République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifque

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des sciences exactes et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

Master en Mathématiques

Option : Probabilité

Par

Zid Ferdous

Titre

Principe du maximum stochastique sous l'information partielle

Membres du jurés :

Dr.	**Imad-Eddine Lakhdari**	U.Biskra	**Président**
Pr.	**Mokhtar Hafayed**	U.Biskra	**Encadreur**
Dr.	**Abdelhak Ghoul**	U.Biskra	**Examinateur**

Juin 2019

Didicace

À ma chère mère.

À mon chèr père,

qui n'ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard, de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.

À mon chèr mari O.Kraa,

pour ses soutients moral et ses conseils précieux tout le temps.

À mon frère Mohamed.

À ma sœur Isra.

À ma chère amie S.Rouba,

pour leurs aides et supports dans les moments difficiles.

À tout ma famille.

Remerciements

Je voudrais dans un premier temps remercier, mon directeur de mémoire **M.Hafayed**, professeur de mathématique à l'université de Biskra, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je désire aussi remercier monsieur **I.Lakhdari,** professeur de mathématique à l'université de Biskra, pour sa patience, sa générosité et ses conseils de rédaction qu'ont été très précieux.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes études universitaires.

Table des matières

Introduction générale

Introduction

Dans ce travail, on considère un problème de contrôle optimal stochastique sous l'information partielle, qui consiste à minimiser une fonction de coût donnée par :

$$J\left(u\left(\cdot\right)\right)=\mathbb{E}\left[\int_0^T f\left(t,X\left(t\right),u\left(t\right)\right)dt+g\left(X\left(T\right)\right)\right],$$

où $X(\cdot)$ est une solution en t d'un système gouverné par l'équation différentielle stochastique (EDS en bref) contrôlée de la forme suivante :

$$\begin{cases} dX(t)=b\left(t,X(t),u(t)\right)dt+\sigma\left(t,X(t),u(t)\right)dW(t), \\ X\left(0\right)=x_0, \end{cases}$$

où b et σ sont des fonctions déterministes et $W(t)$ un mouvement brownien.

Notre objectif est d'établir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sous la forme de principe du maximum stochastique de Pontryagin. Le système considéré dans ce travail est gouverné par des équations différentielles (EDSs) avec des coefficients contrôllés. Nous supposons le domaine du contrôle est convexe. La preuve de ce résultat est basée sur la perturbation convexe et la formule d'Itô.

Nous présentons dans ce travail trois chapitres, le premier chapitre est introductif et permet d'introduire les outils essentiels pour le deuxième et le troisième chapitres, ces deux derniers, contient l'essentielle de notre travail.

La suite de ce travail est organisée de la manière suivante :

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse au problème de contrôle stochastique, nous commençons par présenter les résultats principaux des contrôles stochastiques de façon générale. On décrit brièvement les différentes méthodes de résolutions du problème de contrôle stochastique, les bien- connues, qui sont la méthode de la programmation dynamique (Principe de Bellman) et le principe du maximum de Pontryagin. Dans notre travail, nous employons la deuxième méthode.

Le troisième chapitre contient la contribution essentielle de ce travail. Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de principe du maximum stochastique où le sytème différentiel est gouverné par des EDSs sous l'information partielle. Pour cela, on suppose que la fonction de coût $J(u(\cdot))$, où $u(\cdot)$ est un contrôle admissible, différentiable et il accepte une minimum en $\hat{u}(\cdot)$ qu'on appelera contrôle optimale,

$$J(\hat{u}(\cdot)) = \min_{u \in \mathcal{U}} \{J(u(\cdot)),\ u(\cdot) \in \mathbb{U} : convexe\},$$

où $\mathcal{U}$ est l'espace de contrôle admissible, puis on perturbe le contrôle $\hat{u}(\cdot)$ sur un intervalle de longueur ε où on obtient un contrôle u_θ qu'on appellera perturbation convexe de $\hat{u}$, en remarquant ici que $u_\theta(\cdot)$ est un contrôle admissible et $\mathcal{G}_t$-adapté ($\mathcal{G}_t$ sous filtration de $\mathcal{F}_t$). L'intérêt de la perturbation du contrôle optimal $\hat{u}(\cdot)$ est d'introduire un contrôle $u_\theta(\cdot)$ sur laquelle nous pourrons dériver la fonction de coût $J(u_\theta(\cdot))$. Le domaine de contrôle $\mathbb{U}$ est supposé convexe. Les conditions nécessaires vérifiées par le contrôle $\hat{u}(\cdot)$ appellerons conditions nécessaire d'optimalité. *Notons que* les étapes d'étude suivies dans ce chapitre sont similaires à celles de Bensoussan [1][1].

Dans le dernier chapitre, nous appliquons le principe du maximum stochastique au problème de sélection de portefeuille moyenne-variance.

[1] *Lectures on stochastic control. In : Mitter, S.K., Moro, A. (eds.) Nonlinear Filtering and Stochastic Control. Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 972. Springer, Berlin (1982)).*

Chapitre §.1
Calcul stochastique

Chapitre 1

Calcul stochastique

Dans ce chapitre on va présenter d'une manière simple et brève les principaux outils probabilistes de base utilisés pour formuler le principe du maximum sous l'information partielle, le point de départ du calcul stochastique est la construction d'intégrale stochastique, en commençant par : les processus, mouvement brownien et l'espérance conditionnelle. Il y a des nombreux livres détaillant la théorie classique exposée dans ce chapitre, voir le livre de Yong & Zhou 1999 [8][1], et le document de Jeanblanc 2005 [5][2] et Pham 2005 [4][3].

1.1 Processus stochastique

1.1.1 Filtration

Définition 1.1.1 *Une filtration sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est une famille croissante* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ *de sous tribus de* $\mathcal{F}$*, (* $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$*, pourtout* $0 \leq s \leq t \leq T$*).*

La filtration naturelle du processus X *est la suite croissante de tribus complètes* $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X(s),\ s \leq t)$*.*

Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ *est appelé espace probabilisé filtré.*

[1] J. Yong and X.Y. Zhou (1999), *Stochastic controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations.* Springer Verlag.

[2] M.Jeanblanc. (2006), *Cours de calcul stochastique. Master 2IF EVRY.* Lecture Notes.

[3] H. Pham (2005), *Optimisation et Contrôle Stochastique Appliqués à la Finance.*Vol. 61, Springer Verlage.

tout dans ce qui suit on considère l'espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

($i.e$ $\mathcal{F}_0$ contient tout les ensembles négligeables de $\mathcal{F}_T$). Voir le livre de Yong & Zhou 1999 [8], et le document de Jeanblanc 2005 [5].

1.1.2 Processus stochastique

Définition 1.1.2 *Soit E un ensemble. On appelle processus stochastique indexé par E et à valeures dans $\mathbb{R}^d$ une famille $(X_t)_{t\in E}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$; pour tout $t \in E$, X_t est une variable aléatoire.*

Remarque 1.1.1 *Nous aurons $E = \mathbb{N}$ ce qui correspond aux processus à temps discret, $E = \mathbb{R}_+$ ou $E = [0; a]$ pour les processus à temps continu.*

Pour simplifier les énoncés qui suivant donnés avec $E = \mathbb{R}$; pour alléger l'écriture, nous noterons un processus $X(\cdot)$ plutôt que $(X_t)_{t\geq 0}$.

Définition 1.1.3 *On peut noter qu'un processus stochastique peut être vu comme une fonction aléatoire : à chaque ω ; on associe la fonction $t \to X_t(\omega)$ qui est appelée trajectoire.*

On dit que le processus est à trajectoire continues (ou est continu) si l'application $t \to X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.

Un processus est dit càdlag (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche. Même définition pour càglàd.

Processus adapté

Définition 1.1.4 (Adaptation) *Un processus X est mesurable si l'application $(t, \omega) \to X_t$ de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Un processus X est dit adapté (par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$) si X_t est $\mathcal{F}_t$ $-$mesurable pour tout t.

