République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Probabilités**

Par **:**

**REZGUI Hafsia**

Titre :

# Martingale en temps continu

Membres du Comité d'Examen :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dr. | **BENABBA Fadhila** | UMKB | Encadreur |
| Dr. | **TABET Moufida** | UMKB | Président |
| Dr. | **BEROUIS Nassima** | UMKB | Examinateur |

Juin 2019

## REMERCIEMENTS

Nous tenons à la fin de ce travail à remercier **ALLAH** maître des cieux et de terre, qui nous a permis de mener à bien ce travail de nous avoir donné la fois et de nous avoir permis d'en arriver là.

Tout d'abord nous tenons surtout à adresser nos plus vifs remerciements à notre encadreur **Dr**. **Benabba Fadhila** qui nous a permis de réaliser ce travail sous sa direction. Nous ne saurons jamais oublier sa disponibilité, son assistance et ses conseils judicieux pour nous.

Nous voudrions remercier également **Dr. Tabet Moufida** et **Dr. Berouis Nassima**, membres de jury, de nous avoir fait l'honneur d'accepter de jures ce travail.

Nous remercions également les responsables de département de mathématique.

Nous remercions aussi tout ce qui ont nous aider de réaliser ce travail.

Enfin nous remercions tous les enseignants de la faculté.

## Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A ma mère et mon père pour leurs affections et amours,

A mes sœurs et frères

Moussa, Rim, Samir, moufida, Yassin, Abd Alhalim

pour leurs encouragements et

leurssoutiens

A tout ma famille, a mes amis,

Et à tous ce qui ont enseigné moi au long de ma vie scolaire,

Et mes collègues de la promotion 2019.

**HAFSIA**

# Table des matières

**Remerciements** **i**

**Dédicace** **ii**

**Table des matières** **iii**

**Introduction** **1**

**1 Processus stochastique** **2**

1.1 Généralités . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

1.1.1 Définitions et proprietés . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

1.1.2 Variable aléatoire (v.a) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

1.2 Processus stochastique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

1.3 Mouvement Brownien . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

**2 Martingales en temps continu** **19**

2.1 Définitions, exemples . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

2.2 Inégalités importantes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25

2.2.1 **Lemme Maximal** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25

2.2.2 **Inégalité du nombre de montées** . . . . . . . . . . . . . . . . . 27

2.2.3 **Inégalité de Doob** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28

2.3 Martingale et temps d'arrêt . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30

2.4 Convergence des martingales en temps continu . . . . . . . . . . . . . . 35

2.5 Variation quadratique d'une martingale continue . . . . . . . . . . . . . 40

**Bibliographie** **44**

**Annexe A : Abréviations et Notations** **46**

**Annexe B : Rappels** **48**

# Introduction

◁ Une martingale est une technique permettant d'augmenter les chances de gain aux jeux de hasard tout en respectant les règles de jeu, c'est-à-dire d'un jeu où le gain que l'on peut espérer faire en tout temps ultérieur est égal à la somme gagnée au moment présent.

◁ La théorie des martingales a eu de grandes répercussions dans de nombreux champs d'application, en probabilité bien sûr, mais aussi pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles, en assurance (théorie de la ruine) et en finance.

◁ En probabilités, on appelle donc martingale un processus stochastique $\{M_s\}$ tel que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s)$ est égale à $M_s$ pour tout $t \geq s$. Les martingales, ainsi que leurs variantes les sous-martingales et les surmartingales, jouissent de nombreuses propriétés qui les rendent très utiles dans l'étude de processus stochastiques plus généraux. Les exemples-types de martingales à temps continu sont le mouvement Brownien, le processus de Poisson.

◁ Ce travail est contenu de deux chapitres :

- Dans le premier chapitre, nous présentons une introduction aux processus stochastique, par une étude succincte de quelques familles importantes : processus à accroissements indépendants stationnaires, mouvement Brownien.
- Dans le deuxième chapitre, on introduit la notion de la martingale en temps continue, nous étudions les propriétés de la matingale en temps continu qui dépendent au mouvement Brownien et temps d'arrêt. On généralise au cadre continu plusieurs inégalités. Avant de donner des théorèmes de convergence pour les martingales en temps continu.

# Chapitre 1

# Processus stochastique

Pour représenter un phénomène aléatoire dépendant du temps, le modéle mathématique se présente naturellement sous la forme d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et d'une fonction $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ représentant l'état du systéme.

Dans ce chapitre présente la notion générale de processus stochastique.

## 1.1 Généralités

### 1.1.1 Définitions et proprietés

**Définition 1.1** *(tribu) : Soit $\Omega$ un ensemble, on appelle tribu (ou $\sigma$-algébre) de parties de $\Omega$, la donnée d'un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de $\Omega$, possédant les propriétés suivantes :*

**i)** $\Omega \in \mathcal{A}$;

**ii)** *$\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire* i.e $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$;

**iii)** *$\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable* i.e *pour tout ensemble* $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, alors :

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

**Proposition 1.1** *: Si $\mathcal{A}$ est une $\sigma$-Algèbre de parties de $\Omega$, il vient :*

**a)** $\varnothing \in \mathcal{A}$.

**b)** *Si* $A \in \mathcal{A}$*, on a :* $A^c \in \mathcal{A}$.

**c)** $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$*, on a :* $\bigcap_{i=0}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

**Exemple 1.1** *:*

**1.** $\mathcal{P}(\Omega)$ *la plus grand tribus est appelé tribu grossière.*

**2.** $\{\varnothing, \Omega\}$ *la plus petite tribus sur* $\Omega$ *est appelé tribu triviale.*

**Exemple 1.2** *:*

**1.** *Soit* $\mathcal{A}$ *une partie de* $\Omega$*. L'ensemble des parties* $\mathcal{A} = \left\{\phi, A, \bar{A}, \Omega\right\}$ *est une tribu.*

**2.** *Soit* $\mathcal{A}$ *un partie de* $\Omega = \{1, 2, 4\}$*, alors :* $\mathcal{A} = \{\phi, \Omega, \{1\}, \{2, 4\}\}$ *c'est un tribu sur* $\Omega$.

**Définition 1.2** *: On dit aussi que* $\mathcal{A}$ *est une* $\sigma$*-algèbre le couple* $(\Omega, \mathcal{A})$ *formé d'un ensemble* $\Omega$ *et d'une tribu* $\mathcal{A}$ *sera appelé un espace mesurable, les éléments de* $\mathcal{A}$ *sont appelé ensemble mesurable.*

**Proposition 1.2** *: Soit* $\Omega$ *un ensemble, et* $M$ *un ensemble de parties de* $\Omega$ $(M \subset \mathcal{P}(\Omega))$*, l'intersection de toutes les tribus sur* $\Omega$ *contenant* $M$ *c'est le plus petit (au sens de l'inclusion) des tribus* $\mathcal{A}_i$ *telles que* $M \subset \mathcal{A}_i$ *appelés tribu engendrée par* $M$ *et se note :*

$$\sigma(M) \quad et \quad \sigma(M) = \cap \mathcal{A}_{i \in I}.$$

**Exemple 1.3** *:* $M = (\{A\})$, $A \subset \Omega$, $M \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *et* $\sigma(M) = \{\varnothing, \Omega, A, A^c\}$.

**Proposition 1.3** *: La tribu borélienne* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *engendrée par l'ensembles des intervalles ouverts, semi-ouvertes, fermés.*

**Remarque 1.1** *: La tribu borélienne* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *contient aussi les singletons, les ensembles dénombrable* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

### 1.1.2 Variable aléatoire (v.a)

Un triplet formé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ d'un ensemble $\Omega$ d'une tribu $\mathcal{A}$ sur $\Omega$ et d'une mesure $\mathbb{P}$ sur cette tribu tel que : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

**Définition 1.3** *: Tout appliqation mesurable $X$ d'un espace probabilite $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans un espace $(E, \xi)$ définit une variable aléatoire $X$ vérifie donc la propriété de mesurabilité*

$$\forall B \in \xi : X^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

**Théorème 1.1** *: La mesure $\mathbb{P}_X$ définie sur $(E, \xi)$ par $\forall B \in \xi : \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$ ; est la probabilité image $\mathbb{P}$ par $X$ définie sur $(E, \xi)$.*

**Exemple 1.4** *: Construction de la variable aléatoire de bernoulli, tel que :*

**1.** l'espace des observales : $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$ ;

**2.** la tribu définie sur $\Omega : \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ;

**3.** la probabilité $\mathbb{P}$ définie sur $\Omega : \mathbb{P}(\omega_1) = p$, $\mathbb{P}(\omega_2) = 1 - p$ où $p \in ]0.1[$.

La variable aléatoire de bernoulli de $X$ de paramètre $p$ est définie par :

**4.** $X(\omega_1) = 1, X(\omega_2) = 0$.

**5.** $\mathbb{P}_X(1) = \mathbb{P}(X^{-1}(1)) = \mathbb{P}(\omega_1) = p$ et $\mathbb{P}_X(0) = \mathbb{P}(X^{-1}(0)) = \mathbb{P}(\omega_2) = 1 - p$.

**Définition 1.4** *: Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, une variable aléatoire réelle $X$ est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ ( donc telle que $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}; \forall A \in B_{\mathbb{R}}$).*
*Une constante est une v.a. de même qu'une fonction indicatrice d'ensemble de la tribu $\mathcal{A}$.*

**Définition 1.5** *: Soit $X$ une v.a.réelle positive ou $\mathbb{P}$-intégrable, i.e. telle que :*

$$\int |X| \, d\mathbb{P} < +\infty.$$

**Définition 1.6** *: Un temps d'arrêt est une variable aléatoire $\tau$ à valeur dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que :*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Remarque 1.2** *: Une constante positive est un temps d'arrêt.*

**Proposition 1.4** *:*

**a)** *Si $T$ est un temps d'arrêt, $T$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.*

**b)** *Si $S$ et $T$ sont des temps d'arrêt, $S \wedge T$ est un temps d'arrêt. En particulier $T \wedge t$ est un temps d'arrêt.*

**Lemme 1.1** *: Si $T$ et $S$ sont deux temps d'arrêt, alors $T \wedge S$, $T \vee S$, $T + S$ le sont aussi.*

**Théorème 1.2** *: Si $\tau$ et $\tau'$ sont deux $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt, alors :*

$$\tau \vee \tau' = \max(\tau, \tau')$$

*et*

$$\tau \wedge \tau' = \min(\tau, \tau')$$

*sont des temps d'arrêt.*

**Preuve.** Soit $t \geq 0$, alors

$$\{\tau \vee \tau' \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap \{\tau' \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

car

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

et

$$\{\tau' \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

et $\mathcal{F}_t$ est une $\sigma$ -algèbre. Donc $\tau \vee \tau' = \max(\tau, \tau')$ est un temps d'arrêt. De même,

$$\tau \wedge \tau' = \{\tau \leq t\} \cup \{\tau' \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Donc $\tau \wedge \tau' = \min(\tau, \tau')$ est un temps d'arrêt. ■

**Définition 1.7** *: L'espérance mathématique d'une v.a. $X$ définie sur l'espace de probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est définie par :*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{X(\Omega)} x d\mathbb{P}_X(x) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

**Exemple 1.5** *: Calculons l'espérance d'un v.a.réelle absolument continue de loi exponentielle (de paramètre $\lambda = 2\alpha$) :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X(x) \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} 2\alpha x e^{-2\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{2\alpha} \int_0^{+\infty} u e^{-u} dx = \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

**Proposition 1.5** ***(Inégalité de Jensen) :*** *Soit $\varphi$ une fonction convexe de $\mathbb{R}$ vers lui même et $X$ une v.a.réelle telles que $X$ et $\varphi(X)$ soient intégrables. On a alors :*

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[(\varphi(X)].$$

**Espérance conditionnelle**

**Définition 1.8** *: Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $G$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. Si $X$ et positive, l'espérance conditionnelle de $X$ sachant $G$ est la variable aléatoire $G$-mesurable, noté $\mathbb{E}[X|G]$, à valeure dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et telle que :*

$$\int_c X d\mathbb{P} = \int_c \mathbb{E}[X|G] d\mathbb{P}, \quad c \in G.$$

**Espérance conditionnelle par rapport à une tribu :** Soit $X$ une v.a.réelle ( intégrable) définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $G$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$.

