République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

DOUBBAKH Salima

Titre :

Équations différentielles stochastiques rétrogrades localement Lipschitziennes

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	**KHALFALLAH Nabil**	UMKB	Encadreur
Dr.	**CHALA Adel**	UMKB	Président
Dr.	**ZAGHDOUDI Kadhem**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

À mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études,

À mes chères sœurs, pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral,

À mes chers frères, pour leur appui et leur encouragement,

À toute ma famille surtout mon oncle pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,

Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fuit de votre soutien infaillible,

Merci d'être toujours là pour moi,

À mes amis,

Et à la promotion de mathématique 2019,

Je pris Allah de leur accorder longue vie et bonne santé.

SALIMA

REMERCIEMENTS

*J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu **Allah** qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail,*

j'exprime mes profondes gratitudes à mes parents,

*Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur le Professeur **Khalfallah Nabil**, de m'avoir proposé le sujet de mon mémoire. Je le remercie aussi de son suivi permanent de mon travail, ses remarques et suggestions sans lesquelles ce mémoire n'aurait pas lieu,*

Et je veux exprime tout mon respect aux membres du jury, qui ont acceptés d'évaluer et de juger mon travail,

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants du département de Mathématiques qui ont contribué à ma formation,

À toutes mes amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux équations différentielles stochastiques rétrogrades, notées EDSR ou en englais BSDE (backward stochastic differential equations), ont été introduites pour la première fois en 1973 par J. M. Bismut dans le cas linéaire lorsqu'il étudie l'équation adjointe associée au principe du maximum stochastique en contrôle optimal. Cinq ans plus tard, (Bismut, 1978) prolonge sa théorie et montre l'existence d'une solution unique bornée de l'EDSR de Riccati. Le premier résultat dans le cas général a été publié en 1990 par S. Peng et E. Pardoux.

Maintenant, la question qui se pose est quelle est la signification d'une équation différentielle stochastique rétrograde ? Dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sur lequel on définit un mouvement Brownien d-dimensionnel W. On note $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ la filtration naturelle du mouvement Brownien i.e $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, \quad s \leq t)$. Une EDSR à horizon déterministe T est définie par une équation dont la forme suivante :

$$\begin{cases} -dY_t & = f(t, \omega, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t, \\ Y_T & = \xi. \end{cases}$$

où sous forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, \omega, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

et dont les paramètres sont :

- La condition terminale $Y_T = \xi$, qui est une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$ -mesurable et de carré intégrable.
- Le générateur $f = f(t, \omega, y, z)$, qui est une fonction progressivement mesurable donnée.

Résoudre cette EDSR, c'est trouver un couple de processus $(Y_t, Z_t)_{t \geq 0}$ qui vérifie l'équation et qui est $\mathbb{F}$-adapté c'est-à-dire ne dépend que de l'information connu jusqu'à l'instant t. On peut dire que les EDSR sont des équations différentielles stochastiques où l'on se donne une condition terminale (c'est pourquoi on dit rétrograde). Dans le cas déterministe, par exemple les équations différentielles ordinaire (EDO en abrégé) il y'a équivalence entre la donnée d'une condition terminale et la donnée d'une condition initial par inversion du temps, finalement on résoudre le même problème. Dans le cas aléatoire, les choses sont totalement différentes lorsqu'on cherche des solutions qui reste adapté par rapport à une filtration donnée. Par exemple, si on inverse le temps pour se ramener au problème avec condition initial et donc à revenir à la théorie des équations différentielles stochastiques "EDS en abrégé", on trouve une solution qui anticipe , c'est-à-dire à l'instant t elle dépend du futur, c'est exactement là où se présente la difficulté.

La théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades a connu un formidable développement à partir des années 1990, grâce notamment à ses diverses applications dans plusieurs domaines (la théorie du contrôle stochastique, économie, et les problèmes des mathématiques financières...). À partir du l'article de E. Pardoux et S. Peng, beaucoup chercheurs ont essayé d'étudier comment affaiblir les hypothèses concernant la régularité du générateur par rapport à (y, z). L'un de ces résultats est de S. Hamadène, qui a étudie des EDSR dont le générateur est seulement localement Lipschitzien.

Ce mémoire se compose de trois chapitres, et a pour but essentiel d'exposer deux résultats d'existence et d'unicité d'une solution de EDSR : Celui de E. Pardoux et S. Peng [10] et celui de S. Hamadène [7].

Chapitre 1 (Outils fondamentaux) : Ce chapitre est essentiellement une sorte d'introduction, ayant pour but de mettre en relief les outils de notre étude, on va présenter une foule de définitions, propositions, théorèmes faits sans démonstration et des résultats de bases du calcul stochastique tels que les processus stochastiques, espérance conditionnelle...ect.

Chapitre 2 (EDSR globalement Lipschitziennes) : L'objectif de ce chapitre est de présenter brièvement le résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR dont les coefficients sont globalement Lipschitziens. Ce résultat a été obtenu par Pardoux et Peng en 1990 avec le générateur f non linéaire et une donné terminale de carré intégrable.

Chapitre 3 (EDSR localement Lipschitziennes) : Dans ce chapitre, on démontre l'existence et l'unicité de la solution pour l'EDSR unidimensionnelle telle que le générateur est localement Lipschitzien en (y, z) et la condition terminale est bornée, l'idée de la preuve du résultat principal est basé sur un argument d'approximation et le théorème de comparaison. Ce résultat a été obtenu par S. Hamadène en 1996.

Chapitre 1

Outils fondamentaux

Ce chapitre est essentiellement une sorte d'introduction, ayant pour but de mettre en relief les outils de notre étude, on donne quelques rappels de base concernant le calcul stochastique.

Dans la suite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Pour plus de détails sur le calcul stochastique voir [4], [6], [8] et [9].

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 ***(Variable aléatoire) :*** *On appelle variable aléatoire (réelle)*

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

tout application mesurable, c'est-à-dire :

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \{X \in B\} \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu borélienne.

Définition 1.1.2 ***(Tribu engendrée)*** *: La tribu engendrée par une v.a X définie sur*

$(\Omega, \mathcal{F})$ *est l'ensemble*

$$\sigma(X) = \left\{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\right\}$$

où $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$*, c'est la plus petite tribu de* Ω *"rendant* X *mesurable".*

Définition 1.1.3 ***(Processus stochastique) :*** *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\in T}$ *est une famille de variables aléatoires* X_t *indexée par un ensemble* T*. En général* $T = \mathbb{R}^+$ *et on considère que le processus est indexé par le temps* t*.*

1. *Si* T *est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire.*
2. *Si* $T = \mathbb{N}$*, le processus est une suite de variables aléatoires.*
3. *Si* $T \subset \mathbb{Z}$*, le processus est dit discret.*
4. *Si* $T \subset \mathbb{R}^d$*, on parle de champ aléatoire.*

Remarque 1.1.1 **i.** *Pour* $t \in T$ *fixé,* $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ *est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*.*

ii. *Pour* $\omega \in \Omega$ *fixé,* $t \in T \mapsto X_t(\omega)$ *est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.*

Définition 1.1.4 ***(Filtration)*** *: Une filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$ *i.e* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, $\forall s \leq t$*.*

1. *L'espace* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ *s'appelle espace filtré.*
2. *Une filtration est* $\mathbb{P}$*-complète pour une mesure de probabilité* $\mathbb{P}$ *si* $\mathcal{F}_0$ *contient tous les évènements de mesure nulle, i.e* $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} \text{ tel que } \mathbb{P}(N) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$*.*
3. *On dit que un espace filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ *satisfait les conditions habituelles si :*
   - *Les ensembles négligeables sont contenus dans* $\mathcal{F}_0$ *i.e* $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$*,*
   - *La filtration est continue à droite i.e* $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s\geq t} \mathcal{F}_s$ $\forall t$*.*

Définition 1.1.5 ***(Processus continu) :*** *Soit* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique, le processus* X *est dit continu si pour presque tout* $\omega \in \Omega$*, la fonction* $t \mapsto X_t(\omega)$ *est continue (i.e les trajectoires sont continues).*

Définition 1.1.6 ***(Adapté-Mesurable-Progressivement mesurable) :***

1. *Un processus* X *est mesurable si, l'application* $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ *de* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport aux tribus* $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.
2. *Un processus* X *est adapté par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *si, pour tout* $t \geq 0$ X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*
3. *Un processus* X *est progressivement mesurable par rapport à* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *si pour tout* $t \geq 0$*, l'application* $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ *de* $[0, t] \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport à* $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Remarque 1.1.2 *: Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

Proposition 1.1.1 *: Si* X *est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (ou continues à gauche) alors* X *est mesurable et* X *est progressivement mesurable s'il est de plus adapté.*

1.2 Espérance conditionnelle

Définition 1.2.1 ***(Espérance conditionnelle par rapport à une tribu) :*** *Soit* X *une v.a.réelle (intégrable i.e* $X \in L^1$*) définie sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et* $\mathcal{G}$ *une sous tribu de* $\mathcal{F}$.
L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ *de* X *quand* $\mathcal{G}$ *est l'unique variable aléatoire :*

1. $\mathcal{G}$*-mesurable.*
2. $\int_A \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]\, d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}, \ \forall A \in \mathcal{G}.$

C'est aussi l'unique (à une égalité p.s près) variable $\mathcal{G}$*-mesurable telle que :*

$$\mathbb{E}[Y\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[XY],$$

pour toute variable Y, $\mathcal{G}$-mesurable bornée.

Définition 1.2.2 ***(Espérance conditionnelle par rapport à une variable) :*** *On définit l'espérance conditionnelle d'une variable X (intégrable) par rapport à Y comme étant l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\sigma(Y)$. On la note $\mathbb{E}[X \mid Y]$ est caractérisée par :*

1. *c'est une variable $\sigma(Y)$-mesurable.*
2. $\int_A \mathbb{E}[X \mid Y] \, d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} \quad \forall A \in \sigma(Y)$.

Propriété 1.2.1 ***(Propriétés de l'espérance conditionnelle) :***

- *Linéarité : soit a et b deux constantes, $\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$.*
- *Croissance : soit X et Y deux v.a telles que $X \leq Y$ alors : $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$.*
- *Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$.*
- *Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable, $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$.*
- *Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}[X]$.*
- *Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont deux tribus telles que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ alors :*

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}].$$

- $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})] = \mathbb{E}(X)$.

1.3 Martingale

Définition 1.3.1 ***(Martingale en temps continue)*** *: Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ adapté par rapport une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ et tel que pour tout $t \geq 0$, $X_t \in L^1$ est appelé :*

1. *Une martingale si pour $s \leq t$: $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$,*
2. *Une surmartingale si pour $s \leq t$: $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s$,*

3. *Une sous-martingale si pour* $s \leq t$: $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s$.

Propriété 1.3.1 • *Si* X *est une martingale* $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0]$, $\forall t$.