Il est inutile de dire qu'un processus est toujours adapté par rapport à sa filtration naturelle.

Processus progressif

Définition 1.1.5 (Progressivement mesurable) *Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$, l'application $(s,\omega) \to X_s(\omega)$ de $[0,t]\times\Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Modification d'un processus

Définition 1.1.6 *Soient X et Y deux processus, on dit que X est une modification de Y si pour tout $t \geq 0$. Les variables aléatoires X_t et Y_t sont égales $\mathbb{P}-p.s$:*

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

Indistingubilité

Définition 1.1.7 *On dit que X et Y sont indistinguables si $\mathbb{P}-p.s$ les trajectoires de X et Y sont les même, c'est-à-dire :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0) = 1.$$

Remarque 1.1.2 *La notion d'indistinguabilité est plus forte que la notion de modification. Notons que si X est une modification de Y et si X et Y sont à trajectoires continues à droite (ou à gauche) alors X et Y sont indistinguables.*

1.2 Espérance conditionnelle

1.2.1 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu

Soit X une $v.a.r$[4] (intégrable) définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$.

Définition 1.2.1 *L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ de X quand $\mathcal{G}$ est l'unique $v.a$:*

***(a)**.$\mathcal{G}$ -mesurable.*

[4] Variable aléatoire réelle

(b). *Telle que* $\int_B \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})d\mathbb{P} = \int_B Xd\mathbb{P}, \ \forall B \in \mathcal{G}.$

C'est aussi l'unique (à une égalité $\mathbb{P}-$*p.s prés) variable* $\mathcal{G}$*-mesurable telle que* :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})Y\right] = \mathbb{E}(XY),$$

pour toute variable Y, $\mathcal{G}$*-mesurable bornée.*

Il en résulte que si X *est de carré intégrable,* $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ *est la projection de* X *sur l'espace des v.a* $\mathcal{G}$ *mesurables, de carré intégrable, c'est à dire la v.a* $\mathcal{G}$ *mesurable qui minimise* $\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right]$ *parmi les v.a* Y $\mathcal{G}$ *mesurables.*

1.2.2 Espérance conditionnelle par rapport à une variable

Définition 1.2.2 *On définit l'espérance conditionnelle d'une variable* X *(intégrable) par rapport à* Y *comme étant l'espérance conditionnelle de* X *par rapport à la tribu* $\sigma(Y)$*.On la note* $\mathbb{E}(X \mid Y)$*. C'est une variable mesurable par rapport à la tribu engendrée par* Y*, donc c'est une fonction dépand de* Y*,(ie : il existe une fonction* ψ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *borélienne telle que* $\mathbb{E}(X \mid Y) = \psi(Y)$*).*

L'espérance connditionnelle $\mathbb{E}(X \mid Y)$ *est caractérisée par :*

(a) $\mathbb{E}(X \mid Y)$ *est une variable* $\sigma(Y)$ *mesurable.*

(b) $\int_A \mathbb{E}(X \mid Y)d\mathbb{P} = \int_A Xd\mathbb{P}, \ \forall A \in \sigma(Y).$

Remarque 1.2.1 *La propriété* ***(b)*** *est équivalente à* $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y)\phi(Y)) = \mathbb{E}(X\phi(Y))$ *pour tout fonction* ϕ *borélienne bornée, ou à :* $\int_{Y\in B} \mathbb{E}(X \mid Y)d\mathbb{P} = \int_{Y\in B} Xd\mathbb{P}$ *pour tout* $B \in \mathcal{G}$.

Propriétés 1.2.1

– $\mathbb{E}\left[aX + bY \mid \mathcal{G}\right] = a\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] + b\mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{G}\right]$, (**linéarité**).

– $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right] = \mathbb{E}\left[X\right].$

– Si $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$, $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}_1\right] \mid \mathcal{G}_2\right] = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}_2\right].$

– Si X est indépendant de $\mathcal{G}$, $\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[X\right].$

– Si Y est $\mathcal{G}$ $-$mesurable, $\mathbb{E}\left[XY \mid \mathcal{G}\right] = Y\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right].$

– Si ϕ est une application convexe et mesurable, $\mathbb{E}[\phi(X) \mid \mathcal{G}] \geq \phi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}])$, (**inégalité de Jensen**).

Voir le document de Jeanblanc (2005) [5].

1.3 Mouvement brownien

Définition 1.3.1 *On dit que le processus stochastique à valeures réelles $W(t)$ est un mouvement brownien standard s'il satisfaire les conditions suivantes :*

1. $t \to W(t)(\omega)$ est continue $\mathbb{P}-p.s.$
2. Pour $0 \leq s < t$, $W(t) - W(s)$ est indépendant de la tribu $\sigma\{W(u),\ u \leq s\}$ et de loi gaussienne centrée de variance $t - s$.
3. $W(0) = 0$ $\mathbb{P}-p.s.$
4. Pour tout $t > 0$, la variable aléatoire $W(t)$ suit la loi gaussienne centrée de variance t donc de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{-x^2}{2t}\right\}$. On dit qu'un MB[5] part d'un point x si $W(0) = x$.

Remarque 1.3.1 *On dit que W est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0} - MB$ si W est un processus continu, adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, vérifiant :*

$$\forall u \in I\!R,\ \forall 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}\left(\exp(iu(W(t) - W(s)))/\mathcal{F}_s\right) = \exp\left\{-u^2(t-s)/2\right\}.$$

Proposition 1.3.1 *Soit W un MB standard :*

1. Pour tout $s > 0$, $\{W(t-s) - W(s)\}_{t\geq 0}$ est un MB indépendant de $\sigma\{W(u),\ u \leq s\}$.
2. $-W$ est aussi *un MB*.
3. Pour tout $c > 0$. $\{cW(t/c^2)\}_{t\geq 0}$ est *un MB*.
4. Le processus défini par $B(0) = 0$ et $B(t) = tW(1/t)$ est un MB.

[5] Mouvement Brownien.

1.4 l'intégrale stochastique

On va définir maintenant la $v.a$:

$$\int_0^T X(s)dW(s).$$

Quand $\{X(s),\ s \geq 0\}$ est un processus stochastique. Le caractère aléatoire de X va exiger des conditions supplémentaires par rapport au cas de l'intégrale de Wiener. On note $\left\{\mathcal{F}_t^W,\ t \geq 0\right\}$ la filtration naturelle du $MB\ W$.

Définition 1.4.1 *On dit que* $\{X_t,\ t \geq 0\}$ *est un bon processus s'il est* $\left(\mathcal{F}_t^W\right)$ *−adapté, càglad et si :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T X^2(s)ds\right] < +\infty, \quad \textit{pour tout } t > 0.$$

1.4.1 Propriétés de l'intégrale stochastique

Définition 1.4.2 *Soit* $W(s)$ *un* MB *et* $\{X_t,\ t \geq 0\}$ *un bon processus :*

1. $X \longmapsto \int_0^T X(s)dW(s)$ est linéaire.
2. Le processus $(\int_0^T X(s)dW(s))_{t\in[0,T]}$ est à trajectoires continues.
3. Le processus $(\int_0^T X(s)dW(s))_{t\in[0,T]}$ est adapté à $\left(\mathcal{F}_t^W\right)_{t\in[0,T]}$.
4. On a pour $0 \leq s \leq t \leq T$: $\mathbb{E}\left[\int_0^T X(s)dW(s)\right] = 0$
   et $Var\left(\int_0^T X(s)dW(s)\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^T X^2(s)ds\right]$.

1.4.2 Formule d'Itô

Théorème 1.4.1 *Soit* $(X\,(t))_{t\in[0,T]}$ *un processus d'Itô, de différentielle stochastique :*

$$dX\,(t) = b\,(t)\,dt\ + \sigma\,(t)\,dW\,(t) \quad (\forall t \in [0, T]).$$

Soit $f : (t, x) \longrightarrow f(t, x)$,une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à t, de classe $\mathcal{C}^2$par rapport à x et on note $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$.

