République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Sebti imène

Titre :

Lien entre principe du maximum stochastique et principe de la programmation dynamique aux sens de viscosité

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Mansouri Badereddine**	UMKB	Président
Dr.	**Ghoul Abdelhak**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Boughrara Saliha**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

REMERCIEMENTS

Nous remercions Allah tout puissant qui nous donné la force et la volonté pour pouvoir finir ce mémoire de master.

Nous tenons à remercier vivement notre encadreur Dr : **Ghoul Abdelhak** d'avoir accepté de diriger ce projet et pour la confiance qu'il nous accordées, ses encouragements, et ses précieux conseils du début jusqu'à la fin de ce travail.

Je remercie également tous les professeurs du Département de mathématique del'Université de Biskra qui.. m'ont transmis la connaissance et l'aide nécessaires à la réalisation cie ce travail.

Enfin, j'adresse mes sincères remerciements à tous les membres de ma famille et à mes amis qui m'onttoujours encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire.

merci à tous.

Table des matières

Remerciements **i**

Table des matières **ii**

Introduction **1**

1 Le calcul stochastique **3**

1.1 Généralités sur les processus stochastiques 3

1.2 Calcul d'Itô 7

1.2.1 Intégrale stochastique 7

1.2.2 Propriétés d'intégrale stochastique 7

1.2.3 Processus d'Itô 8

1.2.4 Formule d'Itô 9

1.3 Equations différentielles stochastiques(EDS) 10

2 Principe du maximum stochastique cas convexe **12**

2.1 Formulation du problème 12

2.2 fonction de coût 13

2.2.1 L'Hamiltonien 14

2.3 Equation adjoint 14

2.4 Condition nécessaire d'optimalité 15

2.4.1 Estimation de solution 15

2.4.2 Linéairisation de l'équation d'état 18

3 Lien entre PMS et PPD aux sens de viscosité 25

3.1 Formulation du probléme 25

3.2 Le Principe de la programmation dynamique 27

3.3 Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 28

3.4 solutions de Viscosité 29

3.4.1 unicité de solution de viscosité 32

3.4.2 théoreme de vérification au sens de viscosité 36

3.5 Relation entre PMS et PPD aux sens de viscosité 38

Bibliographie 43

Annexe A : Résultats utiles 44

Annexe B : Abréviations et Notations 46

Introduction

Les problémes de contrôle optimal stochastique ont un grand nombre d'applications dans les domaines de l'économie et à la finance. Il existe deux approches de résolution du probléme de contrôle optimal, bien connues, qui sont le principe du maximum et la méthode de la programmation dynamique. Un probléme de contrôle optimal stochastique défini comme suit :

On considère l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t, u_t)dt + \sigma(t, x_t, u_t)dB_t & t \in [0, T] \\ x_0 = x \end{cases},$$

avec $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien défini sur un espace probabilisé filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}\right)$.

On note U l'ensemble de tous les processus $(u_t)_{t \geq 0}$ progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et les éléments de U sont appelés processus de contrôle.

L'objet du contrôle optimal est de minimiser (ou maximiser) la fonction de coût $J(.)$ sur l'ensemble des contrôles admissibles, généralement cette fonction coût est donné par :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, x_t, u_t)\, dt + g(x_T)\right] .$$

Si en partant d'un état x à l'instant t on définit pour tout processus de contrôle u_t, le coût est donné par :

$$J(t, x, u) = \mathbb{E}\left[\int_t^T f(s, x_s, u_s)\, ds + g(x_T)\right] ,$$

où g et f sont donnés et x_t est la trajectoire contrôlée par u.

Pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, s'il existe un contrôle $u^* \in U$ qui vérifie :

$$v(t,x) = J(t,x,u^*) = \inf_{u \in U} J(t,x,u) \ ,$$

il est appelé contrôle optimal et v est appelée la fonction de valeur.

Dans ce mémoire nous intéressons d'étudier la relation entre deux approches de résolution du problème de contrôle optimal, qui sont le principe du maximum stochastique, et la méthode de la programmation dynamique dans le contexet de solutions de viscosité.

Ce mémoire est structuré de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on va expliquer la théorie du calcul stochastique, en donnant les définitions et les propriétés des processus continue ainsi que leurs résultats principaux qui nous permettre de définir l'intégrale stochastique. On parle aussi sur les théorèmes d'existence et d'unicité pour EDS.

Dans le deuxième chapitre on va étudier le problème du contrôle optimal par le principe du maximum stochastique (condition nécessaire).

Dans le dernière chapitre on va expliquer deuxieme approche, la progrmmation dynamique et de la notion de solution de viscosité, puis on donne la relation entre les deux approches.

Chapitre 1

Le calcul stochastique

1.1 Généralités sur les processus stochastiques

Définition 1.1.1 ***(Processus stochastique) :*** *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires* $X = \{X_t, t \in I\}$ *définies sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*. Pour tout* $t \in I$, X *est une variable aléatoire.*

Remarque 1.1.1 *: les fonctions* $t \longmapsto X_t(\omega)$ *sont appelées trajectoires du processus stochastique* X_t*.*

Définition 1.1.2 ***(Processus a trajectoire continue) :*** *On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications* $t \longmapsto X_t(\omega)$ *sont continues pour presque tout* ω*.*

Définition 1.1.3 ***(càdlàg et càglàd) :***

- *Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche.*
- *Un processus est dit càglàd (continu à gauche, pourvu de limites à droite) si ses trajectoires sont continues à gauche et pourvues de limites à droite.*

Définition 1.1.4 ***(Filtration) :*** *Une filtration sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est une famille croissante* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *de sous-tribus de* $\mathcal{F}$*, c'est à dire :* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ *pour tous* $s \leq t$.

- *On dit que* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *est un espace de probabilite filtré.*
- *On appelle filtration naturelle du processus* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *si :*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(X_s, 0 \leq s \leq t\right)$$

c'est la plus petite σ*-algébre par rapport à laquelle* X_s *est mesurable pour tous* $0 \leq s \leq t$.

Définition 1.1.5 ***(Processus mesurable) :*** *Soit* $X = (X_t, t \geq 0)$ *un processus défini sur* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$*. Le processus* X *est dit mesurable si l'applicaion :*

$$X : \begin{array}{ll} [0,\infty[\times \Omega & \rightarrow \mathbb{R}^d \\ (t,\omega) & \rightarrow X_t(\omega) \end{array},$$

est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,\infty[) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Définition 1.1.6 ***(processus adapté) :*** *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si pour tout* $t \geq 0$, X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Définition 1.1.7 ***(Processus progressivement mesurable) :*** *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit progressivement mesurable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si l'application*

$$X : \begin{array}{ll} [0,t] \times \Omega & \rightarrow \mathbb{R}^d \\ (s,\omega) & \rightarrow X_s(\omega) \end{array},$$

est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Définition 1.1.8 ***(Processus de Markov) :*** *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique.*$(X_t)_{t\geq 0}$

est appelé Processus de Markov si pour tout $s \leq t$, tout f fonction meurable bornée on a :

$$\mathbb{E}\left[f\left(X_t\right) \mid \mathcal{F}_s\right] \quad = \mathbb{E}\left[f\left(X_t\right) \mid X_s\right] \quad .$$

Proposition 1.1.1 *: Soit $x \in \mathbb{R}^n$, soient $0 \leq r \leq s \leq t$, on a :*

$$X_s^{r,x} = X_t^{s,X_s^{r,x}} \qquad \mathbb{P}-p.s \quad .$$

Définition 1.1.9 ***(Mouvement Brownien) :*** *Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t \geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé filtré. Un mouvement Brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ est un processus adapté à trajectoires continues tel que :*

- *$\forall\ s \leq t$, $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$.*

- *$B_t - B_s$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance $t - s$.*

Définition 1.1.10 *: On dit que $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard si :*

$$B_0 = 0, \ \mathbb{P}{-}p.s \quad \mathbb{E}[B_t] = 0 \quad et \quad \mathbb{E}[B_t^2] = t \ \cdot$$

Proposition 1.1.2 *: Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien, alors :*

i) *Pour tout $s > 0$, $W_t = B_{t+s} - B_s$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$.*

ii) *Soit c réel positive, $W_t = cB_{\frac{t}{c^2}}$ est un mouvement Brownien.*

Proposition 1.1.3 *: Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvemet Brownien alors presque sûrement on a :*

i) *B_t n'est pas différentiable en aucun point t.*

ii) *B_t n'est pas à variation finie en aucun point t.*

Définition 1.1.11 ***(Temp d'arrêt) :*** *Un temps d'arrét par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *est une variable aléatoire* τ *a valeur dans* $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ *telle que :*

$$\{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega / \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad t \geq 0 \quad .$$

Définition 1.1.12 ***(Martingale) :*** *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *adapte par rapport une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *et tel que pour tout* $t \geq 0$, $X_t \in \mathbb{L}^1(\Omega)$ *est appelé :*

- *martingale si pour* $s \leq t$ *:* $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$;
- *surmartingale si pour* $s \leq t$ *:* $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s$;
- *sous-martingale si pour* $s \leq t$ *:* $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s$;

Théorème 1.1.1 ***(Propriété de martingale du mouvement Brownien) :*** *Le mouvement Brownien* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale par rapport à la filtration canonique* $\sigma\,(X_u,\, 0 \leq u \leq t)$.

