République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Djahra Abir

Titre :

contrôle optimal de l'EDS fonctionnelle neutre.

embres du Comité d'Examen :

Dr.	**Chighoub Farid**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Chala Adel**	UMKB	Président
Dr.	**Yekhlef Samia**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

A mes parents

A tout ma famille et amis

A chaque personne m'a aidé à préparer ce mémoire

A famille de mathématiques

REMERCIEMENTS

je remercie **"ALLAH"** que m'a aidé à acheverer cette mémoire.

je remercie mon encadreur **Dr "Chighoub Farid"** pour le choix du sujet et pour toute son aide du début à la fin.

je remercie monsieur "**Chala Adel**" et madame "**Yekhlef Samia**"pour accepte de faire partie de jury.

je remercie chaque personne m'a aidé à préparer ce mémoire.

Table des matières

.

Introduction

Dans ce mémoire de master, nous allons esseyé de résoudre un problème de contrôle optimal, gouverné par des d'équations différentielles fonctionnelles stochastiques neutres .
Ce type d'équations différentielles fonctionnelles neutres modélisent une grande classe de système qui ont un effet postérieur, qui sont largement utilisé en biologie, en physique, en médecine, en économie...etc. Dans plusieurs applications, nous modélisont les systèmes des équations différentielles, et nous supposont que l'évolution taux de l'état est indépendant de l'état passé. Ce systeme est plus réaliste puisque il prendre une partie de l'état passé du système, c'est-à-dire le taux d'évolution de l'état no reste dépendent au seulement de l'état présent, mais il est dépendent au de l'état passé, ou plus généralement, il est dépendent au d'taux d'évolution entre les deux états.

On définie un équation différentielle fonctionnelle stochastique neutre par ce forme :

$$\begin{cases} d[X(t) - g(t, X^t)] = b(t, X^t, u(t))dt + \sigma(t, X^t, u(t))dW(t), \ t \in [0, T], \\ X(t) = \phi(t), \ t \in [-\delta, 0]. \end{cases}$$

Où :

$\delta \geq 0, \ W = (W(t) : t \in [0, T])$ désigne un mouvment brownien d- dimensionnelle définie sur un espace de probabilité filtré complet $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$ telle que $F := \mathcal{F}_t, \ t \in [0, T]$ est un la filtration naturelle de W augmentée de tous les ensembles P-nuls en $\mathcal{F}$, et $F := \mathcal{F}_0$ pour tout $t \in [-\delta, 0]$, Alors $F := \{\mathcal{F}_t; \ t \in [-\delta, T]\}$ est une filtration satisfaisant les conditions habituelles.

X^t indique la restriction du chemin de X sur $[t-\delta, t]$ et $u(.)$ est la variable de contrôle. noté Uad l'ensemble de contrôle admissible, contient des processus $u = (u_t)_{t\in[0,T]}$ mesurable et F-adapté à valeur dans convexe U.

le but de contrôle optimal stochastique suivante : minimiser le fonction de coût de type de Lagrange sur l'ensemble de contrôle admissible :

$$J\ (u(.)) := E[\int_0^T l(t, X^t, u(t))dt],$$

donc on dit que un contrôle $\bar{u}$ est contrôle optimal s'il vérifie :

$$J\ (\overline{u}(.)) := \inf_{u(.)\in Uad} J(u(.)).$$

Le plan de ce travail est comme suit :

Chapitre (1)

Ce chapitre est rappalle aux quelques définitions de base et le plus souvent élémentaires, concernant les résultats de calcul stochastique.

Chapitre (2)

Dans ce chapitre, nous allons établi un principe du maximum pour un contrôle optimal des équations différentielles fonctionnelles stochastiques neutres .

Chapitre (3)

Dans ce chapitre, nous allons proposé une solution d'une générale équations fonctionnelles stochastiques rétrograde neutres de volterra.

Chapitre 1

Processus stochastique

Dans ce chapitre introductif, nous donnons quelques définitions de base et le plus souvent élémentaires, concernant les résultats de calcul stochastique. Nous limitons au strict nécessaire pour les chapitres suivants.

1.1 Préliminaire sur les processus stochastiques

Sous le nom de processus stochastique, on entend un modèle permettant d'étudier un phénomène aléatoire évoluant au cours du temps. Pour le décrire, on considère

1. un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
2. un espace mesurable (E, B), où E est appelé ensemble des états du processus.
3. une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans E.

Définition 1.1 ***(Processus stochastique)*** *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble T.*

En général $T = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$ et on considère que le processus est indexée par le temps t. Si T est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire. Si $T = \mathbb{N}$ alors le processus est une suite de variables aléatoires. Plus généralement quand $T \subset \mathbb{Z}$, le processus est dit discret.
Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$. Pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \rightarrow X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace

de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $\omega \in \Omega \rightarrow X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus. Dans la suite, sauf mention contraire, on prendra $T = R$ ou $\mathbb{R}_+$.

Soient $X = (X_t)_{t\geq 0}$ et $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ deux processus stochastique sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Définition 1.2 ***(processus équivalents)*** *Deux processus X et Y ont même lois fini dimensionnelles si pour tout $t_1, \ldots, t_n \in T$ et $n \in \mathbb{N}$, $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$.*

Définition 1.3 ***(Modification)*** *Les processus X et Y sont des modification l'un de l'autre, si*

$$P\left(X_t = Y_t\right) = 1 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Définition 1.4 ***(Indistingabilité)*** *Les processus X et Y sont dits indistinguables, si*

$$P(\omega \in \Omega : X_t\left(\omega\right) = Y_t\left(\omega\right), \forall t \geq 0) = 1.$$

On va s'intéresser à des phénomènes dépendant du temps. Ce qui est connu à la date t est rassemblé dans une tribu $\mathcal{F}_t$, c'est l'information à la date t.

Définition 1.5 *Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire telle que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $t \leq s$.*

Définition 1.6 ***(processus mesurable)*** *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit mesurable si l'application définie sur $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, B(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$ par $(t, \omega) \longrightarrow X_t\left(\omega\right)$ est mesurable.*

Définition 1.7 ***(processus progressif)*** *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit progressif (ou progressivement mesurable) si pour tout $t \geq 0$, $(s, \omega) \longrightarrow X_s\left(\omega\right)$ est mesurable sur $[0, T] \times \Omega$ muni de $B([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.*

Définition 1.8 ***(processus adapté)*** *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit adapté par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \geq 0$.*

Définition 1.9 ***(processus à trajectoires continues)*** *On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \longrightarrow X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.*

Définition 1.10 ***(processus à accroissements indépendants)*** *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit à accroissement indépendants si pour tout $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, les variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.*

Définition 1.11 ***(processus gaussien)*** *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est gaussien si toute combinaisons linéaire finie de $(X_t, t \geq 0)$ est une variable aléatoire gaussienne, c'est-à-dire si*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t_i,\ 1 \leq i \leq n,\ \forall a_i,\ \sum_{i=1}^{n} a_i X_t,$$

est une v.a.r. gaussienne.

Autrement dit $(X_t)_{t\geq 0}$ est gaussien si toute ses loi fini dimentionnelles $\mathcal{L}(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ sont gaussiennes $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_1, \ldots, t_n \in T$.

Définition 1.12 (Martingales) *Une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in [0, \infty[)$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si*

1) X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et intégrable pour tout t.

2) $E[X_t \setminus \mathcal{F}_s] = X_s, \forall s \leq t$.

Une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in [0, \infty[)$ est une surmartingale (resp sousmartingale) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et intégrable pour tout t et

$$E[X_t \setminus \mathcal{F}_s] \leq X_s, \forall s \leq t \text{ (resp } E[X_t \setminus \mathcal{F}_s] \geq X_s).$$

Définition 1.13 ***(Temps d'arrêt)*** *Un temps d'arrêt est une variable aléatoire τ à valeur dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.*

On associe à un temps d'arrêt τ la tribu $\mathcal{F}_t$ dite des événements antérieurs à τ, définie par

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Définition 1.14 ***(Processus d'Itô)*** *On appelle processus d'Itô un processus* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *à valeurs réelles tel que* $\forall\ 0 \leq s \leq t$,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)\,dB_s, P - p.s.$$

avec

1) X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable.

2) $\int_0^T |b(s)|\,ds < \infty\ p.s.$

3) $\int_0^T \|\sigma(s)\|^2\,dB_S < \infty$, $p.s$ où $\|\sigma\| = trace\,(\sigma\sigma^*)$.

Théorème 1.1 ***(Formule d'Itô)*** *Soit* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus d'Itô, soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C_b^2*. Alors*

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,d\langle X, X\rangle_s. \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,b_s ds + \int_0^t f'(X_s)\,\sigma_s dBs + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,\sigma_s^2 ds. \end{aligned}$$

Définition 1.15 (Mouvement brownien) *Le processus* $(B_t, t \geq 0)$ *est un mouvement brownien (standard) si*

1. $P(B_0 = 0) = 1$ (le mouvement Brownien est issu de l'origine).
2. B est continu, i.e $t \to B_t(w)$ est continue pour P.presque tout w.
3. $\forall s \leq t, B_t - B_S$ est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance $(t - s)$ (la stationarité des acroissements indépendants).
4. $\forall n, \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$, les variables $\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \ldots, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0}\right)$ sont indépendants.

Proposition 1.1 *Soit* $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un mouvement brownien alors*

1. $(B_t - B_0)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus gaussien c'est-à-dire que pour tout $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $(B_{t_1} - B_0, \ldots, B_{t_n} - B_0)$ est un vecteur gaussien.

2. De plus, il existe $(r, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$

$$(B_t - B_s) \sim \mathcal{N}\left(r\,(t-s), \sigma^2\,(t-s)\right).$$

En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $E[B_t - B_0] = rt$ et $Var[B_t - B_0] = \sigma^2 t$.

1. Si $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard, alors pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2, R\,(t,s) = Cov(B_t - B_s) = \inf\,(t,s)$.