Alors $(f(t, X(t)))_{t\in[0,T]}$ est un processus d'Itô, qui a pour différentielle stochastique :

$$df(t,X(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,X(t))dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X(t))\sigma^2(t)\,dt. \tag{1.1}$$

La forme d'intégration est comme suit :

$$\begin{aligned} f(t,X(t)) &= f(0,X(0)) + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial t}(s,X(s))ds \\ &\quad + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(s,X(s))dX(s) + \tfrac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X(s))\sigma^2(s)\,ds, \end{aligned} \tag{1.2}$$

où $\sigma^2(s)\,ds = d < X, X >_s$, alors la forme générale du formule d'Itô est :

$$\begin{aligned} f(t,X(t)) &= f(0,X(0)) + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial t}(s,X(s))ds \\ &\quad + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(s,X(s))dX(s) + \tfrac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X(s))d < X,X >_s . \end{aligned} \tag{1.3}$$

Chapitre §.2
Contrôle optimal et méthodes de résolution

Chapitre 2

Contrôle optimal et méthodes de résolution

La théorie du contrôle a été initialement développée dans le but d'obtenir des outils d'analyse et de synthèse des systèmes de contrôle et de système dynamique (c'est à dire l'évolution du système au cours du temps) ; Cette grande théorie a de nombreuses applications en gestion et en finance.

Dans ce chapitre on s'intéresse au contrôle optimal et ces déffirentes classes, on étudie aussi deux méthodes pour la résolution des problèmes de contrôle stochastique qui sont : Le principe de la programmation dynamique et le principe du maximum de Pontryagin.

2.1 Introduction au contrôle stochastique

D'une manière générale, un problème de contrôle se construit par les caractéristiques suivantes :

Ètat du système : Soit un système dynamique caractérisé par son état à tout instant, le temps peut être continu ou bien discret. L'horizon (l'intervale de variation du temps) peut être fini ou infini.

L'état du système représente l'ensemble des variables quantitatives constituant une description totale du système. On notera $X_t(\omega)$ l'état du système à l'instant t.

Une fois l'état soit défini, il s'agit de décrire les lois d'évolution de cet état en fonction du temps. L'application $t \to X_t$ décrit l'évolution du système.

Cette évolution est fournie par un modèle probabiliste.

Contrôle : La dynamique X_t de l'état du système est agi par un contrôle que nous modélisons comme un processus u_t dont la valeur peut être décidée a tout instant t en fonction des informations disponibles à cet instant, c'est-à-dire que u_t est adapté par rapport à une certaine filtration, et prend ses valeurs dans un espace de contrôle.

Critère de coût :

Le but principal du contrôle optimal est de minimiser (ou de maximiser selon le cas un gain oubien une perte) une fonctionnelle

$$J(u(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))dt + g(X(T))\right], \tag{2.1}$$

sur l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

La fonction valeur associée à ce problème de contrôle stochastique est donnée par :

$$\begin{aligned} &\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathcal{U} : \qquad (2.2)\\ &v(t,x) = \inf_{u \in \mathcal{U}} J(t,x,u). \end{aligned}$$

Un contrôle admissible $\hat{u} \in \mathcal{U}$est dit optimal si :$v(t,x) = J(t,x,\hat{u})$.

2.2 Classes des contrôles

2.2.1 Contrôle admissible

Définition 2.2.1 *On appelle un contrôle admissible tout processus $(u_t)_{t\in[0,T]}$ mesurable, integrable et adapté à une valeur dans un borélien $A \subset \mathbb{R}$, notons par $\mathcal{U}$ l'ensemble tous les contrôles admissibles :*

$$\mathcal{U} = \{u : [0,T] \times \Omega \to A,\ u \textit{ mesurable, integrable et } \mathcal{F}_t - \textit{adapté}\}. \tag{2.3}$$

2.2.2 Contrôle optimal

Le problème du contrôle optimal consiste à minimiser une fonction de coût $J(u(\cdot))$ sur un ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}$.

Définition 2.2.2 *On dit que le contrôle $\hat{u}$ est optimal si :*

$$J(\hat{u}) \leq J(u)\ ,\ \forall u \in \mathcal{U}.$$

2.2.3 Contrôle presque optimal

Soit $\varepsilon > 0$, le contrôle u^{ε} est dit presque optimal ou bien $\varepsilon - optimal$ si :

$$J(u^{\varepsilon}) \leq J(u) + \varepsilon\ ,\ \forall u \in \mathcal{U}.$$

2.2.4 Contrôle feed-back

Soit u un contrôle $\mathcal{F}_t-$ adapté et soit $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$ la filtration naturelle engendrée par le pocessus X, On dit que u_t est Feed-back contrôle si u_t est aussi adapté par rapport à la filtration $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$. On dit aussi qu'un contrôle u est Feed-back si est seulement si u dépend de X.

2.2.5 Contrôle relaxé

On considère un ensemble des mesures de Radon V sur $[0,T] \times A$ dont la projection sur $[0,T]$ coïncide avec la mesure de Lebesgue dt muni de la topologie de la convergence stable des mesures. L'espace V est muni de sa tribu borelienne, qui est la plus petite tribu telle que l'application $q \rightarrow \displaystyle\int f(s,a)q(ds,da)$ soit mesurable pour toute fonction f mesurable, bornée et continues en a.

Définition 2.2.3 *Un contrôle relaxé q est une variable alèatoire $q(\omega, dt, da)$ à valeurs dans l'espace V telle que pour chaque t :*

$$\mathbb{1}_{[0,T]}q \quad est\ \mathcal{F}_t - mesurable.$$

2.2.6 Arrêt optimal

Couramment, l'horizon d'un problème de contrôle est fixé, soit fini ou bien infini. En effet il existe plusieur d'application où le"contrôleur" a aussi la possibilité de décider l'horizon de son objectif. La décision de stopper le processus est modélisée par un temps d'arrêt et le problème d'optimisation associé est appelé problème d'arrêt optimal.

Dans la formulation générale de tels problèmes, le contrôle est mixte, constitué du couple (contrôle, temps d'arrêt) (u, τ) et la fonctionnelle à optimiser s'écrit comme suit :

$$J(u,\tau) = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau} f(t, X(t), u(t))dt + g(X(\tau))\right]$$

Ces problèmes interviennent en finance typiquement dans la volarisation des options américaines où, en plus par rapport aux options européennes, le détenteur de l'option peut exercer son droit et donc recevoir le flux associé à tout instant avant l'échéance.

2.2.7 Contrôle ergodique et contrôle risk-sensible

Certains systèmes stochastiques peuvent exhiber sur le long terme un comportement stationnaire caractérisé par une mesure invariante.

Cette mesure, si elle existe, est obtenue en calculant la moyenne d'état du système sur le long terme. Un problème de contrôle ergodique consiste alors à optimiser sur le long terme un certain critère prenant en compte cette mesure invariante.

Cette formulation standard consiste à optimiser sur les contrôles u_t une fonctionnelle de la forme :

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))dt\right].$$

ou bien

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\ln\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^T f(t, X(t), u(t))dt\right)\right].$$

Cette dernière formulation est appelée contrôle $riske - sensible$ dans la liturature et a recemment été utilisée dans plusieurs travaux en mathématiques financiers comme un critère de gestion de portfeuille à long terme.

Un autre critère basé sur le comportement de type grandes déviations du système :

$$\mathbb{P}\left[X_T/T \geq c\right] \simeq \exp\left(-I(c)T\right) \ , \textit{quand } T \to +\infty,$$

consiste à maximiser sur les contrôles u une fonctionnelle de la forme :

$$\limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T}\mathbb{P}\left[\frac{1}{T} \geq c\right].$$

Ce problème de contrôle de grandes déviations s'interprète en finance comme la version assymptotique (ergodique) du critère quantile consistant à maximiser la probabilité que la valeur terminale X_T du portefeuille soit au-dessus d'un certain index.

