right] ds - \int_t^T \Delta Z_s dB_s \\ &= \Delta\xi + \int_t^T \left[\Delta f_s\left(Y_s^1, Z_s^1\right) + \alpha_s\Delta Y_s + \beta_s\Delta Z_s\right] ds - \int_t^T \Delta Z_s dB_s,\end{aligned}$$

où

$$\alpha_t := \frac{f_t^2(Y_t^1,Z_t^1)-f_t^2(Y_t^2,Z_t^1)}{\Delta Y_t}\mathbf{1}_{\{\Delta Y_t\neq 0\}},\quad \beta_t := \frac{f_t^2(Y_t^2,Z_t^1)-f_t^2(Y_t^2,Z_t^2)}{\Delta Z_t}\mathbf{1}_{\{\Delta Z_t\neq 0\}} \tag{2.22}$$

sont bornés par L. Donc, par le théorème (2.1) on obtient le résultat immédiatement. ■

2.3.2 Existence et unicité

Théorème 2.3 *Sous les hypothèses* (2.1.1) , *l'EDSR* (2.6) *possède une unique solution* $(Y,Z)\in L^2\left(\mathbb{F},\mathbb{R}^k\right)\times L^2\left(\mathbb{F},\mathbb{R}^{k\times d}\right)$.

Démonstration.

1.Unicité : l'unicité provient directement du théorème (2.2). En particulier, l'unicité veut dire

$$Y_t^1 = Y_t^2, \forall t\in[0,T], \mathbb{P}.p.s \quad \text{et } Z_t^1 = Z_t^2, dt\times d\mathbb{P}.p.s. \tag{2.23}$$

2.Existance : Pour l'existence, la preuve consiste à utiliser la méthode itérative de Picard et on suppose que $d=k=1$. Une démonstration s'appuyant sur un argument de point fixe est également possible.

Etape.1. Soit $\delta>0$ une constante qu'on va spécifier plus tard, et supposons que $T\leq\delta$ telle que δ ne dépend que de la constante de Lipschitz L (et la dimension). En particulier, elle ne dépend pas de la condition finale ξ.

On note $Y_t^0 := 0, Z_t^0 := 0$. Pour $n=1,2,...$, soit

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T f_s(Y_s^{n-1},Z_s^{n-1})ds - \int_t^T Z_s^n dB_s. \tag{2.24}$$

Supposons que $(Y^{n-1},Z^{n-1})\in L^2(\mathbb{F})\times L^2(\mathbb{F})$. Or

$$\left|f_s(Y_s^{n-1},Z_s^{n-1})\right| \leq C\left[\left|f_t^0\right| + \left|Y_t^{n-1}\right| + \left|Z_t^{n-1}\right|\right].$$

Donc, $f_s(Y_s^{n-1},Z_s^{n-1})\in L^{1,2}(\mathbb{F})$. D'après la proposition (2.1) l'EDSR (2.24) détermine un couple $(Y^n,Z^n)\in L^2(\mathbb{F})\times L^2(\mathbb{F})$ unique et donc le théorème (2.1) implique que $(Y^n,Z^n)\in$

$S^2(\mathbb{F}) \times L^2(\mathbb{F})$.

Par récurrence, on trouve que $(Y^n, Z^n) \in S^2(\mathbb{F}) \times L^2(\mathbb{F})$, pour tout $n \geq 0$.

On note

$$\Delta Y_t^n := Y_t^n - Y_t^{n-1}, \Delta Z_t^n := Z_t^n - Z_t^{n-1}.$$

Alors,

$$\Delta Y_t^n = \int_t^T \left[\alpha_s^{n-1} \Delta Y_s^{n-1} + \beta_s^{n-1} \Delta Z_s^{n-1}\right] ds - \int_t^T \Delta Z_s^n dB_s,$$

où α^n, β^n sont définis d'une manière similaire à (2.22) et sont bornés par L.

Par application de la formule d'Itô, on trouve

$$d\left(|\Delta Y_t^n|^2\right) = -2\Delta Y_t^n \left[\alpha_t^{n-1} \Delta Y_t^{n-1} + \beta_t^{n-1} \Delta Z_t^{n-1}\right] dt + 2\Delta Y_t^n \Delta Z_t^n dB_t + |\Delta Z_t^n|^2 dt.$$

On sait que $\int_0^t \Delta Y_s^n \Delta Z_s^n dB_s$ est une martingale et du fait que $\Delta Y_T^n = 0$,on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|\Delta Y_t^n|^2 + \int_t^T |\Delta Z_s^n|^2 ds\right] &= \mathbb{E}\left[2\int_t^T \Delta Y_s^n \left[\alpha_s^{n-1} \Delta Y_s^{n-1} + \beta_s^{n-1} \Delta Z_s^{n-1}\right] ds\right] \qquad (2.25) \\
&\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^T |\Delta Y_s^n| \left[\left|\Delta Y_s^{n-1}\right| + \left|\Delta Z_s^{n-1}\right|\right] ds\right].
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T |\Delta Y_t^n|^2 dt\right] &\leq C\delta\mathbb{E}\left[\int_0^T |\Delta Y_s^n| \left[\left|\Delta Y_s^{n-1}\right| + \left|\Delta Z_s^{n-1}\right|\right] ds\right] \\
&\leq C\delta\mathbb{E}\left[\int_0^T \left[|\Delta Y_t^n|^2 + \left|\Delta Y_t^{n-1}\right|^2 + \left|\Delta Z_t^{n-1}\right|^2\right] dt\right].
\end{aligned}$$