Proposition 1.1.4 ***:*** *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvemet Brownien, alors :*

i) $B_t^2 - t$ *est une martingale.*

ii) *Pour tout* $\gamma \in \mathbb{R}$, $\exp(\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t)$ *est une martingale.*

Théorème 1.1.2 ***:*** *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement Brownien sur un espace de probabilité filtréet* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$. M_t *une martingale* $\mathcal{F}_t$*-adapté, alors il existe un processus adapté* U_s *tel que :*

$$M_t = M_0 + \int_0^t U_s dB_s \quad \mathbb{P} - p.s \quad .$$

Définition 1.1.13 ***(Variation totale et Variation quadratique) :*** *On définit la variation infinitésimale d'ordre p d'un processus* X *sur* $[0,T]$ *associée à une subdivision* $\Pi_n = (t_1^n, ..., t_n^n)$ *de* $[0,T]$ *par :*

$$V_T^p(\Pi_n) := \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right|^p \quad .$$

Si $V_T^p(\ \Pi_n)$ *a une limite dans un certain sens (convergence* L^P*,convergence p.s.) lorsque*

$$\Pi_n := \|\Pi_n\|_\infty = \max_{i\leq n} \left|t_{i+1}^n - t_i^n\right| \to 0 \quad ,$$

la limite ne dépend pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons variation d'ordre p *de* X *sur* $[0,T]$*. En particulier :*

- *si* $p = 1$*, la limite s'appelle variation totale de* X *sur* $[0,T]$ *;*

a) *pour tout* T*,* V_T^1 *est fini on dit que* X *est à variation finie.*

b) *pour tout* T*,* V_T^1 *est borné on dit que* X *est à variation finie.*

- *si* $p = 2$*, la limite s'appelle variation quadratique de* X *sur* $[0,T]$ *notée* $\langle X\rangle_T$ *.*

1.2 Calcul d'Itô

1.2.1 Intégrale stochastique

On définit l'intégrale stochastique par rapport au mouvement Brownien de la forme suivant :

$$\int_0^T X(t)\,dB(t) \quad ,$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien, et $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique répondant à certains critères d'intégrabilité. La manipulation de cette forme d'intégrale est facilitée par l'utilisation de la formule d'Itô, faisant référence à son auteur, le mathématicien Kiyoshi Itô.

1.2.2 Propriétés d'intégrale stochastique

1- $\int\limits_0^t \theta_s dB_s$ est linéaire.

2- $\int\limits_0^t \theta_s dB_s$ est continue $p.s.$

3- . $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté.

4- $\mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right) = 0$ et $var\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s^2 ds\right)$.

5- Propriétés disométrie : $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$.

6- Additivité **:** pour $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$

$$\int_s^t \theta_v dB_v = \int_s^u \theta_v dB_v + \int_u^t \theta_v dB_v \quad .$$

7- $\int_0^t \theta_s dB_s$ est une $\mathcal{F}$-martingale.

8- La variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds \quad .$$

9- La covariation quadratique entre deux intégrales stochastiques est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^u \phi_s dB_s \right\rangle = \int_0^{t\wedge u} \theta_s \phi_s ds \quad .$$

1.2.3 Processus d'Itô

Définition 1.2.1 ***:*** *Un processus d'Ito est un processus de la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \delta_s dB_s \quad \mathbb{P} - p.s \quad ,$$

avec X_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable, δ et φ sont deux processus progressivement mesurable vérifiant les conditions, $\mathbb{P}-p.s$:

$$\int_0^t |\varphi_s|\, ds < +\infty \quad et \quad \int_0^t |\delta_s|^2\, ds < +\infty \quad .$$

Le coefficient φ s'appelle la dérivée (ou le drift) et δ son coefficient de diffusion.

1.2.4 Formule d'Itô

Théorème 1.2.1 ***(Première formule d'Itô) :*** *Supposons f de classe $\mathbb{C}^2$,alors :*

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, \delta_s^2 ds \end{aligned} .$$

Théorème 1.2.2 ***(Deuxième formule d'Itô) :*** *Soient X un Processus d'Itô et f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^1$ par rapport à t et de classe $\mathbb{C}^2$ par rapport à x, on a :*

$$\begin{aligned} f(t, X) &= f(0, X_0) + \int_0^t f'_t(s, X_s)\, ds + \int_0^t f'_x(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\, d\langle X, X\rangle_s \\ &= f(0, X_0) + \int_0^t f'_t(s, X_s)\, ds + \int_0^t f'_x(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\, \delta_s^2 ds \end{aligned} .$$

On peut écrire cette formule sous forme différentielle :

$$df(t, X) = \left[f'_t(t, X_t) + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t)\, \delta_t^2\right] dt + f'_x(t, X_t)\, dX_t \quad .$$

Proposition 1.2.1 *: soient X et Y deux processus d'Itô on a :*

$$X_tY_t \quad = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s \; dX_s + \langle X, Y \rangle_t \quad .$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par parties.

1.3 Equations différentielles stochastiques(EDS)

Définition 1.3.1 *: Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme :*

$$\begin{cases} dX_t & = b(t, Xt)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 & = Z \end{cases} \quad . \tag{1.1}$$

Où sous forme intégral

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \quad \forall t \geq 0 \quad ,$$

où $Z \in \mathbb{R}^n$, B_t un mouvement Brownien et $b(s, X_s)$ et $\sigma(s, X_s)$ sont des fonctions continues.

Définition 1.3.2 *: Une solution forte à l'équation* (1.1) *est un processnsn $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ continu qui est $\mathcal{F}_t$-adapté tel que :*

- $\displaystyle\int_0^t |b(s, X_s)|^2 \, ds + \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2 \, dB_s < +\infty.$
- *X vérifie* (1.1).

Théorème 1.3.1 ***(Condition d'existence et unicité d'une solution forte) :*** *Soit b et σ deux fonctionss continues, on suppose qu'il existe une constante K telle que pour tout $t \in [0, T]$, x, y dans $\mathbb{R}^n$:*

- $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \quad \leq K|x - y|$ *(b et σ lipschitziennes).*
- $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K|1 + |x||$ *(condition de croissance linéaire).*

- $\mathbb{E}(Z^2) < +\infty$.

Alors pour tout $t \geq 0$, l'équation (1.1) admet une solution unique dans l'intervalle $[0, T]$ De plus cette solution vérifie :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\right] < +\infty$$

Chapitre 2

Principe du maximum stochastique cas convexe

Dans ce chapiter, on s'intéresse au principe du maximum stochastique. Il spécifie que tout contrôle optimal et la trajectoire associée vérifient un systéme d'équations différentielles de type Hamiltonien. Nous allons aborder le principe maximum stochastique dans les quelles le coefficient de diffusion dépend explicitement de la variable de contrôle u sur l'ensemble des contrôle admissible $\mathbf{U}_{ad}$.

2.1 Formulation du problème

Soient $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé filtré, $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien d-dimentionel, T un réel strictement positif, et U un sous ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. On suppose que : $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} = \sigma\ (B_s, 0 \leq s \leq t)$ est la filtration naturelle du mouvement Brownien.

Définition 2.1.1 *(**contrôle**) : On appelle contrôle tout processus $u = (u_t)_{t\in[0,T]}$ adapté par rapport à une filtration, de carré intégrable et prend ses valeurs dans un borélien $\mathbb{A}$ de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 2.1.2 ***(contrôle admissible) :*** *On appelle contrôle admissible tout processus $u = (u_t)_{t\in[0,T]}$ mesurable et $\mathcal{F}_t$- adapté à valeur dans un borélien $\mathbb{A}$ de $\mathbb{R}^n$. On note par $\mathbf{U}_{ad}$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles .*

$$\mathbf{U}_{ad} = \{u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{A},\ \textit{tel que } u \textit{ est mesurable et } \mathcal{F}_t\textit{-adapté}\} \quad .$$

Considérons maintenant l'équation différentielle stochastique contrôlée suivante :

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t, u_t)dt + \sigma(t, x_t, u_t)dB_t \quad t \in [0,T] \\ x_0 = x \end{cases} , \tag{2.1}$$

où

$$\begin{aligned} b(t, x_t, u_t) &\quad : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n \\ \sigma(t, x_t, u_t) &\quad : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times d} \end{aligned} .$$

2.2 fonction de coût

Soient f et g deux fonctions définies comme suit : $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit x_t la solution forte de l'EDS contrôlée (2.1), on définie la fonction coût par :

$$J(u) \quad = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, x_t, u_t)\, dt + g(x_T)\right] \tag{2.2}$$

où $g(x_T)$ représente le coût final et $f(t, x_t, u_t)$ le coût courant.

Le but de contrôle optimal est de minimiser la fonction de coût $J(u)$, sur un ensemble de contrôles admissibles $\mathbf{U}_{ad}$. Alors un contrôle u^* est optimal si :

$$J(u^*) = \inf_{u\in U} J(u) \quad . \tag{2.3}$$

Hypothèses

(H_1) Les fonctions b, σ et f, g sont continument dérivables en leurs variables.

(H_2) Les dérivées b_x,b_u,σ_x,σ_u,f_x,f_u et g_x sont continues en (x, u) et uniformement bornée.

(H_3) b, σ et f sont bornées par $M(1 + |x| + |u|)$ et g est bornée par $K(1 + |x|)$ tel que : $M > 0$ et $K > 0$.

2.2.1 L'Hamiltonien

L'Hamiltonien associé à notre problème de contrôle :

$$H : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n\times n}) \to \mathbb{R}$$

est défini par :

$$H(t, x_t, u_t, p_t, q_t) := f(t, x_t, u_t) + p_t b(t, x_t, u_t) + q_t \sigma(t, x_t, u_t)$$

2.3 Equation adjoint

Soit u_t^* un contrôle optimal et soit x_t^* la trajectoire optimal correspondant. Ensuite, nous considérons un couple (p_t, q_t) des processus adaptés de carrés intégrables acossiés à (x^*, u^*).

L'équation adjointe est une équation différentielle stochastique rétrograde linéaire donner sous la forme :

$$\begin{cases} dp_t & = -[f_x(t, x_t^*, u_t^*) + p_t b_x(t, x_t^*, u_t^*) + q_t \sigma_x(t, x_t^*, u_t^*)]dt + q_t dB_t \\ p_T & = g_x(x_T^*) \end{cases}.$$

En utilisant la définition du Hamiltonien, nous obtenons l'équation adjoint suivante :

$$\begin{cases} dp_t & = -H_x(t, x_t^*, u_t^*, p_t, q_t)dt + q_t dB_t \\ p_T & = g_x(x_T^*) \end{cases} . \tag{2.4}$$

2.4 Condition nécessaire d'optimalité

Le but du Principe du maximum stochastique est de trouver des Conditions nécessaire d'optimalité vérifiées par un contrôle optimal et pour cela, on se donne contrôle optimal u^*minimisant le coût J sur $\mathbf{U}_{ad}$ et soit x_t^* la trajectoire optimale. c'est à dire la solution de l'équation d'état associée à u_t^*.