2. Le mouvement brownien est le seul processus $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ gaussien centré dont les trajectoires sont presque sûrement continues et dont la covariance est donnée par

$$\forall\,(s,t) \in \mathbb{R}_+^2,\ E[B_s B_t] = s \wedge t.$$

Définition 1.16 *Mouvement brownien d-dimensionnel standard est un processus* $(B_t, t \geq 0)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *tel que si on note*

$$B_t = \left(B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)}\right),$$

les processus $B^{(i)}$, $1 \leq i \leq d$, sont des mouvements browniens standards indépendants à valeurs réelles.

1.2 Intégrale de Wiener

On note $L^2(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions boréliennes f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable, c'est-à-dire telles que

$$\int_0^{+\infty} |f\,(s)|^2\,ds < \infty.$$

C'est un espace de Hilbert pour la norme $\|f\|_2 = \left(\int_0^\infty f^2\,(s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}}$. Pour $f = \mathbf{1}_{]u,v]}$, on pose $\int_0^\infty f\,(s)\,dB_s = B(v) - B(u)$. Soit f une fonction en escalier, de la forme $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{i-1} 1_{]t_{i-1},t_i]}$

on pose

$$\int_0^\infty f(s)\,dBs = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}\left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right).$$

La variable aléatoire $I(f) \overset{déf}{=} \int_0^\infty f(s)\,dB_s$ est une variable gaussienne d'espérance nulle et de variance $\int_0^\infty f^2(s)\,ds$.

En effet, $I(f)$ est gaussienne car le processus B est gaussien, centrée car B est centré, i.e. $E[I(f)] = 0$. De plus

$$\begin{aligned} Var[I(f)] &= \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}^2 Var\left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}^2 \left(t_i - t_{i-1}\right) \\ &= \int_0^\infty f^2(s)ds \\ &= \|f\|_2 . \end{aligned}$$

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, il existe une suite f_n de fonctions en escalier qui converge (dans $L^2(\mathbb{R}_+)$) vers f, c'est-à-dire qui vérifie

$$\int_0^{+\infty} |f_n - f|^2(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Dans ce cas, la suite f_n est de cauchy dans $L^2(\mathbb{R}_+)$. La suite de v.a $F_n = \int_0^\infty f_n(s)\,dB_s$ est une suite de cauchy dans l'espace de hilbert $L^2(\Omega)$.

En effet

$$\|F_n - F_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$$

donc elle est convergente, (F_n) est une suite de cauchy dans $L^2(\Omega)$. Comme $L^2(\Omega)$ est complet, alors

$$\exists F \in L^2(\Omega) : \lim_n \|F_n - F\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

On peut montrer que la limite F ne dépend pas de la suite (f_n) choisie. Pour $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$

on pose

$$I(f) = \lim_n I(f_n) = \lim_n \int_0^{+\infty} f_n(s)\, dB_s.$$

La limite étant prise dans $L^2(\Omega)$. On dit que $I(f)$ est l'intégrele de Wiener de f par rapport à B.

Le sous-espace de $L^2(\Omega)$ formé par les v.a $\int_0^{+\infty} f(s)\, dB_s$ coïncide avec l'espace gaussien engendré par le mouvement brownien.

1.2.1 Intégrale stochastique

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un mouvement brownien B sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien.

On veut généraliser l'intégrale de Wiener et défnir, $\int_0^t \theta_s dB_s$ pour des processus stochastiques θ.

On dit qu'un processus θ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_j, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ et une suite de variables aléatoires θ_j telles que θ_j soit $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable, appartienne à $L^2(\Omega)$. $\theta_j = \theta_t$ pour tout $t \in]t_j, t_{j+1}]$. Soit $\theta_s(w) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(w)\, 1_{]t_j, t_{j+1}]}(s)$. On définit alors

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j \left(B(t_{j+1}) - B(t_j)\right),$$

on a

$$E\left[\int_0^t \theta_s dB_s\right] = 0 \text{ et } Var\left[\int_0^t \theta_s dB_s\right] = E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right].$$

On peut prolonger la définition de l'intégrale de Wiener à une classe plus grande de processus. On perd le caractère gaussien de l'intégrale, ce qui est déja le cas pour le cas de processus étagée. On définit les processus càglàd de carré intégrable (appartenant à $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$) comme l'ensemble Γ des processus θ adaptés continus à gauche limités à droite, $(\mathcal{F}_t)$-adaptés tels que

$$\|\theta\|^2 = E\left[\int_0^{\infty} \theta_t^2 dt\right] < \infty.$$

Les processus étagés appartiennent à Γ. On dit que $(\theta_n) \to \theta$ dans $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ si $\|\theta_n - \theta\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$

0. L'application $\theta \to \|\theta\|$ définit une norme qui fait de Γ un espace complet.

On peut définir $\int_0^\infty \theta_s dB_s$ pour tout les processus θ de Γ. soit $\theta = \lim\limits_{n\to\infty} \theta_n$ ou $\theta_n = \sum_{j=0}^n \tilde{\theta}_j^n 1_{[t_j, t_{j+1}[}$, avec $\tilde{\theta}_j^n \in \mathcal{F}_{t_j}$ la limite étant au sens de $L^2 (\Omega \times \mathbb{R}_+)$. L'intégrale $\int_0^\infty \theta_s dB_s$ est alors la limite dans $L^2 (\Omega)$ des sommes $\sum_{j=0}^n \tilde{\theta}_j^n (B(t_{j+1}) - B(t_j))$ dont l'espérance est 0 et la variance $E\left[\sum_{j=0}^n \tilde{\theta}_j^2 (t_{j+1} - t_j)\right]$. On a alors

$$E\left[\int_0^\infty \theta_s dB_s\right] = 0 \text{ et } E\left[\int_0^\infty \theta_s dB_s\right]^2 = E\left[\int_0^\infty \theta_s^2 ds\right].$$

On note $\int_0^t \theta_s dB_s \overset{déf}{=} \int_0^\infty \theta_s 1_{[0,t]}(s)\, dB_s$. Si θ est étagé $\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^n \theta_j (B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j \wedge t})$. Plus généralement, si τ est un temps d'arrêt, le processus $1_{[0,\tau]}(t)$ est adapté et on définit

$$\int_0^{t\wedge\tau} \theta_s dB_s = \int_0^t \theta_s 1_{]0,\tau]}(s)\, dB_s.$$

Nous allons construire l'intégrale stochastique ou l'approximation est faite au point le plus à gauche afin que lintégré soit indépendant de l'intégrant. C'est l'intégrale au sens d'Ito. Enfin, pour des raisons techniques, nous allons demander de la régularité aux processus que nous manipulons. Nous leur demanderons d'être presque surement continus a droite avec limite a gauche (cadlag).

Finalement, nous allons donc construire l'intégrale stochastique sur l'ensemble $L^2_{loc} (\Omega \times \mathbb{R}_+)$.

Chapitre 2

Principe du maximum pour un contrôle optimal des EDS fonctionnelles neutres

Dans ce chapitre, on va donner une présentation du problème de contrôle optimal gouverné par des équations différentielles fonctionnelles stochastiques neutres $(EDFSN)$, la méthode considéré est la méthode de principe du maximum stochastique de Pontryagin avec fonction de coût de type de lagrange.

2.1 Formulation du problème

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$ un espace de probabilité filtré complet, $\delta \geq 0$ est une constante et $T > 0$ est le temps terminal, en se donne un mouvment brownien d- dimensionnelle $W = \{W(t) : t \in [0, T]\}$ sur cet espace, et on concidére la filtration F définie par $F := (\mathcal{F}_t)$, $t \in [0, T]$ est la filtration naturelle de W augmentée de tous les ensembles P-nuls en F, et $F := \mathcal{F}_0$ pour tout $t \in [-\delta, 0]$. Alors $F := \{\mathcal{F}_t;\ t \in [-\delta, T]\}$ est une filtration satisfaisant les conditions habituelles.

Consédérons le problème de contrôle optimal stochastique suivant : minimiser le coût de type

Lagrange fonctionnel

$$J\ (u(.)) := E\left[\int_0^T l(t, X^t, u(t))dt\right].$$

Où l'état de système est modéliser par

$$\begin{cases} d[X(t) - g(t, X^t)] = b(t, X^t, u(t))dt + \sigma(t, X^t, u(t))dW(t),\ t \in [0, T], \\ X(t) = \phi(t),\ t \in [-\delta, 0]. \end{cases}$$

Où X^t indique la restriction du trajectoire de X sur $[t-\delta, t]$, et $u(.)$ est la variable de contrôle. On introduit l'équation différentielle fonctionnelle stochastique neutres $(EDFSN)$ comme suit

$$\begin{cases} d[X(t) - g(t, X^t)] = b(t, X^t)dt + \sigma(t, X^t)dW(t),\ t \in [0, T]; \\ X(t) = \phi(t),\ t \in [-\delta, 0]. \end{cases}$$

- Si $g \equiv 0$, il s'agit d'une équation différentielle fonctionnelle stochastique $(EDFS)$.