Conclusion 2.2.1 *La liste des classes de contrôle exposée dans cette section n'est bien entendu pas exhaustive. Il existe de nombreux autres classes et autres problèmes de contrôle. Voir le livre de Pham [4].*

2.3 Méthodes de résolution en contrôle stochastique

Il existe essentiellement deux méthodes majeures pour la résolution des problèmes des contrôles dans les cas déterministes ou stochastiques, le principe de la programmation dynamique et le principe du maximum de Pontryagin.

2.3.1 Principe du maximum de Pontryagin

Le principe du maximum de Pontryagin connue sous le nom "conditions nécessaires d'optimalité" a été introduite par Pontryagin en 1956. Elle s'appuie sur l'idée suivante :

“si un contrôle optimal existe en utilisant l'approche de Lagrange en calculant des variations sur la fonctionnelle $J(u)$ par rapport à un paramètre de perturbation positive θ ceci mène à :

$$\frac{d}{d\theta}J(u_\theta)\Big|_{\theta=0} \geq 0\text{”}.$$

Ce principe consiste à introduire un processus adjoint $p(t)$ solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde et d'une inégalité variationnelle.

Commençons par la formulation du problème de contrôle optimal :

Soit un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ sur lequel est défini un mouvement brownien standard multidimensionnel $W(t)$. Considérons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dW(t) \\ \\ X(0) = x. \end{cases} \tag{2.4}$$

L'objectif est de minimiser la fonction (2.1), l'idée principale de la résolution est d'introduire un processus adjoint $p(t)$ solution de l'EDSR[1] suivante :

$$\begin{cases} dp(t) &= -H_x\left(t, X\left(t\right), u\left(t\right), p\left(t\right), q\left(t\right)\right)dt + q\left(t\right)dW\left(t\right). \\ \\ p(T) &= g_x(X(T)), \end{cases} \tag{2.5}$$

où :

$$H\left(t, X\left(t\right), u\left(t\right), p\left(t\right), q\left(t\right)\right) = f(t, X\left(t\right), u\left(t\right)) + b^T(t, X\left(t\right), u\left(t\right)).p\left(t\right) + tr\left(\sigma^T\left(t, X\left(t\right), u\left(t\right)\right)q\left(t\right)\right), \tag{2.6}$$

est l'Hamiltonien du système.

Hypothèses

$(\mathbf{S}_0)$ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet.

$(\mathbf{S}_1)$ (U, d) espace polonais et $T > 0$.

$(\mathbf{S}_2)$ Les applications b, σ, f et g sont toutes continues. Il existe un constant $L > 0$, et un

[1] Équation différentielle stochastique rétrograde.

module de continuité $\varpi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ tel que pour $\psi(t,x,u) = \begin{cases} b(t,x,u) \\ \sigma(t,x,u) \\ f(t,x,u) \\ g(x) \end{cases}$, on a :

$$\begin{cases} |\psi(t,x,u) - \psi(t,\hat{x},u)| \leq L|x-\hat{x}| + \varpi\left(d\left(u;\hat{u}\right)\right). \\ \forall t \in [0,T] \quad x,\hat{x} \in I\!R^n \quad u,\hat{u} \in \mathbb{U}. \\ |\psi(t,0,u)| \leq L. \\ \forall\left(t,u\right) \in [0,T] \times \mathbb{U}. \end{cases} \tag{2.7}$$

($\mathbf{S}_3$)Les applications b, σ, f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$. Il existe un constant $L > 0$, et un module de continuité $\varpi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ tel que pour $\psi(t,x,u) = \begin{cases} b(t,x,u) \\ \sigma(t,x,u) \\ f(t,x,u) \\ g(x) \end{cases}$, on a :

$$\begin{cases} |\psi_x(t,x,u) - \psi_x(t,\hat{x},u)| \leq L|x-\hat{x}| + \varpi\left(d\left(u;\hat{u}\right)\right). \\ |\psi_{xx}(t,x,u) - \psi_{xx}(t,\hat{x},u)| \leq \varpi\left(|x-\hat{x}| + d\left(u;\hat{u}\right)\right). \\ \forall t \in [0,T] \;\; ; \;\; x,\hat{x} \in I\!R^n \;\; ; \;\; u,\hat{u} \in \mathbb{U}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Théorème 2.3.1 (Principe du maximum de Pontryagin) *Soient H défini par* (2.6) *, $\hat{u}\left(t\right)$ le contrôle optimal, $\left(\hat{p}\left(t\right), \hat{q}\left(t\right)\right)$ solution de l'équation optimal* (2.5) *, $\hat{X}\left(t\right) = X^{\hat{u}}\left(t\right)$ solution de l'équation* (2.4)*, alors sous les hypothèses* $\left(\mathbf{S}_0 - \mathbf{S}_3\right)$ [2]*, on a :*

$$H\left(t, \hat{X}\left(t\right), \hat{u}\left(t\right), \hat{p}\left(t\right), \hat{q}\left(t\right)\right) = \max_{u \in \mathcal{U}} H\left(t, \hat{X}\left(t\right), u\left(t\right), \hat{p}\left(t\right), \hat{q}\left(t\right)\right), \;\; \forall t \in [0,T].$$

Preuve. Voir le livre de Yong & Zhou 1999 [8]. ■

Conclusion 2.3.1 *On a vu dans la dernière paragraphe un méthode de résolution d'un problème de contrôle stochastique "le principe du maximum de Pontryagin" . Nous présentons maintenant dans ce paragraphe une approche alternative appelée la programmation*

[2] de $\mathbf{S}_0$ jusqu'à $\mathbf{S}_3$.

dynamique de Bellman.

2.3.2 Principe de la programmation dynamique

Cette méthode de résolution a été introduite par Bellman en 1953, elle s'appuie sur la notion de la "politique optimale" qui consiste à résoudre une équation aux dérivées partielles de second ordre, non linéaire appelé équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. Voir le livre de Yong & Zhou 1999 [8] et Pham 2005 [4]. Elle est fondée sur le principe d'optimisation suivant : Si une trajectoire est optimale alors elle est optimale pour chaque instant, c'est à dire "si on commence à un autre point on ne peut faire mieux que suivre de la tajectoire optimale".

Le principe de la programmation dynamique de Bellman permet de résoudre, au travers d'une équation aux dérivées partielles, appelé équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), certain problème analytiquement.

La plus part des équations aux dérivées partielles de Bellman n'est pas facile à résoudre et il faut supposer que la solution soit de classe $\mathcal{C}^2$, nous pouvons sinon supposer qu'elle est seulement localement bornée mais dans ce cas la solution sera au sens de la viscosité.

En appliquant formellement ce principe où on peut minimiser la fonction valeur $V(t,x)$ associée au problème de contrôle stochastique à temps continu satisfait à une équation parabolique fortement non linéaire appelée équation de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman

L'équation HJB[3] est la version infinitésimale de la programmation dynamique, supposant que la fonction valeur V est de classe $\mathcal{C}^2$.