Théorème 2.4.1 *: Soit u^* un contrôle optimal avec procrssus d'état correspondant x_t^*, ensuite il existe un processus adapté $(p_{t,}q_t)$ qui est la solution unique de l'EDSR (2.4) telle que :*

$$H_u(t, x_t^*, u_t^*, p_t, q_t)(v_t - u_t^*) \geq 0 \quad \mathbb{P} - p.s \quad \forall v_t \in U$$

2.4.1 Estimation de solution

Soit x_t^* la trajectoire optimale, c'est à dire la solution de l'équation (2.1) associée à u_t^*.On perturbe le contrôle u_t^* à l'aide du contrôle u_t^ε défini comme suit :

$$u_t^\varepsilon = u_t^* + \varepsilon v_t \quad \varepsilon \in [0, 1]$$

Par définition u_t^ε est un processus mesurable et $\mathcal{F}_t$- adapté à valeurs dans $\mathbb{A}$, donc $u_t^\varepsilon \in \mathbf{U_{ad}}$.On note par x_t^ε la solution de (2.1)et par $J(u_t^\varepsilon)$ la fonction coût associée au u_t^ε . Notre objectif est l'estimation des solutions x_t^* et x_t^ε, on se base sur le lemme suivant :

Lemme 2.4.1 *: Soient x_t^* et x_t^ε les solutions de (2.1) associées respectivement à u_t^* et u_t^ε alors on a :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |x_t^\varepsilon - x_t^*|^2\right] \leq C.\varepsilon^2$$

Preuve. : Par hypothèse on a :

$$
\begin{aligned}
x_t^* &= x + \int_0^t b(s, x_s^*, u_s^*)ds + \int_0^t \sigma(s, x_s^*, u_s^*)dB_s \\
x_t^\varepsilon &= x + \int_0^t b(s, x_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon)ds + \int_0^t \sigma(s, x_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon)dB_s
\end{aligned}
$$

On obtient :

$$
x_t^\varepsilon - x_t^* = \int_0^t \left[b(s, x_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon) - b(s, x_s^*, u_s^*)\right] ds + \int_0^t \left[\sigma(s, x_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon) - \sigma(s, x_s^*, u_s^*)\right] dB_s
$$

En ajoutant et en retranchant le terme $\int_0^t b(s, x_s^*, u_s^\varepsilon)ds$ et $\int_0^t \sigma(s, x_s^*, u_s^\varepsilon)dB_s$, on trouve :

$$
\begin{aligned}
x_t^\varepsilon - x_t^* &= \int_0^t \left[b(s, x_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon) - b(s, x_s^*, u_s^\varepsilon)\right] ds + \int_0^t \left[b(s, x_s^*, u_s^\varepsilon) - b(s, x_s^*, u_s^*)\right] ds \\
&+ \int_0^t \left[\sigma(s, x_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon) - \sigma(s, x_s^*, u_s^\varepsilon)\right] dB_s + \int_0^t \left[\sigma(s, x_s^*, u_s^\varepsilon) - \sigma(s, x_s^*, u_s^*)\right] dB_s
\end{aligned}
$$

En passant aux ésperances, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|x_t^\varepsilon - x_t^*\right|^2 &\leq \int_0^t \mathbb{E}\left|b(s, x_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon) - b(s, x_s^*, u_s^\varepsilon)\right|^2 ds + \int_0^t \mathbb{E}\left|b(s, x_s^*, u_s^\varepsilon) - b(s, x_s^*, u_s^*)\right|^2 ds \\
&+ \int_0^t \mathbb{E}\left|\sigma(s, x_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon) - \sigma\left(s, x_s^*, u_s^\varepsilon\right)\right|^2 ds + \int_0^t \mathbb{E}\left|\sigma\left(s, x_s^*, u_s^\varepsilon\right) - \sigma(s, x_s^*, u_s^*)\right|^2 ds
\end{aligned}
$$

et comme $(a+b+c)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$ alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|x_t^{\varepsilon}-x_t^*\right|^2 \quad & \leq 3\int_0^t \mathbb{E}\left|b(s,x_s^{\varepsilon},u_s^{\varepsilon})-b(s,x_s^*,u_s^{\varepsilon})\right|^2 ds+3\int_0^t \mathbb{E}\left|b(s,x_s^*,u_s^{\varepsilon})-b(s,x_s^*,u_s^*)\right|^2 ds \\
& +3\int_0^t \mathbb{E}\left|\sigma(s,x_s^{\varepsilon},u_s^{\varepsilon})-\sigma\left(s,x_s^*,u_s^{\varepsilon}\right)\right|^2 ds+3\int_0^t \mathbb{E}\left|\sigma\left(s,x_s^*,u_s^{\varepsilon}\right)-\sigma(s,x_s^*,u_s^*)\right|^2 ds
\end{aligned}$$

Puisque b et σ sont lipschitzienne en x et en u, on a :

$$\mathbb{E}\left|x_t^{\varepsilon}-x_t^*\right|^2 \quad \leq 6\int_0^t \mathbb{E}\ \left|x_t^{\varepsilon}-x_t^*\right|^2 ds+6\int_0^t \mathbb{E}\left|u_s^{\varepsilon}-u_s^*\right|^2 ds$$

et par passage au sup sur $[0,T]$, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|x_t^{\varepsilon}-x_t^*\right|^2\right] \quad \leq 6\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|x_t^{\varepsilon}-x_t^*\right|^2\right] ds+6\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|u_s^{\varepsilon}-u_s^*\right|^2\right] ds$$

Puisque $u_s^{\varepsilon}=u_s^*+\varepsilon v_s$, alors on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|x_t^{\varepsilon}-x_t^*\right|^2\right] \quad \leq 6\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|x_t^{\varepsilon}-x_t^*\right|^2\right] ds+M_t^{\varepsilon}$$

où

$$M_t^{\varepsilon}=6\varepsilon^2\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|v_s\right|^2\right] ds$$

Comme $\mathbb{E}\left[\int_0^t \sup_{t\in[0,T]}\left|v_s\right|^2 ds\right] \leq \infty$ alors on a :

$$M_t^{\varepsilon} \leq N.\varepsilon^2$$

Ceci implique que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|x_t^\varepsilon - x_t^*|^2\right] \quad \leq 6\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|x_s^\varepsilon - x_s^*|^2\, ds\right] + N.\varepsilon^2$$

En appliquant le lemme de Gronwall on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|x_t^\varepsilon - x_t^*|^2\right] \leq C.\varepsilon^2$$

■

2.4.2 Linéairisation de l'équation d'état

On introduit l'équation variationelle suivante :

$$\begin{cases} dy_t & = \left[b_x(t,x_t^*,u_t^*)y_t + b_u(t,x_t^*,u_t^*)v_t\right]dt + \left[\sigma_x(t,x_t^*,u_t^*)y_t + \sigma_u(t,x_t^*,u_t^*)v_t\right]dB_t \\ y_0 & = 0 \end{cases}, \tag{2.5}$$

avec y est la solution unique de l'équation (2.5).

Posons :

$$\Gamma_t^\varepsilon = \frac{x_t^\varepsilon - x_t^*}{\varepsilon} - y_t \tag{2.6}$$

On veut approcher Γ_t^ε par une forme linéairisée de l'équation (2.1), nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.4.2 *: On considère x_t^* et x_t^ε les trajéctoires associées respectivement à u_t^* et u_t^ε. On a :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left|\frac{x_t^\varepsilon - x_t^*}{\varepsilon} - y_t\right|^2 = 0$$

Preuve. : En dérive (2.6), on obtient

$$d\Gamma_t^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\left[dx_t^\varepsilon - dx_t^*\right] - dy_t$$

En remplaçant dx_t^{ε}, dx_t^* et dy_t par leurs valeurs on obtient :

$$\begin{aligned} d\Gamma_t^{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon}\left[b(t,x_t^{\varepsilon},u_t^{\varepsilon})dt+\sigma(t,x_t^{\varepsilon},u_t^{\varepsilon})dB_t\right] \\ &-\frac{1}{\varepsilon}\left[b(t,x_t^*,u_t^*)dt+\sigma(t,x_t^*,u_t^*)dB_t\right] \\ &-\left[b_x(t,x_t^*,u_t^*)y_t+b_u(t,x_t^*,u_t^*)v_t\right]dt \\ &-\left[\sigma_x(t,x_t^*,u_t^*)y_t+\sigma_u(t,x_t^*,u_t^*)v_t\right]dB_t \end{aligned}$$

Ceci qui nous donne :

$$\begin{aligned} d\Gamma_t^{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon}\left[b(t,x_t^{\varepsilon},u_t^{\varepsilon})-b(t,x_t^*,u_t^*)\right]dt+\frac{1}{\varepsilon}\left[\sigma(t,x_t^{\varepsilon},u_t^{\varepsilon})-\sigma(t,x_t^*,u_t^*)\right]dB_t \\ &-\left[b_x(t,x_t^*,u_t^*)y_t+b_u(t,x_t^*,u_t^*)v_t\right]dt-\left[\sigma_x(t,x_t^*,u_t^*)y_t+\sigma_u(t,x_t^*,u_t^*)v_s\right]dB_t \end{aligned} \tag{2.7}$$

Par le développement de Taylor avec rèste intégrale aux points (x,u) et l'ordre 1 des fonctions $b(t,x_t,u_t)$ et $\sigma(t,x_t,u_t)$, on a :

$$\begin{aligned} b(t,x_t^{\varepsilon},u_t^{\varepsilon})-b(t,x_t^*,u_t^*) &= \int_0^1\left[b_x\left(t,x_t^*+\theta\left(x_t^{\varepsilon}-x_t^*\right),u_t^*+\theta\left(u_t^{\varepsilon}-u_t^*\right)\right)\left(x_t^{\varepsilon}-x_t^*\right)\right]d\theta \\ &+\int_0^1\left[b_u\left(t,x_t^*+\theta\left(x_t^{\varepsilon}-x_t^*\right),u_t^*+\theta\left(u_t^{\varepsilon}-u_t^*\right)\right)\left(u_t^{\varepsilon}-u_t^*\right)\right]d\theta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sigma(t,x_t^{\varepsilon},u_t^{\varepsilon})-\sigma(t,x_t^*,u_t^*) &= \int_0^1\left[\sigma_x\left(t,x_t^*+\theta\left(x_t^{\varepsilon}-x_t^*\right),u_t^*+\theta\left(u_t^{\varepsilon}-u_t^*\right)\right)\left(x_t^{\varepsilon}-x_t^*\right)\right]d\theta \\ &+\int_0^1\left[\sigma_u\left(t,x_t^*+\theta\left(x_t^{\varepsilon}-x_t^*\right),u_t^*+\theta\left(u_t^{\varepsilon}-u_t^*\right)\right)\left(u_t^{\varepsilon}-u_t^*\right)\right]d\theta \end{aligned}$$