**Définition 1.9** *: L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X|G]$ de $X$ quand $G$ est l'unique variable aléatoire $G$-mesurable telle que :*

$$\int_A \mathbb{E}[X|G]\, d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}; \quad \forall A \in G.$$

*C'est aussi l'unique ( à une égalité p.s. près) variable $G$-mesurable telle que :*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|G]\, Y] = \mathbb{E}[XY],$$

*pour toute variable $Y$, $G$-mesurable borne.*

**Espérance conditionnelle par rapport à une variable :** On définit l'espérance conditionnelle d'une variable $X$ (intégrable) par rapport à $Y$ comme étant l'espérance conditionnelle de $X$ par rapport à la tribu $\sigma(Y)$. On la note $\mathbb{E}[X|Y]$. C'est une variable mesurable par rapport à la tribu engendrée par $Y$, donc c'est une fonction de $Y$ : il existe $\psi$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ borélienne telle que $\mathbb{E}[X|Y] = \psi(Y)$.
L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X|Y]$ est caractérisée par :

- c'est une variable $\sigma(Y)$-mesurable.
- $\displaystyle\int_A \mathbb{E}[X|Y]\, d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P},\ \forall A \in \sigma(Y).$

**Propriétés de l'espérance conditionnelle**

**Proposition 1.6** *:*

**a)** *Soit $a$ et $b$ deux constantes :*

$$\mathbb{E}[aX + bY|G] = a\mathbb{E}[X|G] + b\mathbb{E}[Y|G]. \quad (\textbf{linéarité}).$$

**b)** *Soit $X$ et $Y$ deux v. a. telles que $X \leq Y$. Alors :*

$$\mathbb{E}\left[X|G\right] \leq \mathbb{E}\left[Y|G\right]. \quad (\textbf{croissance}).$$

**Proposition 1.7** *: Soit $X$ une variable aléatoire :*

**a)** *Si $X$ est $G$-mesurable, $\mathbb{E}\left[X|G\right] = X$.*

**b)** *Si $Y$ est $G$-mesurable, $\mathbb{E}\left[XY|G\right] = Y\mathbb{E}\left[X|G\right]$.*

**c)** *Si $X$ est indépendante de $G$, $\mathbb{E}\left[X|G\right] = \mathbb{E}\left[X\right]$.*

**Proposition 1.8** *: Si $G$ et $H$ sont deux tribus telles que $H \subset G$, alors :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X|H\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|H\right]|G\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|G\right]|H\right]. \end{aligned}$$

*On note souvent*

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|H\right]|G\right] = \mathbb{E}\left[X|H|G\right].$$

## 1.2 Processus stochastique

**Définition 1.10** *: Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est une famille de variables aléatoires $X_t$ indexée par un ensemble $T$.*

*Un processus dépend de deux paramétres : $X_t(\omega)$ dépend de $t$ ( en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$.*

**i)** *Pout $t \in T$ fixe, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

**ii)** *Pour $\omega \in \Omega$ fixe, $t \in T \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.*

**Définition 1.11** *(Mesurabilité)* **:** *Un processus stochastique $X$ est mesurable si pour tout $A \in B\left(\mathbb{R}^d\right)$, l'ensemble $\{(t,\omega); X_t(\omega) \in A\}$ appartient à la produit $B([0,+\infty\ [) \otimes \mathcal{F}$; l'ap-*

*plication :*

$$\begin{aligned}( \ [0,+\infty[\times\Omega, B\left([0,+\infty \ [\times\mathcal{F}\right)\right) &\longrightarrow \left(\mathbb{R}^d, B\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\\ (s,\omega) &\longmapsto X_s\left(\omega\right)\end{aligned}$$

*est mesurable.*

**Définition 1.12** *: Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est dit adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ si $X_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

**Remarque 1.3** *: Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire telle que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $t \leq s$.*

**Remarque 1.4** *: Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est toujours adapté à sa filtration naturelle*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s; 0 \leq s \leq t).$$

**Proposition 1.9** *:*

**a)** *Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus et $T$ un temps d'arrêt fini. On définit $X_T$ par*

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega).$$

**b)** *Si un processus $X$ est continu et adapté, $X_T$ est $\mathcal{F}_T$ -mesurable.*

**Exemple 1.6** ***( Exemples de temps d'arrêt) :*** *Soit $(X_t,\, t \geq 0)$ un processus $\mathcal{F}_t$-adapté, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Pour tout ouvert $A$ de $\mathbb{R}^d$, l'instant aléatoire $\tau_A$, défini par*

$$\tau_A\left(\omega\right) = \inf\left\{t \geq 0;\ X_t(\omega) \in A\right\},$$

*est appelé le premier temps d'atteinte de $A$, ou d'entrée dans $A$, avec la convention* $\inf\left\{\emptyset\right\} = +\infty$.

**Proposition 1.10** *: Soit $X$ un processus progressivement mesurable, et soit $T$ un temps d'arrêt. Alors la v.a. $X_T$, définie sur $\{T < \infty\} \in \mathcal{F}_T$, est $\mathcal{F}_T$-mesurable et le « processus arrêté » $\{X_{T\wedge t},\ t \geq 0\}$ est progressivement mesurable.*

**Définition 1.13** *: Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est dit progressivement mesurable si, $\forall T > 0$ la fonction :*

$$(t,\omega) \in ([0,T], B[0,T]) \times (\Omega, \mathcal{F}_T)) \mapsto X_t(\omega) \in (\mathbb{R}, B(\mathbb{R})),$$

*est mesurable.*

**Remarque 1.5** *: Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

**Définition 1.14** *: On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \mapsto X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout $\omega$.*

**Proposition 1.11** *: Si un processos $X$ est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ et si les trajectoires sont continue à droit, alors il est prograssivement mesurable.*

**Définition 1.15** *: Un processus est dit càdlàg ( continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche. Même définition pour càglàd.*

**Définition 1.16** *: On dit que les trajectoires d'un processus sont continues (ou monotones, ou càdlàg) ssi, pour $\mathbb{P}$ presque tout $(\omega, t) \in \Omega \times T \mapsto X_t(\omega)$ est continue ( ou monotone, ou càdlàg).*

**Définition 1.17** *: A un processus stochastique $X$ on associe sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^X$, c'est à dire la famille croissante de tribus :*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\left\{X_s, s \leq t\right\}.$$

**Définition 1.18** *: Deux processus $X$ et $Y$ ont même lois s'ils ont même lois fini-dimensionnelles : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et*

$$t_1, \ldots, t_p \in T,\ (X_{t_1}, ..., X_{t_p}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Y_{t_1}, ..., Y_{t_p}).$$

*On ecrira $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$.*

**Définition 1.19** *:*

**i)** *Un processus* $(X_t)_{t\in T}$ *est une modification d'un processus* $(Y_t)_{t\in T}$ *ssi,*

$$\forall t \in T, \quad X_t = Y_t, \ \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

**ii)** *Deux processus* $(X_T)_{t\in T}$ *et* $(Y_t)_{t\in T}$ *sont dits indistiguables ssi,*

$$\mathbb{P}(\{\omega : \forall t \in T, X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 1.$$

**iii)** *Deux processus* $(X_t)_{t\in T}$ *et* $(Y_t)_{t\in T}$ *sont dits équivalents ssi,* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (t_1, ..., t_n) \in T^n$

$$(X_{t_1}, ..., X_{t_n}) \overset{\mathcal{L}}{=} (Y_{t_1}, ..., Y_{t_n}).$$

**Proposition 1.12** *: Si un processus* $X$ *est mesurable et adapté à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}$*, alors il admet une modification prograresssivement mesurable.*

**Variation totale et variation quadratique**

**Définition 1.20** *: Soit* $[0, T]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $\Pi_n = \{0 = t_0 < t_1^n < ... < t_n^n = T\}$ *une subdivision de* $[0, T]$ *de pas* $\| \Pi_n \|_\infty = \max_{i\leq n} \mid t_i^n - t_{i-1}^n \mid$ *. On définit la variation infinitésimale d'ordre* $p$ *d'un processus* $X$ *sur* $[0, T]$ *associée à* $\Pi_n$

$$V_T^P(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{i=n} \mid X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \mid^p,$$

*si* $V_T^P(\Pi_n)$ *a une limite dans certain sens ( converge* $L^P$*, converge p.s.) lorsque*

$$\| \Pi_n \|_\infty = \max_{i\leq n} \mid t_i^n - t_{i-1}^n \mid \to 0$$

*la limite ne depende pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons variation d'ordre* $p$ *de* $X$ *sur* $[0, T]$.

**Remarque 1.6** *:*

- *Si* $p = 1$, *la limite s'appellerons variation totale de* $X$ *sur* $[0, T]$.
- *Si* $p = 2$, *la limite s'appellerons variation quadratique de* $X$ *sur* $[0, T]$ *notée par :*

$$\langle X \rangle_T = \langle X.X \rangle_T \, .$$

**Remarque 1.7** *: Si la variation totale de* $X$ *existe* $\mathbb{P}$*-p.s, alors elle vaut :*

$$V_T^1 = \sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{i=n} \mid X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \mid, \quad p.s.$$

**Définition 1.21** *(* ***Variation bornée, Variation finie****)*

**i)** *Un processus* $X$ *est dit à variation bornée sur* $[0, T]$ *si :*

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{i=n} \mid X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \mid < k.$$

**ii)** *Un processus* $X$ *est dit à variation finie sur* $[0, T]$ *si :*

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{i=n} \mid X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \mid < \infty.$$

**Processus à accroissements indépendants stationnaires**

**Définition 1.22** *: Soit* $X = (X_t)_{t \in T}$ *un processus stochastique adapté à une filtration* $(\mathcal{F}_t)$.