On suppose $\delta = \frac{1}{2C}$, alors $1 - C\delta \leq \frac{1}{2}$ et donc

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |\Delta Y_t^n|^2 dt\right] \leq C\delta\mathbb{E}\left[\int_0^T \left[\left|\Delta Y_t^{n-1}\right|^2 + \left|\Delta Z_t^{n-1}\right|^2\right] dt\right].$$

De plus, si on prend $t = 0$ dans (2.25), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^T |\Delta Z_t^n|^2\, dt\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^T |\Delta Y_t^n|^2\, dt\right] + \frac{1}{8}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left[\left|\Delta Y_t^{n-1}\right|^2 + \left|\Delta Z_t^{n-1}\right|^2\right] dt\right] \\ &\leq \left[C\delta + \frac{1}{8}\right]\mathbb{E}\left[\int_0^T \left[\left|\Delta Y_t^{n-1}\right|^2 + \left|\Delta Z_t^{n-1}\right|^2\right] dt\right].\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left[|\Delta Y_t^n|^2 + |\Delta Z_t^n|^2\right] dt\right] \leq \left[C\delta + \frac{1}{8}\right]\mathbb{E}\left[\int_0^T \left[\left|\Delta Y_t^{n-1}\right|^2 + \left|\Delta Z_t^{n-1}\right|^2\right] dt\right].$$

On prend $\delta = \frac{1}{8C}$. Alors,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left[|\Delta Y_t^n|^2 + |\Delta Z_t^n|^2\right] dt\right] \leq \frac{1}{4}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left[\left|\Delta Y_t^{n-1}\right|^2 + \left|\Delta Z_t^{n-1}\right|^2\right] dt\right].$$

Par récurrence, on trouve

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left[|\Delta Y_t^n|^2 + |\Delta Z_t^n|^2\right] dt\right] \leq \tfrac{C}{4^n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Donc, on peut facilement trouver un couple $(Y, Z) \in S^2(\mathbb{F}) \times L^2(\mathbb{F})$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \|(Y_t^n - Y_t, Z_t^n - Z_t)\| = 0.$$

Alors, en faisant tendre $n \to \infty$ dans l'EDSR (2.24) le couple (Y, Z) vérifie l'EDSR (2.6).

Etape.2. Maintenant, on va montrer l'existence pour un T arbitraire. Soit $\delta > 0$ la constante de l'étape 1.

On considère la partition $0 = t_0 < ... < t_n = T$ telle que: $t_{i+1} - t_i \leq \delta, i = 1, ..., n-1.$

On définit $Y_{t_n} := \xi$, et pour $i = n-1, ..., 0$ et $t \in [t_i, t_{i+1})$, (Y_t, Z_t) soit la solution de l'EDSR suivante sur $[t_i, t_{i+1}]$:

$$Y_t = Y_{t_{i+1}} + \int_t^{t_{i+1}} f_s(Y_s, Z_s)\,ds - \int_t^{t_{i+1}} Z_s dB_s, \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

On a $t_{i+1} - t_i \leq \delta$, donc de l'étape 1, l'EDSR précédente admet une solution. De plus, $(Y, Z) \in L^2(\mathbb{F}) \times L^2(\mathbb{F})$ car n est fini. Alors, ce sont des solutions globales sur toute l'intervalle $[0, T]$. ■

Proposition 2.3 ***(EDSR avec instant final aléatoire)***
Soient f une fonction vérifiant les hypothèses $(2.1.1)$, τ *un temps d'arrêt, et* $\xi \in L^2(\mathcal{F}_\tau)$.
On considère l'EDSR suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T \widetilde{f}_s(Y_s, Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad \widetilde{f}_s(y, z) = f_s(y, z)\,\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s). \tag{2.26}$$

Alors $\widetilde{f}$ vérifie $(2.1.1)$ *et donc l'EDSR* (2.26) *possède une solution unique. De plus, comme $\xi \in \mathcal{F}_\tau$, $Y_s := \xi, Z_s := 0$ satisfaient* (2.26) *pour $s \in [\tau, T]$. Donc on peut réécrire l'EDSR précédente sous la forme*:

$$Y_t = \xi + \int_t^\tau f_s(Y_s, Z_s)\,ds - \int_t^\tau Z_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Théorème 2.4 ***(Stabilité)*** *Soient (ξ, f) et (ξ_n, f^n), $n = 1, 2, ...,$ des coefficients satisfaisant les hypothèses* $(2.1.1)$ *avec la même constante de Lipschitz L et $(Y, Z), (Y^n, Z^n) \in S^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k) \times L^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k\times d})$ les solutions correspondants à l'EDSR* (2.6). *On note*

$$\Delta Y^n := Y^n - Y, \quad \Delta Z^n := Z^n - Z, \quad \Delta\xi_n := \xi_n - \xi, \quad \Delta f^n := f^n - f.$$

On suppose

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|\Delta\xi_n|^2 + \left(\int_0^T |\Delta f_t^n(0,0)|\,dt\right)^2\right] = 0, \tag{2.27}$$

et $\Delta f^n(y,z) \to 0$ *en mesure* $dt \times d\mathbb{P}$*, pour tout* (y,z). *Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \|(\Delta Y^n, \Delta Z^n)\| = 0. \tag{2.28}$$