- *Si* $(X_t, t \leq T)$ *est une martingale, le processus est complètement déterminé par sa valeur terminale :* $X_t = \mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_t]$. *Cette dernière propriété est d'un usage très fréquent en finance.*

Définition 1.3.2 ***(Martingale locale) :*** *Un processus adapté à trajectoires continues* $M = (M_t)_{t \geq 0}$ *tel que* $M_0 = 0$ *p.s est une martingale locale (continue) s'il existe une suite croissante* $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de temps d'arrêt telle que* $T_n \nearrow \infty$ *et pour tout* n *le processus arrêté* M^{T_n} *est une martingale uniformément intégrable.*

Théorème 1.3.1 *: Soit* X *une (sous, resp. sur) martingale locale telle que* $\mathbb{E}\left(\sup_{s \leq t} |X_s|\right) < \infty$ *pour tout* $t \geq 0$. *Alors* X *est une (sous, resp. sur) martingale. Si de plus* $\mathbb{E}\left(\sup_s |X_s|\right) < \infty$ *alors :* X *est une (sous, resp. sur) martingale uniformément intégrable.*

1.4 Mouvement Brownien

Définition 1.4.1 ***(Mouvement Brownien) :*** *Le processus* $(W_t, t \geq 0)$ *est un mouvement Brownien (standard) si :*

1. $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$ *(le mouvement Brownien est issue de l'origine).*
2. $\forall s \leq t$, $W_t - W_s$ *est une variable réelle de loi gaussienne, centré de variance* $(t - s)$ *i.e* $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.
3. $\forall n$, $\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, *les variables* $\left(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, ..., W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_0}\right)$ *sont indépendantes.*

Remarque 1.4.1 *: On dit que* W *est un mouvement Brownien par rapport à* x *si* $W_0 = x$.

1.5 Processus d'Itô et les EDS

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un mouvement Brownien W sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien.

Définition 1.5.1 ***(Processus d'Itô) :*** *On appelle processus d'Itô un processus X à valeurs réelles tel que :*

$$\mathbb{P}\text{-}p.s \quad , \ \forall 0 \leq t \leq T \quad , \ X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

où x est $\mathcal{F}_0$-mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions $\mathbb{P}$-p.s :

$$\int_0^T |b_s| \, ds < \infty \quad et \quad \int_0^T |\sigma_s|^2 \, ds < \infty.$$

On utilise la notation plus concise suivante :

$$\begin{cases} dX_t & = b_t dt + \sigma_t dW_t, \\ X_0 & = x, \end{cases}$$

le coefficient b est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion.

Remarque 1.5.1 *: La décomposition d'un processus d'Itô est unique.*

Théorème 1.5.1 ***(Formule d'Itô) :***

a. ***Première formule d'Itô :*** *Soient X un processus d'Itô et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 à dérivées bornée, alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds.$$

b. ***Deuxième formule d'Itô :*** *Soient $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction réelle deux fois* *différentiable en x et une fois différentiable en t et X un processus d'Itô :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s)\, dX_s + \int_0^t f'_s(s, X_s)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\, d\left\langle X, X\right\rangle_s .$$

Proposition 1.5.1 ***(Intégration par parties) :*** *Si X et Y sont deux processus d'Itô, alors :*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \left\langle X, Y\right\rangle_s .$$

Définition 1.5.2 ***(Équation différentielle stochastique) :*** *Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme :*

$$\begin{cases} dX_t & = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \\ X_0 & = x, \end{cases}$$

ou sous forme intégrale :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dW_s, \tag{1.1}$$

où :

- *Soient $n, d \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$ (condition initiale), et $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien d-dimensionnel.*
- *Les fonctions $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ sont mesurables et bornées.*

L'inconnue est le processus X. Le problème est, comme pour une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients b et σ, l'EDS (1.1) *a une unique solution.*

Définition 1.5.3 ***(Solution forte de EDS) :*** *Une solution de l'EDS* (1.1)*, est un processus continu X tel que :*

1. *X est progressivement mesurable.*

2. *On a :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left\{|b(s,X_s)| + \|\sigma(s,X_s)\|^2\right\} ds\right] < +\infty,$$

où $\|\sigma\|^2 = trace(\sigma\sigma^*)$.

3. $\mathbb{P}$*-p.s on a :*

$$X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\, dW_s, \quad 0 \le t \le T.$$

Théorème 1.5.2 ***(Existence et unicité)*** *: Soient b et σ deux fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante λ telle que, pour tout $t \in [0,T]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

a. ***Condition de Lipschitz en espace, uniforme en temps :***

$$|b(t,x) - b(t,y)| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \le \lambda |x-y|,$$

b. ***Croissance linéaire :***

$$|b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \le \lambda(1 + |x|),$$

et de plus, la condition initiale $X_0 = x$ est indépendante de $(W_t)_{t\ge0}$ et est de carré intégrable i.e. $\mathbb{E}\left[|x|^2\right] < \infty$.

Alors, il existe une unique solution de l'EDS (1.1) *à trajectoire continues pour tout t.*

1.6 Résultats utiles

Lemme 1.6.1 ***(Lemme de Gronwall) :*** *Soit $T > 0$ et soit g une fonction positive mesurable bornée sur l'intervalle $[0,T]$. Supposons qu'il existe deux constantes $a \ge 0$, $b \ge 0$ telles que pour tout $t \in [0,T]$:*

$$g(t) \le a + b\int_0^t g(s)ds,$$

Alors, on a pour tout $t \in [0,T]$ *:*

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

Théorème 1.6.1 ***(Théorème de représentation des martingales Browniennes) :*** *Soit* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ *la filtration naturelle du mouvement Brownien* $(W_t)_{0\leq t\leq T}$*. Soit* M *une martingale continue de carré intégrable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$*. Alors il existe un unique processus prévisible* H *vérifiant*

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T H_s^2 ds\right) < +\infty,$$

tel que $\forall t \in [0,T]$ *:*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s, \ \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Théorème 1.6.2 ***(Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy "BDG")*** *: Pour tout* $p > 0$*, il existe des constantes positives* c_p *et* C_p *telles que, pour toute martingale locale continue* $X = (X_t)_{t\geq 0}$*, nul en* 0 *:*

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X,X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}|X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X,X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right].$$

Remarque 1.6.1 *: En particulier, si* $T \geq 0$

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X,X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X,X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right].$$

Théorème 1.6.3 ***(Théorème du point fixe) :*** *Soient* (E,d) *un espace métrique complet et* $\varphi : E \longrightarrow E$ *une application contractante, i.e. Lipschitzienne de rapport* $k < 1$*. Alors,* φ *admet un unique point fixe* $a \in E$ *tel que :* $\varphi(a) = a$*.*

Définition 1.6.1 ***(Probabilités équivalentes)*** *: Soit* $\mathbb{P}$ *et* Q *deux mesures de probabilités définies sur le même espace* $(\Omega, \mathcal{F})$*. On dit que* Q *est absolument continue par rapport à*

$\mathbb{P}$ *si :*

$$\mathbb{P}(A) = 0 \Longrightarrow Q\left(A\right) = 0, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Les mesures $\mathbb{P}$ *et* Q *sont dites équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes ensembles négligéables c'est à dire :*

$$\mathbb{P}(A) = 0 \Longleftrightarrow Q\left(A\right) = 0.$$

Théorème 1.6.4 ***(Girsanov)*** *: Soit* $(W_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement Brownien et* $(\theta_t)_{t\leq T}$ *un processus adapté à* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ *qui vérifie :*

$$\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty \quad , \ \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

tel que le processus $(L_t)_{0\leq t\leq T}$ *défini par :*

$$L_t := \exp\left[\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left|\theta\right|^2 ds\right].$$

Soit une martingale. Soit Q *la probabilité définie par* $dQ = L_T d\mathbb{P}$ *sur* $\mathcal{F}_T$*, alors le processus* $\left(\tilde{W}_t\right)_{t\leq T}$ *défini par :*

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \theta_s ds,$$

est un Q*-mouvement Brownien. Notons que la condition dîte de Novikov,*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right)\right] < +\infty,$$

est suffisante pour que L_T *soit une martingale sous* $\mathbb{P}$.

Théorème 1.6.5 ***(Théorème de convergence dominée de Lebesgue) :*** *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires convergeant p.s vers* X*. Supposons qu'il existe une variable aléatoire* Y *intégrable telle que* $|X_n| < Y$*, alors* $\mathbb{E}\left(X_n\right)$ *converge vers* $\mathbb{E}\left(X\right)$.

Proposition 1.6.1 ***(Inégalité de Young)*** *: Soient $a, b \geq 0$ et $1 < p, q < +\infty$ deux exposants conjugués i.e.$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Proposition 1.6.2 ***(Inégalité de Hölder) :*** *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ des exposants conjugués .i.e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si f, g sont des applications mesurables, alors :*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

En particulier, l'inégalité de Hölder (dans le cas $p = 2$) donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(f \mid g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 .$$

Définition 1.6.2 ***(Espace de Wiener) :*** *On note W et on appelle espace de Wiener l'ensemble $\mathcal{C}([0.1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, qui en fait un espace de Banach, et de la tribu des boréliens associée, notée $\mathcal{F}$. On note X_t l'application continue : $\omega \in W \mapsto \omega(t) \in \mathbb{R}$, et on associe au processus (X_t) la filtration $(\mathcal{F}_t)$. On rappelle qu'il existe une unique mesure sur $(W, \mathcal{F}_t)$ sous laquelle le processus des coordonnées (X_t) soit un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement Brownien : c'est la mesure de Wiener.*

Définition 1.6.3 ***(Dérivé de Mailliavin de solution de EDSR) :*** *Tout d'abord rappelons brièvement la notation de dérivation sur l'espace de Wiener, $\mathcal{C}_b^k\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^q\right)$ désignera l'ensemble des fonctions de classe C^k de $\mathbb{R}^k$ en $\mathbb{R}^q$ dont les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k sont bornées.*
Soit S l'ensemble des variables aléatoires ξ de la forme :

$$\xi = \varphi(W(h_1), ..., W(h_k)),$$

où $\varphi \in C_b^\infty \left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}\right)$, $h_1, h_2, ..., h_k \in L^2\left([0,T], \mathbb{R}^n\right)$ *:*

$$W\left(h_i\right) = \int_0^T h_i\left(s\right) dW_s.$$

Si $\xi \in S$ *est de la forme ci-dessus, nous définissons sa dérivée comme étant le processus* n*-dimensionnel*

$$D_t\xi = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\left(W\left(h_1\right), ..., W\left(h_k\right)\right).h_j\left(t\right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Pour $\xi \in S$*,* $p > 1$*, nous définissons la norme :*

$$\left\|\xi\right\|_{1,p} = \left[\mathbb{E}\left\{\left|\xi\right|^p + \left(\int_0^T \left|D_t\xi\right|^2 dt\right)^{\frac{p}{2}}\right\}\right]^{\frac{1}{p}},$$