**i)** *le processus est dit à accroissements indépendants si pour tout* $s < t$ *dans* $T$*, la variable aléatoire* $X_t - X_s$ *est indépendante de la tribu* $\mathcal{F}_s$.

**ii)** *le processus est dit à accroissements stationnaires si la loi de* $X_t - X_s$*, pour* $s < t$ *dans* $T$*, ne dépend que de* $t - s$.

**Définition 1.23** *: Un processus stochastique* $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ *est un processus à accroissements indépendants stationnaires si* $\forall s, t \in \mathbb{R}^+$*, tels que* $0 \leq s < t$*, la v.a.* $X_t - X_s$ *a la même loi que*

$X_{t-s}$. *Autrement dit,* $\forall h \geq 0$,

$$X_{t+h} - X_{s+h} \overset{\mathcal{L}}{=} X_{t-s};$$

$\forall s, t \in \mathbb{R}^{+}$, *tels que* $0 \leq s < t$. *( Notation :* $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$ *ssi* $X$ *et* $Y$ *ont même loi).*

**Processus Gaussiens**

**Définition 1.24** *: Une variable* $X$ *est gaussienne de loi* $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ *si elle a pour densité :*

$$\mathcal{N}(m, \sigma^2)(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}.$$

**Définition 1.25** *: Un vecteur* $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ *est gaussien si toute combinaison linéaire* $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ *est une variable gaussienne à valeurs réelles.*

**Définition 1.26** *: Un processus* $X$ *est gaussien si toute combinaison linéaire finie de* $(X_t, t \geq 0)$ *est une variable aléatoire gaussienne, c'est-à-dire si :*

$$\forall n, \forall t_i, 1 \leq i \leq n, \forall a_i, \sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i},$$

*est une v.a.réelle gaussienne.*

## 1.3 Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien est le nom donné aux trajectoires irrégulières du pollen en suspension dans l'eau, observé par le botaniste **Robert Brown** en 1828. Le mouvement Brownien est en général noté $(W_t, t \geq 0)$ en référence à **Wiener** ou $(B_t, t \geq 0)$ en référence à **Brown**.

**Définition 1.27** ***( Mouvement Brownien) :*** *On dit qu'un processus* $(B_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs réelles est mouvement Brownien issu de* $x$ *si* $B_0 = x$ *et les accroissements de* $(B_t)_{t\geq 0}$ *sont gaussiens, centrés, stationnaires, et indépendants : c'est à dire que pour* $t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ *:*

**i)** $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *suit une loi normale* $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \left(t_i - t_{i-1}\right)\right)$ *avec* $1 \leq i \leq n$ *et,*

**ii)** $\mathbb{E}\left[\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)\right] = 0, \forall i \neq j$ *où* $1 \leq i,\, j \leq n$.

***Définition 1.28 ( Mouvement Brownien standard) :*** *On appelle mouvement Brownien standard un processus stochastique* $(B_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs réelles tel que :*

**i)** $B_0 = 0$ *presque sûrement.*

**ii)** *Si* $t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$*, les accroissements* $\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}, 1 \leq i \leq n\right)$ *sont indépendants.*

**iii)** *Pour tout* $s, t \geq 0$*, tel que* $s \leq t$*,* $B_t - B_s$ *suit une loi gaussienne centrée de variance* $t - s$.

**iv)** $\mathbb{P}$*-p.s.*$t \mapsto B_t(\omega)$ *est continue.*

**Remarque 1.8** *: De cette définition, il suit que pour* $t \geq s \geq 0$ *: i.e :*

- $B_t - B_s \backsim B_{t-s} \backsim \mathcal{N}(0, t-s)$.
- $\mathbb{E}\left[(B_t - B_s)\right] = 0$ *et* $\mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2\right] = t - s$.

**Proposition 1.13** *: Un mouvement Brownien (standard) réel est un processus gaussien centré* $(B_t)_{t\geq 0}$ *à trajectoires continues de fonction de covariance* $K(s,t) = min(s,t) := s \wedge t$.

**Preuve.** Soit maintenant $t \geq s \geq 0$

$$\begin{aligned} m(t) &= \mathbb{E}\left[B_t\right] = 0, \\ K(t,s) &= Cov(B_t, B_s) = \mathbb{E}\left[(B_t - B_s + B_s)B_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)B_s\right] + \mathbb{E}\left[B_s^2\right] = 0 + s, \end{aligned}$$

car $(B_t - B_s) \perp B_s$, de même manière si $s \geq t \geq 0$. On a donc : $K(t,s) = \min(t,s)$. ∎

**Exemple 1.7** *: Soit* $Z$ *une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite. Pour tout* $t \geq 0$*, nous posons* $X_t = \sqrt{t}Z$*. Le processus stochastique* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *a des trajectoires continues et* $\forall t \geq 0$*,* $X_t$ *est de loi* $\mathcal{N}(0,t)$*. Est-ce que* $X$ *est un mouvement Brownien ?. Justifiez votre réponse.*

*Réponse : Non, puisque pour* $0 \leq s \leq t < \infty$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar\left[X_t - X_s\right] &= \mathbb{V}ar\left[\sqrt{t}Z - \sqrt{s}Z\right] \\ &= \left(\sqrt{t} - \sqrt{s}\right)^2 \mathbb{V}ar\left[Z\right] \\ &= t - 2\sqrt{t}\sqrt{s} + s \\ &\neq t - s.\end{aligned}$$

**Théorème 1.3** *: Un processus $B$ est un mouvement Brownien ssi c'est un processus gaussiens continu centré de fonction de covariance :*

$$Cov(B_s, B_t) = s \wedge t = min(s,t).$$

*Donc $B_t - B_s$ est indépendante de tout vecteur $(B_{r_1}, ..., B_{r_n})$ et donc de $\mathcal{F}_s^B = \sigma\left(B_r, r \leq s\right)$.*

**Preuve.** Pour $s \leq t$, $B_t - B_s$ est gaussienne et est donc déterminée par son espérance $\mathbb{E}[B_t - B_s] = 0$ et sa variance :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar[B_t - B_s] &= \mathbb{V}ar(B_t) + \mathbb{V}ar(B_s) - 2Cov(B_t, B_s) \\ &= t + s - 2(s \wedge t) = t - s,\end{aligned}$$

donc $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, et la loi de $B_t - B_s$ ne dépendant que de $t - s$, les accroissements sont stationnaires. ■

**Proposition 1.14** *: Si $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien standard, Pour tout $s > 0$, $\{B_{t+s} - B_s\}_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard.*

**Preuve.** Posons : $Z_t = B_{t+s} - B_s$.

**i)** $Z_0 = B_0 - B_0 = 0$.

**ii)** Puisque

$$\begin{aligned}Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}} &= \left(B_{t_k+s} - B_s\right) - \left(B_{t_{k-1}+s} - B_s\right) \\ &= B_{t_k+s} - B_{t_{k-1}+s},\end{aligned}$$

et que : $\forall\ 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les v.a :

$$B_{t_1+s} - B_{t_0+s}, B_{t_2+s} - B_{t_1+s}, ..., B_{t_k+s} - B_{t_{k-1}+s}$$

sont indépendantes, alors : $\forall\ 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les variables aléatoires :

$$Z_{t_1} - Z_{t_0}, Z_{t_2} - Z_{t_1}, ..., Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}},$$

sont indépendantes.

**iii)** $\forall u, t \geq 0$, tel que : $u < t$,

$$\begin{aligned} Z_t - Z_u &= (B_{t+s} - B_s) - (B_{u+s} - B_s) \\ &= B_{t+s} - B_{u+s}, \end{aligned}$$

est de distribution normale d'espérance 0 et de variance $(t+s) - (u+s) = t - u$.

**iv)** $\forall \omega \in \Omega$, la trajectoire $t \mapsto Z_t(\omega) = B_{t+s}(\omega) - B_s(\omega)$ est continue puisque $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue.

■

**Proposition 1.15** *: Si $(B_t,\ t \geq 0)$ est un mouvement Brownien :*

**a)** *Le processus $\widetilde{B} = -B_t$ est un mouvement Brownien.*

**b)** *Le processus $\overline{B} = cB_{\frac{t}{c^2}}$ est un mouvement Brownien.*

**Preuve.**

**a)** Posons : $\widetilde{B} = -B_t$ :

**i)** $\widetilde{B}_0 = -B_0 = 0.$

**ii)** Puisque $\widetilde{B}_{t_k} - \widetilde{B}_{t_{k-1}} = B_{t_{k-1}} - B_{t_k}$ et que $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les variables aléatoires :

$$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_k} - B_{t_{k-1}},$$

sont indépendantes, alors : $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les variables aléatoires :

$$B_{t_0} - B_{t_1}, B_{t_1} - B_{t_2}, ..., B_{t_{k-1}} - B_{t_k},$$

sont indépendantes, ce qui implique que :

$$\widetilde{B}_{t_1} - \widetilde{B}_{t_0}, \widetilde{B}_{t_2} - \widetilde{B}_{t_1}, ..., \widetilde{B}_{t_k} - \widetilde{B}_{t_{k-1}},$$

sont indépendantes. $\forall s, t \geq 0$, tel que $s < t$, $\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s = (B_s - B_t)$ est de distribution normale d'espérance 0 et de variance $t - s$.

**iii)** $\forall \omega \in \Omega$, la trajectoire $t \mapsto \widetilde{B}_t(\omega) = -B_t(\omega)$ est continue puisque $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue.

**b)** Posons $\overline{B}_t = cB_{\frac{t}{c^2}}$ :

**i)** $\overline{B}_0 = cB_0 = 0$.

**ii)** Puisque $\overline{B}_{t_k} - \overline{B}_{t_{k-1}} = cB_{\frac{t_k}{c^2}} - cB_{\frac{t_{k-1}}{c^2}}$ et que $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les v.a :

$$B_{\frac{t_1}{c^2}} - B_{\frac{t_0}{c^2}}, B_{\frac{t_2}{c^2}} - B_{\frac{t_1}{c^2}}, ..., B_{\frac{t_k}{c^2}} - B_{\frac{t_{k-1}}{c^2}},$$

sont indépendantes,alors : $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les v.a :

$$cB_{\frac{t_1}{c^2}} - cB_{\frac{t_0}{c^2}}, cB_{\frac{t_2}{c^2}} - cB_{\frac{t_1}{c^2}}, ..., cB_{\frac{t_k}{c^2}} - cB_{\frac{t_{k-1}}{c^2}},$$

sont indépendantes, ce qui implique que

$$\overline{B}_{t_1} - \overline{B}_{t_0}, \overline{B}_{t_2} - \overline{B}_{t_1}, ..., \overline{B}_{t_k} - \overline{B}_{t_{k-1}},$$

sont indépendantes.