Démonstration. On a d'aprés (2.21),

$$\begin{aligned} \|(\Delta Y^n, \Delta Z^n)\| &\leq C\mathbb{E}\left[|\Delta\xi_n|^2 + \left(\int_0^T |\Delta f_t^n(Y_t,Z_t)|\, dt\right)^2\right] \\ &\leq C\mathbb{E}\left[|\Delta\xi_n|^2 + \left(\int_0^T |\Delta f_t^n(0,0)|\, dt\right)^2 + \left(\int_0^T |\Delta f_t^n(Y_t,Z_t) - \Delta f_t^n(0,0)|\, dt\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Or $\Delta f^n(Y,Z) \to 0$, donc

$$|\Delta f_n(t,Y_t,Z_t) - \Delta f_n(t,0,0)| \leq C\left[|Y_t| + |Z_t|\right].$$

Par application du théorème de convergence dominée, on trouve

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |\Delta f_t^n(Y_t,Z_t) - \Delta f_t^n(0,0)|\, dt\right)^2\right] = 0. \tag{2.30}$$

De (2.27), (2.29) et (2.30) on obtient le résultat. ∎

Maintenant, on va donner une extension du résultat d'existence et unicité à l'espace $L^p(\mathbb{F})$ pour $p \geq 2$.

Théorème 2.5 *Supposons* (2.1.1) *sont vérifiées. Soient* $p \geq 2, \xi \in L^p\left(\mathcal{F}_T, \mathbb{R}^k\right)$, *et* $f^0 \in L^{1,p}\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k\right)$, *et soit* $(Y,Z) \in S^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k\right) \times L^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k\times d}\right)$ *l'unique solution de l'EDSR* (2.6). *Alors,*

$$\mathbb{E}\left[|Y_T^*|^p + \left(\int_0^T |Z_t|^2\, dt\right)^{\frac{p}{2}}\right] \leq C_p I_p^p, \quad \text{où} \quad I_p^p := \mathbb{E}\left[|\xi|^p + \left(\int_0^T |f_t^0|\, dt\right)^p\right]. \tag{2.31}$$

Démonstration. On suppose que $d = k = 1$ (pour simplifier), on va montrer le résultat en deux étapes.

Etape.1. Premièrement, on montre (2.31) pour $Y \in L^{\infty,p}(\mathbb{F}), Z \in L^{2,p}(\mathbb{F})$.

La formule d'Itô nous donne

$$d|Y_t|^2 = -2Y_t f_t(Y_t, Z_t)\,dt + |Z_t|^2\,dt + 2Y_t Z_t dB_t;$$
$$d(|Y_t|^p) = d\left(|Y_t|^2\right)^{\frac{p}{2}} = -p|Y_t|^{p-2} Y_t f_t(Y_t, Z_t)\,dt + \tfrac{1}{2}p(p-1)|Y_t|^{p-2}|Z_t|^2\,dt + p|Y_t|^{p-2} Y_t Z_t dB_t. \tag{2.32}$$

et comme dans la démonstration du théorème (2.3) *étapes 1* et *2*, on peut facilement trouver que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{E}\left[|Y_T^*|^p\right] \leq C_p \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left[|Y_t|^p\right] + C_p\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Y_t|^{p-2}|Z_t|^2\,dt\right)\right] + C_p I_p^p;$$
$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left[|Y_t|^p\right] + C_p\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Y_t|^{p-2}|Z_t|^2\,dt\right)\right] \leq \varepsilon\mathbb{E}\left[|Y_T^*|^p\right] + C_p\varepsilon^{-1} I_p^p.$$

Alors, pour un $\varepsilon > 0$ suffisament petit, on obtient

$$\mathbb{E}\left[|Y_T^*|^p\right] \leq C_p I_p^p. \tag{2.33}$$

Ensuite, Par (2.32)

$$\begin{aligned}
\int_0^T |Z_t|^2\,dt &= |\xi|^2 - |Y_0|^2 + 2\int_0^T Y_t Z_t dt - 2\int_0^T Y_t Z_t dB_t \\
&\leq C|Y_T^*|^2 + \int_0^T |Y_t|\left[\left|f_t^0\right| + |Y_t| + |Z_t|\right] dt + C\left|\int_0^T Y_t Z_t dB_t\right| \\
&\leq C|Y_T^*|^2 + C\left(\int_0^T \left|f_t^0\right| dt\right)^2 + \frac{1}{2}\int_0^T |Z_t|^2\,dt + C\left|\int_0^T Y_t Z_t dB_t\right|.
\end{aligned}$$

Alors, de (2.33) et les inégalités de **BDG**,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Z_t|^2\,dt\right)^{\frac{p}{2}}\right] \leq C_p I_p^2 + C_p \mathbb{E}\left[|Y_T^*|^p + \left|\int_0^T Y_t Z_t dB_t\right|^{\frac{p}{2}}\right]$$
$$\leq C_p I_p^2 + C_p \mathbb{E}\left[\left|\int_0^T Y_t Z_t dB_t\right|^{\frac{p}{4}}\right] \leq C_p I_p^2 + C_p \mathbb{E}\left[|Y_T^*|^{\frac{p}{2}} + \left(\int_0^T |Z_t|^2\,dt\right)^{\frac{p}{4}}\right]$$
$$\leq C_p I_p^2 + C_p \mathbb{E}\left[|Y_T^*|^p\right] + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Z_t|^2\,dt\right)^{\frac{p}{2}}\right] \leq C_p I_p^2 + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Z_t|^2\,dt\right)^{\frac{p}{2}}\right].$$

Ce qui nous conduit à une estimation de Z, et avec (2.33) ceci montre de plus (2.31).