On peut montre que D *a une extension fermée à* $\mathbb{D}^{1,p}$ *la fermeture de* S *par rapport à la norme* $\left\|.\right\|_{1,p}$*. Observez que, si* ξ *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable,* $D_s\xi = 0$ *pour* $s \in (t, T]$*.*
Nous allons désigner par $D_t^i\xi$*,* $1 \leq i \leq n$ *le iême composant de* $D_t\xi$*.*
Soit $L_{1,p}^a\left(\mathbb{R}^k\right)$ *désigner l'ensemble des processus progressivement mesurables à valeurs dans* $\mathbb{R}^k$*,* $u(t,\omega)$*,* $0 \leq t \leq T$*,* $\omega \in \Omega$ *telle que :*

i/ *Pour* $t \in [0,T]$*,* $u(t,.) \in \left(D_{1,p}\right)^d$*,*

ii/ $(t,\omega) \mapsto Du\left(t,\omega\right) \in \left(L^2\left([0,T]\right)\right)^{n\times d}$ *admet une version progressivement mesurable et*

$$\left\|u\right\|_{1,p}^a = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \left|u\left(t\right)\right|^2 dt\right)^{\frac{p}{2}} + \left(\int_0^T\int_0^T \left|D_\theta u\left(t\right)\right|^2 d\theta dt\right)^{\frac{p}{2}}\right] < \infty.$$

Proposition 1.6.3 *: Supposons que* $\xi \in \mathbb{D}^{1,4}$ *et*

$$f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n\times d} \to \mathbb{R}^d$$

est continuellement différentiable en (y,z)*, avec des dérivés uniformément bornés et Lip-*

schitz et tels que pour chaque (y,z), f *est adapté et est dans* $L^a_{1,4}\left(\mathbb{R}^d\right)$. *Soit* (Y,Z) *la solution de l'EDSR associé, aussi supposons que :*

– $f(t,0,0) \in \mathbb{H}^4_T$ *et* $\xi \in L^4$,

– $\int_0^T \mathbb{E}\left(|D_\theta \xi|^4\right) d\theta < \infty$ *et* $\int_0^T \|D_\theta f(t,Y,Z)\|_4^4 \, d\theta < \infty$ *et pour chaque* $t \in [0,T]$ *et pour chaque* y^1, z^1, y^2, z^2,

$$\left|D_\theta f\left(t,\omega,y^1,z^1\right) - D_\theta f\left(t,\omega,y^2,z^2\right)\right| \leq K_\theta(t,\omega)\left(\left|y^1-y^2\right| + \left|z^1-z^2\right|\right),$$

où pour θ, $K_\theta(t,\omega)$, $0 \leq t \leq T$ *est un processus adapté à valeur dans* $\mathbb{R}$ *satisfaisant :*

$$\int_0^T \|K_\theta\|_4^4 \, d\theta < \infty.$$

Puis $(Y,Z) \in L^2\left([0,T], \left(\mathbb{D}^{1,2}\right)^d \times \left(\mathbb{D}^{1,2}\right)^{n\times d}\right)$, *et pour chaque* $1 \leq i \leq n$, *une version de* $\{(D^i_\theta Y_t, D^i_\theta Z_t),\ 0 \leq \theta,\ t \leq T\}$ *est donné par :*

(i) $D^i_\theta Y_t = 0$, $D^i_\theta Z_t = 0$, $0 \leq t \leq \theta \leq T$,

(ii)

$$\begin{aligned} D^i_\theta Y_t &= D^i_\theta \xi + \int_t^T \left[\partial_y f(s,Y_s,Z_s) D^i_\theta Y_s + \partial_z f(s,Y_s,Z_s) D^i_\theta Z_s \right. \\ &\quad \left. + D^i_\theta f(s,Y_s,Z_s)\right] ds - \int_t^T D^i_\theta Z_s dW_s, \theta \leq t \leq T. \end{aligned}$$

De plus, $\{D_t Y_t,\ 0 \leq t \leq T\}$ *défini par (ii) est une version de* $\{Z_t,\ 0 \leq t \leq T\}$.

Preuve. Pages (61-63) de [5]. ■

Chapitre 2

EDSR globalement Lipschitziennes

L'objectif de ce chapitre est de présenter brièvement le résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR dont les coefficients sont globalement Lipschitziens. Ce résultat a été obtenu par Pardoux et Peng en 1990 avec le générateur f non linéaire et une donné terminale de carré intégrable.

2.1 Motivations

Les EDSR ont été introduites dans le cas linéaire par Bismut [1] comme l'équation adjointe associée à la version stochastique du principe du maximum de Pontryagin (connu aussi sous le nom de conditions nécessaires d'optimalité) en théorie du contrôle.

Nous supposons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité équipé d'une filtration $(\mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$ qui satisfait aux conditions habituelles et $(W_t,\ t \geq 0)$ un mouvement Brownien d-dimensionnel défini sur cet espace. Nous considérons le problème de contrôle optimal suivant dans lequel la dynamique évolue selon l'équation différentielle stochastique contrôlée :

$$(E)\begin{cases} dx_t & = b(t, x_t, u_t)dt + \sigma\left(t, x_t\right) dW_t, \\ x\left(0\right) & = x, \end{cases}$$

où u, est un contrôle admissible c-à-d u est un processus mesurable et $\mathcal{F}_t$-adapté à valeurs dans un sous-ensemble compact A de $\mathbb{R}^n$, on note U_{ad} l'ensemble de tous contrôles admissibles, b, σ sont deux fonctions boréliennes satisfaisant :

$$b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R}^d,$$

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d,$$

de plus, vérifiant les conditions de théorème $(1.5.2)$.

Pour tout contrôle admissible u, on introduit une fonction de coût $J(u)$:

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T l(t, x_t, u_t)dt + g(x_T)\right],$$

où g est une fonction de coût final, x est la solution de (E). De plus, l et g sont deux fonctions boréliennes bornées telles que :

$$l : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R}$$

$$g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

Remarque 2.1.1 *: Les fonctions b, σ, l et g sont dérivables en x et à dérivées continues et bornées.*

Définition 2.1.1 *: Un contrôle optimal est un contrôle admissible qui satisfait :*

$$J(\hat{u}) = \min\{J(u) : u \in U_{ad}\}.$$

L'objectif du contrôle optimal est de minimiser la fonction de coût J (ou de maximiser) sur l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

Avant d'énoncer le théorème de principe de maximum, nous définissons l'équation différentielle stochastique linéaire suivante :

$$\begin{cases} d\phi_t &= b_x\left(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t\right)\phi_t dt + \sigma_x\left(t,\hat{x}_t\right)\phi_t dW_t, \\ \phi_0 &= Id. \end{cases}$$

Cette équation étant linéaire à coefficients bornés, alors elle admet une solution forte unique. De plus la solution ϕ est inversible et son inverse ψ vérifie l'équation différentielle stochastique linéaire suivante :

$$\begin{cases} d\psi_t &= \left[\psi_t\sigma_x\left(t,\hat{x}_t\right)\sigma_x\left(t,\hat{x}_t\right) - \psi_t b_x\left(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t\right)\right]dt - \psi_t\sigma_x\left(t,\hat{x}_t\right)dW_t, \\ \psi_0 &= Id, \end{cases}$$

pour vérifier que ψ est bien l'inverse de ϕ on vérifie que : $\phi\psi = \psi\phi = Id$ et ceci en appliquant la formule d'Itô.

Théorème 2.1.1 ***(Le principe de maximum) :*** *Soit $\hat{u}$ un contrôle optimal et $\hat{x}$ la solution de (E) correspondant à $\hat{u}$. Il existe alors un processus mesurable et $\mathcal{F}_t$-adapté $Y(t)$, tel que :*

a. $Y(t) = \mathbb{E}\left[\psi_t^*\phi_T^* g_x\left(\hat{x}_T\right) \mid \mathcal{F}_t\right] + \psi_t^*\int_t^T \phi_s^* l_x\left(s,\hat{x}_s,\hat{u}_s\right)ds,$

b. $H\left(\hat{x}_t,v,Y_t\right) \leq H\left(\hat{x}_t,\hat{u},Y_t\right)$, $\forall v \in A$, $\mathbb{P}$-*p.s, où le hamiltonien* H *est défini par :*

$$H\left(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t,Y_t\right) = l(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t) + Y_t b(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t).$$

Remarque 2.1.2 *: Le processus $Y(t)$ est appelé le processus adjoint associé au contrôle optimal $\hat{u}$.*

Corollaire 2.1.1 *: Si $\mathcal{F}_t = \sigma\left(W_s, s \leq t\right)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien, alors le processus adjoint $Y(t)$ est la solution unique de l'équation différentielle stochastique* *rétrograde :*

$$
(E')\begin{cases} -dY_t & = \left[b_x\left(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t\right).Y_t+\sigma_x^*\left(t,\hat{x}_t\right).Q_t+l_x\left(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t\right)\right]dt-Q_t dW_t, \\ Y(T) & = g_x\left(\hat{x}_T\right), \end{cases}
$$

*où * représente la transposition et Q est un processus donné par :*

$$
Q_t=\psi_t^* G_t-\sigma_x^*\left(t,\hat{x}_t\right)Y_t,
$$

et G vérifie l'équation suivante :

$$
\begin{aligned} \int_0^t G_s dW_s &= \mathbb{E}\left[\phi_T^* g_x\left(\hat{x}_T\right)+\int_0^T \phi_s^* l_x\left(s,\hat{x}_s,\hat{u}_s\right)ds \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &\quad -\mathbb{E}\left[\phi_T^* g\left(\hat{x}_T\right)+\int_0^T \phi_s^* l_x\left(s,\hat{x}_s,\hat{u}_s\right)ds\right]. \end{aligned}
$$

Pour plus de détails voir [2].

Finalement on trouve un nouveau type d'équations différentielles stochastiques (E'), qui s'appelle équation adjointe, la question qui se pose est comment prouver l'existence d'un solution pour cette EDSR, E. Pardoux et S. Peng en 1990 qui ont établi le premier résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR dans le cas non linéaire, c'est ce que nous allons présenter dans ce chapitre.

2.2 Notations et définitions

Soient $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et W un mouvement Brownien de d-dimensionnel (dans $\mathbb{R}^d$) sur cet espace, $W=\left\{W_t^i,\ t\geq 0, 1\leq i\leq d\right\}$. On notera $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$la filtration augmentée du mouvement Brownien, qui vérifie les hypothèses usuelles : $\mathcal{F}_t=\sigma\left(\sigma\left\{W_s, 0\leq s\leq t\right\}\cup\mathcal{N}\right)$, on se donne T un temps déterministe fini fixé (appelé aussi l'horizon).

On travaillera avec deux espaces de processus :

$\triangleleft$ $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$: L'espace vectoriel formé des processus progressifs Y, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ tels que :

$$\|Y\|_{\mathcal{S}^2}^2 \quad = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty,$$

$\triangleleft$ $M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$: L'espace vectoriel formé des processus progressifs Z, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$ tels que :

$$\|Z\|_{M^2}^2 \quad = \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_r\|^2 \, dr\right] < \infty,$$

où pour $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|z\|^2 = tr(zz^*)$, pour simplifie, on note $|z|^2$.