En remplaçant ces deux dans (2.7),on obtient :

$$
\begin{aligned}
d\Gamma_t^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_0^1 \left[b_x\left(t,x_t^*+\theta\left(x_t^\varepsilon-x_t^*\right),u_t^*+\theta\left(u_t^\varepsilon-u_t^*\right)\right)\left(x_t^\varepsilon-x_t^*\right)\right]d\theta\right]dt \\
&+\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_0^1 \left[b_u\left(t,x_t^*+\theta\left(x_t^\varepsilon-x_t^*\right),u_t^*+\theta\left(u_t^\varepsilon-u_t^*\right)\right)\left(u_t^\varepsilon-u_t^*\right)\right]d\theta\right]dt \\
&+\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_0^1 \left[\sigma_x\left(t,x_t^*+\theta\left(x_t^\varepsilon-x_t^*\right),u_t^*+\theta\left(u_t^\varepsilon-u_t^*\right)\right)\left(x_t^\varepsilon-x_t^*\right)\right]d\theta\right]dB_t \\
&+\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_0^1 \left[\sigma_u\left(t,x_t^*+\theta\left(x_t^\varepsilon-x_t^*\right),u_t^*+\theta\left(u_t^\varepsilon-u_t^*\right)\right)\left(u_t^\varepsilon-u_t^*\right)\right]d\theta\right]dB_t \\
&-\left[b_x(t,x_t^*,u_t^*)y_t+b_u(t,x_t^*,u_t^*)v_t\right]dt-\left[\sigma_x(t,x_t^*,u_t^*)y_t+\sigma_u(t,x_t^*,u_t^*)v_t\right]dB_t
\end{aligned}
$$

En remplaçant $x_t^\varepsilon-x_t^*=\varepsilon\left(\Gamma_t^\varepsilon+y_t\right)$ et $u_t^\varepsilon-u_t^*=\varepsilon v_t$ et en passat aux l'espérance carrées on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\Gamma_t^\varepsilon\right|^2 &\leq M\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 b_x\left(s,x_s^*+\theta\left(x_s^\varepsilon-x_s^*\right),u_s^*+\theta\varepsilon v_s\right)\Gamma_s^\varepsilon d\theta\right|^2 ds \\
&+M\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 \sigma_x\left(s,x_s^*+\theta\left(x_s^\varepsilon-x_s^*\right),u_s^*+\theta\varepsilon v_s\right)\Gamma_s^\varepsilon d\theta\right|^2 ds+l^\varepsilon
\end{aligned},
$$

où l^ε est donne par :

$$
\begin{aligned}
l^\varepsilon &= M\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 \left[b_x\left(s,x_s^*+\theta\left(x_s^\varepsilon-x_s^*\right),u_s^*+\theta\varepsilon v_s\right)-b_x(s,x_s^*,u_s^*)\right]y_s d\theta\right|^2 ds \\
&+M\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 \left[b_u\left(t,x_t^*+\theta\left(x_t^\varepsilon-x_t^*\right),u_t^*+\theta\varepsilon v_t\right)-b_u(t,x_t^*,u_t^*)\right]v_s d\theta\right|^2 ds \\
&+M\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 \left[\sigma_x\left(s,x_s^*+\theta\left(x_s^\varepsilon-x_s^*\right),u_s^*+\theta\varepsilon v_s\right)-\sigma_x(s,x_s^*,u_s^*)\right]y_s d\theta\right|^2 ds \\
&+M\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 \left[\sigma_u\left(s,x_s^*+\theta\left(x_s^\varepsilon-x_s^*\right),u_s^*+\theta\varepsilon v_s\right)-\sigma_u(s,x_s^*,u_s^*)\right]v_s d\theta\right|^2 ds
\end{aligned}
$$

Puisque b_x et σ_x sont continue et avec passage à la limite quand ε tend vres 0 on obtient :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} l^{\varepsilon} \quad = 0$$

Comme b_x et $\sigma_x$sont bornées, alors on a :

$$\mathbb{E}\left|\Gamma_t^{\varepsilon}\right|^2 \leq 2MC\int_0^t \mathbb{E}\left|\Gamma_s^{\varepsilon}\right|^2 ds + l^{\varepsilon}$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall on obtient :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left|\frac{x_t^{\varepsilon}-x_t^*}{\varepsilon}-y_t\right|^2 = 0$$

■

Lemme 2.4.3 *: Sous l'hypothèse (H_1), on a :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J\left(u_t^{\varepsilon}\right)-J\left(u_t^*\right)}{\varepsilon} = \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(f_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)y_t + f_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)v_t\right)dt + g_x\left(x_T^*\right)y_T\right]$$

Preuve. : Comme g, f est de classe $\mathbb{C}^1$,alors pour presque tout ε il existe $\varepsilon\left(\omega\right)\in[0,1]$ tel que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J\left(u_t^{\varepsilon}\right)-J\left(u_t^*\right)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(f\left(t,x_t^{\varepsilon},u_t^{\varepsilon}\right)-f\left(t,x_t^*,u_t^*\right)\right)dt + g\left(x_T^{\varepsilon}\right)-g\left(x_T^*\right)\right] \tag{2.8}$$

En remplaçant $x_t^\varepsilon - x_t^* = \varepsilon\left(\Gamma_t^\varepsilon + y_t\right)$ et $u_t^\varepsilon - u_t^* = \varepsilon v_t$ on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J\left(u_t^\varepsilon\right)-J\left(u_t^*\right)}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_0^1\left[f_x\left(t,x_t^*+\theta\varepsilon\left(\Gamma_t^\varepsilon+y_t\right),u_t^*+\theta\varepsilon v_t\right)\varepsilon\left(\Gamma_t^\varepsilon+y_t\right)\right]d\theta\right)dt\right]\right.\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_0^1\left[f_u\left(t,x_t^*+\theta\varepsilon\left(\Gamma_t^\varepsilon+y_t\right),u_t^*+\theta\varepsilon v_t\right)\varepsilon v_t\right]d\theta\right)dt\right]\\
&\left.+\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^1\left[g_x\left(x_T^*+\theta\varepsilon\left(\Gamma_T^\varepsilon+y_T\right)\right)\varepsilon\left(\Gamma_T^\varepsilon+y_T\right)\right]d\theta\right]\right)
\end{aligned}$$

Finalement

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J\left(u_t^\varepsilon\right)-J\left(u_t^*\right)}{\varepsilon} = \mathbb{E}\left[\int_0^T\left(f_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)y_t+f_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)v_t\right)dt+g_x\left(x_T^*\right)y_T\right]$$

■

Preuve. (Condition nécessaire d'optimalité) : Comme u_t^* est optimal alors :

$$\frac{J\left(u_t^\varepsilon\right)-J\left(u_t^*\right)}{\varepsilon}\geq 0$$

d'aprés cette inégalité et lemme (2.4.3), on obtient :

$$\left[\int_0^T\left(f_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)y_t+f_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)v_t\right)dt+g_x\left(x_T^*\right)y_T\right]\geq 0$$

En appliquant la Formule d'intégration par parties sur $p_t y_t$ on obtient :

$$\begin{aligned}
d\left(p_t y_t\right) &= p_t dy_t + y_t dp_t + d\langle p, y\rangle_t \\
&= p_t\left[\left(b_x(t, x_t^*, u_t^*)y_t + b_u(t, x_t^*, u_t^*)v_t\right)dt + \left(\sigma_x(t, x_t^*, u_t^*)y_t + \sigma_u(t, x_t^*, u_t^*)v_t\right)dB_t\right] \\
&\quad + y_t\left[-\left(f_x(t, x_t^*, u_t^*) + b_x(t, x_t^*, u_t^*)p_t + \sigma_x(t, x_t^*, u_t^*)q_t\right)dt + q_t dB_t\right] \\
&\quad + q_t\left[\sigma_x(t, x_t^*, u_t^*)y_t + \sigma_u(t, x_t^*, u_t^*)v_t\right]dt \\
&= b_x(t, x_t^*, u_t^*)p_t y_t dt + b_u(t, x_t^*, u_t^*)p_t v_t dt + \sigma_x(t, x_t^*, u_t^*)p_t y_t dB_t + \sigma_u(t, x_t^*, u_t^*)p_t v_t dB_t \\
&\quad - f_x(t, x_t^*, u_t^*)y_t dt - b_x(t, x_t^*, u_t^*)p_t y_t dt - \sigma_x(t, x_t^*, u_t^*)q_t y_t dt + q_t y_t dB_t \\
&\quad + \sigma_x(t, x_t^*, u_t^*)q_t y_t dt + \sigma_u(t, x_t^*, u_t^*)q_t v_t dt
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
d\left(p_t y_t\right) &= -f_x(t, x_t^*, u_t^*)y_t dt + b_u(t, x_t^*, u_t^*)p_t v_t dt + \sigma_u(t, x_t^*, u_t^*)q_t v_t dt + q_t y_t dB_t \\
&\quad + \sigma_x(t, x_t^*, u_t^*)p_t y_t dB_t + \sigma_u(t, x_t^*, u_t^*)p_t v_t dB_t
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
p_t y_t &= p_0 y_0 - \int_0^T f_x(t, x_t^*, u_t^*)y_t dt + \int_0^T b_u(t, x_t^*, u_t^*)p_t v_t dt + \int_0^T \sigma_u(t, x_t^*, u_t^*)q_t v_t dt \\
&\quad + \int_0^T q_t y_t dB_t + \int_0^T \sigma_x(t, x_t^*, u_t^*)p_t y_t dB_t + \int_0^T \sigma_u(t, x_t^*, u_t^*)p_t v_t dB_t
\end{aligned}$$

En passat aux l'espérance

$$\mathbb{E}\left[p_t y_t\right] = \mathbb{E}\left[-\int_0^T f_x(t, x_t^*, u_t^*)y_t dt + \int_0^T b_u(t, x_t^*, u_t^*)p_t v_t dt + \int_0^T \sigma_u(t, x_t^*, u_t^*)q_t v_t dt\right]$$

Avec le condition $p_T = g_x(x_T^*)$, on trouve :

$$\mathbb{E}\left[g_x(x_T^*)y_T\right] = \mathbb{E}\left[-\int_0^T f_x(t, x_t^*, u_t^*)y_t dt + \int_0^T b_u(t, x_t^*, u_t^*)p_t v_t dt + \int_0^T \sigma_u(t, x_t^*, u_t^*)q_t v_t dt\right]$$

Donc

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\int\limits_0^T f_u(t,x_t^*,u_t^*)v_t dt + \int\limits_0^T b_u(t,x_t^*,u_t^*)p_t v_t dt + \int\limits_0^T \sigma_u(t,x_t^*,u_t^*)q_t v_t dt\right]$$

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\int_0^T H_u\left(t,x_t^*,u_t^*,p_t,q_t\right)\left(v_t - u_t^*\right)dt\ \right]$$

■

Chapitre 3

Lien entre PMS et PPD aux sens de viscosité

Dans ce chapitre, nous étudions le principe de la programmation dynamique pour résoudre un probléme de contrôle stochastique, puis on donne la relation entre les deux approches (PMS et PPD) aux sens de viscosité.