L'équation classique HJB associée au problème de contrôle stochastique (2.2) est :

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \inf_{u\in\mathcal{U}} \left[\mathcal{L}^u V(t,x) + f(t,x,u)\right] = 0, \quad sur \;\; [0,T]\times \mathbb{R}^n, \tag{2.9}$$

[3] Hamilton-Jacobi-Bellman

où $\mathcal{L}^{\alpha}$ est le générateur infinitésimal de second-ordre à la diffusion X_t solution de l'équation (2.4) contrôlée par u, donné par la formule suivante :

$$\mathcal{L}^{u}V{=}b(x,u).D_x\left(V\right)+\frac{1}{2}tr\left[\sigma(x,u)\sigma^{T}(x,u)D_x^2\left(V\right)\right].$$

Lorsqu'on cherche à maximiser un gain, l'équation aux dérivées partielles devient :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,x)-\sup_{\alpha\in\mathcal{A}}\left[\mathcal{L}^{u}V(t,x)+f(t,x,u)\right]=0.$$

On peut avoir cette dernière équation de la façon suivante :

$$-\frac{\partial \upsilon}{\partial t}(t,x)-H(t,x,D_x\upsilon(t,x),D_x^2\upsilon(t,x))=0,\forall\,(t,x)\in[0,T]\times I\!R^{n}.$$

telle que $\forall\,(t,x,p,M)\in[0,T]\times I\!R^{n}\times I\!R^{n}\times\mathcal{S}_n$, où $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des matrices symétrique $n\times n$:

$$H\left(t,x,p,M\right)=\sup_{u\in\mathcal{U}}\left[b(x,u).p+\frac{1}{2}tr(\sigma\sigma^{T}(x,u)M)+f(t,x,u)\right]. \tag{2.10}$$

La fonction (2.10) est dite l'Hamiltonien du problème de contrôle associé.

Chapitre §.3
Principe du maximum sous l'information partielle

Chapitre 3

Principe du maximum sous l'information partielle

Dans ce chapitre, nous étudions les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités sous l'information partielle[1]. Pour prouver ses conditions il est nécessaire que le processus de contrôle soit adapté à une sous-filtration $\mathcal{G}_t$ de la filtration complet $\mathcal{F}_t$.

Soit l'exemple d'une information retardée par δ :

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{(t-\delta)} \quad , \quad t \geq 0,$$

où $\delta \geq 0$.

3.1 Enoncé général

Soient $W(t) = (W^1(t), W^2(t), ..., W^n(t))$ un MB multi dimentionel, $\mathbb{U} \subset I\!R^k$ convexe et l'espace filtrée $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, supposant que $X(t) = X^{(u)}(t) \in I\!R^n$ est donné par l'équation

[1] Cette méthode de résolution a été utilisée dans le cas où on a pas une mesure complète et parfaite sur l'état complet du système.

différetielle stochastique controllée suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dW(t) \,. \\ \\ X(0) = x_0 \quad \text{où } x_0 \in I\!R^n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Le contrôle $u(t)$ est un contrôle admissible (2.3) , (ie : $u \in \mathcal{U} := \{u : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{U}$ tel que u est $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ $-$adapté$\}$).

Pour assurer l'existence et l'unicité de solution de l'équation (3.1), on suppose que :

– $b : [0,T] \times I\!R^n \times \mathcal{U} \longrightarrow I\!R^n$, $\sigma : [0,T] \times I\!R^n \times \mathcal{U} \longrightarrow I\!R^{n\times n}$, deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

– $T > 0$ un constant .

– $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t$, $\forall t \geq 0$.

On définit le coût fonctionnel comme suit :

$$J(u(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))dt + g(X(T))\right],$$

où :

– $f : [0,T] \times I\!R^n \times \mathbb{U} \longrightarrow I\!R$ "coût de fonctionnement" est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

– $g : I\!R^n \longrightarrow I\!R$ "coût terminal" est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

– $\mathbb{E}\left[\int_0^T |f(t, X(t), u(t))|\, dt + |g(X(T))|\right] < \infty$, $u \in \mathcal{U}$.

L'objet du contrôle optimal stochastique sous l'information partielle est de trouver le couple $(\Theta_{\mathcal{G}}\ ,\hat{u})$ étant donnée que :

$$\Theta_{\mathcal{G}} = \sup_{u\in\mathcal{U}} \{J(u)\} = J(\hat{u}).$$

Définition 3.1.1 *On définit l'Hamiltonian* $H : [0,T] \times I\!R^n \times U \times I\!R^n \times I\!R^{n\times n} \longrightarrow I\!R$ *comme suit :*

$$H(t, X(t), u(t), p(t), q(t)) = f(t, X(t), u(t)) + b^T(t, X(t), u(t)).p(t) + tr\left(\sigma^T(t, X(t), u(t))\, q(t)\right),$$

avec l'équation adjointe satisfaite par les inconnus $p(t)$ *et* $q(t)$:

$$\begin{cases} dp(t) & = & -H_x\left(t, X\left(t\right), u\left(t\right), p\left(t\right), q\left(t\right)\right) dt + q\left(t\right) dW\left(t\right). \\ \\ p(T) & = & g_x(X(T)). \end{cases} \tag{3.2}$$

Proposition 3.1.1 *Soit* $\hat{u} \in \mathcal{U}$ *avec le processus d'état correspondant* $\hat{X}(t) = X^{(\hat{u})}(t)$ *. On suppose qu'il existe une solution* $(\hat{p}(t), \hat{q}(t))$ *pour l'équation différetielle stochastique partielle retrograde suivante :*

$$\begin{cases} d\hat{p}(t) & = & -H_x\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}\left(t\right), \hat{p}\left(t\right), \hat{q}\left(t\right)\right) dt + \hat{q}\left(t\right) dW\left(t\right). \\ \hat{p}(T) & = & g_x(\hat{X}(T)). \end{cases} \tag{3.3}$$

3.2 Conditions suffisantes

Dans cette section, on énonce et on prouve les conditions suffisantes pour notre problème de contrôle sous l'information partielle. Voir l'article de Baghery & Oksendal [3][2].

<u>Hypothèses</u>

Condition $(\mathbf{A}_1)$ on suppose que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (\hat{X}(t) - X^u(t))^T \hat{q}\hat{q}^T(t)(\hat{X}(t) - X^u(t))dt\right] < \infty .$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \hat{p}^T(t)\,\sigma\sigma^T(t, X(t), u(t))p(t)\,dt\right] < \infty .$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|H_u\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right)\right|^2 dt\right] < \infty , \forall u \in \mathcal{U}.$$

Condition $(\mathbf{A}_2)$ Pour tout $t \geq 0$ on a : $H(t, x, u, p(t), q(t))$ et g sont des fonctions concaves en u et x.

Condition $(\mathbf{A}_3)$ La condition d'optimalitée sous l'information partielle est :

$$\mathbb{E}\left[H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right)|\mathcal{G}_t\right] = \max_{u\in\mathcal{U}} \mathbb{E}\left[H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right)|\mathcal{G}_t\right].$$

[2] F. Baghery and B. Øksendal (2007), A maximum principle for stochastic control with partial information, Stoch. Anal. Appl., pp. 705–717.

Théorème 3.2.1 (Conditions suffisantes) *Sous les Conditions* $(\boldsymbol{A}_1), (\boldsymbol{A}_2)$ *et* $(\boldsymbol{A}_3)$, $\hat{u}(t)$ *est un contrôle optimal sous l'information partielle* $\mathcal{G}_t$.

Preuve. On démontre que $J(u) \leq J(\hat{u})$ pour tout $u \in \mathcal{U}$.