Notation 1 *Pour tout A étant un vecteur ou une matrice, dénotez A' comme la transformation de A, dénote H en tant que espace Euclidienne, et $|.|$ comme la norme et $\langle .,. \rangle$ comme le produit intérieur dans H, en définie :*

$L^2(\Omega; H)\ := \{\eta : \Omega \to H,\ \mathcal{F}_T - mesurable \mid E[|\eta|^2] < +\infty\}$,

Pour $r, s, \tau, \nu \in [-\delta, T + \delta]$, en définir

$\mathcal{L}_F^2(r, s; H) := \left\{\theta : [r, s] \times\ \Omega \to H,\ F - adapt\acute{e} \mid E \int_r^S |\theta(u)|^2 du < +\infty\right\}$,

$\Im_F^2([r, s]; H) := \left\{\theta : [r, s] \times \Omega \to H,\ F - adapt\acute{e},\ continue \mid E \sup\limits_{r \leq u \leq s} |\theta\,(u)|^2 < +\infty\right\}$,

$L^2(r, s; L^2(\Omega; H))\ := \left\{\psi\ : [r, s] \times \Omega \to H,\ B([r, s]) \times \mathcal{F}_T - mesurable \mid E \int_r^s |\psi(u)|^2 du < +\infty\right\}$

$L^2(r, s; L^2(\tau, \nu; H))\ := \{\upsilon\ : [r, s] \times [\tau, \nu] \to H,\ conjointement\ mesurable\ \mid$

$$\int_r^s \int_\tau^\nu |\upsilon(t, s)|^2 ds dt < +\infty\},$$

$L^2(r, s; \mathcal{L}_F^2(\tau, \nu; H))\ := \{\vartheta\ : [r, s] \times [\tau, \nu] \times \Omega \to H\ est\ B([r, s] \times [\tau, \nu]) \times \mathcal{F}_T{-}mesurable,$

$$\vartheta(t, .)\ est\ F{-}adapt\acute{e}\ \grave{a}\ tous\ les\ t \in [r, s] \mid E\left[\int_r^s \int_\tau^\nu |\vartheta(t, s)|^2 ds dt\right] < +\infty\}$$

Pour plus de simplicité, notons

$$H^2(r, s)\ := \mathcal{L}_F^2(r, s; \mathbb{R}^n) \times L^2(r, s; \mathcal{L}_F^2(r, s; \mathbb{R}^{n \times d})),$$

équipé de la norme

$$\|(\theta,\vartheta)\|^2_{H^2(r,s)} = E\left[\int_r^s |\theta(u)|^2 du + \int_r^s \int_r^s |\vartheta(\nu,u)|^2 du d\nu\right],$$

et

$$M^2(r,s) \ := \left\{(\theta,\vartheta) \in H^2(r,s) \mid \theta(t) = E[\theta(t)] + \int_r^s \vartheta(r,u)dW(u), \forall t \in [r,s]\right\},$$

$$V_0([0,\delta];\mathbb{R}^{k\times\ n}) := \left\{f : [0,\delta] \to \mathbb{R}^{k\times n}\text{est a variation limité et continu agauche sur } [0,\delta)\right\}.$$

2.2 Le problème de contrôle optimal

Considérez l'$EDFSN$ contrôlée

$$\begin{cases} d[X(t) - g(t,X^t)] = b(t,X^t,u(t))dt + \sigma(t,X^t,u(t))dW(t), \ t \in [0,T], \\ X(t) = \phi(t), \ t \in [-\delta, 0]. \end{cases} \tag{2}$$

Où X^t indique la restriction du trajectoire de X sur $[t-\delta,t]$, $\phi \in \Im^2_F([-\delta,0];\mathbb{R}^n)$,

$$g : [0,T] \times \ \Omega \times \ C([0,\delta];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n,$$

$$b : [0,T] \times \ \Omega \times \ C([0,\delta];\mathbb{R}^n) \times \ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma : [0,T] \times \ \Omega \times \ C([0,\delta];\mathbb{R}^n) \times \ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n\times\ d}.$$

Sont conjointement mesurables, et les $g(.,\psi)$, $b(.,\psi,u)$ et $\delta(.,\psi,u)$ sont progressivement mesurables pour tous $(\psi,u) \in C([0,\delta];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{n\times m}$.

Définition 2.1 *On appelle contrôle admissible tout processus* $u = (u_t)_{t\in[0,T]}$ *mesurable et* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté à valeur dans* U, *telle que*

$$\sup_{0\leq t\leq T} E[|u_t|^2] < +\infty.$$

$U \subset \mathbb{R}^m$ est non vide convexe et

$U_{ad} := \left\{ u(.)\ : [0,T] \times \Omega \to U,\ F-\text{progressivement mesurable} \mid E[\int_0^T |u(t)|^2]dt < +\infty \right\}$ est l'ensemble de contrôle admissible.pour tout $u(.) \in U_{ad}$. On introduit le coût fonctionnel comme suit

$$J(u(.)) := E[\left[\int_0^T l(t, X^t, u(t))dt\right],$$

telle que $l\ :\ [0,T] \times\ \ \Omega \times\ \ C([0,\delta];\mathbb{R}^n) \times\ \ \mathbb{R}^m\ \to \mathbb{R}$ est mesurable, et $l\ (.,\psi,u)$ est F-progressivement mesurable pour tout $(\psi,u) \in C([0,\delta];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m$. Définir $l\ (t,.,.) \equiv 0$, pour tout $t \in (T, T+\delta]$. Le problème de contrôle optimal est de trouver un contrôle $\overline{u}(.) \in Uad$, de sorte que

$$J(\overline{u}(.)) := \underset{u(.)\in Uad}{inf}\ J(u(.)).$$

Dénote : $\overline{X}(.)$ comme solution de $EDFSN$ (2) correspondant à $\overline{u}(.)$. En suite $(\overline{X}(.), \overline{u}(.))$ est appelé paire optimal.

Quelques hypothèses sur les coefficients

- $(C1)$: b, σ, l, g sont continuellement différentiables par rapport à x, et b, σ, l sont continuellement différentiable par rapport à u. Les dérivés $b_x, b_u, \sigma_x, \sigma_u, l_x, l_u, g_x$ sont bornés.
- $(C2)$: $b(.,0,0)$, $\sigma(.,0,0), l\ (.,0,0) \in \mathcal{L}_F^2(0,T;H)$, $H = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times d}$, $\mathbb{R}$ respectivement. g, g_x sont continus en t, et il existe une constante $0 < \kappa < 1$, telle que $\|g_x\| \leq \kappa$.

2.3 Equation adjointe

On supposons que $(\bar{X}(\cdot), \overline{u}(\cdot))$ est un paire optimale, $\chi(.)$ la solution de $l'EDFSN$ linéaire suivante

$$\begin{cases} d[\chi(t) - \overline{g}_x(t)\chi^t] = [\bar{b}_x(t)\chi^t + \bar{b}_u(t)\overline{v}(t)]dt + [\overline{\sigma}_x(t)\chi^t + \overline{\sigma}_u(t)\overline{v}(t)]\, dW(t),\ t \in [0,T] \\ \chi(t) = 0,\ t \in [-\delta, 0]. \end{cases} \tag{2.1}$$

Notons comme une fonction linéaire

$$I(\chi(.)) = E\left[\int_0^T \bar{\bar{l}}_x(t)\chi^t dt\right]$$

telle que $\overline{g}_x(t) := g_x(t, \bar{X}^t)$, $\overline{\sigma}_x(t) := \sigma_x(t, \bar{X}^t, \overline{u}(t))$, $\bar{b}_x(t) := b_x(t, \bar{X}^t, \overline{u}(t))$,

$\overline{\sigma}_u(t) := \ \sigma_u(t,\ \bar{X}^t,\ \overline{u}(t))$, $\bar{b}_u(t) := b_u(t, \bar{X}^t, \overline{u}(t))$, $\overline{l_x}(t) := l_x(t, \bar{X}^t,\ \overline{u}(t))$

d'aprés $C(1)$ et $C(2)$ $\ \overline{g}_x, \bar{b}_x, \overline{\sigma}_x$ et $\overline{l_x}$ sont des fonctions lineares dans $C([0,\delta];\mathbb{R}^n)$.

Lemme 2.1 *Il existe* $G(t,.),\ B(t,.) \in V_0([0,\delta];\mathbb{R}^{n\times n})$, $\sum_i(t,.) \in V_0([0,\delta];\mathbb{R}^{d\times n})(i = 1,.,d)$ *et* $L(t,.) \in V_0([0,\delta];\mathbb{R}^{1\times n})$ *telle que pour toute* $\phi \in C([0,T];\mathbb{R}^n)$ *ona*

$$\begin{aligned}
\overline{g}_x(t)\phi &= \int_0^\delta G(t,dr)\phi(r),\\
\bar{b}_x(t)\phi &= \int_0^\delta B(t,dr)\phi(r),\\
\overline{\sigma}_x(t)\phi &= \int_0^\delta \sum(t,dr)\phi(r),\\
\overline{l_x}(t)\phi &= \int_0^\delta L(t,dr)\phi(r).
\end{aligned}$$

Remarque 2.1 Voici certaines des hypothèses dont nous avons besoin dans le calcul

$(C3)$: Il existe une mesure de probabilité λ_i $(i = 0,1,2,3)$ sur $[0,\delta]$, et $\overline{G}(t,r), \overline{B}(t,r), \overline{\sum}(t,r), \overline{L}(t,r)$, tel que

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta G(t,dr)\phi(r) &= \int_0^\delta \overline{G}(t,r)\phi(r)\lambda_0(dr),\\
\int_0^\delta B(t,dr)\phi(r) &= \int_0^\delta \overline{B}(t,r)\phi(r)\lambda_1(dr),\\
\int_0^\delta \sum(t,dr)\phi(r) &= \int_0^\delta \overline{\sum}(t,r)\phi(r)\lambda_2(dr),\\
\int_0^\delta L(t,dr)\phi(r) &= \int_0^\delta \overline{L}(t,r)\phi(r)\lambda_3(dr).
\end{aligned}$$

Nous pouvons remplacer L'hypothèse $(C3)$ par

- $\overline{g}\ _x(t)$, $\bar{b}_x(t)$, $\overline{\sigma}_x(t)$, $\overline{\ L}_x(t)$ sont déterministes et continus en t.
- Dans $EDFSN$ (1), $g(t,X^t) = \hat{g}\ (t, \int_0^\delta \alpha(t,r)X(t-r)\ \lambda_0(dr))$, et $b,\ \sigma,\ l$ possède la même forme.