Etape.2. Pour tout $n \geq 1$, on note

$$\xi_n := (-n) \vee \xi \wedge n, f_n := (-n) \vee f \wedge n.$$

Il est clair que (ξ_n, f^n) satisfait les conditions du théorème avec la même constante de Lipschitz L, et

$$(\xi_n, f^n) \rightarrow (\xi, f)\,, \quad |\xi_n| \leq |\xi|\,, |f^n| \leq |f|\,, \quad |\xi_n| \leq n, |f^n| \leq n, \quad \text{pour tout } (t, \omega, y, z)$$

Soit $(Y^n, Z^n) \in S^2(\mathbb{F}) \times L^2(\mathbb{F})$ l'unique solution de l'EDSR (2.6) de coefficients (ξ_n, f^n). Alors,

$$Y_t^n = \mathbb{E}\left[\xi_n + \int_t^T f_s^n(Y_s^n, Z_s^n)\,ds \mid \mathcal{F}_t\right], \quad \int_0^t Z_s^n dB_s = Y_t^n - Y_0^n + \int_0^t f_s^n(Y_s^n, Z_s^n)\,ds$$

sont bornés. Ceci implique, en appliquant l'inégalité de **BDG**, que $Z^n \in L^{2,p}(\mathbb{F})$. Ensuite, il vient de *l'étape 1* que

$$\mathbb{E}\left[|(Y^n)_T^*|^p + \left(\int_0^T |Z_t^n|^2\,dt\right)^{\frac{p}{2}}\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[|\xi_n|^p + \left(\int_0^T |f_t^n(0,0)|\,dt\right)^p\right] \leq C_p I_p^p.$$

Maintenant, similaire à l'argument du théorème (2.1), le théorème (2.4) et lemme de Fatou fournit le résultat (2.31) ■

2.4 Théorème de comparaison

Nous allons maintenant établir un théorème de comparaison en nous plaçant en dimension $k = 1$ (mais d reste quelconque). Ce théorème proposé par S.Peng [10] permet de comparer les solutions de deux EDSRs, dés que l'on sait comparer les conditions terminales et les générateurs.

Théorème 2.6 *Soit* (ξ_i, f^i), $i = 1, 2$ *des paramètres vérifiant* $(2.1.1)$, *et* $(Y^i, Z^i) \in S^2(\mathbb{F}) \times L^2(\mathbb{F})$ *les solutions des EDSRs associées*:

$$Y_t^i = \xi_i + \int_t^T f_s^i\left(Y_s^i, Z_s^i\right) ds - \int_t^T Z_s^i dB_s. \tag{2.34}$$

Si $\xi_1 \leq \xi_2, \mathbb{P}.p.s$ *et* $f^1(y,z) \leq f^2(y,z), dt \times d\mathbb{P}$ *p.s, pour tout* (y, z), *alors*

$$Y_t^1 \leq Y_t^2, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \mathbb{P}.p.s. \tag{2.35}$$

Si de plus $Y_0^1 = Y_0^2$, *alors* $\mathbb{P}.p.s, Y_t^1 = Y_t^2, 0 \leq t \leq T$, *et* $f^1(y,z) = f^2(y,z), dt \times d\mathbb{P}$ *p.s. En particulier, dès que* $\mathbb{P}\ (\xi^1 < \xi^2) > 0$ *ou* $f(t, Y_t, Z_t)^1 < f^2(t, Y_t, Z_t)$ *sur un ensemble de* $\lambda \otimes \mathbb{P}$*–mesure strictement positive alors* $Y_0^1 < Y_0^2$.

Démonstration. On pose

$$\Delta Y_t := Y_t^1 - Y_t^2, \quad \Delta Z_t := Z_t^1 - Z_t^2, \quad \Delta\xi := \xi_1 - \xi_2, \quad \Delta f := f^1 - f^2.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\Delta Y_t &= \Delta\xi + \int_t^T \left[f_s^1\left(Y_s^1, Z_s^1\right) - f_s^2\left(Y_s^2, Z_s^2\right)\right] ds - \int_t^T \Delta Z_s dB_s \\
&= \Delta\xi + \int_t^T \left[\alpha_s \Delta Y_s + \Delta Z_s \beta_s + \Delta f_s\left(Y_s^2, Z_s^2\right)\right] ds - \int_t^T \Delta Z_s dB_s,
\end{aligned}$$

où α et β sont bornés.

On se ramène à une solution de l'EDSR linéaire, on définit donc Γ comme (2.10), par (2.9)

$$\Delta Y_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}\left[\Gamma_T \Delta\xi + \int_t^T \Gamma_s \Delta f_s\left(Y_s^2, Z_s^2\right) ds \mid \mathcal{F}_t\right]. \tag{2.36}$$

Or $f^1(y,z) \leq f^2(y,z)$, $dt \times d\mathbb{P}$ $p.s$, pour tout (y,z), ce qui implique $\Delta f\left(Y^2, Z^2\right) \leq 0, dt \times d\mathbb{P}$ $p.s.$

Puisque $\Gamma \geq 0$ et $\Delta\xi \leq 0$, (2.35) provient directement de (2.36).

Pour la seconde partie du résultat, si de plus $\Delta Y_0 = 0$ on a :

$$0 = \mathbb{E}\left[\Gamma_T \Delta\xi + \int_t^T \Gamma_s \Delta f_s\left(Y_s^2, Z_s^2\right) ds\right],$$

et la variable aléatoire intégrée est positive. Par conséquent, elle est nulle $\mathbb{P}.p.s.$ ce qui termine la preuve de ce théorème en remarquant que dans ce cas $\Delta\xi = 0$ et $\Delta f = 0$. ■

Chapitre 3

Lien entre Les EDSRs et les EDP

Nous présentons dans ce chapitre une classe des EDSRs importante pour les applications pratiques, appelée EDSRs *markoviennes*. Il s'agit d'un cadre très spécifique dans lequel la dépendance de la condition terminale et du générateur de l'EDSR dans l'aléat ω se fait au travers de la solution d'une EDS.