Soit $u \in \mathcal{U}$, calculons maintenant $J(u) - J(\hat{u})$:

$$\begin{aligned}
J(u) - J(\hat{u}) &= \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))dt + g(X(T))\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t))dt + g(\hat{X}(T))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{f(t, X(t), u(t)) - f(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t))\right\} dt\right] + \mathbb{E}\left[g(X(T)) - g(\hat{X}(T))\right] \\
&=: I_1 + I_2 \\
J(u) - J(\hat{u}) &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{H(t, X(t), u(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)) - H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right)\right\} dt\right] \\
&\quad -\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{b(t, X(t), u(t)) - b^T(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t))\right\}^T \hat{p}(t)\, dt\right] \\
&\quad -\mathbb{E}\left[\int_0^T tr\left[\left\{\sigma(t, X(t), u(t)) - \sigma\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\right\}^T\right] \hat{q}(t)\, dt\right] + I_2 \\
&=: I_{1.1} - I_{1.2} - I_{1.3} + I_2.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

L'hypothèse $(\boldsymbol{A}_2)$ nous donne :

$$\begin{gathered}
H(t, X(t), u(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)) - H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right) \leq \\
H_x\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right)(X(t) - \hat{X}(t)) + H_u\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right)(u(t) - \hat{u}(t)).
\end{gathered}$$

Par la $\mathcal{G}_t-$mesurabilité de $u(t)$ et $\hat{u}(t)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &\geq \frac{\partial}{\partial u}\mathbb{E}\left[H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right)|\mathcal{G}_t\right](u(t) - \hat{u}(t)) \\
&= \mathbb{E}\left[H_u\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right)(u(t) - \hat{u}(t))|\mathcal{G}_t\right],
\end{aligned}$$

d'où :

$$0 \geq \mathbb{E}\left[H_u\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right)(u(t) - \hat{u}(t))\right].$$

En substituant l'inégalité précédente en $I_{1.1}$:

$$\begin{aligned} I_{1.1} &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^T H_x\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right)^T (X(t) - \hat{X}(t))dt\right] \\ &= -\mathbb{E}\left[\int_0^T (X(t) - \hat{X}(t))^T dp(t)\right] \\ &=: -l_1. \end{aligned}$$

De même manière en simplifiant I_2 par l'hypothèse $(\boldsymbol{A}_2)$:

$$\begin{aligned} I_2 &= \mathbb{E}\left[g(X(T)) - g(\hat{X}(T))\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[g_x(\hat{X}(T)^T (X(T) - \hat{X}(T))\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(X(T) - \hat{X}(T))\hat{p}(T)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T d\langle(X(t) - \hat{X}(t))\hat{p}(t)\rangle\right]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

On va traiter maintenant l'inégalité précédente (3.5) par la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^T \hat{p}(t)d(X(t) - \hat{X}(t))\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T (X(t) - \hat{X}(t))d\hat{p}(t)\right] \\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^T d\langle\hat{p}(t), (X(t) - \hat{X}(t))\rangle\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \hat{p}(t)^T(b(t, X(t), u(t)) - b(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)))dt\right] \\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^T (X(t) - \hat{X}(t))(-H_x\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right) dt\right] \\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^T tr\left\{(\sigma(t, X(t), u(t)) - \sigma(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)))^T\hat{q}(t)\right\} dt\right] \\ &=: l_1 + I_{1.2} + I_{1.3}. \end{aligned}$$

Par l'addition de tout les membres de (3.4), on obtient :

$$\begin{aligned} J(u) - J(\hat{u}) &= I_{1.1} - I_{1.2} - I_{1.3} + I_2 \\ &\leq -l_1 - I_{1.2} - I_{1.3} + l_1 + I_{1.2} + I_{1.3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow J(u) \leq J(\hat{u}) \ , \ \forall u \in \mathcal{U}.$$

Ce qu'il fallait à démontrer. ■

3.3 Conditions nécessaires

Dans cette section, on énonce et on prouve les conditions nécessaires pour le problème du maximum sous l'information partielle avec des coefficient contrôlés [3][3].

Hypothèses

– Pour tout t et h telle que $0 \leq t \leq t+h \leq T$, $\forall i = \overline{1,k}$.

pour tout processus $\lambda = \lambda(\omega)$ $\mathcal{G}_t$-mesurable et bornée, on définit le contrôle v comme suit :

$$v(s) := (0, 0, ..., 0, v^i(s), 0, ..., 0) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^k$$

avec :

$$v^i(s) := \lambda^i \mathbb{1}_{[t,t+h]}(s), \;\; s \in [0, T] \, .$$

Un contrôle admissible.

– Pour tous u , $v \in \mathcal{U}$ avec v est bornée, pour $\varepsilon > 0 : u + \theta v \in \mathcal{U}$, $\forall \theta \in E_\varepsilon := (-\varepsilon, +\varepsilon)$.

On définit le processus :

$$Z(t) := Z^{(u,v)}(t) = \frac{d}{d\theta} X^{(u+\theta v)}(t) \Big|_{\theta=0} \mid Z(t) = (Z^1(t), Z^2(t), ..., Z^n(t)).$$

Nottons que $Z(0) = 0$, $u_\theta = u + \theta v$ et :

$$dZ(t) = \frac{d}{d\theta} \left[b(t, X^{(u_\theta)}(t), u_\theta(t))dt + \sigma(t, X^{(u_\theta)}(t), u_\theta(t))dW\,(t) \right] .$$

Alors la dérivée par rapport à θ de la formule précédente est :

$$\begin{aligned} dZ^i(t) &= \left[b^i_x(t, X(t), u(t))Z(t) + b^i_u(t, X(t), u(t))v(t) \right] dt \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \left[\sigma^{i,j}_x(t, X(t), u(t)) + \sigma^{i,j}_u(t, X(t), u(t))v(t) \right] dW^j\,(t) \\ &:= \Phi_i dt + \sum_{j=1}^{n} \Psi_{i,j} dW^j\,(t) \, . \end{aligned}$$

[3]F. Baghery and B. Øksendal (2007), A maximum principle for stochastic control with partial information, Stoch. Anal. Appl., pp. 705–717.

Condition$(\mathbf{H}_1)$ On pose : $\hat{Z}(t) = Z^{(\hat{u},v)}(t)$ (avec Φ_i , $\Psi_{i,j}$ leurs coefficients correspondants),on suppose que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \hat{Z}(t)^T \hat{q}\hat{q}^T(t)\hat{Z}(t)dt\right] < \infty.$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \hat{p}(t)^T \Psi\Psi^T(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t))\hat{p}(t)dt\right] < \infty.$$

Condition$(\mathbf{H}_2)$ Supposons que $\hat{u} \in \mathcal{U}$ est un maximum local pour $J(u)$ alors :

$$h(\theta) := J(\hat{u}+\theta v)\ ,\ \theta \in E_\varepsilon,$$

est maximale au point $\theta = 0$.

Théorème 3.3.1 *Sous les conditions* $(\boldsymbol{H}_1)$ *et* $(\boldsymbol{H}_2)$*, on a* $\hat{u}$ *est une point stationnaire pour* $\mathbb{E}\left[H\,|\mathcal{G}_t\right]$ *donc :*

$$\mathbb{E}\left[H_u\left(t,\hat{X}(t),\hat{u}\left(t\right),\hat{p}\left(t\right),\hat{q}\left(t\right)\right)|\mathcal{G}_t\right] = 0.$$

Preuve. *Nottons d'abord :*$X^{(\hat{u})} := \hat{X}$.

On a :

$$\begin{aligned}
0 &= h'(0)\\
&= \frac{d}{d\theta}J(\hat{u}+\theta v)\Big|_{\theta=0}\\
&= \frac{d}{d\theta}\mathbb{E}\left[\int_0^T f(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t))dt + g(\hat{X}\left(T\right))\right]\Big|_{\theta=0}\\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{ f_x(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t))^T \frac{d}{d\theta}X^{(\hat{u}+\theta v)}(t)\right.\right.\\
&\quad \left.\left. + f_u(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t))^T v(t)\right\} dt\right]\Big|_{\theta=0}\\
&\quad + \mathbb{E}\left[g_x(\hat{X}\left(T\right))^T \frac{d}{d\theta}X^{(\hat{u}+\theta v)}(T)\right]\Big|_{\theta=0}.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
0 = \mathbb{E}\left[\int_0^T f_x(t,X(t),u(t))^T \hat{Z}(t)dt\right]\\
+\,\mathbb{E}\left[\int_0^T f_u(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t))^T v(t)dt\right] + \mathbb{E}\left[g_x(\hat{X}\left(T\right))^T \hat{Z}(T)\right].
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Par la condition $(\boldsymbol{H}_1)$ *et la formule d'Itô, on trouve :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g_x(\hat{X}(T))^T\hat{Z}(T)\right] &= \mathbb{E}\left[\hat{p}(T)^T\hat{Z}(T)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \hat{p}(t)^T d\hat{Z}(t)\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \hat{Z}(t)^T d\hat{p}(t)\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T d\left\langle \hat{p}(t), \hat{Z}(t)\right\rangle\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \int_0^T \hat{p}^i(t)\left[b_x^i(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t))\hat{Z}(t) + b_u^i(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t))v(t)\right]^T dt\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[-\sum_{i=1}^n \int_0^T \hat{Z}^i(t)H_x\left(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t),\hat{q}(t)\right)dt\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_0^T\left\{\sum_{i,j=1}^n \hat{q}^{i,j}(t)\left[\sigma_x^{i,j}(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t)) + \sigma_u^{i,j}(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t))v(t)\right]\right\}dt\right].
\end{aligned}$$