Par l'hypothèse ($C3$), l'équation (2.1) et la fonction linéaire réduisent à

$$\chi(t) - \int_0^\delta \overline{G}(t,r)\chi(t-r)\lambda_0(dr) = \int_0^t [\int_0^\delta \overline{B}(s,r)\chi(s-r)\lambda_1(dr) + \overline{b}_u(s)\upsilon(s)]ds \qquad (2.2)$$
$$+ \int_0^t [\int_0^\delta \overline{\sum}(s,r)\chi(s-r)\lambda_2(dr) + \overline{\sigma}_u(s)\upsilon(s)]dW(s),$$

et

$$I(\chi(.)) = E\int_0^T \int_0^\delta \overline{L}(t,r)\chi(t-r)\lambda_3(dr)dt.$$

Soit $\rho(t) := \int_0^t \overline{b}_u(s)ds + \int_0^t \overline{\sigma}_u(s)dW(s)$. Nous avons la formule de dualité suivante.

Proposition 2.1 *Soit $\chi \in \Im_F^2([-\delta,T];\mathbb{R}^n)$ la solution de l'EDFSN (2.2), et $(Y,Z) \in M^2(0,T+\delta)$ être la M-solution adaptée de l'EFSRNV linéaire suivante*

$$\begin{cases} Y(t) - E_t\left[\int_o^\delta \bar{G}'(t+r,r)Y(t+r)\lambda_0(dr)\right] = \int_0^\delta \bar{L}(t+r,r)\lambda_3(dr) \\ + \int_t^T E_s\left[\int_o^\delta \bar{B}'(t+r,r)Y(s+r)\lambda_1(dr) + \int_0^\delta \overline{\sum}'(t+r,r)Z(s+r,t+r)\lambda_2(dr)\right]ds \\ + - \int_t^T Z(t,s)dW(s),\ t\in[0,T], \\ Y(t) = 0,\ t\in(T,T+\delta]. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Alors la relation suivante est vérifiée

$$I(\chi(.)) = E\left[\int_0^T \langle\rho(t), Y(t)\rangle dt\right].$$

Preuve. En vue de (2.2), nous avons

$$\rho(t) = \chi(t) - \int_0^\delta \overline{G}(t,r)\chi(t-r)\lambda_0(dr) - \int_0^t \int_0^\delta \overline{B}(s,r)\chi(s-r)\lambda_1(dr)ds$$
$$- \int_0^t \int_0^\delta \overline{\sum}(s,r)\chi(s-r)\lambda_2(dr)dW_s.$$

Depuis $Y \in \mathcal{L}^2_F(0,T;\mathbb{R}^n)$, nous avons

$$\begin{aligned}
&E\left[\int_0^T \langle Y(t),\rho(t)\rangle dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T \langle Y(t),\chi(t)\rangle dt\right] - E\left[\int_0^T \langle Y(t),\int_0^\delta \overline{G}(t,r)\chi(t-r)\lambda_0(dr)\rangle dt\right] \\
&- E\left[\int_0^T \langle Y(t),\int_0^t\int_0^\delta \overline{B}(s,r)\chi(s-r)\lambda_1(dr)ds\rangle dt\right] \\
&- E\left[\int_0^T \langle Y(t),\int_0^t\int_0^\delta \overline{\sum}(s,r)\chi(s-r)\lambda_2(dr)dW(s)\rangle dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T \langle Y(t),\chi(t)\rangle dt\right] - E\left[I_1\right] - E\left[I_2\right] - E\left[I_3\right].
\end{aligned}$$

par la théoreme de fubini

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\delta\int_0^T \left\langle Y(t),\overline{G}(t,r)\chi(t-r)\right\rangle dt\ \lambda_0(dr) \\
&= \int_0^\delta\int_{-r}^{T-r} \left\langle \overline{G}'(t+r,r)Y(t+r),\chi(t)\right\rangle dt\ \lambda_0(dr) \\
&= \int_0^\delta\int_0^T \left\langle \overline{G}'(t+r,r)Y(t+r),\chi(t)\right\rangle dt\ \lambda_0(dr) \\
&= \int_0^T \left\langle \int_0^\delta \overline{G}'(t+r,r)Y(t+r)\lambda_0(dr),\chi(t)\right\rangle dt,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

et

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^\delta\int_0^T \left\langle \overline{B}'(t,r)\int_t^T Y(s)ds,\chi(t-r)\right\rangle dt\ \lambda_1(dr) \\
&= \int_0^\delta\int_{-r}^{T-r} \left\langle \overline{B}'(t+r,r)\int_t^T Y(s+r)ds,\chi(t)\right\rangle dt\ \lambda_1(dr) \\
&= \int_0^T \left\langle \int_t^T\int_0^\delta \overline{B}'(t+r,r)Y(s+r)\lambda_1(dr)ds,\chi(t)\right\rangle dt.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Puisque $(Y, Z) \in M^2(0, T+\delta)$, $Y(t) = E[Y(t)] + \int_0^t Z(t,s)dW(s)$, ensuite

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^T \left\langle \int_0^t Z(t,s)dW(s), \int_0^t \int_0^\delta \overline{\sum}(s,r)\chi(s-r)\lambda_2(dr)dW(s) \right\rangle dt \\
&= \int_0^T \int_0^t \left\langle Z(t,s), \int_0^\delta \overline{\sum}(s,r)\chi(s-r)\lambda_2(dr) \right\rangle ds\ dt \\
&= \int_0^\delta \int_0^T \left\langle \int_t^T \overline{\sum}'(t,r)Z(s,t)ds, \chi(t-r) \right\rangle dt\ \lambda_2(dr) \qquad (2.6) \\
&= \int_0^\delta \int_{-r}^{T-r} \left\langle \overline{\sum}'(t+r,r) \int_t^T Z(s+r,t+r)ds, \chi(t) \right\rangle dt\ \lambda_2(dr) \\
&= \int_0^T \left\langle \int_t^T \int_0^\delta \overline{\sum}'(t+r,r)Z(s+r,t+r)\lambda_2(dr)ds, \chi(t) \right\rangle dt.
\end{aligned}$$

puisque pour tout $t \in (T, T+\delta]$, $l(t,.,.) \equiv 0$, alors $\overline{L}(t,r) \equiv 0$, pour tout $t \in (T, T+\delta]$. ■

Donc d'aprés (2.4),(2.5) et (2.6) nous concluons

$$\begin{aligned}
E\left[\int_0^T \langle Y(t), \rho(t)\rangle dt\right] &= E\left[\int_0^T \left\langle \int_0^\delta \overline{L}(t+r,r)\ \lambda_3(dr) - \int_t^T Z(t,s)dW(s), \chi(t) \right\rangle dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T \left\langle \int_0^\delta \overline{L}(t+r,r)\lambda_3(dr), \chi(t) \right\rangle dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T \int_0^\delta \overline{L}(t,r)\chi(t-r)\lambda_3(dr)dt\right] = I(\chi(.)).
\end{aligned}$$

2.4 Principe de Maximum

Spposons que $(\bar{X}(.), \bar{u}(.))$ est une paire.optimale Pour n'importe quel $u(.) \in U_{ad}$, considérons $v(.) := u(.) - \bar{u}(.)$, $u_\varepsilon(.) := \bar{u}(.) + \varepsilon v(.) \in U_{ad}$, $\forall \varepsilon \in [0,1]$ et $X_\varepsilon(.)$ est la solution de $EDFSN$ (2).

Avant de construire le principe du maximum, nous avons besoin de quelques lemmes sur le divlopment de premier ordre.

Soit Γ un espace métrique. Considérons

$$\begin{cases} d\left[y_\gamma(t) - G(t,\gamma,y_\gamma^t)\right] = B(t,\gamma,y_\gamma^t)dt + R(t,\gamma,y_\gamma^t)dW(t)\,,\ t \in [0,T], \\ y_\gamma(t) = \varphi(t),\ t \in [-\delta, 0]. \end{cases}$$

telle que $\phi \in C([-\delta, 0]; \mathbb{R}^n)$, $G, B : [0,T] \times \Omega \times \Gamma \times C([0,\delta]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, $R : [0,T] \times \Omega \times \Gamma \times C([0,\delta]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{n\times d}$.

Pour n'importe quel $\gamma \in \Gamma$ fixé, $G(.,\gamma,\phi), B(.,\gamma,\phi), R(.,\gamma,\phi)$ sont F-progressivement mesurables pour n'importe quel $\phi \in C([0,\delta]; \mathbb{R}^n)$, et satisfont aux hypothèses suivantes.

(i) $G(.,\gamma,\phi)$ est continu en t et $G(.,\gamma,0) \in \Im_F^2([0,T]; \mathbb{R}^n)$. Pour tout ϕ_1, $\phi_2 \in C([0,\delta]; \mathbb{R}^n)$, il existe $\kappa \in (0,1)$, de sorte que

$$\|G(t,\gamma,\phi_1) - G(t,\gamma,\phi_2)\| \leq \kappa \|\phi_1 - \phi_2\|.$$

(ii) $B(.,\gamma,0), M(.,\gamma,0) \in \mathcal{L}_F^2([0,T]; \mathbb{R}^n)$. Pour tout ϕ_1, $\phi_2 \in C([0,\delta]; \mathbb{R}^n)$, il existe $L > 0$, de sorte que

$$\|B(t,\gamma,\phi_1) - B(t,\gamma,\phi_2)\| + \|R(t,\gamma,\phi_1) - R(t,\gamma,\phi_2)\| \leq L \|\phi_1 - \phi_2\|$$

(iii) Pour $\gamma_0 \in \Gamma$,

$$\begin{aligned}
\lim_{\gamma\to\gamma_0} E \sup_{t\in[0,T]} \left|G(t,\gamma,y_{\gamma_0}^t) - G(t,\gamma_0,y_{\gamma_0}^t)\right| &= 0,\\
\lim_{\gamma\to\gamma_0} E \int_0^T \left|B(t,\gamma,y_{\gamma_0}^t) - B(t,\gamma_0,y_{\gamma_0}^t)\right| dt &= 0,\\
\lim_{\gamma\to\gamma_0} E \int_0^T \left|R(t,\gamma,y_{\gamma_0}^t) - R(t,\gamma_0,y_{\gamma_0}^t)\right| dt &= 0.
\end{aligned}$$