3.1 Formulation du probléme

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé filtré avec une filtration $(\mathcal{F}_t)$ satisfaisant aux condition habituelles.soit $(B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^d$ définie sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\right)$. On note U l'ensemble de tous les processus $(u_t)_{t\geq 0}$ progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^k$. Les éléments de U sont appelés processus de contrôle.

Nous considérons l'équation différentielle stochastique d'état, pour chaque contrôle u_t :

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t, u_t)dt + \sigma(t, x_t, u_t)dB_t \quad t \in [0, T] \\ x_0 = x \end{cases}, \tag{3.1}$$

où $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n \times d}$, sont deux fonction qui satisfont pour une constant C

$$|b(t,x,u) - b(t,y,u)| + |\sigma(t,x,u) - \sigma(t,y,u)| \leq C\,|x-y| \quad . \tag{3.2}$$

$$|b(t,x,u)| + |\sigma(t,x,u)| \leq C\,(1+|x|) \quad . \tag{3.3}$$

Sous les conditions (3.2) et (3.3) l'équation (3.1) admet une solution unique.

Et soit la fonction de coût :

$$J\,(t,x,u) \quad = \mathbb{E}^{t,x}\left[\int_t^T f\,(s,x_s,u_s)\,ds + g\,(x_T)\right] \quad , \tag{3.4}$$

où $\mathbb{E}^{t,x}$ est l'espérance conditionnelle sachant $x_t = x$ et $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables. On suppose que :

$$|f\,(t,x_t,u_t)| + |g\,(x_T)| \quad \leq M\left(1+|x|^2\right) \quad , \tag{3.5}$$

pour une constante M. La condition de croissance quadratique (3.5), implique que $J\,(.)$ est bien définie.

Définition 3.1.1 *: On définit la fonction valeur du probléme* (3.1) *et* (3.4) *par :*

$$v\,(t,x) \quad = \inf_{u \in U} \mathbb{E}^{t,x}\left[\int_t^T f\,(s,x_s,u_s)\,ds + g\,(x_T)\right] \quad \forall\,(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \tag{3.6}$$

$$v\,(T,x) = g\,(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

f, b, σ et g sont uniformément continues.

3.2 Le Principe de la programmation dynamique

Le principe de la programmatrion dynamique appelé aussi principe de Bellman est basé sur l'observation fondamentale suivante : Si une trajectoire est optimal alors elle est optimal à chaque instant, c'est à dire si on commence par un autre point on ne peut faire mieux que de suivre la trajectoire optimale.

Considérons le contrôle

$$\bar{u}_s = \begin{cases} u_s & t \leq s \leq t+h \\ u_s^* & t+h \leq s \leq T \end{cases} . \tag{3.7}$$

Le principe d'optimalité de Bellman dit que si l'on choit u_s sur $[t, t+h]$ de façon à minimiser l'expression $J(t, x, \bar{u}_s)$, on obtient ainsi le contrôle u_s^* optimal.

Théorème 3.2.1 *: Soit $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$.pour tout $h \in [0, T-t]$, on a :*

$$v(t, x) = \inf_{u \in U} \mathbb{E}^{t,x} \left[\int_t^{t+h} f(s, x_s, u_s)\, ds + v(t+h, x_{t+h}) \right] \tag{3.8}$$

Preuve. : Soit $0 < h < T-t$. Supposon que $u_s^* = u^*(s, x)$ est un contrôle optimal pour (3.1) et (3.4) sur l'intervalle $[t, T]$ à partire du point x_{t+h}. ie.

$$v(t+h, x_{t+h}) = J\left(t+h, x_{t+h}, u_{t+h}^*\right) \quad \mathbb{P} - p.s \tag{3.9}$$

Par l'unicité de la solution pour l'EDS (3.1) , $x_s^{t+h, x_{t+h}^{t,x}} = x_s^{t,x}$ pour $s \in [t+h, T]$, et d'après

(3.7) , on trouve :

$$
\begin{aligned}
J\left(t,x,\bar{u}_s\right) &= \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} f\left(s,x_s^{t,x},u_s\right)ds + \int_{t+h}^{T} f\left(s,x_s^{t+h,x_{t+h}^{t,x}},u_s^*\right)ds + g\left(x_T^{t+h,x_{t+h}^{t,x}}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} f\left(s,x_s^{t,x},u_s\right)ds + \mathbb{E}\left[\int_{t+h}^{T} f\left(s,x_s,u_s^*\right)ds + g\left(x_T\right) \mid x_{t+h}^{t,x}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} f\left(s,x_s^{t,x},u_s\right)ds + v\left(t+h,x_{t+h}^{t,x}\right)\right]
\end{aligned}
$$

donc on obtient :

$$
v\left(t,x\right) \leq \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} f\left(s,x_s^{t,x},u_s\right)ds + v\left(t+h,x_{t+h}^{t,x}\right)\right] \quad . \tag{3.10}
$$

et l'égalité tient si $\bar{u}_s = u_s^*$ qui prouve (3.8) . ■

3.3 Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

L'équation HJB est la version infinitésimale de la programmation dynamique principe. Il est formellement dérivé en supposant que la fonction valeur v est de classe $\mathbb{C}^2$. L'équation classique HJB associé au problème de contrôle stochastique (3.6) est

$$
-\frac{\partial v}{\partial t}\left(t,x\right) + \sup_{u\in U}\left[-\pounds^u v\left(t,x_s\right) - f\left(t,x,u\right)\right] = 0 \quad \forall\left(t,x\right)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n \ , \tag{3.11}
$$

où $\pounds^u$ est le générateur infinitésimal de second-ordre à la diffusion x avec un contrôle u :

$$
\pounds^u v\left(t,x\right) = b(t,x,u)^T\nabla_x v\left(t,x\right) + \frac{1}{2}Tr\left[\sigma\sigma^T\left(t,x,u\right)D_x^2\left(v\left(t,x\right)\right)\right] \ ,
$$

où ∇_x, D_x^2 désignent le gradient et l'opérateur hessien par rapport à la variable x.

D'autre part, on peut avoir cette équation (3.11) de la façon suivante :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+H\left(t,x,\triangledown_x v\left(t,x\right),D_x^2 v\left(t,x\right)\right)=0 \quad \forall\left(t,x\right)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n \ , \tag{3.12}$$

où pour $(t,x,p,W)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times S^n$($S^n$est l'ensemble des matrices $n\times n$ symétrique) tel que :

$$H\left(t,x,p,W\right) \quad =\sup_{u\in U}\left[-b(t,x,u)^T p-\frac{1}{2}Tr\left[\sigma\sigma^T(t,x,u)W\right]-f\left(t,x,u\right)\right] \ ,$$

cette fonction H est appelée Hamiltonien du probléme de contrôle considéré. Cette équation (3.12) est appelée équation de la programmation dynamique ou équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). A l'EDP (3.11)on ajoute la condition terminale :

$$v\left(T,x\right)=g\left(x\right) \quad x\in\mathbb{R}^n$$

3.4 solutions de Viscosité

L'équation HJB n'admet en général pas de solutions régulières, c-à-d qui ne sont pas dans $\mathbb{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$. Les solutions de viscosité introduite par Crandall et Lions (1983) viennent palier à cette lacune.

Définition 3.4.1 ***(solution de viscosité) :*** *Soit* $v\in\mathbb{C}^0\left([0,T]\times\mathbb{R}^n\right)$

- On dit que v est une sous-solution de viscosité de(3.11) si $v\left(T,x\right)\leq g\left(x\right)$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$ et pour toute fonction $\psi\in\mathbb{C}^{1,2}([0,T],\mathbb{R}^n)$, lorsque $v-\psi$ atteint un maximum local en $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, nous avons

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x)+\sup_{u\in U}\left[-\pounds^u\psi\left(t,x_s\right)-f\left(t,x,u\right)\right]\leq 0 \tag{3.13}$$

- On dit que v est une sur-solution de viscosité de(3.11) si $v\left(T,x\right)\geq g\left(x\right)$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$ et pour toute fonction $\psi \in \mathbb{C}^{1,2}([0,T],\mathbb{R}^n)$, lorsque $v-\psi$ atteint un minimum local en $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$,nous avons

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t}(t,x) + \sup_{u \in U} \left[-\pounds^u \psi(t,x_s) - f(t,x,u)\right] \geq 0 \tag{3.14}$$

En outre, $v \in \mathbb{C}^0([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ est à la fois une sous-solution de viscosité et la viscosité de sur-solution (3.11), elle est alors appelée une solution de viscosité de (3.11).

Théorème 3.4.1 *: Sous les condition* (3.4) *et* (3.5) , *la fonction de valeur est une solution de viscosité de l'équation d'HJB* (3.11) .