3.0.1 Hypothèses et notations

La donnée de base est toujours un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel est défini un mouvement brownien B d-dimensionnel. La filtration $\mathbb{F}$ est la filtration naturelle de B augmentée de sorte que les conditions habituelles sont satisfaites. De plus, pour tout $0 \leq t \leq T$, on note

$$\mathbb{F}^t := \{\mathcal{F}_s^t\}_{t \leq s \leq T} \quad \text{où} \quad \mathcal{F}_s^t = \sigma\left(B_{t,r}, t \leq r \leq s\right). \tag{3.1}$$

$\mathbb{F}^t$ est donc indépendanre de $\mathcal{F}_t$.

On considère le système d'EDS progressivement rétrograde (EDSPR) découplé suivant :

$$\begin{cases} X_t = x + \int\limits_0^t b\left(s, X_s\right) ds + \int\limits_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s; \\ Y_t = g\left(X_T\right) + \int\limits_t^T f\left(s, X_s, Y_s, Z_s\right) ds - \int\limits_t^T Z_s dB_s. \end{cases} \tag{3.2}$$

Où les processus B, X, Y, et Z prennent des valeurs dans $\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{k\times d}$ respectivement.

On va supposer :

Hypothèses

(i) Les fonctions b, σ, f, g sont déterministes à valeurs dans $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times d}, \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k$, respectivement ; et $b(.,0), \sigma(.,0), f(.,0,0,0)$, et $g(0)$ sont bornées.

(ii) Les fonctions b, σ, f, g sont uniformément lipschitziennes et continues en (x, y, z) avec une constante de Lipschitz L.

(iii) b, σ, f sont $\frac{1}{2}$-Hölderiènnes cotinues en t avec une constante d'Hölder L.

3.1 Propriété se Markov et formule de Feynman-Kac

Avant de passer aux EDSRs markoviennes, rappelons tout d'abord la propriété markovienne des EDSs.

3.1.1 EDS markovienne

Introduisons tout d'abord deux notations. Pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, et $\eta \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_t, \mathbb{R}^n)$, on note $X^{t,x}$ et $\mathcal{X}^{t,\eta}$ l'unique solution des EDSs suivantes sur $[t, T]$, respectivement :

$$\begin{aligned} X_s^{t,x} &= x + \int_t^s b\left(r, X_r^{t,x}\right) dr + \int_t^s \sigma\left(r, X_r^{t,x}\right) dB_r; \\ \mathcal{X}_s^{t,\eta} &= \eta + \int_t^s b\left(r, \mathcal{X}_r^{t,\eta}\right) dr + \int_t^s \sigma\left(r, \mathcal{X}_r^{t,\eta}\right) dB_r. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Il est clair que $X^{0,x} = X, \mathcal{X}^{t,x} = X^{t,x}$, et par unicité, $X_s = \mathcal{X}_s^{t,X_t}$ pour $t \leq s \leq T$. De plus :

Lemme 3.1 *Sous les hypothèses* (3.0.1) *et en fixant* $0 \leq t \leq T$, *on a :*

(i) *La fonction* $x \to X^{t,x}$ *est lipschitzienne et continue telle que :*

$$\mathbb{E}\left[\left|\left(X^{t,x_1} - X^{t,x_2}\right)_T^*\right|^2\right] \leq C\left|x_1 - x_2\right|^2. \tag{3.4}$$

(ii) Il existe une modification de $X^{t,x}$ *pour chaque* x *telle que la fonction* $(x,s,\omega) \to X^{t,x}(\omega)$ *est* $\mathbb{F}^t$*-mesurable. En particulier,* $X^{t,x}$ *est indépendante de* $\mathcal{F}_t$.

Théorème 3.1 *Sous* (3.0.1). *Pour tout* t *et* $\eta \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_t, \mathbb{R}^n)$, *nous avons :*

$$\mathcal{X}_s^{t,\eta}(\omega) = X_s^{t,\eta(\omega)} \quad t \leq s \leq T \quad \mathbb{P}.p.\omega \tag{3.5}$$

Par conséquent, X *est markovien.*

Remarque 3.1 *Pour la preuve de ce théorème, on peut se référer à [[11], théorème 5.1.2].*

3.1.2 EDSR markovienne

Similaire à (3.1.1), pour tout t, x et $\eta \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_t, \mathbb{R}^n)$, soit $(Y^{t,x}, Z^{t,x})$ et $(\mathcal{Y}^{t,\eta}, \mathcal{Z}^{t,\eta})$ l'unique solution de l'EDSR suivante sur $[t,T]$, respectivement :

$$\begin{aligned} Y_s^{t,x} &= g\left(X_T^{t,x}\right) - \int_t^T f\left(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}\right) dr + \int_t^T Z_r^{t,x} dB_r; \\ \mathcal{Y}_s^{t,\eta} &= g\left(X_T^{t,x}\right) - \int_t^T f\left(r, \mathcal{X}_r^{t,\eta}, \mathcal{Y}_r^{t,\eta}, \mathcal{Z}_r^{t,\eta}\right) dr + \int_t^T \mathcal{Z}_r^{t,\eta} dB_r. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Par l'unicité de la solution, nous avons $(Y_s, Z_s) = \left(\mathcal{Y}_s^{t,X_t}, \mathcal{Z}_s^{t,X_t}\right)$. Et comme dans le lemme (3.1) et théorème (3.1) on peut facilement montrer