**iii)** Puisque $cB$ est de loi normale si $B$ est de loi normale, $\forall s, t \geq 0$, tel que $s < t$,

$$\overline{B}_t - \overline{B}_s = c\left(B_{\frac{t}{c^2}} - B_{\frac{s}{c^2}}\right),$$

est de distribution normale d'espérance :

$$\mathbb{E}\left[\overline{B}_t - \overline{B}_s\right] = c\mathbb{E}\left[B_{\frac{t}{c^2}} - B_{\frac{s}{c^2}}\right] = 0,$$

et de variance :

$$\mathbb{V}ar\left[\overline{B}_t - \overline{B}_s\right] = c^2\mathbb{V}ar\left[B_{\frac{t}{c^2}} - B_{\frac{s}{c^2}}\right] = c^2\left(\frac{t}{c^2} - \frac{s}{c^2}\right) = t - s.$$

**iv)** $\forall\omega \in \Omega$, la trajectoire $t \mapsto \overline{B}_t(\omega) = cB_{\frac{t}{c^2}}(\omega)$ est continue puisque $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue.

■

**Proposition 1.16** *: Si $B$ un mouvement Brownien, alors presque sûrement, on a :*

**a)** *$t \mapsto B_t(w)$ n'est dérivable en aucun point $t$.*

**b)** *$t \mapsto B_t(w)$ n'est pas à variation finie en aucun point $t$.*

**Proposition 1.17** *: La variation quadratique du mouvement Brownien sur $[0, T]$ existe dans $L^2$ est donne par :*

$$\langle B\rangle_T = T.$$

# Chapitre 2

# Martingales en temps continu

La théorie des martingales a été découvre la première fois en France par une classe de stratégies de paris populaire. La plus simple de ces stratégies a été conçue pour un jeu dans lequel le joueur gagne son pari si une pièce de monnaie monte à la tête et la perd si la pièce se termine à la queue.

Pour les joueurs de casino, une martingale est une stratégie de pari dans laquelle (à cotes égales) la mise double à chaque perte du joueur. Les joueurs suivent cette stratégie car, puisqu'ils finiront par gagner, ils soutiennent qu'ils ont la garantie de gagner de l'argent !.

Les pionniers du cencept de martingale sont alors **S. Bernstein, P. Lévy, J. Ville, E.Borel et J. Doob** (cependant on peut trouver a posteriori des premiers exemples de martingales dans des travaux plus ansciens dont par exemple ceux de Pascal sur le problème des partis comme l'explique **Y. Derriennic (2003)**).

Dans la théorie des probabilités, une martingale est une séquence de variables aléatoires (c'est-à-dire un processus stochastique) pour laquelle, à un moment donné, l'attente conditionnelle de la valeur suivante de la séquence, compte tenu de toutes les valeurs précédentes, est égale à la valeur actuelle.

Dans ce chapitre on introduit un outil important dans la théorie des processus aléatoires à savoir : les martingales, on commence par rappeler les définitions de base, puis on rappelle les propriétés utilisées dans ce mémoire.

## 2.1 Définitions, exemples

**Définition 2.1** *: Un processus $(M_t, t \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale si :*

**i)** *$(M_t)$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté.*

**ii)** *$\mathbb{E}\,|M_t| < +\infty$, pour tout $t \geq 0$, ( i.e. le processus $(M_t)$ est intégrable).*

**iii)** *Pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s$.*

**Exemple 2.1** *: Soit $U \in L^1$ et $M_t = \mathbb{E}\,[U \mid \mathcal{F}_t]$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, alors $(M_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale.*

**Remarque 2.1** *: On déduit de cette définition que, si $(M_t)_{t>o}$ est une martingale, alors :*

$$\mathbb{E}\,[M_t] = \mathbb{E}\,[M_0]\,,$$

*pour tout $t$.*

**Proposition 2.1** *: Soit $(M_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une martingale de carré intégrable, alors, $\forall s \leq t$, on a :*

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s].$$

**Preuve.** On a :

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s] - 2\mathbb{E}[M_t M_s \mid \mathcal{F}_s] + \underbrace{\mathbb{E}[M_s^2 \mid \mathcal{F}_s]}_{M_s^2}$$

Le résultat d'ecoule alors de l'égalité

$$\mathbb{E}[M_t M_s \mid \mathcal{F}_s] = M_s^2.$$

alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s] - 2M_s^2 + M_s^2 \\ &= \mathbb{E}[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s] - M_s^2 \\ &= \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s].\end{aligned}$$

■

**Définition 2.2** *: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq o}$ une filtration de cet espace. Une famille adaptée $(M_t)_{t\geq o}$ de variables aléatoires intégrables ( c'est -à- dire vérifiant $\mathbb{E}(|M_t|) < +\infty$ pour tout $t$) est :*

**i)** *une sur-martingale si, pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] \leq M_s$.*

**ii)** *une sous-martingale si, pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] \geq M_s$.*

**Définition 2.3** *: Un processus stochastique réel $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sur-martingale et une sous-martingale, c'est à dire si :*

**i)** *$(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-adapté.*

**ii)** *$\forall t \in \mathbb{R}^+$, la v.a.réelle $X_t$ est intégrable.*

**iii)** *$\forall s \in \mathbb{R}^+$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, tels que $s \leq t$ , on a :*

$$X_s = \mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_t\right], \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

**Définition 2.4** *: Un processus stochastique réel $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sous martingale relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ si $(-X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sur-martingale.*

**Remarque 2.2** *:*

- *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sur-martingale, la fonction $t \mapsto \mathbb{E}\left[X_t\right]$ est décroissante.*
- *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sous-martingale, la fonction $t \mapsto \mathbb{E}\left[X_t\right]$ est croissante.*
- *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale, la fonction $t \mapsto \mathbb{E}\left[X_t\right]$ est constante :*

$$\mathbb{E}\left[X_t\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right], \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

- *Si* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est une sur-martingale ( resp. une sous-martingale) et si la fonction* $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ *est constante alors* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est une martingale.*

**Théorème 2.1** *: Si* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est un* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$*-processus à accroissements indépendants réel et si,* $\forall t \in \mathbb{R}^+$*, la v.a.réelle* $X_t$ *est intégrable et centrée, alors* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$*-martingale.*

**Preuve.** Si $s \leq t$ avec $s,\, t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\mathbb{E}[X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t - X_s] = \mathbb{E}[X_t] - \mathbb{E}[X_s] = 0, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Or

$$\mathbb{E}[X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] - X_s, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Donc,

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

■

**Proposition 2.2** *: Si* $(X_t)_{t>0}$ *est un* $\mathcal{F}_t$*-mouvement Brownien standard, alors :*

**a)** $(X_t)$ *est une* $\mathcal{F}_t$*-martingale.*

**b)** $(X_t^2 - t)$ *est une* $\mathcal{F}_t$*-martingale.*

**c)** $(\exp(\sigma X_t - (\sigma^2/2)t))$ *est une* $\mathcal{F}_t$*-martingale.*

**Preuve.**

**a)** Si $s \leq t$ alors $X_t - X_s$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_s$. Donc :

$$\mathbb{E}[X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t - X_s] \cdot$$

Mais un mouvement Brownien standard est centré, donc

$$\mathbb{E}[X_t - X_s] = 0.$$

Alors :

$$\mathbb{E}\left[X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_t\right] - X_s$$

donc : $\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s$.

**b)** Pour démontrer le deuxième, remarquons que : $X_t^2 - t$ est un processus adapté comme $X_t$ est un processus adapté et $X_t^2 - t$ est un fonction continue, pour l'intégrabilité : $\forall t \geq 0$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_t^2 - t|\right] &\leq \mathbb{E}\left[X_t^2\right] + \mathbb{E}\left[t\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[X_t^2\right] + t \\ &= 2t < \infty.\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_t^2 - X_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2 + 2X_s(X_t - X_s) \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + 2X_s\mathbb{E}\left[X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s\right],\end{aligned}$$

mais comme $(X_t)_{t>0}$ est une martingale $\mathbb{E}\left[X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s\right] = 0$, et donc :

$$\mathbb{E}\left[X_t^2 - X_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right].$$

La stationnarité et l'indépendance des accroissements du mouvement Brownien permettent de plus d'affirmer que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[X_{t-s}^2\right] \\ &= t - s.\end{aligned}$$

La dernière égalité est due au fait que $X_t$ suit une loi gaussienne centrée de variance $t$. On en déduit que :

$$\mathbb{E}\left[X_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s^2 - s, \quad \text{si} \quad s < t.$$

**c)** Pour démontrer le dernier point, remarquons que : $\exp(\sigma X_t - \frac{\sigma^2}{2}t)$ est un processus adapté comme $X_t$ est un processus adapté et $\exp(\sigma X_t - \frac{\sigma^2}{2}t)$ est un fonction continue, pour l'intégrabilité : $\forall t \geq 0$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\exp(\sigma X_t - \tfrac{\sigma^2}{2}t)\right|\right] &= \mathbb{E}\left[\exp(\sigma X_t - \tfrac{\sigma^2}{2}t)\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\exp(\sigma x - \tfrac{\sigma^2}{2}t)\tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp(\tfrac{x^2}{2t})dx\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(\tfrac{-x^2+(2t\sigma x)-\sigma^2 t^2}{2t}\right)\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(\tfrac{-(x-(\sigma t))^2}{2t}\right)\right)dx \\
&= 1 < \infty.
\end{aligned}$$

Si $g$ est une gaussienne centrée réduite, on a :

$$\mathbb{E}\left(\exp \lambda g\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\lambda x\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right).$$

De plus, si $s < t$,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\sigma X_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right) \mid \mathcal{F}_s\right] = \exp\left(\sigma X_s - \frac{\sigma^2}{2}t\right)\mathbb{E}\left[\exp \sigma\left(X_t - X_s\right) \mid \mathcal{F}_s\right].$$

car $X_s$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable, et comme $X_t - X_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp(\sigma\left(X_t - X_s\right)) \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\exp(\sigma(X_t - X_s))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(\sigma X_{t-s}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(\sigma g\sqrt{t-s}\right)\right] \\
&= \exp\left(\tfrac{1}{2}\sigma^2(t-s)\right).
\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat annoncé.