Lemme 2.2 *Selon les hypothèses ci-dessus, nous avons*

$$\lim_{\gamma\to\gamma_0} E \sup_{t\in[0,T]} |y_\gamma(t) - y_{\gamma_0}(t)|^2 = 0.$$

Lemme 2.3 *Supposons que* $(C1)$ *et* $(C2)$ *sont vérifiées. Ensuite nous avons la première dévlopment suivante*

$$X_\varepsilon(t) = \bar{X}(t) + \varepsilon\chi(t) + R_\varepsilon(t), \qquad t \in [0,T].$$

où

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |R_\varepsilon(t)|^2\right] = 0.$$

Preuve. *Par le Lemma 2.2, il est facile de prouver que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} E\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_\varepsilon(t) - \bar{X}(t)|^2\right] = 0.$$

Posons

$$z_\varepsilon := \frac{X_\varepsilon(t) - \bar{X}(t)}{\varepsilon},$$

alors

$$\begin{aligned} &z_\varepsilon(t) - \int_0^1 g_x(t, \bar{X} + \theta\varepsilon z_\varepsilon^t) z_\varepsilon^t d\theta \\ &= \int_0^t \left[\int_0^1 b_x(s, \bar{X} + \theta\varepsilon z_\varepsilon^t, u_\varepsilon(s)) z_\varepsilon^s d\theta + \int_0^1 b_u(s, \bar{X}^s, \bar{u}(s) + \theta\upsilon(s))\upsilon(s) d\theta\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\int_0^1 \sigma_x(s, \bar{X} + \theta\varepsilon z_\varepsilon^t, u_\varepsilon(s)) z_\varepsilon^t d\theta + \int_0^1 \sigma_u(s, \bar{X}^s, \bar{u}(s) + \theta\upsilon(s))\upsilon(s) d\eta\right] dW(s). \end{aligned}$$

Compte tenu de Lemma 2.2, *nous avons*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} E\left[\sup_{t\in[0,T]} |z_\varepsilon(t) - \chi(t)|^2\right] = 0.$$

■

Théorème 2.1 *Supposons que* $(C1)$*et* $(C3)$ *sont vérifiées. Soit* $(\bar{X}(.), \bar{u}(.))$ *une paire optimale et* $(Y, Z) \in M^2(0, T + \delta)$ *étre la Solution le* $M-$*adapté de l'*$EFSRNV$ *linéaire* (2.3). *Alors nous avons pour tout* $u \in U$,

$$\left\langle \bar{l}_u(t) + \bar{b}'_u(t)\ E_t\left[\int_t^T Y(s)ds\right] + \bar{\sigma}'_u(t)\ E_t\left[\int_t^T Z(s,t)ds\right], u - \bar{u}(t)\right\rangle \geq 0,\ \ t \in [0, T] - p.s.$$

telle que $\bar{l}_u(t) := l(t, \bar{X}^t, \bar{u}(t))$.

Preuve. En vue des suppositions $(C1) - (C3)$, $EFSRNV$ (2.3) admet une paire unique de

Solustion $M-$adapté $(Y,Z)\in M^2(0,T+\delta)$ Alors,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{J(u_\varepsilon(.)-J(\bar{u}(.))}{\varepsilon} = E\int_0^T \frac{l(t,X_\varepsilon^t,u_\varepsilon(t))-l(t,\bar{X}^t,\bar{u}(t))}{\varepsilon}dt \\
&= E\int_0^T\int_0^1 l_u(t,X_\varepsilon^t,\bar{u}(t)+\theta\varepsilon\upsilon(t))\upsilon(t)d\theta dt + E\int_0^T\int_0^1 l_u(t,\bar{X}^t+\theta(X_\varepsilon^t-\bar{X}^t),\bar{u}(t))\frac{X_\varepsilon^t-\bar{X}^t}{\varepsilon}d\theta dt \\
&= E\int_0^T \left[\bar{l}_u(t)\upsilon(t)+\bar{l}_x(t)\chi^t\right]dt + E\int_0^T\int_0^1\left[l_u(t,X_\varepsilon^t,\bar{u}(t)+\theta\varepsilon\upsilon(t))-\bar{l}_u(t)\right]\upsilon(t)d\theta dt \qquad (5.1) \\
&+ E\int_0^T\left(\int_0^1 l_u(t,\bar{X}^t+\theta(X_\varepsilon^t-\bar{X}^t,\bar{u}(t))\frac{X_\varepsilon^t-\bar{X}^t}{\varepsilon}d\theta - \bar{l}_x(t)\chi^t\right)dt.
\end{aligned}$$

En vue de Lemma 2.3, nous avons

$$E\left[\int_0^T\left[\bar{l}_u(t)\upsilon(t)+\bar{l}_x(t)\chi^t\right]dt\right]\geq 0.$$

Ensuite, en appliquant l'hypothèse $(C3)$ et la proposition 2.1 nous avons

$$\begin{aligned}
0 &\leq E\left[\int_0^T\left(\int_0^\delta \bar{L}(t,r)\chi(t-r)\lambda_3(dr)+\left\langle\bar{l}_u(t),\upsilon(t)\right\rangle\right)dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T\left(\langle Y(t),\rho(t)\rangle+\langle l_u(t),\upsilon(t)\rangle\right)dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T\left\langle\bar{l}_u(t),\upsilon(t)\right\rangle dt+\int_0^T\left\langle Y(t),\int_0^t\bar{b}_u(s)\upsilon(s)ds\right\rangle dt\right] \\
&+ E\left[\int_0^T\left\langle Y(t),\int_0^t\bar{\sigma}_u(s)\upsilon(s)dW(s)\right\rangle dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T\left\langle\bar{l}_u(t)+\bar{b}'_u(t)\int_t^T Y(s)ds+\bar{\sigma}'_u(t)\int_t^T Z(s,t)ds,u(t)-\bar{u}(t)\right\rangle dt\right].
\end{aligned}$$

La dernière égalité est due à

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\left\langle Y(t),\int_0^t\bar{\sigma}_u(s)\Delta u(s)dW(s)\right\rangle dt \\
&= \int_0^T\left\langle\int_0^t Z(t,s)dW(s),\int_0^t\bar{\sigma}_u(s)\Delta u(s)dW(s)\right\rangle dt \\
&= \int_0^T\int_0^t\langle Z(t,s),\bar{\sigma}_u(s)\Delta u(s)\rangle dsdt = \int_0^T\left\langle\bar{\sigma}'_u(t)\int_t^T z(s,t)ds,\Delta u(t)\right\rangle dt.
\end{aligned}$$

donc nous avons pour tous $u \in U$ et presque tous $t \in [0, T]$,

$$\left\langle \bar{l}_u(t) + \bar{b}'_u(t) E_t \int_t^T Y(s) ds + \bar{\sigma}'_u(t) E_t \int_t^T Z(s,t) ds, u(t) - \bar{u}(t) \right\rangle \geq 0.$$

■

Chapitre 3

Solution d'une générale $EFSRNV$

Considérez une $EFSRNV$ générale de la forme

$$\begin{cases} Y(t) - G(t, Y_t) = \Psi(t) + \int_t^T f(t, s, Y_s, Z(t,s), Z(s,t;\delta))ds + \int_t^T Z(t,s)dW(s), t \in [0,T]; \\ Y(t) = \xi(t), \ t \in (T, T+\delta]. \end{cases} \tag{3.1}$$

Où Y_t indique la restriction de Y sur $[t, t+\delta]$, $Z(.,.)$ est un processus inconnue définie sur $[0, T+\delta] \times [0, T+\delta]$, $Z(t,s)$ indique la valeur de Z à (t,s), et $Z(s,t;\delta)$ indique la restriction de $Z(.,.)$ à $[s, s+\delta] \times [t, t+\delta]$.

Pour tout $0 \leq R \leq S \leq T+\delta$,on définir

$$\Delta[R,S] := \{(t,s) \in [R,S] \times [R,S] \mid R \leq t \leq s \leq S\},$$
$$\Delta^c[R,S] := [R,S] \times [R,S] \backslash \Delta[R,S].$$

Dénoter (pour simplifie) $\Delta := \Delta\ [0,T]$, $\Delta^c := \Delta^c[0,T]$, $\Delta_\delta := \Delta\ [0, T+\delta]$ et $\Delta_\delta^c := \Delta^c$ $[0, T+\delta]$.

(G, f) en (4.1) est appelé générateur de l'$EFSRNV$. Pour (G, f), il existe deux fonctions J et F.

• $J : [0,T] \times \Omega \times L^2(0, \delta; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ est mesurable, et $J(., \phi)$ est F- progressivement mesurable pour toute $\phi \in L^2(0, \delta; \mathbb{R}^n)$.