On dérive l'Hamiltonien par rapport à x *:*

$$H_x(t,X(t),u(t),p(t),q(t)) = f_x(t,x,u) + \sum_{i=1}^n b_x^i(t,x,u)p^i - \sum_{i,j=1}^n \sigma_x^{i,j}(t,x,u)q^{i,j}.$$

De même manière par rapport à u *:*

$$H_u(t,X(t),u(t),p(t),q(t)) = f_u(t,x,u) + \sum_{i=1}^n b_u^i(t,x,u)p^i - \sum_{i,j=1}^n \sigma_u^{i,j}(t,x,u)q^{i,j}.$$

On substituant les deux équations précédentes en (3.6)*, on obtient :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g_x(\hat{X}(T))^T\hat{Z}(T)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T - f_x(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t))\hat{Z}(t)dt\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \int_0^T \hat{p}^i(t)\left[b_u^i(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t))v(t)\right]^T dt\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_0^T\left\{\sum_{i,j=1}^n \hat{q}^i(t)\left[\sigma_u^{i,j}(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t))v(t)\right]^T\right\}dt\right].
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Sous la condition $(\boldsymbol{H}_1)$ *et*(3.7)*, on obtient :*

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}\left[\int_0^T f_x(t,\hat{X}(t),u(t))^T \hat{Z}(t)dt\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_0^T f_u(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t))^T v(t)dt\right] + \mathbb{E}\left[g_x(\hat{X}(T))^T \hat{Z}(T)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T f_x(t,\hat{X}(t),u(t))^T \hat{Z}(t)dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T f_u(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t))^T v(t)dt\right] \\
&\quad - \mathbb{E}\left[\int_0^T f_x(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t))\hat{Z}(t)dt\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_0^T \sum_{i,j=1}^n \left\{\hat{p}^i(t)\frac{\partial}{\partial u_i} b^j(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t)) + \hat{q}^{i,j}(t)\frac{\partial}{\partial u_i}\sigma^{i,j}(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t))\right\} v^i(t)dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T H_u\left(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t),\hat{q}(t)\right)^T v(t)\right].
\end{aligned}$$

Fixons maintenant $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}\left[\int_0^T H_u\left(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t),\hat{q}(t)\right)^T v(t)dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial u_i} H\left(s,\hat{X}(s),\hat{u}(s),\hat{p}(s),\hat{q}(s)\right)\lambda^i \mathbb{1}_{[t,t+h]}(s)ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} \frac{\partial}{\partial u_i} H\left(s,\hat{X}(s),\hat{u}(s),\hat{p}(s),\hat{q}(s)\right)\lambda^i(s)ds\right]
\end{aligned}$$

On différence par rapport à h *au point* $h=0$:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial h}\int_t^{t+h} \frac{\partial}{\partial u_i} H\left(s,\hat{X}(s),\hat{u}(s),\hat{p}(s),\hat{q}(s)\right)\lambda^i(s)ds\,\Big|_{h=0}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial u_i} H\left(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t),\hat{q}(t)\right)\lambda^i(t)\right].
\end{aligned}$$

Comme $\lambda(t)$ *est arbitraire,* $\mathcal{G}_t-$*mesurable et borné, donc :*

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial u} H\left(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t),\hat{q}(t)\right)|\mathcal{G}_t\right] = 0.$$

Qui nous donne le résultat souhaité. ■

Chapitre §.4
Application en finance

Chapitre 4

Application en finance

Les résultats du troisième chapitre trouvent des applications diverses en économie, finance, assurance et beaucoup d'autres. On illustre ces résultats pour les appliquer au modèle financier tels que la résolution d' un problème d'investissement et de consommation optimale dans un marché financier le classique problème du critère moyenne-variance d'allocation de portefeuille : Voir le livre de Sulem & Oksendal [2][1].

Supposons qu'un portefeuille est investit dans un marché constitué de capitaux risque-libres avec un taux d'intèrêt ρ_t et de capitaux risqués avec le taux de rendement α_t et de volatilité β_t :

1. Le prix S_0 au temps t est donné par :

$$\begin{cases} dS_0(t) &= \rho_t S_0(t)dt \\ S_0(0) &= 1. \end{cases} \tag{4.1}$$

2. Le prix S_1au temps t est donné par :

$$\begin{cases} dS_1(t) &= S_1(t)\left[\alpha_t dt + \beta_t dW(t)\right] \\ S_1(0) &> 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

   Telles que :

[1] B.Øksendal,A.Sulem (2004), Applied Stochastic Control of Jump Diffusions, Springer, Berlin.

– ρ_t, α_t et β_t sont des fonctions déterministes et boronées .

– $\alpha_t > \rho_t \ \ , \forall t \geq 0.$

– $\mathcal{G}_t$ une sous filtration de $\mathcal{F}_t.(\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t)$.

Définition 4.0.1 *Un portefeuille w est un processus prévisible $w(t) = (u_0(t), u_1(t)) \in I\!R^2$ la richesse correspondante $X_t^{(w)}$ est donnée par :*

$$X_t^{(w)} \ = \ u_0(t)S_0(t) + u_1(t)S_1(t) \ , \ t > 0. \tag{4.3}$$

Le portefeuille est auto-finançant si :

$$dX_t^{(w)} \ = \ u_0(t)dS_0(t) + u_1(t)dS_1(t). \tag{4.4}$$

Soit $u(t) \ = \ u_1(t).S_1(t)$ la quantité de monnaies investis dans la sécurité risquée.

Nottons : $X_t^{(w)} =: X_t^{(u)}$, alors d'aprés (4.3) on obtient : $u_0(t)S_0(t) \ = \ X_t^{(u)} - u(t)$.

En combinant les quatre dernières équations avec (4.1)et(4.2), on obtient l'équation du richesse suivante :

$$\begin{aligned} dX_t^{(u)} &= \left[\rho_t X_t^{(u)} + (\alpha_t - \rho_t)u(t)\right] dt + \beta_t u(t)_t dW(t) \\ X_0^{(u)} &= x > 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Le problème moyenne-variance de sélection de portefeuille sous l'information partielle consiste à trouver $\hat{u} \in \mathcal{U}$ qui minimise la variance :

$$var(X_T^{(u)}) = \mathbb{E}\left[\left(X_T^{(u)} - \mathbb{E}\left(X_T^{(u)}\right)\right)^2\right],$$

Sous la contrainte $\mathbb{E}\left(X_T^{(u)}\right) = A$, le problème devient :

$$var(X_T^{(u)}) = \mathbb{E}\left[\left(X_T^{(u)} - A\right)^2\right], \tag{4.6}$$

oû A est un constant .