■

**Théorème 2.2** ***( Théorème de Lévy) :*** *Soit $(X_t)$ un processus réel centré, à trajectoires continues, $\mathcal{F}_t$-adapté tel que :*

**1)** *$(X_t)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*

**2)** *$(X_t^2 - t)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*

*Alors $(X_t)$ est un mouvement Brownien standard.*

**Théorème 2.3** *:*

**1)** *Si $X$ est une martingale et $\phi$ une fonction convexe continue telle que $\forall t$, $\phi(X_t)$ intégrable alors : $\phi(X_t)$ est une sous-martingale.*

**2)** *Si $X$ est une sous-martingale et si $\phi$ est une fonction convexe continue croissante telle que $\forall t$, $\phi(X_t)$ intégrable alors : $\phi(X_t)$ est une sous-martingale.*

**Preuve.**

**1)** D'après l'inégalité de Jensen, on a : pour $s > t$, $\mathbb{E}\left[\phi(X_s) \mid \mathcal{F}_t\right] \geq \phi\left[\mathbb{E}\left(X_s \mid \mathcal{F}_t\right)\right] = \phi(X_t)$.

**2)** Si $s > t$, $\mathbb{E}\left[\phi(X_s) \mid \mathcal{F}_t\right] \geq \phi\left(\mathbb{E}[X_s \mid \mathcal{F}_t]\right) \geq \phi(X_t)$ car $X$ est une sous-martingale et $\phi$ est croissante.

■

## 2.2 Inégalités importantes

### 2.2.1 Lemme Maximal

**Théorème 2.4** ***( Inégalité maximale)*** *: Soit $(M_t)$ une $\mathcal{F}_t$-martingale réelle et continue ( ie à trajectoires continues). Pour tout $p > 1$ tel que : $M_T \in L^p(\Omega)$ ( i.e. $\mathbb{E}\left|M_T^p\right| < +\infty$), on a :*

**1)** *$M_T^* := \sup\limits_{0 \leq t \leq T} |M_t|$ est dans $L^p(\Omega)$ ( i.e $\mathbb{E}\left|M_T^*\right|^p < +\infty$).*

**2)** $\left\{\mathbb{E} M_T^{*p}\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \dfrac{p}{p-1} \left\{\mathbb{E}\left(|M_T|^p\right)\right\}^{\frac{1}{p}}$.

**Lemme 2.1** *: Si $(M_t)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale, alors $(|M_t|)$ est une $\mathcal{F}_t$-sous-martingale.*

**Preuve.** Soit $s \leq t$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|M_t| \mid \mathcal{F}_s\right] &= 1_{\left\{M_s \geq 0\right\}}\mathbb{E}\left[|M_t| \mid \mathcal{F}_s\right] + 1_{\{M_s<0\}}\mathbb{E}\left[|M_t| \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &\geq 1_{\left\{M_s \geq 0\right\}}\mathbb{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] - 1_{\{M_s<0\}}\mathbb{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= 1_{\left\{M_s \geq 0\right\}}M_s - 1_{\{M_s<0\}}M_s \\ &= |M_s|.\end{aligned}$$

■

**Lemme 2.2** *: Si $(M_t)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale continue, alors pour toute constante $\alpha > 0$ :*

$$\alpha\mathbb{P}\left(M_T^* \geq \alpha\right) \leq \left(\mathbb{E}\left[|M_T|\right] 1_{\left\{M_T^* \geq \alpha\right\}}\right).$$

**Preuve. Du théorème ( Inégalité maximale) :**

On ne sait pas a priori que $\mathbb{E}\left[(M_T^*)^p\right]$ est fini, mais pour $k > 0$ fixé,

$$\mathbb{E}\left[(M_T^* \wedge k)^p\right] \leq k^p < \infty.$$

On remarque ensuite que $y^p = \displaystyle\int_0^y px^{p-1}dx$. Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(M_T^* \wedge k)^p\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^{M_T^* \wedge k} px^{p-1}dx\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^k p1_{\left\{x \leq M_T^*\right\}}x^{p-1}dx\right] \\ &= \int_0^k px^{p-1}\mathbb{E}\left[1_{\left\{x \leq M_T^*\right\}}\right]dx.\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient par le théorème de Fubini, la double intégrable étant finie. Or d'après le lemme précèdent,

$$x\mathbb{E}\left[1_{\left\{x \leq M_T^*\right\}}\right] = x\mathbb{P}\left(M_T^* \geq x\right) \leq \mathbb{E}\left[|M_T| 1_{\left\{M_T^* \geq x\right\}}\right],$$

d'où,

$$\mathbb{E}\left[(M_T^* \wedge k)^p\right] \leq \int_0^k p x^{p-2} \mathbb{E}\left[|M_T| \, 1_{\{M_T^* \geq x\}}\right] dx,$$

cette double intégrale est finie car $\mathbb{E}\,|M_T| < +\infty$, $(M_t)$ étant une martingale.

$$\begin{aligned}\int_0^k p x^{p-2} \mathbb{E}\left[|M_T| \, 1_{\{M_T^* \geq x\}}\right] dx &= p\mathbb{E}\left[|M_T| \int_0^k x^{p-2} 1_{\{M_T^* \geq x\}} dx\right] \\ &= p\mathbb{E}\left[|M_T| \int_0^{M_T^* \wedge k} x^{p-2} dx\right] \\ &= \tfrac{p}{p-1}\mathbb{E}\left[|M_T| \, (M_T^* \wedge k)^{p-1}\right].\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Hölder à $\mathbb{E}\left[|M_T| \, (M_T^* \wedge k)^{p-1}\right]$ : pour $q$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\mathbb{E}\left[(M_T^* \wedge k)^p\right] \leq \frac{p}{p-1} \left(\mathbb{E}\left[|M_T|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E}\left[(M_T^* \wedge k)^{p-1}\right]^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Il faut maintenant remarquer que $(p-1)q = p$ et que $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$. Par simplification, on obtient :

$$\left(\mathbb{E}\left[(M_T^* \wedge k)^p\right]\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \frac{p}{p-1} \left(\mathbb{E}\left[|M_T|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Comme le terme de droite ne dépend pas de $k$, la limite $k \to +\infty$ donne les points 1) et 2).

■

### 2.2.2 Inégalité du nombre de montées

**Définition 2.5** *: Si $f = I \to \mathbb{R}$ où $I \subset \mathbb{R}_+$, on définit le nombre de montées de $X$ de $a$ à $b$ où $a < b$ comme le plus grand $k \geq 1$ tel qu'il existe $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \ldots < s_k < t_k$ tous dans $I$ et tel que $X_{s_i} < a$ et $X_{t_i} > b$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ ( le nombre de montées est égal à 0 s'il n'existe pas de tel que $k$). On le note $U_{ab}^X(I)$.*

**Proposition 2.3** *( **Inégalité du nombre de montées)** : Soit $(X_t)_t$ une sur-martingale continue à droite et soit $a < b$, $t > 0$. Alors :*

$$\mathbb{E}\left[U_{ab}^X([0,\ t])\right] \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}\left[(X_t - a)^-\right].$$

**Preuve.** Fixons $t > 0$ et soit $D$ un sous-ensemble dénombrable dense de $[0, t]$ tel que $0 \in D$, $t \in D$. On écrit $D = \underset{m}{\cup} D_m$ avec $D_m$ fini et $D_m \subset D_{m+1}$. Par exemple card $D_m = m + 1$ et $D_m = \{t_0^m, ..., t_m^m\}$ avec $t_0^m = 0$ et $t_m^m = t$. Par l'inégalité du nombre de montées discréte,

$$\mathbb{E}\left[U_{ab}^X(D_m)\right] \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}\left[(X_t - a)^-\right].$$

$U_{ab}^X(D_m)$ converge en croissant vers $U_{ab}^X(D)$ quand $m \to +\infty$.

$$\mathbb{E}\left[U_{ab}^X(D)\right] \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}\left[(X_t - a)^-\right].$$

On conclut par continuité à droite. ■

### 2.2.3 Inégalité de Doob

**Proposition 2.4** *: Soit $(M_t)$ une martingale ( par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$) continue, de carré intégrable et telle que $M_0 = 0$ p.s.. Alors :*

**a)** $\mathbb{P}\left(\sup\limits_{0\leq s\leq t} |M_s| \geq \lambda\right) \leq \dfrac{\mathbb{E}\left[|M_t|\right]}{\lambda}$, $\forall t > 0,\ \lambda > 0$.

**b)** $\mathbb{E}\left(\sup\limits_{0\leq s\leq t} |M_s|^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left[|M_t|^2\right]$, $\forall t > 0$.

**Preuve.**

**a)** Par l'inégalité de Jensen, le processus $(|M_t|, t \in \mathbb{R}_+)$ est une sous-martingale. On définit

$$T_1 = \inf\{s \geq 0 : |M_s| \geq \lambda\} \wedge t, \quad T_2 = t.$$

On voit alors que $0 \leq T_1 \leq T_2 = t$. En appliquant le théorème d'arrêt (2.5) ci-dessus à la sous-martingale $(|M_t|)$, on trouve donc que :

$$|M_{T_1}| \leq \mathbb{E}\left[|M_t| \mid \mathcal{F}_{T_1}\right].$$

En multipliant par $1_{\{|M_{T_1}|\geq\lambda\}}$, on trouve encore

$$|M_{T_1}|\,1_{\{|M_{T_1}|\geq\lambda\}} \leq \mathbb{E}\left[|M_t|\,1_{\{|M_{T_1}|\geq\lambda\}} \mid \mathcal{F}_{T_1}\right],$$

car $1_{\{|M_{T_1}|\geq\lambda\}}$ est $\mathcal{F}_{T_1}$-mesurable. De là, on déduit que :

$$\begin{aligned}\lambda\mathbb{P}\left(\{|M_{T_1}|\geq\lambda\}\right) &= \mathbb{E}\left[\lambda 1_{\{|M_{T_1}|\geq\lambda\}}\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[|M_{T_1}|\,1_{\{|M_{T_1}|\geq\lambda\}}\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[|M_t|\,1_{\{|M_{T_1}|\geq\lambda\}}\right].\end{aligned}$$

Soit maintenant $M^* = \sup\limits_{0\leq s\leq t}|M_s|$ : il importe de remarquer que

$$\{|M_{T_1}|\geq\lambda\} = \{M^*\geq\lambda\}.$$

( Effctivement, chacun des deux événements ci-dessus correspond à l'événement "le processus $|M_t|$ a dépassé la valeur $\lambda$ dans l'intervalle $[0,t]$"). Ceci implique que

$$\lambda\mathbb{P}\left(\{M^*\geq\lambda\}\right) \leq \mathbb{E}\left[|M_t|\,1_{\{|M_{T_1}|\geq\lambda\}}\right] \leq \mathbb{E}\left[|M_t|\right], \tag{2.1}$$

et donc l'inégalité a).