• $F : \Delta\times\Omega\times L^2(0,\delta;\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^{n\times d}\times L^2(0,\delta;L^2(0,\delta;\mathbb{R}^{n\times d}))\to\mathbb{R}^n$ est mesurable, et $F(t,.,\phi,\omega,\varphi)$ est $F-$progressivement mesurable pour tout (t,ϕ,ω,φ) fixés dans l'espace correspondant, et (J,F) satisfait,

$(H1)$: Il existe $\kappa\in[0,1)$ et ϱ_0 une mesure de probabilité sur $[0,\delta]$, de telle sorte que pour tout ϕ, $\overline{\phi}\in L^2(0,\delta;\mathbb{R}^n)$,

$$|J(t,\phi_t)-J(t,\overline{\phi}_t)|^2\leq\kappa\int_0^\delta|\phi(u)-\overline{\phi}(u)|^2\varrho_0(du), \tag{3.2}$$

$(H2)$: Il exite $L>0$, ϱ_1 et ϱ_2 deux mesure de probabilité sur $[0,\delta]$, de sorte que pour tout (ϕ,ω,φ), $(\overline{\phi},\overline{\omega},\overline{\varphi})$ dans l'espace correspondant et $(t,s)\in\Delta$

$$\begin{aligned}&|F(t,s,\phi,w,\varphi)-f(t,s,\phi,w,\varphi)|\\&\leq L[\int_0^\delta|\phi(u)-\overline{\phi}(u)|\varrho_1(du)+|\omega-\overline{\omega}|+\int_0^\delta|\varphi(u,u)-\overline{\varphi}(u,u)|\varrho_2(du)].\end{aligned} \tag{3.3}$$

(G,f) sont les fonctions définies par

$$\begin{aligned}&G(t,y_t)=E_t[J(t,y_t)],\\&f(t,s,y_s,z(t,s),z(s,t;\delta))=E_s[F(t,s,y_s,z(t,s),z(s,t;\delta))],\end{aligned}$$

pour tous $(y(.),z(.))\in H^2(0,T+\delta)$, $(t,s)\in\Delta$.

$(H3)$: $|G(t,0)|\in\mathcal{L}^2_F(0,T;\mathbb{R}^n)$, $f_0(t,s):=f(t,s,0,0,0)\in L^2(0,T;\mathcal{L}^2_F(0,T;\mathbb{R}^n))$.

Définition 3.1 *Une paire de processus $(Y,Z)\in H^2(0,T+\delta)$ est appelée la solution $M-$adaptée de l'$EFSRNV$ (3.1) si (3.1) est vérifiée au sens d'Itô pour presque tous $t\in[0,T+\delta]$,*

$$Y(t)=E[Y(t)]+\int_0^t Z(t,s)dW(s),\ p.s.t\in[0,T+\delta],$$

et $Z(t,s)=0$ pour $(t,s)\in\Delta_{\ \delta}\backslash\Delta$.

Remarque 3.1 *Dans l'$EFSRNV$ (3.1), nous mettons seulement la condition terminale*

$Y(t) = \xi(T)$ *sur* $(T, T+\delta]$. *La valeur de* Y *à* T *est déterminée*

$$Y(T) + G(T, Y_T) = \Psi(T).$$

et la valeur de Z sur $\Delta_\delta^c|\Delta^c$ est déterminé par

$$\xi(t) = E[\xi(t)] + \int_0^t Z(t,s)dW(s), t \in [T, T+\delta]. \tag{3.4}$$

Depuis le fait que f dépend de $Z(t,s)$ sur Δ, l'égalité de (3.1) est indépendante de la valeur Z sur $\Delta\ _\delta \backslash \Delta$. Pour l'unicité de solution, nous définissons $Z(t,s) = 0$ dans la définition 3.1 sur $\Delta_\delta \ \backslash \Delta$.

Pour tout $\tau \in [0, T+\delta]$, définissent un sous espace d'$H^2(0,\tau)$,

$$M^2(0,\tau) := \left\{(\theta, \vartheta) \in H^2(0,\tau) \mid \theta(t) = E[\theta(t)] + \int_0^t \vartheta(t,s)dW(s), \ \forall t \in [0,\tau]\right\}$$

équipé de norme

$$\|(\theta,\vartheta)\|^2_{M^2(0,\tau)} = E\left[\int_0^\tau |\theta(u)|^2 du + \int_0^\tau \int_s^\tau |\vartheta(s,u)|^2 duds\right].$$

Alors $M^2(0,\tau)$ est un sous espace fermé de $H^2(0,\tau)$ sous la norme $\|.\|_{H^2(0,\tau)}$. En fait, c'est aussi un espace complet sous$\|.\|_{M^2(0,\tau)}$, parce que $\|.\|_{H^2(0,\tau)}$ est équivalent à$\|.\|_{M^2(0,\tau)}$ dans $M^2(0,\tau)$ Pour tout $(\theta,\vartheta) \in M^2(0,\tau)$

$$\theta(t) = E[\theta(t)] + \int_0^t \vartheta(t,s)dW(s), \ t \le \tau.$$

nous avons

$$E\left[\int_0^t |\vartheta(t,s)|^2 ds\right] = E\left[|\theta(t) - E[\theta(t)]|^2\right] \le 2E\left[|\theta(t)|^2\right].$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|(\theta,\vartheta)\|^2_{H^2(0,\tau)} &= E\left[\int_0^\tau |\theta(t)|^2 dt + \int_0^\tau \int_0^\tau |\vartheta(t,s)|^2 ds dt\right] \\
&= E\left[\int_0^\tau |\theta(t)|^2 dt + \int_0^\tau \int_t^\tau |\vartheta(t,s)|^2 ds\ dt + \int_0^\tau \int_0^t |\vartheta(t,s)|^2 ds\ dt\right], \\
&\leq 2E\left[\int_0^\tau |\theta(t)|^2 dt + \int_0^\tau \int_t^\tau |\vartheta(t,s)|^2 ds\ dt\right] = 2\,\|(\theta,\vartheta)\|^2_{M^2(0,\tau)} \\
&\leq 2E\left[\int_0^\tau |\theta(t)|^2 dt + \int_0^\tau \int_0^\tau |\vartheta(t,s)|^2 ds\ dt\right] = 2\,\|(\theta,\vartheta)\|^2_{H^2(0,\tau)}.
\end{aligned}$$

Donc, si $(Y,Z) \in H^2(0,T+\delta)$ est la solution M -adapté de l'$EFSRNV$ (3.1), ça veut dire $(Y,Z) \in M^2(0,T+\delta)$ et $Z(t,s) = 0$ sur $\Delta_\delta \backslash \Delta$.

Tout d'abord, considérons l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante

$$y(t) = \zeta + \int_t^T f(s)ds - \int_t^T z(s)dW(s),\ t \in [0,T]. \tag{3.5}$$

telle que $f : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est F-progressivment mesurable, $f \in \mathcal{L}^2_F(0,T;\mathbb{R}^n)$ et $\zeta \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Lemme 3.1 *l'EDSR (3.5) admet une paire unique de solution* $(y,z) \in \Im^2_F([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}^2_F(0,T;\mathbb{R}^{n\times d})$, *pour tout* $t \in [0,T]$

$$e^{\beta t}|Y(t)|^2 + E\left[\int_t^T e^{\beta s}|Z(s)|^2 ds \mid \mathcal{F}_t\right] \leq E\left[2e^{\beta T}|\zeta|^2 + \alpha\int_t^T e^{\beta s}|f(s)|^2 ds|\mathcal{F}_t\right]. \tag{3.6}$$

$\forall \alpha, \beta$ *deux constant positive telle que* $\beta > \frac{2}{\alpha}$.

Considérons l'équation intégrale rétrograde suivante

$$\rho(t,s) = \Phi(t) + \int_t^T h(t,u)du - \int_s^T \nu(t,u)dW_u,\ t \in [0,T], \tag{3.7}$$

où $\Phi \in L^2(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^n))$, $h : [0,T]^2 \times\ \Omega \to \mathbb{R}^n$ donnent , et $h \in L^2(0,T;\mathcal{L}^2_F(0,T;\mathbb{R}^n))$, en fixe $t \in [0,T]$, l'équation (3.7) est une $EDSR$ avec le générateur $h(t,.) \in \mathcal{L}^2_F(0,T;\mathbb{R}^n)$ et la condition terminal $\Phi(t) \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

Ainsi (3.7) est une famille de $EDSR$ paramétrée par $t \in [0,T]$. Soient $s = t$, $y(t) = \rho(t,t)$, $z(t,u) = \nu(t,u)$ quand $u \geq t$. Alors

$$y(t) = \Phi(t) + \int_t^T h(t,u)du - \int_t^T z(t,u)dW_u, \; t \in [0,T]. \tag{3.8}$$

Ce est une équation intégrale de Volterra stochastique rétrograde ($EIVSR$).

Lemme 3.2 *l'$EIVSR$ (3.8) admet une paire unique de solutions* $(y(.), z(.,.)) \in M^2(0,T)$, *tel que*

$$E\left[e^{\beta t}|y(t)|^2 + \int_t^T e^{\beta s}|z(t,s)|^2 ds\right] \leq E\left[|\Phi(t)|^2 + \alpha \int_t^T e^{\beta s}|h(t,s)|^2 ds\right]. \tag{3.9}$$

où $\alpha > 0$ *et* $\beta > \frac{2}{\alpha}$ *sont deux constantes positives.*

3.0.1 L'existence et l'unicité de la solution $M-$adaptée

Théorème 3.1 *Supposons que* (G,f) *satisfait* $(H\ 1)$*-*$(H\ 3)$*. Puis pour tout* $\Psi(.) \in L^2(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^n))$ *et* $\xi(.) \in \mathcal{L}^2_F(T,T+\delta;\mathbb{R}^n)$*, l'$EFSRNV$ (3.1) admet une paire unique de M-solution adaptée* $(Y,Z) \in M^2(0,T+\delta)$.

De plus, l'estimation suivante est vérifiée

$$\begin{aligned} &E\left[\int_0^{T+\delta} |Y(t)|^2 dt + \int_0^{T+\delta}\int_t^{T+\delta} |Z(t,s)|^2 dsdt\right] \\ &\leq CE\left[\int_0^T |\Psi(t)|^2 dt + \int_T^{T+\delta} |\xi(t)|^2 dt + \int_0^T |G(t,0)|^2 dt + \int_0^T \textstyle\int_t^T |f_0(t,s)|^2 dsdt\right]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Etape 1 : Définissons un sous-ensemble de $M^2(0,T+\delta)$

$$M^2_\xi(0,T) := \left\{(\theta,\vartheta) \in M^2(0,T+\delta) \mid \theta(t) = \xi(t), \; \forall t \in (T,T+\delta], \text{ et } \vartheta(t,s) = 0, \forall (t,s) \in \Delta_\delta \backslash \Delta\right\}$$

équipé de la norme

$$\|(\theta,\vartheta)\|^2 = E\left[\int_0^T e^{\beta t}|\theta(t)|^2 dt + \int_0^T \int_t^T e^{\beta s}|\vartheta(t,s)|^2 dsdt\right],$$

où β est une constante positive qui sera spécifiée dans l'étape 2. Il est évident que $M_{\xi}^{2}(0,T)$ est fermé.