Preuve. : Pour tout $\psi \in \mathbb{C}^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, soit $v-\psi$ atteint un maximum local en $(s,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, soit x_r la trajectoire de l'état avec un contrôle $u_r = u$. Ensuite, par le principe de la programmation dynamique, et la formule d'Itô nous avons, avec $t > s$ on a :

$$v(s,y) = \inf_{u \in U} \mathbb{E}^{t,x}\left[\int_s^t f(r,x_r,u_r)\,dr + v(t,x_t)\right] ,$$

aussi

$$\psi(t,x_t) - \psi(s,y) = \int_s^t \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \pounds^u \psi\right)(r,x_r^{s,y})\,dr + \int_s^t \nabla_x \psi(r,x_r^{s,y})^T \sigma(r,x_r^{s,y},u_r)dB_r .$$

Donc

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}\left[v(s,y) - \psi(s,y) - v(t,x_t) + \psi(t,x_t)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_s^t f(r,x_r,u_r)\,dr + v(t,x_t)\right] + \mathbb{E}\left[-\psi(s,y) - v(t,x_t) + \psi(t,x_t)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_s^t f(r,x_r,u_r)\,dr + \psi(t,x_t) - \psi(s,y)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_s^t f(r,x_r,u_r)\,dr + \int_s^t \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \pounds^u \psi\right)(r,x_r^{s,y})\,dr\right]
\end{aligned} .$$

En divisant par $t-s$ et en faisant tender $t-s$ vers 0, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \leq & \lim_{t \to s} \frac{1}{t-s} \mathbb{E}\left[\int_s^t f(r, x_r, u_r)\, dr + \int_s^t \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \pounds^u \psi\right)(r, x_r^{s,y})\, dr\right] \\ = & \frac{\partial \psi}{\partial t}(s, y) - \left[-\pounds^u \psi(s, y) - f(s, y, u)\right]. \end{aligned}.$$

Donc

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t}(s, y) + \left[-\pounds^u \psi(s, y) - f(s, y, u)\right] \leq 0 \quad \forall u \in U \quad . \tag{3.15}$$

D'autre part, si $v - \psi$ atteint un minimum local en $(s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et $t - s > 0$ assez petit, on peut trouver un contrôle $u_r = u_s^\varepsilon \in U$, on a :

$$v(s, y) + \varepsilon(t-s) \geq \mathbb{E}\left[\int_s^t f(r, x_r, u_r)\, dr + v(t, x_t)\right] .$$

Donc

$$\begin{aligned} 0 & \geq \mathbb{E}\left[v(s, y) - \psi(s, y) - v(t, x_t) + \psi(t, x_t)\right] \\ & \geq -\varepsilon(t-s) + \mathbb{E}\left[\int_s^t f(r, x_r, u_r)\, dr + v(t, x_t)\right] + \mathbb{E}\left(-\psi(s, y) - v(t, x_t) + \psi(t, x_t)\right) \\ & \geq -\varepsilon(t-s) + \mathbb{E}\left[\int_s^t f(r, x_r, u_r)\, dr + \psi(t, x_t) - \psi(s, y)\right] \end{aligned}.$$

En devisant par $(t-s)$, et par l'application de la formule d'Itô sur le processus $\psi(r, x_r)$ nous obtenons

$$\begin{aligned} -\varepsilon & \leq -\frac{1}{t-s} \mathbb{E}\left[\int_s^t f(r, x_r, u_r)\, dr + \int_s^t \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \pounds^u \psi\right)(r, x_r^{s,y})\, dr\right] \\ & \leq \frac{1}{t-s} \mathbb{E}\left[\int_s^t \left(-\frac{\partial \psi}{\partial r}(r, x_r^{s,y}) + \left[-\pounds^u \psi(r, x_r^{s,y}) - f(r, x_r, u_r)\right]\right) dr\right] \\ & \leq \lim_{t \to s} \frac{1}{t-s} \mathbb{E}\left[\int_s^t \left(-\frac{\partial \psi}{\partial r}(r, x_r^{s,y}) + \sup_{u \in U}\left[-\pounds^u \psi(r, x_r) - f(r, x_r, u_r)\right]\right) dr\right] \end{aligned}$$

$$= \quad -\frac{\partial \psi}{\partial t}(s,y) + \sup_{u\in U}\left[-\pounds^{u}\psi(s,y) - f(s,y,u)\right] \quad . \tag{3.16}$$

Par coordination entre (3.15) et (3.16) , nous conluons que v est une solution de viscosité de l'équation d'HJB (3.11) . ■

3.4.1 unicité de solution de viscosité

Théorème 3.4.2 *: Soit v, ω $\mathbb{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ .Nous supposons que v est une sur-solution de* (3.11) , *et ω est une sous-solutionde* (3.11) , *avec $v(T,x) \leq \omega(T,x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, alors $v(t,x) \leq \omega(t,x)$, $\forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$.*

Preuve. : pour $(u,M,N) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n}$, nous définissons

$$G(x,M) = -Tr\left(A(x)A(x)^T M\right) \quad ,$$

alors

$$\begin{aligned} G(y,N) - G(x,M) &= Tr\left(A(x)A(x)^T M\right) - Tr\left(A(y)A(y)^T N\right) \\ &= Tr\left(A(x)A(x)^T M - A(y)A(y)^T N\right) \\ &\leq 3k\left|A(x) - A(y)\right| \end{aligned}$$

parce que le matrice

$$B = \begin{pmatrix} A(y)A(y)^T & A(y)A(x)^T \\ A(x)A(y)^T & A(x)A(x)^T \end{pmatrix}$$

est une matrice non négative, nous avons :

$$\begin{aligned} Tr\left(A(x)A(x)^T M - A(y)A(y)^T N\right) &= Tr\left(B\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & -N \end{pmatrix}\right) \\ &\leq 3kTr\left(B\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}\right) \\ &\leq 3kTr\left(\left(A(x)-A(y)\right)\left(A(x)-A(y)\right)^T\right) \\ &\leq 3kTr\left|A(x)-A(y)\right|^2 \end{aligned} \tag{3.17}$$

maintenant, nous considérons la fonction

$$F : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to F(t,x,y) \quad = v(t,x) - \omega(t,y) - \frac{1}{2\varepsilon}\left|x-y\right|^2$$

avec $\varepsilon > 0$, supposons qu'il existe un point $(\bar{t},\bar{x},\bar{y})$ tel que F atteint un maximum à $(\bar{t},\bar{x},\bar{y})$ alors $F(\bar{t},x,\bar{y})$ atteint un maximum à $\bar{x}$, d'où

$$x \to v(\bar{t},x) - \frac{1}{2\varepsilon}\left|x-\bar{y}\right|^2$$

atteint maximum à $\bar{x}$.De plus, $-F(\bar{t},\bar{x},y)$ atteint un minimum à $\bar{y}$, puis nous avons

$$x \to \omega(\bar{t},y) - \frac{1}{2\varepsilon}\left|\bar{x}-y\right|^2 \quad ,$$

atteint un minimum à $\bar{y}$, par la définition de la sous -solution de viscosité au point $\bar{x}$, on obtient pour v avec

$$\psi(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\left|x-\bar{y}\right|^2 \quad \frac{\partial(v-\psi)}{\partial t}(\bar{t},\bar{x}) < 0 \quad (= 0 \text{ si } \bar{t} > 0)$$

et

$$\nabla_x v(\bar{t},\bar{x}) = \nabla_x \psi(\bar{x}) \quad \text{et} \quad D_x^2 v(\bar{t},\bar{x}) \geq D_x^2 \psi(\bar{x})$$

nous obtenons

$$\frac{\partial v}{\partial t}(\bar{t},\bar{x})+\sup_{u\in U}\left[-b(\bar{t},\bar{x},u)^T\left(\frac{1}{\varepsilon}\left|\bar{x}-\bar{y}\right|\right)-\frac{1}{2}Tr\left(\sigma\sigma^T(\bar{t},\bar{x},u)\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)-f\left(\bar{t},\bar{x},u\right)\right]\leq 0 \quad .$$

Par la définition de la sous-solution de viscosité au point $\bar{y}$, on obtient pour ω avec

$$\psi\left(y\right)=\frac{1}{2\varepsilon}\left|\bar{x}-y\right|^2 \quad ,$$

nous obtenons

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}(\bar{t},\bar{y})+\sup_{u\in U}\left[-b(\bar{t},\bar{y},u)^T\left(\frac{1}{\varepsilon}\left|\bar{x}-\bar{y}\right|\right)-\frac{1}{2}Tr\left(\sigma\sigma^T(\bar{t},\bar{y},u)\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)-f\left(\bar{t},\bar{y},u\right)\right]\geq 0$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(v\left(\bar{t},\bar{x}\right)-\omega\left(\bar{t},\bar{y}\right)\right)}{\partial t} \quad &\leq \sup_{u\in U}\Bigg[\left\langle\left|b(\bar{t},\bar{x},u)-b(\bar{t},\bar{y},u)\right|,\left|\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\varepsilon}\right|\right\rangle+\left|f\left(\bar{t},\bar{x},u\right)-f\left(\bar{t},\bar{y},u\right)\right| \\ &+\frac{1}{2}\left|Tr\left(\sigma\sigma^T(\bar{t},\bar{x},u)\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)-Tr\left(\sigma\sigma^T(\bar{t},\bar{y},u)\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)\right|\Bigg] \quad .\end{aligned}$$

Les fonctions b, $\sigma\sigma^T$, f sont lipchitz en x uniformément sur u puis par (3.17), nous obtenons

$$\frac{\partial\left(v\left(\bar{t},\bar{x}\right)-\omega\left(\bar{t},\bar{y}\right)\right)}{\partial t} \quad \leq \frac{c}{\varepsilon}\left|\bar{x}-\bar{y}\right|^2+\grave{c}\left|\bar{x}-\bar{y}\right|+3k\left|\bar{x}-\bar{y}\right|^2 \quad .$$

D'autre part $F\left(t,x,x\right)\leq F\left(\bar{t},\bar{x},\bar{y}\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, alors :

$$\begin{aligned}v\left(t,x\right)-\omega\left(t,x\right) \quad &\leq v\left(\bar{t},\bar{x}\right)-\omega\left(\bar{t},\bar{y}\right)-\frac{1}{2\varepsilon}\left|\bar{x}-\bar{y}\right|^2 \\ &\leq v\left(\bar{t},\bar{x}\right)-\omega\left(\bar{t},\bar{y}\right)\end{aligned}$$

parce que $F\left(\bar{t},\bar{x},\bar{x}\right)\leq F\left(\bar{t},\bar{x},\bar{y}\right)$, nous obtenons :

$$v\left(\bar{t},\bar{x}\right)-\omega\left(\bar{t},\bar{x}\right)\leq v\left(\bar{t},\bar{x}\right)-\omega\left(\bar{t},\bar{y}\right)-\frac{1}{2\varepsilon}\left|\bar{x}-\bar{y}\right|^2 \quad ,$$

alors :

$$0 \leq \omega(\bar{t},\bar{x}) - \omega(\bar{t},\bar{y}) - \frac{1}{2\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 \quad .$$