**b)** Pour simplifier, supposons que l'on sait que $\mathbb{E}\left[(M^*)^2\right]<\infty$. Alors du fait que :

$$g\left(M^*\right) = \int_0^\infty g'\left(x\right)1_{\{M^*\geq x\}}dx,$$

on a par l'inégalité de gauche dans (2.1),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(M^*\right)^2\right] &= \int_0^\infty 2x\mathbb{P}\left(\{M^*\geq x\}\right)dx \\ &\leq \int_0^\infty 2\mathbb{E}\left[|M_t|\,1_{\{M^*\geq x\}}\right]dx \\ &= 2\mathbb{E}\left[|M_t|\,M^*\right].\end{aligned}$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet finalement de conclure que :

$$\mathbb{E}\left[(M^*)^2\right] \leq 2\sqrt{\mathbb{E}\left[|M_t|^2\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[(M^*)^2\right]},$$

autrement dit,

$$\sqrt{\mathbb{E}\left[(M^*)^2\right]} \leq 2\sqrt{\mathbb{E}\left[M_t^2\right]} \quad \text{i.e.} \quad \mathbb{E}\left[(M^*)^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[M_t^2\right],$$

ce que termine la preuve.

■

## 2.3 Martingale et temps d'arrêt

**Théorème 2.5** ***(Théorème d'arrêt) :*** *Si $(M_t)_{t\geq o}$ est une martingale continue par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t>o}$, et si $\tau_1$ et $\tau_2$ sont deux temps d'arrêt tels que $\tau_1 \leq \tau_2 \leq K$, $K$ étant une constante réelle finie, alors $M_{\tau_2}$ est intégrable et :*

$$\mathbb{E}\left[M_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}\right] = M_{\tau_1} \quad \mathbb{P}\text{-}p.s..$$

**Théorème 2.6** ***( Théorème d'arrêt pour des temps d'arrêt bornés)*** *: Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale continue à droite par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.*

**1)** *Pour tout temps d'arrêt borné $S$, la v.a. $X_S$ est intégrable et $\mathcal{F}_s$-mesurable.*

**2)** *Si $S$ et $T$ sont deux temps d'arrêt bornés et si $S \leq T$, alors :*

$$X_S = \mathbb{E}\left[X_T \mid \mathcal{F}_S\right].$$

**Preuve.** Il suffit de montrer que pour tout temps d'arrêt borné $S$ par $c$ (i.e. $S(\omega) \leq c, \forall\omega \in \Omega$), on a : $X_S \in L^1$ et

$$X_S = \mathbb{E}\left[X_c \mid \mathcal{F}_S\right], \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

En effet, si $S$ et $T$ sont deux temps d'arrêt avec $S \leq T$ bornés par $c$, alors :

$$X_S = \mathbb{E}\left[X_c \mid \mathcal{F}_S\right], \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

et

$$X_T = \mathbb{E}\left[X_c \mid \mathcal{F}_T\right], \quad \mathbb{P}\text{-}p.s,$$

et par conséquent, comme $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$,

$$\mathbb{E}\left[X_T \mid \mathcal{F}_S\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_c \mid \mathcal{F}_T\right] \mid \mathcal{F}_S\right] = \mathbb{E}\left[X_c \mid \mathcal{F}_S\right] = X_S.$$

■

**Corollaire 2.1** *: Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$un processus stochastique réel adapté et continu à droite. Alors, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale ssi pour tout $T \in \mathcal{T}$ borné, $X_T$ est intégrable et*

$$\mathbb{E}\left[X_T\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right].$$

**Remarque 2.3** *: On note $\mathcal{T}$ la famille des temps d'arrêt.*

**Preuve.**

$\Rightarrow$) Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale alors, d'après le théorème d'arrêt $(2,6)$, $X_T$ est intégrable et $X_0 = \mathbb{E}\left[X_T \mid \mathcal{F}_0\right]$ $(S \equiv 0 \leq T)$, donc :

$$\mathbb{E}\left[X_T\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right].$$

$\Leftarrow$)

**i)** Adaptation : dans les hypothéses.

**ii)** Intégrabilité : $\forall t \in \mathbb{R}_+, X_t \in L^1$ (Prendre $T \equiv t$).

**iii)** Soit $s$, $t \in \mathbb{R}_+$ tels que $s < t$. On veut montrer que $\mathbb{P}$-$p.s$,

$$X_s = \mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right],$$

i.e.

$$\mathbb{E}[X_s 1_A] = \mathbb{E}[X_t 1_A], \quad \forall A \in \mathcal{F}_s.$$

Soit $A \in \mathcal{F}_s$, on pose :

$$T = s1_A + t1_{A^c}.$$

$T$ est un temps d'arrêt borné. Donc, $X_T \in L^1$ et

$$\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_s 1_A] + \mathbb{E}[X_t 1_{A^c}],$$

et en prenant $T \equiv t$, on obtient que i.e :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_0] &= \mathbb{E}[X_t] \\ &= \mathbb{E}[X_t 1_A] + \mathbb{E}[X_t 1_{A^c}] \end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$\mathbb{E}[X_s 1_A] = \mathbb{E}[X_t 1_A],$$

donc :

$$X_s = \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s].$$

■

**Définition 2.6** *: Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus stochastique réel adapté et continu à droite et si $T$ est un temps d'arrêt, on note $(X_t^T)_{t\in\mathbb{R}_+}$ le processus stochastique réel défini par :*

$$X_t^T = X_{t\wedge T}.$$

*Le processus $(X_t^T)_{t\in\mathbb{R}_+}$ s'appelle le processus arrêté à $T$.*

**Corollaire 2.2** *: Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale continue à droite et si $T$ est un temps d'arrêt, alors $(X_t^T)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale continue à droite.*

**Preuve.** $(X_t^T)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continue à droite ( evident). Pour montrer que c'est une martingale, il suffit de prouver que pour tout temps d'arrêt borné $S$, on a : $X_S^T \in L^1$ et

$$\mathbb{E}\left[X_S^T\right] = \mathbb{E}\left[X_0^T\right],$$

d'aprés le corollaire précédent. Or,

$$X_S^T = X_{S\wedge T},$$

et $S \wedge T$ est un temps d'arrêt borné, donc, par le théorème d'arrêt $(2,6)$, on obtient que $X_{S\wedge T} \in L^1$ et

$$\mathbb{E}\left[X_{S\wedge T}\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right].$$

■

**Lemme 2.3** *: Soit $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une martingale relativement a une filtration $(\mathcal{G}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

**a)** *Pour tout temps d'arrêt borné $S$, $Y_S \in L^1$.*

**b)** *Pour tous temps d'arrêt bornés $S, T$ vérifiant $S \leq T$,*

$$Y_S = \mathbb{E}\left[Y_T \mid \mathcal{G}_S\right], \quad \mathbb{P}\text{- } p.s.$$

**Théorème 2.7** *: Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ une sur-martingale continue à droite et fermée par $X_\infty$, variable aléatoire $\mathcal{F}_\infty$-mesurable. Soient $S$ et $T$ deux temps d'arrêt avec $S \leq T$. Alors $X_S$ et $X_T$ sont dans $L^1$ et*

$$X_S \geq \mathbb{E}\left[X_T \mid \mathcal{F}_S\right],$$

*avec la convention $X_T = X_\infty$ sur $\{T = +\infty\}$.*

**Corollaire 2.3** *: Soit $X$ une sur-martingale ( resp. une martingale) continue à droite et soient $S \leq T$ deux temps d'arrêt ( déterministiquement) bornés. Alors :*

$$X_S \geq \mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_S], \quad (\ resp. X_S = \mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_S]).$$

**Corollaire 2.4** *( Martingale arrêtée) : Si $X$ est une martingale et $T$ un temps d'arrêt, $X^T$ définie bien une martingale appelée martingale arrêtée. Elle est uniformément intégrable si $X$ l'est ou si $T$ est ( déterministiquement) borné.*

**Théorème 2.8** *( **Echantillonnage optionnel des martingales régulières**) : Soit $(X_t)$ une martingale continue à droite fermée par une v.a. $X_\infty$. Soient $\sigma$ et $\tau$ deux temps d'arrêt, tels que $\sigma \leq \tau$ presque sûrement. Alors $X_\tau$ et $X_\sigma$ sont intégrables et*

$$\mathbb{E}\left[X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right] = X_\sigma.$$

**Définition 2.7** *: Soit $X$ un processus et $T$ un temps d'arrêt. On note $X^T$ le processus définit par $X_t^T = X_{t\wedge T} = X_t 1_{\{t<T\}} + X_T 1_{\{t\geq T\}}$ appelé processus arrêté à $T$.*

**Théorème 2.9** *: Soit $X$ une martingale uniformément intégrable continue à droite et $T$ un temps d'arrêt. Alors $X^T$ est aussi une martingale uniformément intégrable continue à droite. Il s'agit également d'une $G_t$-martingale où $G_t = F_{t\wedge T}$ .*

**Preuve.** $X^T$ est continue à droite. Par le théorème d'échantillonnage des martingale régulières, on a :

$$\begin{aligned}
X_{T\wedge t} &= \mathbb{E}\left[X_T \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_T 1_{\{T<t\}} + X_T 1_{\{T\geq t\}} \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_T 1_{\{T<t\}} \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}\right] + \mathbb{E}\left[X_T 1_{\{T\geq t\}} \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_T 1_{\{T<t\}} \mid \mathcal{F}_{t}\right] + \mathbb{E}\left[X_T 1_{\{T\geq t\}} \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}\right] \\
&= X_T 1_{\{T<t\}} + \mathbb{E}\left[X_T 1_{\{T\geq t\}} \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}\right],
\end{aligned}$$

or comme $\mathbb{E}\left[X_T \mid \mathcal{F}_t\right]$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable on a que $\mathbb{E}\left[X_T \mid \mathcal{F}_t\right] 1_{\{T\geq t\}}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable donc :

$$X_{T\wedge t} = X_T 1_{\{T<t\}} + \mathbb{E}\left[X_T \mid \mathcal{F}_t\right] 1_{\{T\geq t\}}$$

et

$$X_t^T = \mathbb{E}\left[X_T \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Alors $X^T$ est une $\mathcal{F}_T$ martingale uniformément intégrable. ■

**Corollaire 2.5** *: Soit $Y$ une v.a. intégrable et soient $S$ et $T$ des temps d'arrêts. Alors*

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_S\right] \middle| \mathcal{F}_T\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_T\right] \mid \mathcal{F}_S\right] = \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_{S\wedge T}\right].$$

**Théorème d'arrêt pour une martingale uniformément intégrable :**

**Théorème 2.10** *[ **Théorème d'arrêt modifié**] : Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une martingale continue à droite par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ uniformément intégrable.*

**1)** *Pour tout temps d'arrêt $S$, la v.a. $X_S$ est intégrable ( et $\mathcal{F}_S$-mesurable).*

**2)** *Si $S$ et $T$ sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$, alors :*

$$X_S = \mathbb{E}\left[X_T \mid \mathcal{F}_S\right], \quad \mathbb{P}\text{-}p.s..$$