$\triangleleft$ $\mathcal{B}^2$: L'espace vectoriel formé des couples de processus $(Y, Z) \in \mathcal{S}^2 \times M^2$.

On considère l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) :

$$\begin{cases} -dY_t & = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t, \ 0 \leq t \leq T, \\ Y_T & = \xi, \end{cases}$$

ou de façon équivalente, sous forme intégrale,

$$Y_t \quad = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \ 0 \leq t \leq T. \tag{2.1}$$

Dans EDSR (2.1), les éléments de base sont les paramètres f et ξ appelés respectivement le générateur (ou parfois coefficient) et la condition terminale, on dit souvent que l'EDSR est associées aux paramètres (f, ξ) qui vérifiant :

1. $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$ tel que :

   $f(\centerdot, t, y, z)$ noté pour simplifier $f(t, y, z)$ est progressif pour tout y, z.

2. $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}, \mathbb{R}^k)$.

Notre objectif est de trouver une solution de l'équation (2.1) c'est-à-dire les inconnues Y et Z.

Définition 2.2.1 *: Une solution de l'EDSR* (2.1) *est un couple de processus* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1. *Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$(resp),*
2. *On a :*
$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{|f(r, Y_r, Z_r)| + \|Z_r\|^2\right\} dr\right] < \infty,$$
3. *$\mathbb{P}$-p.s, on a :*
$$Y_t \ = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \ 0 \leq t \leq T.$$

Remarque 2.2.1 *:*

i. *Les intégrales de l'équation* (2.1) *étant bien définies.*

ii. *On a :*
$$Y_t \ = Y_0 - \int_0^t f(r, Y_r, Z_r)dr + \int_0^t Z_r dW_{r,} \ \ 0 \leq t \leq T,$$

telle que : $\int_0^t f(r, Y_r, Z_r)dr$ *est à variation finie et* $\int\limits_0^t Z_r dW_r$ *est une martingale, alors : Y_t est une semi-martingale continue.*

iii. *Y_0 est une quantité déterministe car, Y_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable.*

2.3 Cas Lipschitz

2.3.1 Résultat de Pardoux-Peng

Voici les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler.

A) Condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(r, 0, 0)|^2 dr\right] < \infty,$$

B) Condition de Lipschitz en $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$: pour tout t, y, y', z, z',

$$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \quad \leq \lambda \left(|y-y'| + \|z-z'\|\right),$$

λ est une constante indépendante de t, y, y', z et z'.

Théorème 2.3.1 ***(PARDOUX-PENG 90) :*** *Etant donné un couple (f, ξ) vérifiant **A)** et **B)**, il existe une solution unique (Y, Z) à l'EDSR* (2.1).

Preuve. L'idée de la démonstration est basée sur un argument de point fixe (1.6.3) sur l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$ des solutions (Y, Z).
La preuve se fait en deux étapes. On construit une application Ψ sur $\mathcal{B}^2$, qui à tout $(U, V) \in \mathcal{B}^2$ associe $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ définie par :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, U_r, V_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \; 0 \leq t \leq T.$$

i) Première étape : Nous vérifions que l'application Ψ est bien définie de $\mathcal{B}^2$ dans lui même.

ii) Deuxième étape : Pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR (2.1), il nous suffit de montrer l'existence et l'unicité d'un point fixe pour Ψ ce qui revient par le théorème de point fixe à montrer que Ψ est contractante.

Pour plus de détails voir [3] la page (19-20). ■

2.4 EDSR linéaires

Dans ce partie, nous étudions le cas particulier des EDSR linéaires pour lesquelles nous allons donner une formule plus ou moins explicite.

Définition 2.4.1 *: On suppose que $k = 1$ ce qui implique que Y est un réel et Z est une matrice de taille $1 \times d$ (vecteur de dimension d).*

Soit $\{(a_t, b_t)\}_{t\in[0,T]}$ *un processus à valeurs dans* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$*, progressivement mesurable et borné et soient* $\{c_t\}_{t\in[0,T]}$ *un élément de* $M^2(\mathbb{R})$ *et* ξ *une variable aléatoire,* $\mathcal{F}_T$*-mesurable, de carré intégrable, à valeurs réelles.*

$$Y_t = \xi + \int_t^T \{a_r Y_r + Z_r b_r + c_r\}\, dr - \int_t^T Z_r dW r. \tag{2.2}$$

L'EDSR (2.2) *s'appelle EDSR linéaire.*

Proposition 2.4.1 *: L'EDSR* (2.2) *possède une solution unique qui vérifie,*

$$\forall t \in [0,T]\,,\ Y_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}\left(\xi\Gamma_T + \int_t^T c_r\Gamma_r dr \mid \mathcal{F}_t\right),$$

avec, pour tout $t \in [0,T]$;

$$\Gamma_t = \exp\left\{\int_0^t b_r dW_r - \frac{1}{2}\int_0^t |b_r|^2\, dr + \int_0^t a_r dr\right\}.$$

Remarque 2.4.1 *: Notons que si* $\xi \geq 0$ *et si* $c_t \geq 0$ *alors la solution de l'EDSR linéaire vérifie* $Y_t \geq 0$.

Théorème 2.4.1 ***(Théorème de comparaison) :*** *Ce théorème permet de comparer les solutions de deux EDSR dans* $\mathbb{R}$ *dès que l'on sait comparer les conditions terminales et les générateurs.*
Supposons que $k = 1$ *et que* (ξ, f)*,* (ξ', f') *vérifient* ***A)*** *et* ***B)****. On note* (Y, Z) *et* (Y', Z') *les solutions des EDSR correspondantes. On suppose également que* $\mathbb{P}$*-p.s* $\xi \leq \xi'$ *et que* $f(t, Y_t, Z_t) \leq f'(t, Y_t, Z_t)$ $m \otimes \mathbb{P}$*−p.p (m mesure de Lebesgue). Alors :*

$$\mathbb{P}\text{-}p.s,\ \forall t \in [0,T]\,,\ Y_t \leq Y_t'.$$

Preuve. La preuve s'effectue par linéarisation ce qui permet de se ramener aux EDSR linéaires. On cherche une équation satisfaite par $U = Y' - Y$, on a notant $V = Z' - Z$ et

$\zeta = \xi' - \xi$,

$$U_t = \zeta + \int_t^T (f'(r, Y'_r, Z'_r) - f(r, Y_r, Z_r))dr - \int_t^T V_r dW_r.$$

On découpe l'accroissement des f en trois morceaux en écrivant

$$\begin{aligned} f'(r, Y'_r, Z'_r) - f(r, Y_r, Z_r) &= f'(r, Y'_r, Z'_r) - f'(r, Y_r, Z'_r) + f'(r, Y_r, Z'_r) \\ &\quad - f'(r, Y_r, Z_r) + f'(r, Y_r, Z_r) - f(r, Y_r, Z_r). \end{aligned}$$

On introduit deux processus a et b : a est à valeurs réelles et b est un vecteur (colonne) de dimension d. On pose :

$$\begin{cases} a_r = \dfrac{f'(r, Y'_r, Z'_r) - f'(r, Y_r, Z'_r)}{U_r}, & \text{si } U_r \neq 0, \\ a_r = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour définir b, on doit introduire une autre notation : pour $1 \leq i \leq d$, $Z_r^{(i)}$ est la ligne dont les $d - i$ dernières composantes sont celles de Z'_r et les i premières celles de Z_r. Pour $1 \leq i \leq d$, on pose :

$$\begin{cases} b_r^i = \dfrac{f'(r, Y_r, Z_r^{(i-1)}) - f'(r, Y_r, Z_r^{(i)})}{V_r^i}, & \text{si } V_r^i \neq 0, \\ b_r^i = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que, puisque f' est Lipschitz, ces deux processus sont progressivement mesurables et bornés. Avec ces notations, on a :

$$U_t = \zeta + \int_t^T (a_r U_r + V_r b_r + c_r)\, dr - \int_t^T V_r dW_r,$$

où $c_r = f'(r, Y_r, Z_r) - f(r, Y_r, Z_r)$. Par hypothèse, on a $\zeta \geq 0$ et $c_r \geq 0$. Utilisant la formule "explicite" pour les EDSR linéaires proposition (2.4.1), on a, pour $t \in [0, T]$,

$$U_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E} \left(\zeta \Gamma_T + \int_t^T c_r \Gamma_r dr \mid \mathcal{F}_t \right),$$

avec, pour $0 \leq r \leq T$:

$$\Gamma_r = \exp\left\{ \int_0^r b_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^r |b_u|^2 \, du + \int_0^r a_u du \right\}.$$

Comme déjà mentionné lors de la remarque (2.4.1), cette formule montre que $U_t \geq 0$, dès que $\zeta \geq 0$ et $c_r \geq 0$. $\blacksquare$

Chapitre 3

EDSR localement Lipschitziennes

Dans ce chapitre, on montre l'existence et l'unicité de solution aux équations différentielles stochastiques rétrogrades unidimensionnelles dans le cas où le générateur est localement Lipschitzien. Notons que ce résultat a été établi par S.Hamadène en 1996 [7].

3.1 Introduction

Ce chapitre est composé de deux parties.

Dans la première, nous montrons en toute généralité que si ξ est bornée, f est localement Lipschitzienne en (y, z) et vérifiant une condition de croissance raisonnable (plus faible que la croissance linéaire) alors l'équation rétrograde associée à (f, ξ) admet une solution. L'idée étant d'approximer f par une suite double $(\varphi^{n,m}, n, m \geq 0)$ d'applications Lipschitziennes et de montrer que la limite (en un certain sens) de la suite $(Y_{.}^{n,m}, Z_{.}^{n,m})$ de solutions associées à $(\varphi^{n,m}, \xi)$ est la solution de l'équation associée à (f, ξ) .

Dans la deuxième, nous montrons que si f et f'_y sont de croissances faibles alors la solution est unique.

3.2 Présentation du problème

On se donne T un temps déterministe fini fixé (appelé aussi l'horizon). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $W_. = (W_t, t \leq T)$ un $\mathbb{P}$-mouvement Brownien p-dimensionnel, $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ la filtration naturelle de $W_.$ et $\mathbf{P}$ la tribu des processus $\mathcal{F}_T$-progressivement mesurables sur $\Omega \times [0, T]$.