De plus $F(\bar{t},\bar{y},\bar{y}) \leq F(\bar{t},\bar{x},\bar{y})$, donc :

$$\begin{aligned} v(\bar{t},\bar{y}) - \omega(\bar{t},\bar{y}) &\leq v(\bar{t},\bar{x}) - \omega(\bar{t},\bar{y}) - \frac{1}{2\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 \\ 0 &\leq v(\bar{t},\bar{x}) - v(\bar{t},\bar{y}) - \frac{1}{2\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 \end{aligned} \quad , \tag{3.18}$$

Cela prouve que

$$(v+\omega)(\bar{t},\bar{x}) - (v+\omega)(\bar{t},\bar{y}) \geq \frac{1}{\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 \tag{3.19}$$

Comme v, ω sont bornées, alors $\frac{1}{\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 \leq c$, ce qui signifie que

$$m(\eta) = \sup_{u\in U}\{|(v+\omega)(t,x) - (v+\omega)(t,y)| \ , \ |x-y| \leq \eta\} : m(\eta) \to 0 \text{ , qund } \eta \text{ tend vers } 0$$

par (3.19), nous obtenons

$$\frac{1}{\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 \leq m(|\bar{x}-\bar{y}|) \tag{3.20}$$

par(3.18), on a :

$$\frac{1}{\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 \leq m(c\sqrt{\varepsilon}) \tag{3.21}$$

combiniaisons (3.19), (3.20) et (3.21)

$$\frac{\partial(v(\bar{t},\bar{x}) - \omega(\bar{t},\bar{y}))}{\partial t} \leq c\sqrt{\varepsilon} + \grave{c}\varepsilon + m(c\ \sqrt{\varepsilon})$$

Enifin

$$v(t,x) - \omega(t,y) \leq v(\bar{t},\bar{x}) - \omega(\bar{t},\bar{y}) \to 0, \text{ qund } \varepsilon \text{ tend vers } 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

donc

$$v\,(t,x) \leq \omega\,(t,y)$$

■

3.4.2 théoreme de vérification au sens de viscosité

Définition 3.4.2 *: Soit $v \in \mathbb{C}^0\left([0,T]\times\mathbb{R}^n\right)$, et $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$. On défini :*

- *Le sur-différentielle parabolique du second ordre de v au point (t,x) par :*

$$D^{1,2+}_{t,x}v\,(t,x) = \left\{(p,q,Q)\,,\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times n}\diagup \limsup_{y\to x,t\to s,s\in[0,T]}\left\{\frac{R\,(s,y)}{|s-t|\,|y-x|^2}\right\}\leq 0\right\}$$

- *Le sous différentielle parabolique du second ordre de v au point (t,x) par :*

$$D^{1,2+}_{t,x}v\,(t,x) = \left\{(p,q,Q)\,,\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times n}\diagup \liminf_{y\to x,t\to s,s\in[0,T]}\left\{\frac{R\,(s,y)}{|s-t|\,|y-x|^2}\right\}\geq 0\right\}$$

Où

$$R\,(s,y) = v\,(s,y) - v\,(t,x) - \langle p, y-x\rangle - \frac{1}{2}\,(y-x)^T\,Q\,(y-x)\ \ .$$

- *Le sur-différentielle en un point x est défini par :*

$$D^{1,+}_{x}v\,(t,x) = \left\{p\in\mathbb{R}^n\diagup\limsup_{y\to x}\left\{\frac{v\,(t,y)-v\,(t,x)-\langle p,y-x\rangle}{|y-x|}\right\}\leq 0\right\}$$

De même, le sous-différentiel en x est :

$$D^{1,-}_{x}v\,(t,x) = \left\{p\in\mathbb{R}^n\diagup\liminf_{y\to x}\left\{\frac{v\,(t,y)-v\,(t,x)-\langle p,y-x\rangle}{|y-x|}\right\}\geq 0\right\}$$

Lemme 3.4.1 *: Soit $\omega\in\mathbb{C}\left([0,T]\times\mathbb{R}^n\right)$, et $(t_0,x_0)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$. Alors :*

1. $(p,q,Q)\in D^{1,2+}_{t,x}v\,(t_0,x_0)$ *si seulement si il existe une fonction* $\psi\in\mathbb{C}^{1,2}\left([0,T]\times\mathbb{R}^n\right)$

tel que $v-\psi$ atteint un maximum strict dans (t_0,x_0) et

$$\left(v\left(t_0,x_0\right),p,q,Q\right)=\left(\psi\left(t_0,x_0\right),\psi_t\left(t_0,x_0\right),\psi_x\left(t_0,x_0\right),\psi_{xx}\left(t_0,x_0\right)\right)\ .$$

2. $(p,q,Q)\in D^{1,2-}_{t,x}v\left(t_0,x_0\right)$ *si seulement si il existe une fonction* $\psi\in\mathbb{C}^{1,2}\left([0,T]\times\mathbb{R}^n\right)$ *tel que $v-\psi$ atteint un minimum strict dans (t_0,x_0) et*

$$\left(v\left(t_0,x_0\right),p,q,Q\right)=\left(\psi\left(t_0,x_0\right),\psi_t\left(t_0,x_0\right),\psi_x\left(t_0,x_0\right),\psi_{xx}\left(t_0,x_0\right)\right)\ .$$

Preuve. : voir Yong et Zhou,1999 ■

Théorème 3.4.3 *: Soit (x^*,u^*) une solution optimale pour notre problème de contrôle, alors il existe un processus $\mathcal{F}^s_t-$adapté défini par :*

$$p_t=\mathbb{E}\left[\int_t^T f_x(s,x^*_s,u^*_s)\phi\left(s,t\right)ds+g_x(x^*_T)\phi\left(T,t\right)\mid\mathcal{F}^s_t\right]\quad\forall\ t\geq s\quad, \tag{3.22}$$

où ϕ est la solution de l'équation linéaire suivant :

$$\begin{cases} d\phi\left(s,t\right) & =b_x(t,x^*_t,u^*_t)\phi\left(s,t\right)dt+\sigma_x(t,x^*_t,u^*_t)\phi\left(s,t\right)dB_t\quad\forall\ t\geq s \\ \phi\left(t,t\right) & =I_n\end{cases}\ . \tag{3.23}$$

Lemme 3.4.2 *: Soit (x^*,u^*) une solution optimale pour (3.1), et $t\in[s,T]$. Soit ξ une Variable aléatoire $\mathcal{F}^s_t$-mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^n$ Puis la solution du EDS suivant :*

$$\tilde{y}_r=\xi+\int_t^r b_x(\alpha,x^*_\alpha,u^*_\alpha)\tilde{y}_\alpha d\alpha+\int_t^r\sigma_x(\alpha,x^*_\alpha,u^*_\alpha)\tilde{y}_\alpha dB_\alpha\quad r\geq t$$

peut être représenté par

$$\tilde{y}_r\ =\phi\left(r,t\right)\xi$$

où ϕ est une solution de (3.23).

3.5 Relation entre PMS et PPD aux sens de viscosité

Théorème 3.5.1 *: Soit v une solution de viscosité de l'équation* (3.11) *avec la condition terminal $v(T,x) = g(x)$. Supposons que (x^*, u^*) une solution optimale pour le problème* (3.1)*, alors pour tout $t \in [s,T]$ on a :*

$$D_x^{1,-} v(t, x^*) \subset \{p_t\} \subset D_x^{1,+} v(t, x^*) \tag{3.24}$$

où p_t est le processus adjoint.

Preuve. : Fixer un $t \in [s,T]$. Pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, notez $x^z(.)$ la solution du suivant EDS sur $[t,T]$ définie par :

$$x_r^z = z + \int_t^r b(\alpha, x_\alpha^z, u_\alpha^*) d\alpha + \int_t^r \sigma(\alpha, x_\alpha^z, u_\alpha^*) dB_\alpha \quad r \geq t \quad . \tag{3.25}$$

Il est clair que (3.25) peut être considéré comme une EDS sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_r^s)_{r \geq t}, \mathbb{P}(./\mathcal{F}_t^s)\right)(\omega)$ $\mathbb{P}$-$p.s$. Où $\mathbb{P}(./\mathcal{F}_t^s)(\omega)$ est une probabilité conditionnelle régulière donne par $\mathcal{F}_t^s$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Ainsi, l'estimation suivante valable pour tout $t \leq r \leq T$ (voir Chapitre 1, Théorème 6.3, Yong and Zhou)

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq r \leq T} |x_r^z - x_r^*|^4 \mid \mathcal{F}_t^s\right] \leq C |z - x_t^*|^4 \quad \mathbb{P}.p.s \quad . \tag{3.26}$$

Maintenant on peut écrire :

$$\begin{aligned}
x_r^z - x_r^* &= z - x_t^* + \int_t^r \left[b(\alpha, x_\alpha^z, u_\alpha^*) - b(\alpha, x_\alpha^*, u_\alpha^*)\right] d\alpha + \int_t^r \left[\sigma(\alpha, x_\alpha^z, u_\alpha^*) - \sigma(\alpha, x_\alpha^*, u_\alpha^*)\right] dB_\alpha \\
&= z - x_t^* + \int_t^r b_x(\alpha, x_\alpha^*, u_\alpha^*)(x_\alpha^z - x_\alpha^*) d\alpha + \int_t^r \sigma_x(\alpha, x_\alpha^*, u_\alpha^*)(x_\alpha^z - x_\alpha^*) dB_\alpha \\
&+ \int_t^r \int_0^1 \left[b_x(\alpha, x_\alpha^* + \theta(x_\alpha^z - x_\alpha^*), u_\alpha^*) - b_x(\alpha, x_\alpha^*, u_\alpha^*)\right](x_\alpha^z - x_\alpha^*) d\theta d\alpha \\
&+ \int_t^r \int_0^1 \left[\sigma_x(\alpha, x_\alpha^* + \theta(x_\alpha^z - x_\alpha^*), u_\alpha^*) - \sigma_x(\alpha, x_\alpha^*, u_\alpha^*)\right](x_\alpha^z - x_\alpha^*) d\theta dB_\alpha
\end{aligned} . \tag{3.27}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
\epsilon_1(\alpha, z) &= \int_0^1 \left[b_x(\alpha, x_\alpha^* + \theta(x_\alpha^z - x_\alpha^*), u_\alpha^*) - b_x(\alpha, x_\alpha^*, u_\alpha^*)\right] d\theta \\
\epsilon_2(\alpha, z) &= \int_0^1 \left[\sigma_x(\alpha, x_\alpha^* + \theta(x_\alpha^z - x_\alpha^*), u_\alpha^*) - \sigma_x(\alpha, x_\alpha^*, u_\alpha^*)\right] d\theta
\end{aligned} .$$