## 2.4 Convergence des martingales en temps continu

**Théorème 2.11** *: Une martingale continue à droite $(M_t)$, telle que :*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[M_t^2\right] < +\infty,$$

*converge p.s. et dans $L^2$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$.*

**Preuve.** Puisque $M_t^2$ est une sous-martingale, $\mathbb{E}\left[M_t^2\right]$ est une fonction croissante. Par hypothèse, elle est bornée. Donc elle converge lorsque $t \longrightarrow +\infty$. On en déduit que, pour tout

$\varepsilon > 0$, il existe $N$ tel que, si $s$, $t \geq N$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2\right] &= \mathbb{E}\left[M_t^2\right] + \mathbb{E}\left[M_s^2\right] - 2\mathbb{E}\left[M_t M_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2\right] + \mathbb{E}\left[M_s^2\right] - 2\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_t M_s\right] \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2\right] + \mathbb{E}\left[M_s^2\right] - 2\mathbb{E}\left[M_s^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2\right] - \mathbb{E}\left[M_s^2\right] < \varepsilon,
\end{aligned}$$

lorsque $s$, $t \longrightarrow +\infty$. La suite $M_t$ est donc de Cauchy dans $L^2$, elle converge vers une v.a. $M_\infty$. En faisant tendre $t \longrightarrow +\infty$ suivant les entiers on voit, par Fatou, que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(M_\infty - M_s)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\liminf_{t\to+\infty}(M_t - M_s)^2\right] \\
&\leq \liminf_{t\to+\infty} \mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2\right] \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

alors :

$$\mathbb{E}\left[(M_\infty - M_s)^2\right] < \varepsilon.$$

Donc $M_s \to M_\infty$ dans $L^2$. Si on applique l'inégalité de Doob à la martingale : $N_t = M_{s+t} - M_s$, on obtient, pour $s > N$ :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}(M_{t+s} - M_s)^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[(M_{T+s} - M_s)^2\right] \leq 4\varepsilon.$$

Pour tout $T \geq 0$, donc :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t>0}(M_{t+s} - M_s)^2\right] \leq 4\varepsilon.$$

Il en résulte en écrivant que :

$$(M_{t+s} - M_\infty)^2 \leq 2(M_{t+s} - M_s)^2 + 2(M_s - M_\infty)^2,$$

que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}(M_{t+s}-M_\infty)^2\right]\leq 16\varepsilon.$$

Il existe donc une sous suite $n_i$ telle que, *p.s.*, $\sup\limits_{t\geq 0}(M_{t+n_i}-M_\infty)\to 0$, ce qui entraîne que $M_t\to M_\infty$, *p.s.* ■

**Théorème 2.12** *: Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une sous-martingale continue à droite bornée dans $L^1$ ( i.e. $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+}\mathbb{E}\left[|X_t|\right]<+\infty$), alors $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ converge $\mathbb{P}$-p.s. quand $t\to+\infty$ vers une limite intégrable.*

**Théorème 2.13** *: Soit $p>1$. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale continue à droite bornée dans $L^p$ (i.e. $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+}\mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]<+\infty$), alors $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ converge $\mathbb{P}$-p.s. quand $t\to+\infty$ vers une limite $L^p$-intégrable.*

**Preuve.** Soit $p>1$. D'après le théorème (2.12), lorsque $t\to+\infty$,

$$X_t\to X_\infty\in L^1,\quad \mathbb{P}\text{-}p.s..$$

Montrons que $X_\infty\in L^p$. D'après le lemme de Fatou, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_\infty|^p\right] &= \mathbb{E}\left[\liminf_{t\to+\infty}\left[|X_t|^p\right]\right]\\ &\leq \liminf_{t\to+\infty}\mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]\\ &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}^+}\mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]\\ &< +\infty,\end{aligned}$$

( puisque $|X_t|^p\to|X_\infty|^p$ $\mathbb{P}$-$p.s.$ quand $t\to+\infty$ ). ■

**Remarque 2.4** *: Lorsque $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sous-martingale continue à droite, il suffit pour que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ soit bornée dans $L^1$ que :*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\mathbb{E}\left[X_t^+\right]<+\infty.$$

( i.e $x^+=x\vee 0$).

**Corollaire 2.6** *: Si $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sur-martingale positive continue à droite, alors $Y_t$ converge $\mathbb{P}$-p.s. quand $t \to +\infty$ et la limite est intégrable.*

**Preuve.** On pose $X_t = -Y_t$. Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une sous-martingale continue à droite et $X_t^+ = (-Y_t)^+ = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$. Le théorème combiné à la remarque précédente nous donne le résultat.
■

**Théorème 2.14** *(**Théorème de convergence en moyenne d'ordre 1 ou p.**) :*

**1)** *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une martingale continue à droite. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

**i)** *$(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ converge dans $L^1$ quand $t \to +\infty$.*

**ii)** *Il existe une v.a.réelle $X_\infty$ intégrable, telle que :*

$$X_t = \mathbb{E}\left[X_\infty \mid \mathcal{F}_t\right], \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

**iii)** *$(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est uniformément intégrable.*

**2)** *De plus, si $p > 1$ et si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est bornée dans $L^p$ ( i.e. $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+}\mathbb{E}\left[|X_t^p|\right] < +\infty$) alors la convergence a aussi lieu dans $L^p$ avec $X_\infty \in L^p$.*

**Preuve.**

**i)⇒ii)** ] Notons $X_\infty$ une v.a.réelle intégrable telle que $X_t$ converge vers $X_\infty$ dans $L^1$ lorsque $t \to +\infty$. Soit $0 \leq s < t$. On a :

$$\mathbb{P}\text{-}p.s., \quad \mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s.$$

En faisant tendre $t$ vers l'infini, et d'après le théorème de convergense dominée conditionnelle, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\lim_{t\to+\infty} X_t \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_\infty \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= X_s,\ \mathbb{P}\text{-}p.s.,
\end{aligned}$$

donc :

$$\mathbb{E}\left[X_\infty \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

**ii)⇒iii)** ] Posons pour $a > 0$ et $t \in \mathbb{R}^+$,

$$A_t(a) = \int_{\{|X_t|\geq a\}} |X_t| \, d\mathbb{P}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
A_t(a) &= \int_{\{|X_t|\geq a\}} |X_t| \, d\mathbb{P} \\
&= \int_{\{|X_t \geq a|\}} \mathbb{E}\left[|X_t| \mid \mathcal{F}_t\right] d\mathbb{P} \\
&\leq \int_{\{|X_t \geq a|\}} \mathbb{E}\left[|X_\infty| \mid \mathcal{F}_t\right] d\mathbb{P} \\
&= \int_{\{|X_t|\geq a\}} |X_\infty| \, d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

tel que $|X_\infty|$ etant uniformément intégrable, elle est aussi équicontinue c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $A \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(A) \leq \eta$, alors :

$$\int_A |X_\infty| \, d\mathbb{P} \leq \varepsilon.$$

Or, par l'inégalité de Markov,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_t| \geq a) &\leq \frac{1}{a}\mathbb{E}\left[|X_t|\right] \\
&\leq \frac{1}{a}\mathbb{E}\left[|X_\infty|\right] \to 0,\ \ a \to +\infty.
\end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{P}(|X_t| \geq a) \to 0 \quad a \to +\infty.$$

On en déduit que :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} A_t(a) \to 0, \quad a \to +\infty.$$

**iii)⇒ii)** ] $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est uniformément intégrable, donc elle est bornée dans $L^1$. Donc, par le théorème de convergence presque sûre, $X_t \to X_\infty$ $\mathbb{P}$-$p.s.$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$. En utilisant l'uniforme intégrabilité, on obtient que $X_t$ converge, dans $L^1$, vers $X_\infty$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

**2)** Si $p > 1$ et si $\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right] < +\infty$, alors $\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |X_t| \in L^p$. $(|X_t|^p)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est uniformément intégrable car elle est majorée par $(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} |X_t|^p) \in L^1$.

On en déduit que $X_\infty \in L^p$ car $|X_\infty|^p \leq (\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} |X_t|^p) \in L^1$ et que $X_t$ converge vers $X_\infty$dans $L^p$ lorsque $t \to +\infty$.

■

## 2.5 Variation quadratique d'une martingale continue

**Théorème 2.15** *: (* ***Théorème de décomposition de Doob)*** ***:*** *Soit $(X_t, t \in \mathbb{R}^+)$ une sous-martingale continue (par rapport à une filtration $((\mathcal{F}_t), t \in \mathbb{R}^+)$). Alors il existe un unique processus $(A_t, t \in \mathbb{R}^+)$ croissant, continu et adapté à $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}^+)$ tel que $A_0 = 0$ et $(X_t - A_t, t \in \mathbb{R}^+)$ est une martingale.*

**Définition 2.8** *: Soit $(M_t)$ une martingale continue de carré intégrable ( par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$). Alors $(M_t^2)$ est une sous-martingale et donc, d'après le théorème ci-dessus, il existe un unique processus $(A_t)$ croissant, continu et adapté à $(\mathcal{F}_t)$ tel que $A_0 = 0$ et $(M_t^2 - A_t)$ est une martingale. On note $A_t = \langle M \rangle_t$ et on appelle ce processus la variation quadratique de $(M_t)$.*

**Remarque 2.5** *:*

- *Noter qu'on a toujours par définition :*

$$\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t\right] = \mathbb{E}\left[M_t^2\right] - \mathbb{E}\left[M_0^2\right].$$

- *Du fait que le processus $(\langle M\rangle_t)$ est croissant, c'est un processus à variation bornée ( i.e. la variation quadratique d'une martingale est un processus à variation bornée).*
- *Si $(M_t)$ est une martingale continue à variation bornée, alors $M_t = M_0$ pour tout $t > 0$ ( i.e. $M_t$ est constante).*

**Proposition 2.5** *: Si $(M_t)$ est une martingale continue de carré intégrable, alors on a :*

$$\langle M\rangle_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{2^n}\left(M\left(\frac{it}{2^n}\right) - M\left(\frac{(i-1)\,t}{2^n}\right)\right)^2 \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \langle M\rangle_t\,, \quad \forall t \geq 0.$$

**Remarque 2.6** *:*

- *A priori, la convergence n'a lieu qu'en probabilité ( alors qu'elle a lieu presque sûrement dans le cas où $(M_t)$ est un mouvement Brownien standard).*
- *Bien que la variation quadratique soit une quantité aléatoire, la proposition ci-dessus illustre le fait qu'elle est une généralisation de la notion de variance pour des processus aléatoires.*

**Définition 2.9** *: Soient $(M_t)$, $(N_t)$ deux martingales continues de carré intégrable. On définit la covariation quadratique de $(M_t)$ et $(N_t)$ par*

$$\langle M, N\rangle_t = \frac{1}{4}\left(\langle M+N\rangle_t - \langle M-N\rangle_t\right).$$

**Proposition 2.6** *: Le processus $(M_tN_t - \langle M, N\rangle_t)$ est une martingale.*

**Proposition 2.7** *: Si $(M_t)$ et $(N_t)$ sont deux martingales continues de carré intégrable, alors* *on a :*

$$\langle M,N\rangle_t^{(n)}=\sum_{i=1}^{2^n}\left(M\left(\frac{it}{2^n}\right)-M\left(\frac{(i-1)\,t}{2^n}\right)\right)\left(N\left(\frac{it}{2^n}\right)-N\left(\frac{(i-1)\,t}{2^n}\right)\right)\underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}}\langle M,N\rangle_t\,,\quad \forall t\geq 0.$$

**Remarque 2.7** *: De la même manière que ci-dessus, on voit que la covariation quadratique est en quelque sorte une généralisation de la covariance pour des processus aléatoires.*
*En particulier, elle est bilinéaire et on a également la proposition suivante.*

**Proposition 2.8** *: Soient $(M_t)$, $(N_t)$ deux martingales continues de carré intégrable indépendantes et soit $c\in\mathbb{R}$. Alors*

$$\langle M,N\rangle_t=0\quad et\quad \langle cM+N\rangle_t=c^2\langle M\rangle_t+\langle N\rangle_t\,.$$

La première égalité vient du fait que si $(M_t)$ et $(N_t)$ sont deux martingales indépendantes de carré intégrable, alors $(M_tN_t)$ est une martingale.