On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

ou sous forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.1}$$

Hypothèses

Voici les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler :

Soit ξ une variable aléatoire bornée et $\mathcal{F}_T$-mesurable, f une application de $[0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbf{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+1})$-mesurable satisfaisant à :

(H1) Condition de croissance raisonnable : $\exists c > 0, \alpha \in]0, 2[$ et h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ finie sur les compacts tels que pour tout t, ω, y et z on ait,

$$|f(t, \omega, y, z)| \leq c(1 + |y| + h(y) |z|^{\alpha}).$$

(H2) Condition de localement Lipschitz :$\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0$ tel que :$\forall (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega, (y, z)$ et $(y', z') \in [-N, N]^{p+1}$ on ait,

$$|f(t, \omega, y, z) - f(t, \omega, y', z')| \leq C_N(|y - y'| + |z - z'|).$$

(H3) f est une application définie sur $[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p$ telle que :

a) $\forall t\in[0,T]\,,\ f(t,.,.)\in C^1\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p\right).$

b) $\forall\,(t,y,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,$

$$|f(t,y,z)|\leq c(1+|y|+|z|),$$

et

$$\left|f_y'\,(t,y,z)\right|\leq c(1+\ln(1+\ln(1+|y|+|z|))).$$

où f_y' est la dérivée partielle de f par rapport à y et c une constante.

(H4) La variable aléatoire ξ est un élément de l'espace de Wiener $\mathbb{D}^{1,2}$. De plus, il existe une constante M telle que $|D_t^i\xi|\leq M,\forall t\leq T,\ i=1,p.$ où $(D_t^i\xi)_{t\leq T}$ est la dérivée de Wiener d'ordre i de ξ.

3.3 Résultat d'existence et d'unicité

Nous allons montrer que l'équation rétrograde (3.1) admet une solution unique.

3.3.1 Existence de la solution

Nous allons maintenant montrer que si le couple (f,ξ) vérifiant les conditions (H1) et (H2) avec ξ variable aléatoire bornée et $\mathcal{F}_T$-mesurable alors, l'équation rétrograde (3.1) admet une solution, nous aurons besoin pour cela les lemmes suivants :

Lemme 3.3.1 *: Soit ψ une application de $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^-$) $\boldsymbol{P}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+1})$-mesurable vérifiant la condition (H2) ci-dessus.*

Il existe une suite croissante (resp. décroissante) $(\psi_k,\ k\geq 0)$ d'applications définies sur $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^-$) $\boldsymbol{P}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+1})$-mesurables, de limite ψ vérifiant :

$\forall k \geq 0, \exists \bar{c}_k > 0$ *tel que* $\forall t, \omega, y, y', z$ *et* z'

$$|\psi_k(t,\omega,y,z) - \psi_k(t,\omega,y',z')| \leq \bar{c}_k(|y-y'| + |z-z'|).$$

Preuve. Supposons que ψ est à valeur dans $\mathbb{R}^+$. Nous ferons la preuve pour $p = 1$ et si $p \geq 2$ le principe en est le même. Soit $k \geq 0$ et ω_k l'application Lipschitzienne réelle vérifiant :

$$\begin{cases} \omega_k(y) = 1 & \text{si} \quad |y| \leq k, \\ \omega_k(y) = 0 & \text{si} \quad |y| \geq k+1, \\ 0 \leq \omega_k(y) \leq 1 & \text{si} \quad y \in [k, k+1] \cup [-k-1, -k], \end{cases} , y \in \mathbb{R}.$$

de même pour $z \in \mathbb{R}$.

Soit ψ_k, $k \geq 0$, l'application qui à $(t,\omega,y,z) \in [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ associe $\psi(t,\omega,y,z)\,\omega_k(y)\,\omega_k(z)$. La suite $(\psi_k)_{k\geq 0}$ est croissante car $\omega_k \leq \omega_{k+1}$, $\forall k \geq 0$ et de limite ψ. Par ailleurs ψ_k, $k \geq 0$, est Lipschitzienne car elle est localement Lipschitzienne à support compact.

Si ψ est à valeurs dans $\mathbb{R}^-$ alors $-\psi$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et le résultat découle de ce qui vient d'être prouvé précédemment. ■

Remarque 3.3.1 *: Pour tout* $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$ *fixé, la convergence de la suite* $(\psi_k(t,\omega,.,.))_{k\geq 0}$ *vers* $\psi(t,\omega,.,.)$ *est uniforme sur les compacts de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$.

Par le lemme (3.3.1) les applications $f1_{[f\geq 0]}$ et $f1_{[f<0]}$ satisfont la condition (H2) ci-dessus vérifiée par f, donc il existe une suite $(\varphi^n, n \geq 0)$ (resp. $(\psi^m, m \geq 0)$) croissante (resp. décroissante) d'applications Lipschitziennes de limite simple $f1_{[f\geq 0]}$ (resp.$f1_{[f<0]}$).

Considérons alors pour $m \geq 0$ et $n \geq 0$ la suite d'applications $\varphi^{n,m}$ telle que $\varphi^{n,m} = \varphi^n + \psi^m$.

Aussi, pour tout m et n, $\varphi^{n,m}$ est Lipschitzienne. De plus, $|\varphi^{n,m}(t,\omega,y,z)| \leq c(1 + |y| + h(y)\,|z|^\alpha)$ pour tout t, ω, y et z. Il s'ensuit que le couple $(\varphi^{n,m}, \xi)$ possède les propriétés de (f, ξ) du théorème (2.3.1). Par conséquent il existe un couple de processus $(Y_.^{n,m}, Z_.^{n,m})$ $\mathbf{P}$-mesurable tel que,

i)

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(|Y_s^{n,m}|^2 + |Z_s^{n,m}|^2\right) ds\right] < \infty.$$

ii)

$$\begin{cases} dY_t^{n,m} & = -\varphi^{n,m}\left(t, Y_t^{n,m}, Z_t^{n,m}\right) dt + Z_t^{n,m} dW_t,\ t \leq T, \\ Y_T^{n,m} & = \xi. \end{cases} \tag{3.2}$$

Lemme 3.3.2 *: Il existe deux constantes C_Y et C_Z telles que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\|Y_{\cdot}^{n,m}\|^* \leq C_Y \quad et \quad \mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_s^{n,m}|^2 ds\right] \leq C_Z,$$

où C_Y et C_Z sont indépendantes de n et m, de plus,

$$\|Y_{\cdot}^{n,m}\|^* = \sup\left\{\left|Y_t^{n,m}(\omega)\right|, (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega\right\} < \infty.$$

Preuve. $\forall t \in [0,T]$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ et $\forall s \in [t,T]$ on a,

$$\begin{aligned} Y_s^{n,m} &= \xi + \int_s^T \varphi^{n,m}\left(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m}\right) du - \int_s^T Z_u^{n,m} dW_u \\ &= \xi + \int_s^T \varphi^{n,m}\left(u, Y_u^{n,m}, 0\right) du + \int_s^T (\varphi^{n,m}\left(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m}\right) \\ &-\varphi^{n,m}\left(u, Y_u^{n,m}, 0\right))du - \int_s^T Z_u^{n,m} dW_u. \end{aligned}$$

Soit alors $\delta\varphi^{n,m}$ la suite de processus définis comme suit :

$$\delta\varphi^{n,m}(u,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\varphi^{n,m}(u,y,z) - \varphi^{n,m}(u,y,0)}{z}, & \text{si } z \neq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il existe une constante $C_{n,m}$ telle que $|\delta\varphi^{n,m}(u,y,z)| \leq C_{n,m}$, $\forall (u,\omega,y,z)$. Considérons alors $\mathbb{P}^{n,m}$ la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ équivalente à $\mathbb{P}$ (1.6.1) définie comme suite

$$\frac{d\mathbb{P}^{n,m}}{d\mathbb{P}} = L_T^{n,m} = \exp\left\{\int_0^T \delta\varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m}) dW_u - \frac{1}{2}\int_0^T \left|\delta\varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m})\right|^2 du\right\}.$$

Le processus $W_{\cdot}^{n,m} = W_{\cdot} - \int_0^{\cdot} \delta\varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m}) du$ est un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P}^{n,m})$-mouvement Brownien d'après (1.6.4) et pour tout $s \in [0,T]$ on a :

$$Y_s^{n,m} = \xi + \int_s^T \varphi^{n,m}\left(u, Y_u^{n,m}, 0\right) du - \int_s^T Z_u^{n,m} dW_u^{n,m}.$$

Si $\mathbb{E}_{n,m}$ désigne l'espérance sous $\mathbb{P}^{n,m}$ alors :

$$\mathbb{E}_{n,m}\left[\left(\int_0^T \left|Z_s^{n,m}\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \mathbb{E}\left[L_T^{n,m}\left(\int_0^T \left|Z_u^{n,m}\right|^2 du\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1.6.2), on a :

$$\mathbb{E}\left[L_T^{n,m}\left(\int_0^T \left|Z_u^{n,m}\right|^2 du\right)^{\frac{1}{2}}\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[(L_T^{n,m})^2\right]\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_u^{n,m}\right|^2 du\right]\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Or le second membre de cette dernière inégalité est fini car $Z_{\cdot}^{n,m}$ est un élément de $L^2([0,T] \times \Omega,\ dt \otimes d\mathbb{P})$ et $L_T^{n,m}$ est de carré intégrable puisque $\delta\varphi^{n,m}$ est uniformément borné en (t, ω). Il s'ensuit que le processus $\int_0^{\cdot} Z_u^{n,m} dW_u^{n,m}$ est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P}^{n,m})$-martingale car :

$$\mathbb{E}_{n,m}\left[\sup_{t \leq T}\left|\int_0^t Z_u^{n,m} dW_u^{n,m}\right|\right] < \infty,$$

(d'après (1.6.2)). Par conséquent pour tout $s \in [0,T]$:

$$Y_s^{n,m} = \mathbb{E}_{n,m}\left[Y_s^{n,m} \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}_{n,m}\left[\xi \mid \mathcal{F}_s\right] + \int_s^T \mathbb{E}_{n,m}\left[\varphi^{n,m}\left(u, Y_u^{n,m}, 0\right) \mid \mathcal{F}_s\right] du.$$

Comme ξ est bornée alors :

$$\left|Y_s^{n,m}\right| \leq \tilde{c} + \int_s^T \mathbb{E}_{n,m}\left[\left|\varphi^{n,m}\left(u, Y_u^{n,m}, 0\right)\right| \mid \mathcal{F}_s\right] du, \quad s \in [0,T].$$

Par ailleurs pour tout n, m appartenant à $\mathbb{N}$ et pour tout t, ω, y et z, on a :

$$|\varphi^{n,m}(t, \omega, y, z)| \leq c(1 + |y| + h(y)|z|^{\alpha}).$$

Il s'ensuit que,

$$|Y_s^{n,m}| \leq c' \left(1 + \int_s^T \mathbb{E}_{n,m}\left[|Y_u^{n,m}| \mid \mathcal{F}_s\right] du\right), \quad s \in [0, T],$$

et c' est une constante indépendante de n, m. Aussi, si t et s appartenant à $[0, T]$ tels que $s \geq t$ alors :

$$\mathbb{E}_{n,m}\left[|Y_s^{n,m}| \mid \mathcal{F}_t\right] \leq \tilde{c} \left(1 + \int_s^T \mathbb{E}_{n,m}\left[|Y_u^{n,m}| \mid \mathcal{F}_t\right] du\right).$$

Grâce à l'inégalité de Gronwall $(1.6.1)$, on a :

$$\mathbb{E}_{n,m}\left[|Y_s^{n,m}| \mid \mathcal{F}_t\right] \leq c' \exp\left\{c'(T - s)\right\}.$$

En prenant $s = t$ on obtient :

$$|Y_t^{n,m}| \leq c' \exp\left\{c'T\right\}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Ceci pour la première majoration. Montrons la deuxième.