Pour tout $(y(.),z(.)) \in M_{\xi}^{2}(0,T)$, posons

$$\begin{cases} Y(t)-G(t,y_t)=\Psi(t)+\int_t^T f(t,s,y_s,z(t,s),z(s,t;\delta))ds-\int_t^T Z(t,s)dWs, \quad t\in[0,T], \\ Y(t)=\xi(t), \quad t\in(T,T+\delta]. \end{cases} \tag{3.11}$$

Noton $\tilde{Y}(t):=Y(t)-G(t,y_t)$, alors

$$\tilde{Y}(t)=\Psi(t)+\int_t^T f(t,s,y_s,z(t,s),z(s,t;\delta))ds-\int_t^T Z(t,s)dWs, \quad t\in[0,T], \tag{3.12}$$

Depuis $(y,z)\in M_{\xi}^{2}(0,T)$,$f(t,s,y_s,z(t,s),\ z(s,t;\delta))\in L^2(0,T;\mathcal{L}_F^2(0,T;\mathbb{R}^{n\times m}))$ via $(H\ 1)$ et $(H\ 2)$. Par le Lemma (3.2), (3.12) admet une paire unique de solution $(\tilde{Y},Z)\in M^2(0,T)$. On définir

$$Y(t)=\begin{cases} \tilde{Y}(t)-G(t,y(t)), & t\in[0,T]; \\ \xi(t), & t\in(T,T+\delta]. \end{cases}$$

Alors $Y\in\mathcal{L}_F^2(0,T+\delta;\mathbb{R}^n)$. Définissons $Z(t,s)=0$ sur $\Delta_\delta\backslash\ \Delta$ et modifiez la valeur de Z sur Δ_δ de tel sort que

$$Y(t)=E[Y(t)]+\int_0^t Z(t,s)ds, \quad \forall t\in[0,T+\delta].$$

Alors $(Y,Z)\in M_{\xi}^{2}(0,T)$ est un la Solution $M-$ adapté d'équation (3.11).

étape 2 *:* Considérons $\Gamma\ :\ (y(.),z(.,.))\longmapsto(Y(.),Z(.,.))$ avec (Y,Z) dans l'étape 1. Nous prouvons que Γ est une contraction.

Considérons une autre paire $(\bar{y}(\cdot),\bar{z}(\cdot))\in M_{\xi}^{2}(0,T)$ et notons $(\bar{Y}(.),\bar{Z}(.))\in M_{\xi}^{2}(0,T)$ comme la solution $M-$adaptée de (3.11) avec $(y(.),z(.))$ remplacée par$(\bar{y}(.),\bar{z}(.))$. Définons $\Delta Y(t)\ :=Y(t)-\bar{Y}(t)$, $\Delta Z(t,\ s)\ :=Z(t,s)-\bar{Z}(t,s)$, $\Delta y(t)\ :=y(t)-\bar{y}(t)$ et $\Delta z(t)\ :=$

$z(t,s)-\bar{z}(t,s)$. Puis

$$\begin{aligned}
&\Delta Y(t)-[G(t,y_t)-G(t,\bar{y}_t)]\\
&=\int_t^T[f(t,s,y_s,z(t,s),z(s,t;\delta))-f(t,s,\bar{y}_s,\bar{z}(t,s),\bar{z}(s,t;\delta))]ds+\int_t^T\Delta Z(t,s)dW(s).
\end{aligned}$$

Dénote $C:=C(L,T,n,d)$. En vue de (3.9) dans le Lemma 3.2 et le choix $\beta=\frac{2}{\alpha}$, nous avons

$$\begin{aligned}
&E\left[e^{\beta t}|\Delta Y(t)-[G(t,y_t)-G(t,\bar{y}_t)]|^2+\int_t^T e^{\beta s}|\Delta Z(t,s)|^2ds\right]\\
&\leq \alpha E\left[\int_t^T e^{\beta s}|f(t,s,y_s,z(t,s),z(s,t;\delta))-f(t,s,\bar{y}_s,\bar{z}(t,s),\bar{z}(s,t;\delta))|^2ds\right] \qquad (3.13)\\
&\leq \alpha CE\left\{\int_t^T e^{\beta s}\left[\int_0^\delta|\Delta y(s+u)|^2\varrho_1(du)+|\Delta z(t,s)|^2+\int_0^\delta|\Delta z(s+u,t+u)|^2\varrho_2(du)\right]ds\right\}.
\end{aligned}$$

Intégrer (3.13) en t de 0 à T, et indiquer que $\Delta G(t):=G(t,y_t)-G(t,\bar{y}_t)$, alors

$$\begin{aligned}
&E\left[\int_0^T e^{\beta t}|\Delta Y(t)-\Delta G(t)|^2dt+\int_0^T\int_t^T e^{\beta s}|\Delta Z(t,s)|^2dsdt\right]\\
&\leq \alpha CE\left\{\int_0^T\int_t^T e^{\beta s}[\int_0^\delta|\Delta y(s+u)|^2\varrho_1(du)+|\Delta z(t,s)|^2\right.\\
&\left.+\int_0^\delta|\Delta z(s+u,t+u)|^2\varrho_2(du)]dsdt\right\} \qquad (3.14)\\
&\leq \alpha CE[\int_0^T e^{\beta s}|\Delta y(s)|^2ds+\int_0^T\int_t^T e^{\beta s}(|\Delta z(t,s)|^2+|\Delta z(s,t)|^2)dsdt]\\
&\leq \alpha CE\left[\int_0^T e^{\beta s}|\Delta y(s)|^2ds+\int_0^T\int_t^T e^{\beta s}|\Delta z(t,s)|^2dsdt\right].
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est due à

$$E\left[\int_0^T\int_t^T e^{\beta s}|\Delta z(s,t)|^2dsdt\right]=E\left[\int_0^T e^{\beta t}\int_0^t|\Delta z(t,s)|^2dsdt\right]\leq E\ \left[\int_0^T e^{\beta t}|\Delta y(t)|^2dt\right].$$

Depuis pour tous $\gamma\in(0,1)$ et $a,b\in\mathbb{R}^n$, $|a-b|^2\leq(1-\gamma)|a|^2-(\frac{1}{\gamma}-1)\,|b|^2$, puis

$$|\Delta Y(t)-\Delta G(t)|^2\leq(1-\gamma)|\Delta Y(t)|^2-(\frac{1}{\gamma}-1)|\Delta G(t)|^2.$$

(3.14) réduit à

$$
\begin{aligned}
& E\left[(1-\gamma)\int_0^T e^{\beta t}|\Delta Y(t)|^2dt+\int_0^T\int_t^T e^{\beta s}|\Delta Z(t,s)|^2dsdt\right]\\
& \leq (\frac{1}{\gamma}-1)E\left[\int_0^T e^{\beta t}|\Delta G(t)|^2dt\right]+\alpha CE\left[\int_0^T e^{\beta t}|\Delta y(t)|^2dt+\int_0^T\int_t^T e^{\beta s}|\Delta z(t,s)|^2dsdt\right]\\
& \leq \left[(\frac{1}{\gamma}-1)\kappa+\alpha C\right]E\left[\int_0^T e^{\beta t}|\Delta y(t)|^2ds\right]+\alpha CE\left[\int_0^T\int_t^T e^{\beta s}|\Delta z(t,s)|^2dsdt\right].
\end{aligned}
$$

Pour prouver Γ que c'est une contraction, il suffit de montrer : pour tous $\kappa \in (0,1)$, il y a $\gamma \in (0,1)$ de telle sorte que

$$(\frac{1}{\gamma}-1)\kappa+\alpha C<1-\gamma \text{ et } \alpha C<1.$$

qui sont valables en choisissant α suffisamment petit. Par conséquent, Γ admet un point fixe unique $(Y,Z)\in M_\xi^2(0,T)$. En suite $(Y,Z)\in M^2(0,T+\delta)$ est l'unique solution $M-$ adaptée de l'$EFSRNV$ (3.1).

étape 3 : En vue de (3.9) dans le Lemma (3.2), nous avons

$$
\begin{aligned}
& E\left[e^{\beta t}|Y(t)-G(t,Y_t)|^2+\int_t^T e^{\beta s}|Z(t,s)|^2ds\right]\\
& \leq E\left[e^{\beta T}|\Psi(t)|^2+\alpha\int_t^T e^{\beta s}|f(t,s,Y_s,Z(t,s),Z(s,t;\delta))|^2ds\right]\\
& \leq E\left\{e^{\beta T}|\Psi(t)|^2+\alpha C\int_t^T e^{\beta s}\left[|f_0(t,s)|^2+\int_0^\delta|Y(s+u)|^2\varrho_1(du)+|Z(t,s)|^2\right.\right.\\
& \left.\left.+\int_0^\delta|Z(s+u,t+u)|^2\varrho_2(du)\right]ds\right\}.
\end{aligned}
$$

Comme dans la méthode de l'étape 2, nous avons pour tous les $\alpha \in (0,1)$ et $M > 0$,

$$
\begin{aligned}
&E\left[(1-\gamma)\int_0^T e^{\beta t}|Y(t)|^2dt + \int_0^T\int_t^T e^{\beta s}|Z(t,s)|^2dsdt\right] \\
&\leq E\left[e^{\beta T}\int_0^T |\Psi(t)|^2dt + (\frac{1}{\gamma}-1)\int_0^T e^{\beta t}|G(t,Y_t)|^2dt + \alpha C\int_0^T\int_t^T e^{\beta s}|f_0(t,s)|^2dsdt\right] \\
&+\alpha C E\left[\int_0^{T+\delta} e^{\beta t}|Y(t)|^2dt + \int_0^T\int_t^T e^{\beta s}|Z(t,s)|^2dsdt\right] \\
&\leq E\left[e^{\beta T}\int_0^T |\Psi(t)|^2dt + (\frac{1}{\gamma}-1)(1+M)\int_0^T e^{\beta t}|G(t,0)|^2dt + \alpha C\int_0^T\int_t^T e^{\beta s}|f_0(t,s)|^2dsdt\right. \\
&\left.+\left[(\frac{1}{\gamma}-1)(1+M)\kappa + \alpha C\right]\int_0^T e^{\beta t}|Y(t)|^2dt + \alpha C\int_0^T\int_t^T e^{\beta s}|Z(t,s)|^2dsdt\right].
\end{aligned}
$$

Il est facile de prouver qu'il existe $\gamma \in (0,1)$ et $M > 0$, pour tout $\kappa \in (0,1)$ en choisissant α suffisamment petit,

$$(\frac{1}{\gamma}-1)(1+\frac{1}{M})\kappa + \alpha C < 1-\gamma \quad \text{et} \quad \alpha C < 1.$$

Puis l'estimation (3.10) est vérifiée.