Théorème 3.2 *Fixons* $0 \leq t \leq T$, *sous les hypothèses* (3.0.1) :
(i) Il existe une modification de $(Y^{t,x}, Z^{t,x})$ *pour chaque* x *telle que* $(x,s,\omega) \to (Y_s^{t,x}(\omega), Z_s^{t,x}(\omega))$ *est est* $\mathbb{F}^t$*-progressivement mesurable. En particulier,* $(Y^{t,x}, Z^{t,x})$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_t$.
(ii) pour tout $\eta \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_t, \mathbb{R}^n)$, *on a*

$$\left(\mathcal{Y}_s^{t,\eta_t}(\omega), \mathcal{Z}_s^{t,\eta}(\omega)\right) = \left(Y_s^{t,\eta}(\omega), Z_s^{t,\eta}(\omega)\right), \quad pour\ ds \times d\mathbb{P}.p.\,(s,\omega). \tag{3.7}$$

(iii) (X, Y, Z) *est markovien.*

Maintenant, on définit

$$u(t,x) := Y^{t,x}. \tag{3.8}$$

Alors, $u(t,x)$ est à la fois $\mathcal{F}_t$-mesurable et indépendante de $\mathcal{F}_t$, donc déterministe.

De plus, comme $Y_t = \mathcal{Y}_t^{t,X_t} = Y_t^{t,X_t}$, on obtient :

$$u(t,x) = u(t,X_t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.9}$$

3.1.3 Formule de Feynman-Kac non linéaire

Rappelons tout d'abord que les EDS sont reliées aux EDPs par la formule de Feynman-Kac qui donne une solution probabiliste à l'EDP linéaire. Voyons -par exemple- le problème d'équation aux dérivées partielles linéaire parabolique de Cauchy :

$$\begin{cases} rv - \frac{\partial v}{\partial t} - \mathcal{L}_t v = f, & \text{sur } [0,T[\times \mathbb{R}^n. \\ v(T,.) = g, & \text{sur } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.10}$$

Où f (resp g) est une fonction continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ (resp $\mathbb{R}^n$) dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}_t$ est un opérateur différentiel du second ordre agissant sur les fonctions φ assez régulières par la relation suivante

$$(\mathcal{L}_t\varphi)(x) = b(t,x).D_x\varphi(x) + \frac{1}{2}tr\left(\sigma(t,x)\sigma^\top(t,x)D_x^2\varphi(x)\right), \quad \varphi \in C^2(\mathbb{R}^n),$$

où $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$. Considérons la diffusion de générateur $\mathcal{L}_t$, c'est-à-dire :

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{s,x})\,dr + \int_t^s \sigma(r, X_r^{s,x})\,dB_r, \quad t \leq s \leq T,$$

on suppose aussi que la fonction r est positive. On donne ici une version simple du théorème de représentation de Feynman-Kac.

Théorème 3.3 ***(Représentation de Feynman-Kac)***

Soit v une fonction $C^{1,2}([0,T[\times\mathbb{R}^d) \cap C^0([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ à dérivée en x bornée et solution du *problème de Cauchy* (3.10) *. Alors v admet la représentation*

$$v(t,x)=\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{-\int_t^s r\left(u,X_u^{t,x}\right)du} f\left(s,X_s^{t,x}\right)ds+e^{-\int_t^T r\left(u,X_u^{t,x}\right)du} g\left(X_T^{t,x}\right)\right],$$

pour tout $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$.

La théorie des EDSRs permet de généraliser ce résultat au cadre des EDPs non linéaires. Supposons la fonction u de (3.9) appartient à $C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$ et pour simplifier, on suppose $k=1$, et en appliquant la formule d'Itô, on a

$$du(t,X_t)=\left[\partial_t u+\partial_x ub+\frac{1}{2}\partial_{xx}uTr\left(\sigma\sigma^\top\right)\right](t,X_t)\,dt+\partial_x u\sigma(t,X_t)\,dB_t.$$

Par comparaison avec

$$dY_t=-f(t,X_t,Y_t,Z_t)+Z_tdB_t.$$

On obtient

$$Z_t=\partial_x u\sigma(t,X_t),\quad \left[\partial_t u+\partial_x ub+\tfrac{1}{2}\partial_{xx}uTr\left(\sigma\sigma^\top\right)\right](t,X_t)+f(t,X_t,Y_t,Z_t)=0,$$

Donc

$$\begin{cases}\partial_t u+\mathbb{L}u(t,x)+f(t,x,u,\partial_x u\sigma)=0;\\ u(T,x)=g(x).\end{cases}\tag{3.11}$$

où $\mathbb{L}$ est l'opérateur de Dynkin associé à la diffusion X tel que

$$\mathbb{L}\varphi(t,x)=\left[\partial_x\varphi b+\tfrac{1}{2}\partial_{xx}\varphi Tr\left(\sigma\sigma^\top\right)\right](t,x),\quad \varphi\in C^{1,2}.$$

Maintenant, on va passer au résultat dans la cas multidimensionnel.

Théorème 3.4 ***(Formule de Feynman-Kac non linéaire)*** *Supposons les hypothèses* (3.0.1) *sont vérifiées, et* $u\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$ *est une solution classique du système des*

EDPs suivantes :

$$\partial_t u^i + \frac{1}{2}\partial_{xx} u^i Tr\left(\sigma\sigma^\top\right) + \partial_x u^i b + f^i\left(t, x, u, \partial_x u\sigma\right) = 0, \quad i = 1, 2, ..., k; \quad u\left(T, x\right) = g\left(x\right). \tag{3.12}$$

Alors,

$$Y_t = u\left(t, X_t\right), \quad Z_t = \partial_x u\sigma\left(t, X_t\right). \tag{3.13}$$

Remarque 3.2 *L'intérêt des formules du type Feynman-Kac est de pouvoir utiliser les résultats sur Les EDSRs à l'étude des EDP ou faire le contraire.*

Il existe un résultat réciproque qui est légèrement plus difficile à obtenir, car nous n'avons pas à priori une meilleure propriété de régularité pour u que celle donnée dans la (3.9). On peut supposer plus de conditions de régularité pour prouver que u est une solution classique de (3.12), voir par exemple. [[10], théorème 3.2]. Dans le cadre de Lipschitz, il faut utiliser une notion plus faible de solution. Lorsque Y est unidimensionnel, une notion naturelle à prendre en compte est celle d'une solution de viscosité, voir par exemple [4].