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ et $s \in [0, T]$ on a, grâce à la formule de Itô (1.5.1) appliquée de s à T,

$$\begin{aligned}(Y_s^{n,m})^2 + \int_s^T |Z_u^{n,m}|^2 du &= \xi^2 + 2\int_s^T Y_u^{n,m} \varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m}) du \\ &\quad -2\int_s^T Y_u^{n,m} Z_u^{n,m} dW_u.\end{aligned}$$

En prenant l'espérance dans chaque membre on obtient,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_u^{n,m}|^2 du\right] \leq \mathbb{E}\left[\xi^2\right] + 2\int_0^T \mathbb{E}\left[|Y_u^{n,m} \varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m})|\right] du,$$

car $\int_0^{\cdot} Y_u^{n,m} Z_u^{n,m} dW_u$ est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-martingale. Le fait que $\varphi^{n,m}$ vérifie la condition (H1) et la bornitude de $Y_{\cdot}^{n,m}$ impliquent que,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_u^{n,m}\right|^2 du\right] \leq \mathbb{E}\left[\xi^2\right] + c\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_u^{n,m}\right|^\alpha du\right],$$

où c, jusqu'à la fin de cette épreuve, est une constante pouvant changer d'une ligne à une autre.

Grâce à l'inégalité de Young (1.6.1) on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_u^{n,m}\right|^2 du\right] \leq \mathbb{E}\left[\xi^2\right] + \frac{\alpha}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_u^{n,m}\right|^2 du\right] + \frac{(2-\alpha)}{2} T c^{\frac{2}{2-\alpha}}.$$

Par suite il existe une constante C_Z indépendante de n et m telle que,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_u^{n,m}\right|^2 du\right] \leq C_Z.$$

■

Théorème 3.3.1 *: Il existe un processus $(Y_{\cdot}, Z_{\cdot})$ $\mathbf{P}$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ tel que :*

(i) $\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(|Y_s|^2 + |Z_s|^2\right) ds\right] < \infty$,

(ii) $\begin{cases} dY_t &= -f(t, Y_t, Z_t)dt + Z_t dW_t, \ \ t \leq T, \\ Y_T &= \xi. \end{cases}$

De plus, $\|Y_{\cdot}\|^* = \sup\left\{\left|Y_t(\omega)\right|, (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega\right\} < \infty$.

Preuve. On a d'après le lemme (3.3.2) la solution unique de l'équation (3.2) vérifie

$$\|Y_{\cdot}^{n,m}\|^* \leq C_Y \text{ et } \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_s^{n,m}\right|^2 ds\right] \leq C_Z$$

Vu que $\varphi^{n+1,m} \geq \varphi^{n,m}$ et $\varphi^{n,m} \geq \varphi^{n,m+1}$, et le théorème de comparaison (2.4.1) nous permettent de déduire que $Y_{\cdot}^{n+1,m} \geq Y_{\cdot}^{n,m}$ et $Y_{\cdot}^{n,m} \geq Y_{\cdot}^{n,m+1}$.

Nous allons maintenant construire le processus $(Y_{\cdot}, Z_{\cdot})$ qui sera la solution recherchée.

Pour tout m fixé $(Y_{\cdot}^{n,m}, n \geq 0)$ est une suite croissante bornée, elle est donc convergente. Appelons $Y_{\cdot}^{m}$ sa limite. Comme pour tout m et $n \in \mathbb{N}$ on a, $Y^{n,m} \geq Y^{n,m+1}$ alors : la suite $(Y_{\cdot}^{m}, m \geq 0)$ est décroissante et bornée, elle est donc convergente. Notons $Y_{\cdot}$ sa limite.

Il reste à construire $Z_{\cdot}$.

Grâce à la formule de Itô (1.5.1) on a, pour tout n, m, p et $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(Y_0^{n,m} - Y_0^{p,k}\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_u^{n,m} - Z_u^{p,k}\right|^2 du\right] \\
&= 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(Y_u^{n,m} - Y_u^{p,k}\right)\left(\varphi^{n,m}\left(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m}\right) - \varphi^{p,k}\left(u, Y_u^{p,k}, Z_u^{p,k}\right)\right) du\right] \\
&\leq c\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Y_u^{n,m} - Y_u^{p,k}\right|\left(1 + \left|Z_u^{n,m}\right|^{\alpha} + \left|Z_u^{p,k}\right|^{\alpha}\right) du\right]\right),
\end{aligned}$$

car $(Y_{\cdot}^{n,m})_{n,m}$ est bornée et pour tout n, m,

$$\left|\varphi^{n,m}(t, y, z)\right| \leq c\,(1 + |y|) + h(y)\,|z|^{\alpha}).$$

$$\leq c\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Y_u^{n,m} - Y_u^{p,k}\right| du\right] + 2\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Y_u^{n,m} - Y_u^{p,k}\right|^{\gamma} du\right]\right)^{\frac{1}{\gamma}} (C_Z)^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

avec $\gamma = \dfrac{2}{2-\alpha}$, cela est dû à l'inégalité de Hölder (1.6.2) et au fait que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_u^{n,m}\right|^2 du\right] \leq C_Z, \quad \forall n, m.$$

Or il existe une sous-suite $\left(Y_{\cdot}^{k_{m,m}}, m \geq 0\right)$ de $(Y_{\cdot}^{n,m}, n, m \geq 0)$ de limite $Y_{\cdot}$ dans $L^{\gamma}([0,T] \times \Omega,\ dt \otimes d\mathbb{P})$. Par conséquent la suite $\left(Z_{\cdot}^{k_{m,m}}, m \geq 0\right)$ est de Cauchy dans $L^2([0,T] \times \Omega, dt \otimes d\mathbb{P})$ et est donc convergente dans ce même espace, vers un processus $Z_{\cdot}$.

Montrons enfin que $(Y_{\cdot}, Z_{\cdot})$ est solution de l'équation rétrograde (3.1). Naturellement cela se fera par passage à la limite.

Il existe une sous-suite de $\left(\left(Y_{.}^{k_{m,m}}, Z_{.}^{k_{m,m}}\right)\right)_{m\geq 0}$, que l'on représentera toujours par $\left(\left(Y_{.}^{k_{m,m}}, Z_{.}^{k_{m,m}}\right)\right)_{m\geq 0}$, et un processus $\tilde{Z}_{.}$ élément de $L^2\left([0,T]\times\Omega, \mathbf{P}, dt\otimes d\mathbb{P}\right)$ et à valeurs positives tel que :

(i) La sous-suite $\left(\left(Y_{.}^{k_{m,m}}, Z_{.}^{k_{m,m}}\right)\right)_{m\geq 0}$ converge $dt\otimes d\mathbb{P}$-$p.s$ vers $(Y_{.}, Z_{.})$.

(ii) $\forall m\geq 0$, $\left|Z_{.}^{k_{m,m}}\right| \leq \tilde{Z}_{.}$ $dt\otimes d\mathbb{P}$-$p.s$. Aussi pour tout $m\geq 0$ et $t\in[0,T]$ on a :

$$Y_t^{k_{m,m}} = \xi + \int_t^T \varphi^{k_{m,m}}\left(u, Y_u^{k_{m,m}}, Z_u^{k_{m,m}}\right) du - \int_t^T Z_u^{k_{m,m}} dW_u.$$

Or,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_t^T Z_u^{k_{m,m}} dW_u - \int_t^T Z_u dW_u\right|\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left|\int_0^T \left(Z_u^{k_{m,m}} - Z_u\right) dW_u\right|\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t \left|Z_u^{k_{m,m}} - Z_u\right| dW_u\right|\right] \\
&\leq c\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_u^{k_{m,m}} - Z_u\right|^2 du\right]\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ quand } m\to\infty.
\end{aligned}$$

La dernière majoration est due à l'inégalité de BDG (1.6.2). Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_t^T \left(\varphi^{k_{m,m}}(u, Y_u^{k_{m,m}}, Z_u^{k_{m,m}}) - f(u, Y_u, Z_u)\right) du\right|\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\varphi^{k_{m,m}}(u, Y_u^{k_{m,m}}, Z_u^{k_{m,m}}) - f(u, Y_u, Z_u)\right| du\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\varphi^{k_{m,m}}(u, Y_u^{k_{m,m}}, Z_u^{k_{m,m}}) - f(u, Y_u^{k_{m,m}}, Z_u^{k_{m,m}})\right| 1_{\left\{\left|Z_u^{k_{m,m}}\right|\leq \tilde{Z}_u\right\}} du\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|f(u, Y_u^{k_{m,m}}, Z_u^{k_{m,m}}) - f(u, Y_u, Z_u)\right| du\right],
\end{aligned}$$

et par application du théorème de la convergence dominée (1.6.5) on obtient la convergence vers 0, quand $m\to\infty$, des deux derniers termes de la dernière inégalité. En effet, cela est possible grâce à la convergence uniforme sur les compactes de $\left(\varphi^{k_{m,m}}(t,\omega,.,.)\right)_{m\geq 0}$ vers $f(t,\omega,.,.)$ (Remarque (3.3.1)), au fait que f et $(\varphi^{k_{m,m}}, m\geq 0)$, satisfont la condition (H1), à la bornitude de $\left(Y_{.}^{k_{m,m}}\right)_{m\geq 0}$ et aux points (i) et (ii) ci-dessus.

Par conséquent si on pose, pour $t \leq T$,

$$\tilde{Y}_t = \xi + \int_t^T f(u, Y_u, Z_u)du - \int_t^T Z_u dW_u,$$

alors : $\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq T} \left| Y_t^{k_{m,m}} - \tilde{Y}_t \right| \right]$ tend vers 0 quand m tend vers ∞. Par suite $\forall t \leq T$, $Y_t = \tilde{Y}_t$ et donc $\forall t \leq T$,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(u, Y_u, Z_u)du - \int_t^T Z_u dW_u.$$

■

3.3.2 Unicité de la solution

Nous allons maintenant étudier la question de l'unicité de la solution de EDSR (3.1). Pour cela nous aurons besoin de plus d'hypothèses de régularité sur f et ξ.

On supposons que les conditions $(H3)$ et $(H4)$ ci-dessus sont satisfaites.