3.1 Exemple

Nous établirssons le principe du maximum d'une équation différentielle stochastique contrôlée (EDS), la méthode décrite dans le chapitre précédentes.

Si $g = 0$ et $\delta = 0$, la EDFSN contrôlée (2) se réduit à la EDS contrôlée suivante :

$$
\begin{cases}
dX(t) = b(t,X(t),u(t))dt + \sigma(t,X(t),u(t))dW(t), \quad t \in [0,T], \\
X(0) = x.
\end{cases}
$$

et le coût fonctionnel réduit à

$$J\ (u(.)) := E[\int_0^T l(t,X(t),u(t))dt].$$

Supposons que $(C1)$ et $(C2)$ toujours vériviées. Le jeu de contrôle admissible et le problème de contrôle optimal son les mêmes que pour le chapitre 2. Comme corollaire du théorème 2.1, nous avons le principe du maximum.

Corollaire 3.1 *Supposons que* $(Y,Z) \in M^2(0,T)$ *soit la solution* $M-$*adaptée de l'équation suivante*

$$Y(t) = \bar{l}_x(t) + \int_t^T \left(\bar{b}'_x(t)Y(s) + \bar{\sigma}'_x(t)Z(s,t)\right) ds + \int_t^T Z(t,s)dW(s).$$

Soit $\left(\bar{X}(.), \bar{u}(.)\right)$ une paire optimale. Puis pour tous $u \in U$

$$\left\langle \bar{l}_u(t) + \bar{b}'_u(t)E_t \left[\int_t^T Y(s)ds\right] + \bar{\sigma}'_u(t)E_t\left[\int_t^T Z(s,t)ds\right], u - \bar{u}(t)\right\rangle \geq 0, \qquad t \in [0,T] - p.s.$$

Proposition 3.1 *Supposons que* $(P,Q) \in \Im_F^2([0,T];\mathbb{R}^2) \times \mathcal{L}_F^2(0,T;\mathbb{R}^{n\times d})$ *soit la solution de l'EDSR suivante*

$$P(t) = \int_t^T \left(\bar{b}_x(s)P(s) + \bar{\sigma}_x(s)Q(s) + \bar{h}_x(s)\right) ds - \int_t^T Q(s)dW(s).$$

Soit $(\bar{X}(.), \bar{u}(.))$ être la paire optimale. Puis pour tous $u \in U$,

$$\left\langle \bar{l}_u(t) + \bar{b}'_u(t)P(t) + \bar{\sigma}'_u(t)Q(t), u - \bar{u}(t)\right\rangle \geq 0, \qquad t \in [0,T] - p.s.$$

Théorème 3.2 *Soient* (Y,Z) *et* (P,Q) *des processus comme ci-dessus, puis*

$$P(t) = E_t\left[\int_t^T Y(s)ds\right], \qquad Q(t) = E_t\left[\int_t^T Z(s,t)ds\right].$$

De plus, le principe du maximum dans le corollaire 3.1 et la proposition 3.1 sont équivalents.

Preuve. Similaire à la preuve dans Théorème 2.1, nous avons $\frac{X\varepsilon(t)-\bar{X}(t)}{\varepsilon}$ converges à $\chi(.)$ dans $\Im_F^2([0,T];\mathbb{R}^n)$, où $\chi(.)$ satisfaite

$$\chi(t) = \int_0^t \left[\bar{b}_x(s)\chi(s) + \bar{b}_u(s)\upsilon(s)\right] ds + \int_0^t [\bar{\sigma}_x(s)\chi(s) + \bar{\sigma}_u(s)\upsilon(s)]dW(s).$$

Posons
$$\rho(t) := \int_0^t \bar{b}_u(s)v(s)ds + \int_0^t \bar{\sigma}_u(s)v(s)dW(s).$$
La dualité entre l'EDS linéaire et l'$EDSR$ montre

$$E\int_0^T \left\langle \chi(t), \bar{l}_x(t)\right\rangle dt = E\ \int_0^T \left(\left\langle P(t), \bar{b}_u(t)v(t)\right\rangle + \langle Q(t), \bar{\sigma}_u(t)v(t)\rangle\right) dt,$$

La dualité entre EDS linéaire et $EFSRNV$ montre

$$\begin{aligned}
&E\int_0^T \left\langle \chi(t), \bar{l}_x(t)\right\rangle dt \\
&= E\ \int_0^T \langle \rho(t), Y(t)\rangle\, dt \\
&= E\int_0^T \left\langle \int_0^t \bar{b}_u(s)v(s)ds, Y(t)\right\rangle dt + E\int_0^T \left\langle \int_0^t \bar{\sigma}_u(s)v(s)dW(s), Y(t)\right\rangle dt \\
&= E\ \int_0^T \left\langle \bar{b}_u(t)\Delta u(t), \int_t^T\ Y(s)ds\right\rangle dt + E\ \int_0^T \left\langle \bar{\sigma}_u(t)v(t), \int_t^T\ z(s,t)ds\right\rangle dt.
\end{aligned}$$

■

Conclusion

la résolution du probléme de notre travail de contrôle optimal d'un systéme différentielle fonctionnelle stochastique neutre, est renu par la méthode de principe du maximum stochastique de pontryagin, avec le fonction de coût de type de Lagrange. Notre travail consiste au trois chapitres le premier chapitre s'intitule :Processus stochastique est rappalle aux quelques définitions de base et le plus souvent élémentaires, concernant les résultats de calcul stochastique. Deuxéme chapitre s'intitule :Principe du maximum pour un contrôle optimal des EDS fonctionnelles neutres. Le troisiéme chapitre s'intitule :Solution d'une générale $EFSRNV$, consiste le preuve de l'existance et l'unicité de $EFSRNV$.

Bibliographie

[1] Philipe Briand, Equations Différentielles Stochqstiques Rétrograde, Mars (2001).

[2] WenNing Wei, Neutral backward stochastic functional differential equations and their application. ArXiv :1301.3081, 2013

[3] WenNing Wei, Maximum principle for optimal control of neutral stochastic functional differential systems, Science China Mathematics, 2015, 58 (6), pp 1265–1284.

[4] Lingying Teng, Li Xiang, and Daoyi Xu, Existence-uniqueness of the solution for neutral stochastic functional differential equations, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2013, 43, (2), pp 619-644.

Annexe : Abréviations et Notations

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Espace de probabilité complet.
$(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$	Espace de probabilité filtré complet.
$(X_t)_{t\in T}$	Processus stochastique.
W	Mouvment brownien.
$p.s$	presque surement.
EDS	Equation différentielle stochastique.
$EDFSN$	Equation différentielle fonctionnelle stochastique neutre.
$EFSRNV$	Equation fonctionnelle stochastique rétrograde neutre de Volterra.
Uad	Ensemble des contrôles admissibles.
U	Partie convexe non vide.
$u(.)$	Variable de contrôle.
$\overline{u}(.)$	Contrôle optimale.
$(\overline{X}(.), \overline{u}(.))$	Paire optimal.
$J(.)$	Fonction de coût.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions un problème du contrôle stochastique gouverné d’équation différentielle fonctionnelle stochastique neutre. La méthode considérée est la méthode de principe du maximum de Pontriaguine, avec la fonction de coût de type de Lagrange. Nous établissons le résultat d'existence et d’unicité des solutions pour des équations fonctionnelles stochastiques rétrogrades neutres de Volterra.

Mots-clés

Équations différentielles fonctionnelles stochastiques neutres, contrôle optimal stochastique, adapté M-solution, équation adjointe, principe du maximum de Pontriaguine.

Abstract

In this work, we study a problem of stochastic control governed by neutral stochastic functional differential equation. The method considered is the principle method of the maximum of Pontriaguine, with the type cost function of Lagrange. We establish the result of existence and uniqueness of solutions for Volterra's neutral retrograde stochastic functional equations.

Keywords

Neutral stochastic functional differential equations, stochastic optimal control, adapted M-solution, adjoint equation, Pontryagin maximum principle.

ملخص

في هذا العمل , ندرس مشكلة التحكم العشوائي التي تحكمها معادلة تفاضلية وظيفية متعادلة. الطريقة التي يتم النظر فيها هي الطريقة الأساسية لحد بونترياجين أقصى , مع وظيفة تكلفة النوع لغرونج. نحن نؤسس نتيجة لوجود وتفرد الحلول لمعادلات فلترا الوظيفية التراجعية المحايدة.

كلمات مفتاحيه

المعادلات التفاضلية الوظيفية المحايدة العشوائية , التحكم الأمثل العشوائي , تكييفها م -حل , معادلة مجاورة , مبدأ بونترياجين الأقصى.