3.2 Propriété de viscosité de l'EDSR

Dans cette partie, on suppose $k = 1$.

Rappelons l'EDP à condition terminale du problème (3.11) :

$$\partial_t u + \mathbb{L}u\left(t, x\right) + f\left(t, x, u, \partial_x u\sigma\right) = 0; \quad (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n. \tag{3.14}$$

Définition 3.1 *Soit u une fonction continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ qui satisfaisant $u\left(T, x\right) = g(x)$. La fonction u est une sur-solution (resp sous-solution) de viscosité de l'EDP* (3.11) *si, pour toute fonction $\varphi \in C^{1,2}\left([0, T] \times \mathbb{R}^n\right)$, on a pour tous points $(t_0, x_0) \in]0, T[\times \mathbb{R}^n$ de maximum (resp. minimum) local de $u - \varphi$:*

$$-\partial_t\varphi\left(t_0, x_0\right) - \mathbb{L}\varphi\left(t_0, x_0\right) - f\left(t_0, x_0, \varphi\left(t_0, x_0\right), \partial_x\varphi\sigma\left(t_0, x_0\right)\right) \leq 0 \quad \textit{resp.}\left(\geq 0\right),$$

u est solution de viscosité si elle est à la fois sous-solution et sur-solution de viscosité.

Pour une présentation de la théorie de la solution de viscosité, nous renvoyons à l'article de référence [4].

Remarque 3.3 *Dans la définition ci-dessus, on peut supposer que le maximum (ou le minimum) est* 0*, simplement en remplaçant* φ *par* $\varphi - \varphi(t,x) + u(t,x)$.

Théorème 3.5 *La fonction* $u(t,x) := Y_t^{t,x}$ *est une solution de viscosité de l'EDP* (3.11).

Démonstration. On sait que u est continue et satisfait $u(T,.) = g$. Nous montrons seulement que u est sous-solution (la démonstration de u sur-solution est identique).
Soit φ dans $C^{1,2}$ telle que $u - \varphi$ possède en $(t_0, x_0); 0 < t_0 < T$ un maximum local ,égal à 0. On veut montrer que :

$$\partial_t \varphi(t_0, x_0) + \mathbb{L}\varphi(t_0, x_0) + f(t, x, \varphi(t_0, x_0), \partial_x \varphi \sigma(t_0, x_0)) \geq 0.$$

On suppose qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\partial_t \varphi(t_0, x_0) + \mathbb{L}\varphi(t_0, x_0) + f(t, x, \varphi(t_0, x_0), \partial_x \varphi \sigma(t_0, x_0)) = -\delta,$$

et on cherche une contradiction. La fonction $u - \varphi$ a un maximum local au point (t_0, x_0) égal à 0. Par continuité, il existe $0 < \alpha \leq T - t_0$ tel que $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ et $|x - x_0| \leq \alpha$,

$$u(t,x) \leq \varphi(t,x) \quad \text{et} \quad \partial_t \varphi(t,x) + \mathbb{L}\varphi(t,x) + f(t, x, \varphi(t,x), \partial_x \varphi \sigma(t,x)) \leq -\tfrac{\delta}{2}.$$

On considère le temps d'arrêt $\tau = \inf\{u \geq t_0; |X_u^{t_0,x_0} - x_0| > \alpha\} \wedge t_0 + \alpha.$ Comme X^{t_0,x_0} est un processus continue, on a : $|X_\tau^{t_0,x_0} - x_0| \leq \alpha$. On applique la formule d'Itô à $\varphi(r, X_r^{t_0,x_0})$ entre $u \wedge \tau$ et $(t_0 + \alpha) \wedge \tau$ et on obtient :

$$\varphi\left(u \wedge \tau, X_{u\wedge\tau}^{t_0,x_0}\right) = \varphi\left(\tau, X_\tau^{t_0,x_0}\right) - \int_{u\wedge\tau}^{\tau} \{\partial_t \varphi + \mathbb{L}\varphi\}\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right) dr - \int_{u\wedge\tau}^{\tau} \partial_x \varphi \sigma\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right) dB_r;$$

On définit pour $t_0 \leq u \leq t_0+\alpha$, $Y_u^{'} := \varphi\left(u \wedge \tau, X_{u\wedge\tau}^{t_0,x_0}\right)$ et $Z_u^{'} := \mathbf{1}_{\{u\leq\tau\}}\partial_x\varphi\sigma\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right)$, l'égalité précédente devient alors

$$Y_u^{'} = \varphi\left(\tau, X_\tau^{t_0,x_0}\right) + \int_u^{t_0+\alpha} -\mathbf{1}_{\{r\leq\tau\}}\left\{\partial_t\varphi + \mathbb{L}\varphi\right\}\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right)dr - \int_u^{t_0+\alpha} Z_r^{'}dB_r.$$