Proposition 3.3.1 *: Il existe une constante $\eta > 0$ et $Y_.$, $Z_.$ deux processus* **P***-mesurables, à valeurs respectives dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^p$ tel que :*

$$\sup \left\{ |Y_t| + |Z_t| \, , \ t \leq T \right\} \leq \eta.$$

et

$$\begin{cases} dY_t & = -f(t, Y_t, Z_t)dt + Z_t dW_t, \ t \leq T, \\ Y_T & = \xi. \end{cases}$$

Preuve. Soit θ (resp. $\tilde{\theta}$) une application indéfiniment différentiable sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^p$) vérifiant $\theta(y) = 1$ si $|y| \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 1$ et $\theta(y) = 0$ si $|y| \geq 2$ (resp. $\tilde{\theta}(z) = 1$ si $|z| \leq 1$, $0 \leq \tilde{\theta} \leq 1$ et $\tilde{\theta}(z) = 0$ si $|z| \geq 2$). Pour $n \geq 1$, on définit l'application θ_n (resp $\tilde{\theta}_n$) par :

$$\theta_n(y) = \theta\left(\frac{y}{n}\right), \ y \in \mathbb{R},$$

(resp. $\tilde{\theta}_n(z) = \tilde{\theta}\left(\frac{z}{n}\right), z \in \mathbb{R}^p$). Aussi, l'application f^n telle que :

$$f^n(t,y,z) = f(t,y,z)\theta_n(y)\,\tilde{\theta}_n(z)\,,\ (t,y,z) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p,$$

est différentiable en (y,z) et de différentielle bornée.

Soit $\alpha = \sup\{\theta'(y)\,,\ \ |y| \leq 2\}\,,$ (θ' est la dérivée de θ) et N un entier ≥ 1. Il existe deux processus $Y_{\cdot}$ et $Z_{\cdot}$ (2.3.1) $\mathbf{P}$-mesurables à valeurs respectives dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^p$ tels que $\forall t \leq T$,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f^N(s, Y_s, Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s dW_s.$$

De plus les points a) et b) suivants sont satisfaits (d'après (1.6.3)) :

a) Pour tout $t \leq T$, Y_t et Z_t sont les éléments de $\mathbb{D}^{1,2}$ et pour tout $u \in [0,T]$, le couple $(D_u Y_t, D_u Z_t)_{t \leq T}$ vérifie,

$$\begin{aligned} D_u Y_t \ &= D_u\xi + \int_t^T \left(f_y^{N,}(s, Y_s, Z_s)\, D_u Y_s\right) ds \\ &+ \int_t^T \left(f_z^{N,}(s, Y_s, Z_s)\, D_u Z_s\right) ds - \int_t^T D_u Z_s dW_s,\ t \leq T. \end{aligned} \tag{3.3}$$

b) $\forall t \in [0,T]\,,\ D_t Y_t = Z_t.$

Le fait que $f_z^{N,}$ soit uniformément borné implique que (comme dans la preuve du théorème (3.3.1) en considérant l'équation rétrograde du point a) ci-dessus) pour tout $t \in [0,T]$. Il existe donc $\mathbb{P}'$ la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ équivalente à $\mathbb{P}$ (1.6.1) définie comme suite :

$$\frac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{P}} = L_T = \exp\left\{\int_0^T f_z^{N,}(s, Y_s, Z_s)\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \left|f_z^{N,}(s, Y_s, Z_s)\right|^2 ds\right\},$$

Le processus $W'_t = W_t - \displaystyle\int_0^t f_z^{N,}(s, Y_s, Z_s)\, ds$ est un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P}')$-mouvement Brownien et pour tout $t \in [0,T]$, on a,

$$D_u Y_t = D_u\xi + \int_t^T f_y^{N,}(s, Y_s, Z_s)\, D_u Y_s ds - \int_t^T D_u Z_s dW'_s.$$

Si $\mathbb{E}'$ désigne l'espérance sous $\mathbb{P}'$ alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}'\left[\left(\int_0^T |D_u Z_s|^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] &= \mathbb{E}\left[L_T\left(\int_0^T |D_u Z_s|^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq \left(\mathbb{E}\left[(L_T)^2\right]\mathbb{E}\left[\int_0^T |D_u Z_s|^2\, ds\right]\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Or le second membre de cette dernière inégalité est fini car $D_u Z_s$ est un élément de $L^2([0,T]\times\Omega, dt\otimes d\mathbb{P})$ et L_T est de carré intégrable puisque $f_z^{N,}(s, Y_s, Z_s)$ est uniformément borné en (t,ω). Il s'ensuit que le processus $\int_0^t D_u Z_s dW'_s$ est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P}')$-martingale car

$$\mathbb{E}'\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t D_u Z_s dW'_s\right|\right] < \infty.$$

Par conséquent pour tout $t\in[0,T]$,

$$D_u Y_t = \mathbb{E}\left[D_u Y_t \mid \mathcal{F}_t\right] =$$

$$\mathbb{E}\left[D_u\xi \mid \mathcal{F}_t\right] + \int_t^T \mathbb{E}\left[f_y^{N,}(s, Y_s, Z_s)\, D_u Y_s \mid \mathcal{F}_t\right] ds - \mathbb{E}\left[\int_t^T D_u Z_s dW'_s \mid \mathcal{F}_t\right],$$

Comme $\mathbb{E}\left[\int_t^T D_u Z_s dW_s^{'} \mid \mathcal{F}_t\right] = 0$ car :

$$\int_t^T D_u Z_s dW_s^{'},$$

est une martingale. On a donc :

$$|D_u Y_t| \leq \mathbb{E}\left[|D_u\xi| \mid \mathcal{F}_t\right] + \int_t^T \mathbb{E}\left[\left|f_y^{N,}(s, Y_s, Z_s)\, D_u Y_s\right| \mid \mathcal{F}_t\right] ds.$$

Comme $D_u\xi$ est bornée alors :

$$|D_u Y_t| \leq M + \sup_{(t,y,z)}\left|f_y^{N,}(t,y,z)\right| \int_t^T \mathbb{E}\left[|D_u Y_s| \mid \mathcal{F}_t\right] ds. \tag{3.4}$$

On prenant l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_u$ dans (3.4) avec $u \leq t$:

$$\mathbb{E}\left[|D_u Y_t| \mid \mathcal{F}_u\right] \leq M + \sup_{(t,y,z)} \left|f_y^{N,}(t,y,z)\right| \int_t^T \mathbb{E}\left[|D_u Y_s| \mid \mathcal{F}_u\right] ds,$$

d'après le lemme de Gronwall (1.6.1) et $u = t$:

$$\begin{aligned} |D_t Y_t| &\leq M \exp\left\{(T-t) \sup_{(t,y,z)} \left|f_y^{N,}(t,y,z)\right|\right\} \\ &\leq M \exp\left\{T \sup_{(t,y,z)} \left|f_y^{N,}(t,y,z)\right|\right\}. \end{aligned}$$

Or $\forall (t,y,z)$,

$$\left|f_y^{N,}(t,y,z)\right| \leq \left|f_y'(t,y,z)\right| + \frac{\alpha}{N} |f(t,y,z)|,$$

et que $f^N(t,y,z) = 0$ si $|y| \geq 2N$ ou $|z| \geq 2N$. Par suite pour tout $t \leq T$,

$$|D_t Y_t| \leq M \exp\left(T \left|f_y'\right|_N^* + \frac{T}{N} \alpha |f|_N^*\right),$$

où pour toute application g définie sur $[0,T] \times \mathbb{R}^{p+1}$,

$$|g|_N^* = \sup\left\{|g(t,y,z)|, (t,|y|,|z|) \in [0,T] \times [0,2N]^2\right\}.$$

Aussi grâce à l'hypothèse (H3) :

$$\begin{aligned} |D_t Y_t| &\leq M \exp\left(cT\left(1 + \ln\left(1 + \ln(1+4N)\right)\right)\right) \exp \tfrac{T}{N} c\alpha \left(1+4N\right) \\ &\leq c'(1 + \ln(1+4N))^{cT} \exp \tfrac{T}{N} c\alpha(1+4N). \end{aligned}$$

Par ailleurs soit $\left(\tilde{Y}_., \tilde{Z}_.\right)$ et $\left(\bar{Y}_., \bar{Z}_.\right)$ les solutions des équations rétrogrades suivantes :

$\forall t \leq T,$

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_t &= \xi + \int_t^T c\left(1 + \left|\tilde{Y}_s\right| + \left|\tilde{Z}_s\right|\right) ds - \int_t^T \tilde{Z}_s dW_s, \\ \bar{Y}_t &= \xi - \int_t^T c\left(1 + \left|\bar{Y}_s\right| + \left|\bar{Z}_s\right|\right) ds - \int_t^T \bar{Z}_s dW_s,\end{aligned}$$

Aussi, comme dans la preuve du lemme (3.3.2) "il suffit de prendre $\varphi^{n,m}(s, Y_s^{n,m}, Z_s^{n,m}) = c(1+\left|\bar{Y}_s\right|+\left|\bar{Z}_s\right|)$ de même pour $c\left(1+\left|\tilde{Y}_s\right|+\left|\tilde{Z}_s\right|\right)$" on montre qu'il existe deux constantes $\tilde{M}$ et $\bar{M}$ positives telles que pour tout $t \leq T$, $\left|\tilde{Y}_t\right| \leq \tilde{M}$ et $\left|\bar{Y}_t\right| \leq \bar{M}$. De plus comme f^N est de croissance linéaire alors le théorème de comparaison (2.4.1) nous permet de déduire que pour tout $t \in [0, T]$, on a $\bar{Y}_t \leq Y_t \leq \tilde{Y}_t$ et donc $|Y_t|$ est borné par $\max(\tilde{M}, \bar{M})$. Par conséquent si N est plus grand que $\max(\tilde{M}, \bar{M})$ ainsi que

$$c'(1 + \ln(1 + 4N))^{cT} \exp \frac{T}{N} c\alpha \left(1 + 4N\right),$$

alors : $f^N(t, Y_t, Z_t) = f(t, Y_t, Z_t)$, $\forall t \in [0, T]$. Il s'ensuit que le processus $(Y_\cdot, Z_\cdot)$ vérifie :

(i) $\sup\left\{|Y_t| + |Z_t|,\ t \leq T\right\} \leq 2N = \eta$.