Soit $\tilde{y}^z(.)$ satisfaire le EDS suivant dans $[t, T]$:

$$\tilde{y}_r^z = z - x_t^* + \int_t^r b_x(\alpha, x_\alpha^*, u_\alpha^*)\tilde{y}_\alpha^z d\alpha + \int_t^r \sigma_x(\alpha, x_\alpha^*, u_\alpha^*)\tilde{y}_\alpha^z dB_\alpha \quad .$$

Par hypothèses (3.2), (3.3),(3.26) et théorème de convegence dominé, nous avons

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \mathbb{E}\left(|\epsilon_i(\alpha, z)|^4 \mid \mathcal{F}_t^s\right)(\omega) \to 0 \quad \text{comme} \quad z \to x_t^*(\omega), \forall \alpha \in [t, T]\right\} = 1 \quad i = 1, 2 \quad . \tag{3.28}$$

$$\sup_{\alpha, z, \omega} \mathbb{E}\left(|\epsilon_i(\alpha, z)|^4 \mid \mathcal{F}_t^s\right)(\omega) \le const \quad i = 1, 2 \quad . \tag{3.29}$$

Supposons que :

$$W_r^z = x_r^z - x_r^* - \tilde{y}_r^z \quad . \tag{3.30}$$

A l'aide de(3.26) on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r\leq T}|W_r^z|^2 \mid \mathcal{F}_t^s\right] &\leq const\left\{\int\limits_t^T \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r\leq \alpha}|W_r^z|^2 \mid \mathcal{F}_t^s\right]d\alpha\right\} \\ &+const\left\{\int\limits_t^T \mathbb{E}\left(|\epsilon_1(\alpha,z)|^2 \mid \mathcal{F}_t^s\right)d\alpha\right. \\ &+\left.\left[\int\limits_t^T \mathbb{E}\left(|\epsilon_2(\alpha,z)|^4 \mid \mathcal{F}_t^s\right)d\alpha\right]^{1/2}\right\}|z-x_t^*|^2\end{aligned} \quad ,$$

d'après (3.28),(3.29) et utilisant le lemme de Gronwall on obtient :

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r\leq T}|W_r^z|^2 \mid \mathcal{F}_t^s\right](\omega) = 0\left(|z-x_t^*|^2\right)\right\} = 1 \quad . \tag{3.31}$$

Maintenant nous choisissons un sous-ensemble $\Omega_0 \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ tel que pour tout $\omega_0 \in \Omega_0$ on a :

$$v(t, x_t^*(\omega_0)) = \mathbb{E}\left[\int_t^T f(r, x_r^*, u_r^*)\,dr + g(x_T^*) \diagup \mathcal{F}_t^s\right](\omega_0) \ ,$$

cette égalité est due au principe optimal de Bellman. On fixe $\omega_0 \in \Omega_0$, ensuite pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ nous avons :

$$v(t,z) - v(t, x_t^*(\omega_0)) \quad \leq \mathbb{E}^t\left\{\int\limits_t^T [f(r, x_r^z, u_r^*) - f(r, x_r^*, u_r^*)]\,dr + g(x_T^z) + g(x_T^*)\right\} \tag{3.32}$$

En utilisant un calcul similaire comme dans (3.27) nous pouvons réécrire(3.32) que

$$\begin{aligned} v\left(t,z\right)-v\left(t,x_t^*\left(\omega_0\right)\right) &\leq \mathbb{E}^t\left[\int_t^T f_x(r,x_r^*,u_r^*)\left(x_r^z-x_r^*\right)dr+g_x(x_T^*)\left(x_T^z-x_T^*\right)\right] \\ &+0\left(\left|z-x_t^*\left(\omega_0\right)\right|\right) \end{aligned}$$

D'après (3.30) on a :

$$\begin{aligned} v\left(t,z\right)-v\left(t,x_t^*\left(\omega_0\right)\right) &\leq \mathbb{E}^t\left[\int_t^T f_x(r,x_r^*,u_r^*)\left[W_r^z+\tilde{y}_r^z\right]dr+g_x(x_T^*)\left(x_T^z-x_T^*\right)\right] \\ &+0\left(\left|z-x_t^*\left(\omega_0\right)\right|\right) \end{aligned}$$

Par lemme[3.4.2] on a :

$$\begin{aligned} v\left(t,z\right)-v\left(t,x_t^*\left(\omega_0\right)\right) &\leq \mathbb{E}^t\left\{\int_t^T f_x(r,x_r^*,u_r^*)\left[W_r^z+\phi\left(r,t\right)\left(z-x_t^*\left(\omega_0\right)\right)\right]dr\right. \\ &\left.+\,g_x(x_T^*)\left[W_T^z+\phi\left(T,t\right)\left(z-x_t^*\left(\omega_0\right)\right)\right]\right\}+0\left(\left|z-x_t^*\left(\omega_0\right)\right|\right) \end{aligned}$$

En utilisant (3.31) on obtient :

$$\begin{aligned} v\left(t,z\right)-v\left(t,x_t^*\left(\omega_0\right)\right) &\leq \mathbb{E}^t\left\{\int_t^T f_x(r,x_r^*,u_r^*)\phi\left(r,t\right)\left(z-x_t^*\left(\omega_0\right)\right)dr\right. \\ &\left.+\,g_x(x_T^*)\phi\left(T,t\right)\left(z-x_t^*\left(\omega_0\right)\right)\right\}+0\left(\left|z-x_t^*\left(\omega_0\right)\right|\right) \\ &=\mathbb{E}^t\left\{\int_t^T f_x(r,x_r^*,u_r^*)\phi\left(r,t\right)dr+g_x(x_T^*)\phi\left(T,t\right)\right\}\left(z-x_t^*\left(\omega_0\right)\right) \\ &+0\left(\left|z-x_t^*\left(\omega_0\right)\right|\right) \end{aligned}$$

D'après (3.22) on a :

$$v\left(t,z\right)-v\left(t,x_t^*\left(\omega_0\right)\right)\leq p_t\left(\omega_0\right)\left(z-x_t^*\left(\omega_0\right)\right)+0\left(\left|z-x_t^*\left(\omega_0\right)\right|\right). \tag{3.33}$$

Par la continuité de $v(t,z)$, on voit que (3.33) vaut pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, ce qui prouve

$$p_t \in D_x^{1,+} v(t, x_t^*) \quad .$$

D'autre part, suppose $\varsigma \in D_x^{1,-} v(t, x_t^*)$ et par la définition de sous différentiel du 1er ordre

$$\begin{aligned} 0 \quad & \leq \lim_{z \to x_t^*} \left\{ \frac{v(t,z) - v(t,x_t^*) - p(z - x_t^*)}{|z - x_t^*|} \right\} \\ & \leq \lim_{z \to x_t^*} \left\{ \frac{[p_t - \varsigma](z - x_t^*)}{|z - x_t^*|} \right\} \quad \text{(par (3.33))} \end{aligned}$$

d'où $p_t = \varsigma$. La preuve est maintenant terminée. ■

Remarque 3.5.1 *: Il est en tressant de noter que si v est différentielle par rapport x alors* (3.24) *devient*

$$p_t = v_x(t, x^*)$$

Bibliographie

[1] M.Chala, 2013 : Contribution a l'etude des contrôles optimales stochastiques, Thèse de Doctorat, Université de Biskra.

[2] M. Jeanblanc, (2006) : Cours de calcul stochastique, Master 2IF Evry.

[3] H. Pham, Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance, vol. 61, Springer,2007.

[4] J. Yong and X. Y. Zhou, Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations,vol. 43, Springer Science & Business Media, 199.

[5] X.Y. ZHOU, The connection between the maximum principle and dynamic programming in stochastic control,, Stochastics Stochastics Rep., 35 (1990), pp. 1-13..

Annexe A : Résultats utiles

Lemme 3.5.1 ***(Lemme de Gronwall)*** *Soit $f : [0;T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que pour tout $0 \leq t \leq T$,*

$$f(t) \leq a + b\int_0^t f(s)\,ds$$

où a et b sont constant, alors :

$$f(t) \leq a.\exp(bt)$$

Théorème 3.5.2 ***(Formule de Taylor avec reste intégral)*** *Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et soit a un point de U. Si f est classe $\mathbb{C}^{k+1}$ sur U et si le segment $[a, a+h]$ est contenu dans U,on a :*

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + ... + \frac{1}{k!}D^k f(a)(h)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(a)(h)^{k+1}\,dt$$

Avec

$$D^k f(a)(h)^k = \sum_{i_1,...,i_k}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_k}}(a)\,h_{i_1}...h_{i_k}$$

Théorème 3.5.3 ***(Inégalité de Doob)*** *Si $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale continue, on a :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}|M_t|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[|M_t|^2\right]$$

Théorème 3.5.4 ***(Inégalité de Hölder)*** *soient p et q des nombers positifs tel que*

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *Si* $f \in \mathcal{L}^p$ *et* $g \in \mathcal{L}^q$ *; linégalité de Hölder affirme que*

$$\left|\int f\ g\ d\mu\right| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

Théorème 3.5.5 ***(théorème de convegence dominé)*** *Soit* $(X_n, n \geq 0)$ *une suite croissante de variables aléatoire réel intégrables qui converge en probabilité vers* X, *et on suppose qu'il existe* M *intégrable telle que* $\forall n \geq 0, |X_n| \leq M$ *Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n\right] = \mathbb{E}\left[X\right]$$

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	:	Espace de probabilité filtré
EDS	:	Equation différentielle stochastique
$EDSR$	:	Equation différentielle stochastique rétrograd
$J(.)$	:	Fonction de coût
u	:	Contrôle admissible
u^*	:	Contrôle optimal.
u^ε	:	Contrôle perturbé
$H(t, x, u, p, q;)$	:	Hamiltonien
(p_t, q_t)	:	Les processus adjoints.
$v(s, x)$	:	Fonction de valeur.
$\bigtriangledown_x v\,(t, x)$	:	Le gradiant de la fonction valeur.
$D_x v\,(t, x)$	:	La hesienne de fonction valeur
HJB	:	Equation Hamilton-Jacobi-Bellman
PMS	:	Principe du maximum stochastique
PPD	:	Principe de la programmation dynamique.