De la même façon, on a, pour $t_0 \leq u \leq t_0+\alpha$, $Y_u = Y_{u\wedge\tau}^{t_0,x_0}$ et $Z_u = \mathbf{1}_{\{u\leq\tau\}}Z_u^{t_0,x_0}$, alors

$$Y_u = Y_{t_0+\alpha} + \int_u^{t_0+\alpha} \mathbf{1}_{\{r\leq\tau\}}f\left(r, X_r^{t_0,x_0}, Y_r, Z_r\right)dr - \int_u^{t_0+\alpha} Z_r dB_r, \quad t_0 \leq u \leq t_0+\alpha.$$

La propriètè de Markov, implique que $\mathbb{P}.p.s.$ pour tout $t_0 \leq r \leq t_0+\alpha : Y_r^{t_0,x_0} = u\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right)$ et donc $Y_{t_0+\alpha} = Y_\tau^{t_0,x_0} = u\left(\tau, X_\tau^{t_0,x_0}\right)$. L'équation précédente devient

$$Y_u = u\left(\tau, X_\tau^{t_0,x_0}\right) + \int_u^{t_0+\alpha} \mathbf{1}_{\{r\leq\tau\}}f\left(r, X_r^{t_0,x_0}, u\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right), Z_r\right)dr - \int_u^{t_0+\alpha} Z_r dB_r, \quad t_0 \leq u \leq t_0+\alpha.$$

Maintenant, on applique le théorème de comparaison sur $\left(Y_u^{'}, Z_u^{'}\right)_u$ et $\left(Y_u, Z_u\right)_u$. De la définition de τ on a $u\left(\tau, X_\tau^{t_0,x_0}\right) \leq \varphi\left(\tau, X_\tau^{t_0,x_0}\right)$ et

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{\{r\leq\tau\}}f\left(r, X_r^{t_0,x_0}, u\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right), Z_r^{'}\right) &= \mathbf{1}_{\{r\leq\tau\}}f\left(r, X_r^{t_0,x_0}, u\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right), \partial_x\varphi\sigma\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right)\right)\\ &\leq -\mathbf{1}_{\{r\leq\tau\}}\left\{\varphi^{'} + \mathbb{L}\varphi\right\}\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right).\end{aligned}$$

De plus,

$$\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t_0+\alpha} -\mathbf{1}_{\{r\leq\tau\}}\left\{\varphi^{'} + \mathbb{L}\varphi + f\right\}\left(r, X_r^{t_0,x_0}, u\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right), \partial_x\varphi\sigma\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right)\right)dr\right]$$
$$\geq$$
$$\mathbb{E}\left[\tau - t_0\right]\tfrac{\delta}{2} > 0.$$

En effet, $\delta > 0$ et $\tau > t_0$ comme $\left|X_u^{t_0,x_0} - x_0\right| = 0 < \alpha$. On applique alors la version strict du théorème de comparaison, pour obtenir $u\left(t_0, x_0\right) = Y_{t_0} < Y_{t_0}^{'} = \varphi\left(t_0, x_0\right)$. C'est une contradiction car $u\left(t_0, x_0\right) = \varphi\left(t_0, x_0\right)$.

Il s'avère que u est la solution unique de viscosité de (3.11). ■

Bibliographie

[1] Bismut, J.M.(1973).Conjugate convex functions in optimal stochastic control. Journal of Mathematical Analysis and Applications, $44(2), 384 - 404$.

[2] Briand, P(2001). Equations différentielles stochastiques rétrogrades.

[3] Chassagneux, J.F, Chotai.H, and Muûls. M, (2017). A Forward-Backward SDEs Approach to Pricing in Carbon Markets. Springer.

[4] Crandall, Michael .G, Hitoshi Ishii, and Pierre-Louis Lions. (1992). User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. Bulletin of the American Mathematical Society $27(1) : 1 - 67$.

[5] Jeanblanc, M (2006) . Cours de calcul stochastique. Cours de master.

[6] Jeanblanc, M et Simon, T (2005) . Eléménts de calcul stochastique. IRBID.

[7] Pham, H (2007) . Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance. Mathématiques & Applications (61) . Springer.

[8] Pardoux, E.& Peng, S. G (1990) . Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems Control Lett, $14(1) : 55 - 61$.

[9] Pardoux, E, Peng, Shige. (1992). Backward stochastic differential equations and quasi-linear parabolic partial differential equations. In Stochastic partial differential equations and their applications, $200 - 217$. Springer.43.

[10] Peng, S. (1992), Stochastic Hamilton-Jacobi-Bellman equations, SIAMJ.Control Optimal. $30, No.2, 284 - 304$

[11] Zang, J. (2017). Backward stochastic differential equations from linear to non linear theory. Probability Theory and Stochastic Modelling, volume (86).Springer, $79 - 106$.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$	Tribus Boréliènne sur $\mathbb{R}^d$.
$\mathbb{E}[X]$	Espérance mathématique ou moyenne du $v.a.$ X.
$i.e$	C'est-à-dire.
$\sigma^\top$	Transposée de la matrice σ
$\mathbb{P}.p.s$	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$\mathbb{S}^d$	Matrices symétriques de taille $d \times d$.
$A : B$	Trace de $AB^\top$ pour $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.
$L^0(\mathcal{F})$	L'ensemble des variables aléatoires $\mathcal{F}$-mesurables.
$L^\infty(\mathbb{F})$	espace des processus $X \in L^0(\mathbb{F})$ bornés.
$v.a$	Variable aléatoire.
$u.i$	Uniformément intégrable.
EDS	Equations différentielle stochastique.
EDSR	Equations différentielle stochastique rétrograde.
EDP	Equation aux dérivées partielles.
MB	Mouvement Brownien.