(ii) $Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s,\ t \leq T.$

■

Théorème 3.3.2 *: Si le couple (f, ξ) vérifie les conditions (H3) et (H4) ci-dessus, alors la solution de l'équation rétrograde* (3.1) *est unique.*

Preuve. Soit $(Y'_\cdot, Z'_\cdot)$ une autre solution de cette équation. Comme ξ est bornée et f est de croissance linéaire alors $Y'_\cdot$, est bornée. Par ailleurs pour tout $t \in [0, T]$ on a :

$$\begin{cases} Y_t &= \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \\ Y'_t &= \xi + \int_t^T f(s, Y'_s, Z'_s) ds - \int_t^T Z'_s dW_s. \end{cases}$$

On approxime f par une suite double $(\varphi^{n,m}, n, m \geq 0)$ d'applications Lipschitziennes telle que $\varphi^{n,m} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} f$. De plus :

$$|\varphi^{n,m}(t,\omega,y,z)| \leq c(1+|y|+h(y).\,|z|^{\alpha})$$

pour tout t,ω,y et z. Il s'ensuit que le couple $(\varphi^{n,m},\xi)$ possède les propriétés de (f,ξ) du théorème $(2.3.1)$. Par conséquent il existe un couple de processus $(Y_{\bullet}^{n,m},Z_{\bullet}^{n,m})$ qui vérifient :

$$\begin{cases} Y_t^{n,m} = \xi + \int_t^T \varphi^{n,m}(s,Y_s^{n,m},Z_s^{n,m})ds - \int_t^T Z_s^{n,m}dW_s, \\ Y_t^{\prime n,m} = \xi + \int_t^T \varphi^{n,m}(s,Y_s^{\prime n,m},Z_s^{\prime n,m})ds - \int_t^T Z_s^{\prime n,m}dW_s. \end{cases}$$

Il s'ensuit que,

$$\begin{aligned} Y_t^{n,m} - Y_t^{\prime n,m} &= \int_t^T (\varphi^{n,m}(s,Y_s^{n,m},Z_s^{n,m}) - \varphi^{n,m}(s,Y_s^{\prime n,m},Z_s^{\prime n,m}))ds - \int_t^T \left(Z_s^{n,m} - Z_s^{\prime n,m}\right)dW_s, \\ &= \int_t^T (\varphi^{n,m}(s,Y_s^{n,m},Z_s^{n,m}) - \varphi^{n,m}(s,Y_s^{\prime n,m},Z_s^{n,m}))ds \\ &+ \int_t^T \varphi^{n,m}(s,Y_s^{\prime n,m},Z_s^{n,m}) - \varphi^{n,m}(s,Y_s^{\prime n,m},Z_s^{\prime n,m})ds - \int_t^T \left(Z_s^{n,m} - Z_s^{\prime n,m}\right)dW_s, \end{aligned}$$

Aussi, appelons $\delta\varphi^{n,m} = ((\delta\varphi^{n,m})_t)_{t\leq T}$ le processus tel que pour tout $t \leq T$,

$$\delta\varphi^{n,m}(t,Y_t^{n,m},Z_t^{n,m}) = \begin{cases} \dfrac{\varphi^{n,m}(t,Y_t^{\prime n,m},Z_t^{n,m}) - \varphi^{n,m}(t,Y_t^{\prime n,m},Z_t^{\prime n,m})}{Z_t^{n,m} - Z_t^{\prime n,m}}, & \text{si } Z_t^{n,m} - Z_t^{\prime n,m} \neq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La bornitude de $Y_{\bullet}^{\prime n,m}$ et $Z_{\bullet}^{n,m}$ implique que $\delta\varphi^{n,m}$ est un processus uniformément borné. Il existe donc une probabilité $\mathbb{P}^{n,m}$ sur Ω équivalente à $\mathbb{P}$ $(1.6.1)$ telle que :

$$W_t^{n,m} = W_t - \int_0^t \delta\varphi^{n,m}(s,Y_s^{n,m},Z_s^{n,m})ds,$$

est un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P}^{n,m})$-mouvement Brownien (1.6.4). Par suite pour tout $t \in [0,T]$ on a,

$$\begin{aligned} Y_t^{n,m} - Y_t^{\prime n,m} &= \int_t^T (\varphi^{n,m}(s, Y_s^{n,m}, Z_s^{n,m}) - \varphi^{n,m}(s, Y_s^{\prime n,m}, Z_s^{n,m}))ds \\ &- \int_t^T \left(Z_s^{n,m} - Z_s^{\prime n,m}\right) dW_s^{n,m}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Prenant l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$ dans (3.5) : comme $Z_\cdot^{n,m}$ et $Z_\cdot^{\prime n,m} \in L^2([0,T] \times \Omega, dt \otimes d\mathbb{P})$ alors : $\left(\int_0^t \left(Z_s^{n,m} - Z_s^{\prime n,m}\right) dW_s^{n,m}\right)_{0 \le t \le T}$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale nulle en 0 et donc on a nécessairement :

$$Y_t^{n,m} - Y_t^{\prime n,m} = \int_t^T \mathbb{E}\left[\varphi^{n,m}(s, Y_s^{n,m}, Z_s^{n,m}) - \varphi^{n,m}(s, Y_s^{\prime n,m}, Z_s^{n,m}) \mid \mathcal{F}_t\right] ds.$$

Comme $\varphi^{n,m}$ est Lipschitzienne alors,

$$\left|Y_t^{n,m} - Y_t^{\prime n,m}\right| \le c \int_t^T \mathbb{E}\left[\left|Y_s^{n,m} - Y_s^{\prime n,m}\right| \mid \mathcal{F}_t\right] ds, \tag{3.6}$$

Prenant maintenant l'espérance dans (3.6) :

$$\mathbb{E}\left[\left|Y_t^{n,m} - Y_t^{\prime n,m}\right|\right] \le c \int_t^T \mathbb{E}\left[\left|Y_s^{n,m} - Y_s^{\prime n,m}\right|\right] ds.$$

Aussi grâce à le lemme de Gronwall (1.6.1) on déduire que, $\mathbb{P}$-$p.s.$ $\left|Y_t^{n,m} - Y_t^{\prime n,m}\right| = 0$, $\forall t \le T$, et d'après (3.3.1) on trouve que :

$$\begin{cases} Y_t^{n,m} \underset{n,m \to \infty}{\longrightarrow} Y_t, \\ Y_t^{\prime n,m} \underset{n,m \to \infty}{\longrightarrow} Y_t', \end{cases}$$

On déduire que $Y_t = Y_t'$, $\forall t \le T$. Cela entraîne aussi que $Z_t = Z_t'$, $\forall t \le T$ et donc l'unicité de la solution de l'équation (3.1). ■

Conclusion

Dans ce modeste travail, nous avons essayé d'exposer deux résultats d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR.

Le premier résultat est fondamental établi par E. Pardoux et S. Peng en 1990 qui étudier le cas où le générateur f est globalement Lipschitzien avec une condition terminale ξ, $\mathcal{F}_T$-mesurable et de carré intégrable. La preuve de ce résultat est basée sur le théorème de représentation des martingales Browniennes et un argument de point fixe.

Le deuxième résultat, traite le problème de l'existence et l'unicité des solutions pour l'EDSR dont le générateur f est localement Lipschitzien et la condition terminale ξ est borné. Ce résultat a été établi par S. Hamadène en 1996 dans le cadre d'affaiblir la condition Lipschitzienne, l'idée de la preuve est d'approximer f par une suite double $(\varphi^{n,m}, n, m \geq 0)$ d'applications Lipschitziennes où le couple $(\varphi^{n,m}, \xi)$ possède le résultat de Pardoux-Peng, par conséquent il existe un couple de processus $(Y_{\cdot}^{n,m}, Z_{\cdot}^{n,m})$ de limite est $(Y_{\cdot}, Z_{\cdot})$ qui est la solution de l'équation associée à (f, ξ) .

Ce dernier résultat peut être s'étendue dans le cas où le générateur f n'est pas localement Lipschitzien . Plus précisément, si f est seulement continue en (y, z), de la même manière que la preuve du théorème d'existence (3.3.1) on montre que l'équation associée à (f, ξ) admet une solution (non unique en général).

Bibliographie

[1] Bismut, J. M. (1973). Conjugate convex functions in optimal stochastic control. Journal of Mathematical Analysis and applications, 44(2), 384-404.

[2] Bougherara, S. (2005). Principe du maximum pour les problèmes de contrôle stochastique : approche par les probabilités équivalentes (Mémoire de Magister, Université Mohamed Khider-Biskra).

[3] Briand, P. (2001). Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars.

[4] Demailly, J. P. (2016). Analyse numérique et équations différentielles-4ème Ed. EDP sciences.

[5] El Karoui, N., Peng, S., & Quenez, M. C. (1997). Backward stochastic differential equations in finance. Mathematical finance, 7(1), 1-71.

[6] Gallay, T. (2009). Théorie de la mesure et de l'intégration. Université Joseph Fourier, Grenoble.

[7] Hamadene, S. (1996). Equations différentielles stochastiques rétrogrades : le cas localement Lipschitzien. In : Annales de l'IHP. Probabilités et Statistiques (Vol. 32, No. 5, pp. 645-659).

[8] Jeanblanc, M. (2006). Cours de calcul stochastique. cours de master.7.

[9] Le Gall, J. F. (2012). Mouvement Brownien, martingales et calcul stochastique (Vol.71). Springer Science & Business Media.

[10] Pardoux, E., & Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems & Control Letters, 14(1). 55-61.

[11] Pham, H. (2007). Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance (Vol. 61). Berlin : Springer.

[12] Valentin, J. (2008). Introduction à l'Analyse stochastique. Mémoire de Magistère MMFAI.

Annexe : Abréviations et Notations

Les abréviations et notations souvent utilisées dans ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

C^1	Ensemble des fonctions une fois dérivable et dont la première dérivée est continue.
C^2	Ensemble des fonctions deux fois dérivable et dont la dérivée seconde est continue.
C_b^∞	Ensemble des fonctions indéfiniment dérivables dont les dérivées de tous ordre sont bornées.
L^1	Espace des processus intégrables.
$L^2\left(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}, \mathbb{R}^k\right)$	Ensemble des variables aléatoires , à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, $\mathcal{F}_T$-mesurable et de carré intégrables.
$dt \otimes d\mathbb{P}$	Mesure produit de mesure de Lebesgue sur $[0, T]$ avec la mesure de $d\mathbb{P}$.
σ^* (ou z^*)	Transposée de la matrice σ (ou z) .
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+1})$	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^{p+1}$.
$m \otimes \mathbb{P}$-$p.p$	Presque partout par rapport la mesure $m \otimes \mathbb{P}$.
$\mathbb{P}$-$p.s$	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
1_A	Indicatrice de A est noté : $1_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A. \end{cases}$

$\mathbb{R}^k$	Espace réel euclidien de dimension k.
$\mathbb{R}^{k\times d}$	Ensemble des matrices réelles $k \times d$.
i.e	C'est-à-dire.
resp	Respectivement.
v.a	Variable aléatoire $\cdot$
$\mathbb{H}_T^4$	Espace vectoriel formé des processus progressifs f_t, tel que : $$\|f\|_4^4 = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \|f_t\|^2 dt\right)^2\right] < \infty.$$
L^4	Espace des variables aléatoires X, tel que, $\|X\|_4^4 = \mathbb{E}\left(\|X\|^4\right) < \infty$.
$tr(M)$	Trace de la matrice M.
N	Ensemble négligeable.
$\mathcal{N}$	Ensemble des négligeables N.
$(. \mid .)$	Produit scalaire.
max	Maximum.
$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$	Espérance par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$.
Id	Matrice identité.
$\|f\|_\infty$	$\sup\{\|f(x)\|\}$.
EDSR	Équation différentielle stochastique rétrograde.
EDS	Équation différentielle stochastique.