**Théorème 2.16** *: Une martingale continue et bornée $M$ admet une variation quadratique finie $<M,M>$. De plus, $<M,M>$ est l'unique processus croissant, continu, nul en $0$ tel que $M^2-<M,M>$ soit une martingale.*

**Proposition 2.9** *: Soit $M$ une martingale continue et bornée, $T$ un temps d'arrêt. On note $M^T$ la martingale arrêtée en $T$. Alors, $<M^T,M^T>=<M,M>^T$.*

**Preuve.** Soit $<M^T,M^T>$ est l'unique processus croissant, nul en 0, continu telle que :

$$\left(M^2\right)^T-<M^T,M^T>,$$

soit une martingale.

$$\left(M^2-<M,M>\right)^T=\left(M^2\right)^T-<M,M>^T,$$

est une martingale et $<M,M>^T$ est un processus croissant, nul en 0, continu donc $<M^T,M^T>=<M,M>$ . ■

**Théorème 2.17** ***( Théorème de Lévy (seconde version)) :*** *Soit $(M_t)$ une martingale continue de carré intégrable par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$ telle que :*

$$\langle M \rangle_t = t, \quad \forall t \in \mathbb{R}+ .$$

*Alors $(M_t)$ est un mouvement Brownien standard par rapport à $(\mathcal{F}_t)$.*

**Proposition 2.10** *: Soit $(M_t)$ une martingale continue de carré intégrable ( par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$) et telle que :*

$$\lim_{t \to \infty} \langle M \rangle_t = \infty \quad p.s.$$

*Soit $T(s) = \inf \{t \geq 0 : \langle M \rangle_t \geq s\}$. On pose :*

$$\mathcal{G}_s = \mathcal{F}_{T(s)} \quad et \quad B_s = M_{T(s)}, \quad s \in \mathbb{R}_+.$$

*Alors le processus $(B_s)$ est un mouvement Brownien standard par rapport à $(\mathcal{G}_s)$.*

**Corollaire 2.7** *: Toute martingale continue de carré intégrable telle que $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \langle M \rangle_t = \infty$ p.s. s'écrit $M_t = B(\langle M \rangle_t)$, où $(B_t)$ est un mouvement Brownien standard.*

# Bibliographie


[1] A. Popier. Calcul stochastique, applications en finance, 2016-2017.

[2] B. Lapeyre D. Lamberton et. INTRODUCTION AU CALCUL STOCHASTIQUE APPLIQUÊ Â LA FINANCE Université Paris-Est, Professeur à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée, France, Université Paris-Est,Professeur à l'École des Ponts Paris-Tech,France. 2012 Pages 53-54.

[3] C. Chorro. Cours de calcul stochastique. Master M2 IRFA Septembre 2006.

[4] C. TUDOR. Cours de CALCUL STOCHASTIQUE. Université de Panthéon-Sorbonne Paris 1 October 26, 2007.

[5] H. Guiol. Calcul stochastique avancé. TIMB-TIMC-IMAG 2006.

[6] J. Yves Dauxois. Cours de probabilités, Septembre 2013.

[7] J. Christophe Mourrat. Processus stochastiques, 17 décembre 2014.

[8] J. Christophe Breton. Processus stochastiques, M2 Mathématiques. Université de Rennes 1 Septembre-Octobre 2018.

[9] J. Claude lafeut. Processus et intégrales stochastiques, Elipses Édition marketing S.A., 2014, 32, rue Bargue 75740 parise cedex 15.

[10] M. Bossy INRIA. Introduction à la modélisation financière en temps continue et calcul stochastique. 16 Novembre 2013.

[11] M. Bossy INRIA. Introduction à la modélisation financière en temps continue et calcul stochastique. 16 Novembre 2013.

[12] N. Guillotin-Plantard. Introduction au calcul stochastique. 13 novembre 2009.

[13] O. Lévêque. Cours De Probabilités et calcul stochastiques. Semestre d'hiver 2004-2005.

[14] P. Bougerol. Calcul stochastique des martingales continues, M2-Probabilités et finance. Université Pierre, et Marie, Paris 6 2015-2016.

[15] V. Girardin N. Limnios. probabilités, Processus stochastiques et applications. Vuibert-janvier2014-5allée de la 2$^{e}$ DB, 75015.

[16] Y. Caumel. Probabilités et processus stochastiques. 2015, Lavoisier, Paris ISBN : 978-2-7462-4717-8.

# Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

| | | |
|---|---|---|
| $v.a$ | : | Variable aléatoire. |
| $\mathbb{F}$ | : | Filtration. |
| $\mathbb{T}$ | : | Intervalle de temps, ou ensemble d'indices. |
| $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ | : | La tribu borélienne de $X$. |
| $\mathbb{P}(A)$ | : | La probabilité d'événement $A$. |
| $\mathbb{P}$ | : | Une mesure de probabilité sur $\Omega$. |
| $\sigma(M)$ | : | La tribu engendrée par $M$. |
| $\mathbf{1}_A$ | : | Fonction indicatrice de A : vaut 1 si $\omega \in A$ et 0 sinon. |
| $\mathbb{E}(X)$ | : | Espérance de la variable aléatoire $X$. |
| $Cov(X,Y)$ | : | Covariance des variables aléatoires $X$ et $Y$. |
| $\mathbb{V}ar(X)$ | : | Variance de la variable aléatoire $X$. |
| exp | : | Exponentiel. |

| | | |
|---|---|---|
| $\Omega$ | : | Un ensemble fondamentale. |
| $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ | : | Ensemble des nombres naturelles réels respectivement. |
| $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ | : | Ensemble des nombres entiers rationneles respectivement. |
| $p.s.$ | : | presque sûrement. |
| $\mathbb{E}[X]$ | : | Espérance mathématique ou moyenne du v.a. $X$. |
| $\mathcal{F}$ | : | La tribu (ou $\sigma$-algèbre) sur $\Omega$, ie une très grande famille de sous-ensembles. |
| $(X_t)_{t\in T}$ | : | Processus stochastique. |
| $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ | : | Loi normale de paramètre $m$ et $\sigma^2$. |
| $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}}$ | : | Filtration canonique de processus stochastique. |
| $\tau$ | : | temps d'arrêt. |
| $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ | : | Espérance mathématique de $X$ sachant la tribu $\mathcal{F}$. |
| $L^2$ | : | Ensemble des fonctions mesurables de carré intégrables. |
| $L^1, L^p$ | : | L'espace des fonctions intégrables (respectivement $p$-intégrables). |

# Annexe B : Rappels

◂ **Inégalité de Jensen conditionnelle**

**Définition 2.10** *:Soient $X$ une v.a., $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe telle que $\mathbb{E}( |\varphi(X)| < \infty$. Alors*

$$\varphi(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) \leq \mathbb{E}[\varphi(X \mid \mathcal{G})].$$

telle que $\mathcal{B}$ sous tribu de $\mathcal{F}$.

◂ **Lemme de Fatou conditionnel**

**Lemme 2.4** *: Soit $(X_t)_{t\geq 0}$une suite des variables aléatoires de $\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on a :*

$$\mathbb{E}\left[\liminf_{t \longrightarrow +\infty} X_t \mid \mathcal{B}\right] \leq \liminf_{t \longrightarrow +\infty} \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{B}].$$

**Rappelle :** $\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est l'ensemble des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et $\mathcal{F}$-mesurables.

**Remarque 2.8** *: Les théorèmes de convergence et le lemme de Fatou est vrai dans le cas non coditionnel.*

◂ **Inégalité de Holder**

Pour tous réels $p$ et $q$ tels que $p > 1, q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et toutes v.a. $X$ et $Y$ respectivement dans $L^p(\Omega; A; P)$ et $L^q(\Omega, A, P)$, on a : $\| XY \|_1 \leq \| X \|_p \| Y \|_q$.

**Théorème 2.18** *L'espace $L_1(\Omega, A, P)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, normé par $\| X \|_{L_1} = E(| X |) = \int | X | dP$.*

◂ **Théorème de la convergence monotone conditionnelle**

**Théorème 2.19** *: Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$*une suite des variables aléatoires p.s croissante dans* $\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *de limite* $X$*. Pour toute sous tribu* $\mathcal{B}$ *de* $\mathcal{F}$, $(\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{B}))_{t\geq 0}$ *est p.s croissante et converge vers* $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B})$ *alors :*

$$\begin{aligned}\lim_{t\longrightarrow+\infty} \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{B}] &= \mathbb{E}\left[\lim_{t\longrightarrow+\infty} X_t \mid \mathcal{B}\right] \\ &= \mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}], \ \mathbb{P}\text{-}p.s..\end{aligned}$$

◂ **Inégalité de Cauchy-Schwartz**

Soient $X, Y$ deux v.a. de carré intégrable. Alors

**i)** $XY$ est intégrable,

**ii)** $\mathbb{E}[XY] \leq (\mathbb{E}[X^2])^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}[Y^2])^{\frac{1}{2}}$.

◂ **Théorème de Fubini**

Soit $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors, pour tout $x \in E_1$, la fonction

$$y \in E_2 \longmapsto \int f(x,y)dm_1(x),$$

est mesurable et

$$\int (\int f(x,y)dm_1(x))dm_2(y) = \int (\int f(x,y)dm_2(y))dm_1(x).$$

◂ **Inégalité de Markov**

pour tout v.a. $X$ presque sûrement positive et toute constante a strictement positive :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$