Par la méthode du multiplicateur de Lagrange, le problème peut être réduit à un autre problème équivalent :

$$\sup_{u\in\mathcal{U}}\left\{\mathbb{E}\left[-\frac{1}{2}\left(X_T^{(u)}-a\right)^2\right]\right\}=\mathbb{E}\left[-\frac{1}{2}\left(X_T^{(\hat{u})}-a\right)^2\right].$$

Pour la résolution de ce nouveau problème, on définit premièrement l'Hamiltonien :

$$H(t,x,u,p,q)=\{\rho_t x+(\alpha_t-\rho_t)u\}\,p+\beta_t uq, \tag{4.7}$$

où l'équation adjointe correspondant est :

$$\begin{cases} dp(t) &= -\rho_t p(t)+q(t)dW(t) \\ p(T) &= -X(T)+a. \end{cases} \tag{4.8}$$

On essaie la solution de la forme :

$$p(t)=\varphi_t X(t)+\psi_t. \tag{4.9}$$

Telles que φ_t et ψ_t sont des fonctions déterministes et différentiables.

En appliquant la formule d'Itô à (4.9) :

$$\begin{aligned} dp(t) &= \varphi_t' X(t)dt+\varphi_t dX(t)+\psi_t' dt \\ &= \left[(\varphi_t\rho_t+\varphi_t')X(t)+\varphi_t(\alpha_t-\rho_t)u(t)+\psi_t'\right]dt+\varphi_t\beta_t u(t)dW(t). \end{aligned} \tag{4.10}$$

En comparant (4.10) avec l'équation partielle et en identifiant les termes en dt, $dW(t)$ et $p(T)$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} (\varphi_t\rho_t+\varphi_t')X(t)+\varphi_t(\alpha_t-\rho_t)u(t)+\psi_t' &= -\rho_t\left(\varphi_t X(t)+\psi_t\right) \\ \varphi_t\beta_t u(t) &= q(t) \\ (\varphi_T,\psi_T) &= (-1,a). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Soit $\hat{u}(t) \in \mathcal{U}$ un condidat pour le contrôle optimal et soient $\hat{X}(t), \hat{p}(t)$ et $\hat{q}(t)$ les solutions des équations (4.5) et (4.8), par la linéarité d'espérance conditionnelle, on trouve :

$$\mathbb{E}\left[H\left(t, \hat{X}(t), u, \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right) |\mathcal{G}_t\right] = \rho_t \mathbb{E}\left[\hat{X}(t)\hat{p}(t) |\mathcal{G}_t\right] + u\mathbb{E}\left[(\alpha_t - \rho_t)\hat{p}(t) + \beta_t \hat{q}(t) |\mathcal{G}_t\right],$$

et comme cette dernière équation est linéaire en u alors par hypothèse :

$$0 = \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial u} H\left(t, \hat{X}(t), u, \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right) |\mathcal{G}_t\right] = (\alpha_t - \rho_t)\mathbb{E}\left[\hat{p}(t) |\mathcal{G}_t\right] + \beta_t \mathbb{E}\left[\hat{q}(t) |\mathcal{G}_t\right].$$

$$\Rightarrow (\alpha_t - \rho_t)\left(\varphi_t \mathbb{E}\left[\hat{X}(t) |\mathcal{G}_t\right] + \psi_t\right) + \beta_t^2 \varphi_t \hat{u}(t) = 0.$$

Cela nous donne l'expression de notre condidat $\hat{u}$:

$$\hat{u}(t) = \frac{-(\alpha_t - \rho_t)\left(\varphi_t \mathbb{E}\left[\hat{X}(t) |\mathcal{G}_t\right] + \psi_t\right)}{\varphi_t \beta_t^2}. \tag{4.12}$$

Dans l'autre côté, l'équation (4.11) devient :

$$\hat{u}(t) = \frac{(2\varphi_t \rho_t + \varphi_t')\hat{X}(t) + \psi_t' + \rho_t \psi_t}{-\varphi_t(\alpha_t - \rho_t)}.$$

$$\Rightarrow \hat{u}(t) = \frac{(2\varphi_t \rho_t + \varphi_t')\mathbb{E}\left[\hat{X}(t) |\mathcal{G}_t\right] + \psi_t' + \rho_t \psi_t}{-\varphi_t(\alpha_t - \rho_t)}. \tag{4.13}$$

En comparant les termes en $\mathbb{E}\left[\hat{X}(t) |\mathcal{G}_t\right]$, aprés en combinant les deux équations (4.12) et (4.13), on aura :

$$\begin{aligned} (\alpha_t - \rho_t)^2 \varphi_t - (2\varphi_t \rho_t + \varphi_t')\beta_t^2 &= 0 \quad ; \varphi_T = -1. \\ (\alpha_t - \rho_t)^2 \psi_t - (\psi_t \rho_t + \psi_t')\beta_t^2 &= 0 \quad ; \psi_T = a\ . \end{aligned} \tag{4.14}$$

Pour trouver les fonctions φ_t et ψ_t on a besoin de résoudre les équations différentielles ordinaires précédentes (4.14), par un simple calcule on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi_t &= -\exp\left(\int_t^T \left\{\frac{(\alpha_s-\rho_s)^2}{\beta_s^2} - 2\rho_s\right\} ds\right) \quad ; 0 \le t \le T. \\
\psi_t &= a\exp\left(\int_t^T \left\{\frac{(\alpha_s-\rho_s)^2}{\beta_s^2} - \rho_s\right\} ds\right) \quad ; 0 \le t \le T.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Pour ce choix des fonctions φ_t et ψ_t les processus :

$$\hat{p}(t) := \varphi_t \hat{X}(t) + \psi_t \quad et \quad \hat{q}(t) := \varphi_t \beta_t \hat{u}(t),$$

résolvent l'équation adjointe (4.8) ; Ceci prouve finalement que $\hat{u}(t)$ satisfait tous les conditions du théorème (3.3.1) .

Conclusion 4.0.1 $\hat{u}(t)$ *est bien un portefeuille optimal pour le problème de sélection de portefeuille moyenne-variance basé sur l'information partielle* $\mathcal{G}_t$.

Conclusion

Dans ce travail, un problème du contrôle optimal stochastique pour des équations differentielles stochastiques non linéaire EDS avec des coefficients controllés a été discuté. Ces resultats ont été traité sous l'information partielle. Des conditions nécessaires et suffisantes de contrôle optimal pour les systèmes régis par des systèmes de traitement de type EDS ont été prouvées par des techniques de perturbation convexe. À titre d'illustration, en utilisant ces résultats, le problème de sélection de portefeuille de variance moyenne a été discuté.

Bibliographie

[1] A. Bensoussan (1983), *Lectures on stochastic contr. In Lect. Notes in Math.*972, Springer Varlag, pp. 1-62.

[2] B.Øksendal, A.Sulem (2004), *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*, Springer, Berlin.

[3] F.Baghery and B. Øksendal (2007), *A maximum principle for stochastic control with partial information*, Stoch. Anal. Appl., pp. 705–717.

[4] H. Pham (2005), *Optimisation et Contrôle Stochastique Appliqués à la Finance.*Vol. 61, Springer Verlage.

[5] M. Jeanblanc. (2006), *Cours de calcul stochastique. Master 2IF EVRY. Lecture Notes.*

[6] M. Hafayed (2009), *Gradient généralisés et contrôle stochastique*, Université Mohamed khider Biskra, pp 102.

[7] XY. Zhou, D Li (2000), *Continuous time mean-variance portfolio selection : a stochastic LQ framework.* Appl. Math. Optim. **42**, pp 19-33

[8] J. Yong and X.Y. Zhou (1999), *Stochastic controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations.* Springer Verlag.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	Espace de probabilité filltré.
T	Le temps terminal.
MB	Mouvement Brownien.
$< X, X >_T$	Variation quadratique de X sur $[0, T]$.
exp	Exponentiel.
lim sup	Limite inférieur
b	Drift.
σ	Cofficient de diffusion.
max, min	maximum, minimum.
$\mathbb{P} - p.s$	Presque sûrment pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$s \wedge t$	$\min(s, t)$.
$A^\top$	Transposée de la matrice A.
$\hat{u}$	Contrôle optimal.
$\hat{X}$	Trajectoire associé à $\hat{u}$.
$p(t)$	Processus adjoint.
$H(t, X, u, p, q)$	Hamiltonian.