République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option :**Probabilités**

Par

ZEDIKE Imane

Titre :

Martingale et Semi-martingale

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**MANSOURI Badreddine**	UMKB	Encadreur
Dr.	**LABED Boubakeur**	UMKB	Président
Dr.	**AOUNE Salima**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Je dédie ce mémoire à :

Mes parents :

Ma mère, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses pécieux conseil, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

Mon père, qui peut ètre fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privation pour m'aider à avance dans la vie. Puisse dieux faire en sorte que ce travail porte son fruit, merci pour les valeurs et le soutient permanent venu de toi.

Mes frères et sœurs qui n'ont cessé d'etre pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

Mes professeurs du département de Mathématiques de Biskra qui doivent voir dans ce travail la fierté d'un savoir bien acquis.

Zedik Imane

REMERCIEMENTS

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

*En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreur Dr :**Manssouri Baderddine**, son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.*

Nos vifs remerciement vont également aux membres du jury pour l'intérète qu'ils ont porté à notre recherche en accemptons d'examiner notre travail et l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Les martingales sont un outil clé de la théorie de probabilité modern, en particulier en ce qui concerne assertion de convergence et théorèmes limite connexes. Les orientations de technique martingales peuvent être retracées à des articles d'analyse par : **Kac**, **MarcinKiewicz**, **Palé**, **Steinhaus**, **Wiener** et **Zygumund** début des années 1930.

En théorie des probabilités, la première apparition du mot martingale (et nom du concept) se trouve dans la thèse de Jean Ville en 1939. Il précise que ce terme est emprunté du vocabulaire des joueurs. Notons que la dénomination anglaise a été reprise de la française par Joseph Leo Doob. Dans le langage des jeux, le terme martingale apparait pour la première fois en 1611 dans le dictionnaire franco-anglais de Randle Cotograve. L'expression à la martingale est définie avec le terme : « absurdly », « foolishly ».

Le nom martingale est synonyme de jeu équitable, c'est-à-dire d'un jeu où le gain que l'on peut espérer faire en tout temps ultérieure est égal à la somme gagnée au moment présent. En probabilités, On appelle donc martingale un processus stochastique $(X_n)_n$ tel que l' espérance conditionnelle $E[X_m/X_n]$ est égale à X_n pour tout $m \geq n$. Les martingales, ainsi que leurs variantes les sous martingales et les sur martingales jouissent de nombreuses propriétés qui les rendent très utiles dans l'étude de processus stochastique plus généraux. L'étude des martingales qui est proposée ci-dessous repose très fortement sur l'algèbre des espérances conditionnelles.

Les semi martingales continues constituent la classe générale de processus à trajectoires continues pour laquelle on peut développer un théorie de l'intégrale stochastique, par définition une semi martingale est la somme d'une martingale (locale) et d'un processus à variation finie.

Dans ce mémoire, qui ce compose de trois chapitre :

Chapitre 1 (Notions générale) : Dans ce chapitre nous exposons les notions générale de base utilisées le long de ce mémoire on d'écrit d'abord la définition d'une tribu et filtration et son propriétés, puis on s'intéresser à les processus stochastiques.

Chapitre 2 (Martingales et Semi martingales) : Dans ce chapitre on donne quelque définitions, propositions, des théorèmes fait avec démonstrations et des résultats sur la martingale et semi martingale.

Chapitre 3 (Intégrale Stochastique) : Dans ce chapitre nous nous soucions pour la définition de l'intégrale stochastique et quelque propriétés, puis l'intégrale stochastique par rapport la martingale de carré intégrable, le cas d'une martingale locale, et semi martingale.

Chapitre 1

Notions générales

L'objet de la théorie des processus stochastiques (ou aléatoire) est l'étude des phénomènes aléatoires qui dépendant du temps. Ce chapitre présente les notions générales de base sur les processus stochastiques.

1.1 Généralités sur les processus stochastiques

1.1.1 Tribus et Filtrations

Tribu

Définition 1.1.1 *On appelle "tribu d'événements sur Ω" tout partie $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}(\Omega)$ telle que :*

i) $\Omega \in \mathcal{F}$

ii) $A \in \mathcal{F} \implies A^C \in \mathcal{F}$*(stabilité par passage complémentaire).*

iii) $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F} \implies \cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$ *(stabilité par réunion dénombrable).*

Le couple $(\Omega$,$\mathcal{F})$ s'appelle "espace probabilisable" ou "espace mesurable".

Remarque 1.1.1 *On dit $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}(\Omega)$ est une algèbre sur Ω si elle vérifie $i)$, $ii)$ et $iii)$ A, $B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$(stabilité par réunion fini).*

Propriété 1.1.1 *1.* $\phi \in \mathcal{F}$.

2. $A, B \in \mathcal{F} \implies A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$.

3. $A, B \in \mathcal{F} \implies A \Delta B \in \mathcal{F}$.

4. $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F} \implies \cap_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$.

5. $lim\inf_n A_n = \cup_{n \geq 1} \cap_{k \geq n} A_k$, $lim\sup_n A_n = \cap_{n \geq 1} \cup_{k \geq n} A_k$.

Définition 1.1.2 *Soit $\mathcal{F}$une famille non vide de partie de Ω. On appelle "**tribu engendrée** par $\mathcal{F}$" la plus petit tribu $\sigma(\mathcal{F})$, contenant $\mathcal{F}$.*

$\sigma(\mathcal{F})$ est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{F}$.

Remarque 1.1.2 *La rénion de deux tribus n'est en générale pas une tribu.*

Filtration :

Définition 1.1.3 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.Une filtration de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une suite croissante de sous-tribu $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset ... \subset \mathcal{F}_n \subset ... \subset \mathcal{F}$. On dit alors que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$ est une espace probabilité filtré.*

Remarque 1.1.3 *1. La filtration est continue à droite au sens où :*

$$\mathcal{F}_t = \cap_{s > t} \mathcal{F}_s$$

2. Une filtration $\mathcal{G}$ est dite plus grand que $\mathcal{F}$ si : $\mathcal{F}_t \subset G_t, \forall t \geq 0$.

Définition 1.1.4 *On appelle tribu prévisible, la plus petite tribu sur $]0, +\infty[\times\Omega$, notée $\mathcal{P}$ engendrée par tous les ensembles de la forme :*

$$]s, t[\times A, \quad 0 \leq s \leq t, A \in \mathcal{F}_s$$

1.1.2 Processus stochastiques

Définition 1.1.5 *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in T}$ est une famille des variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que l'indice t est souvement interprété comme le temps.*

– Si $T \subseteq \mathbb{N}$ on dit que le processus est temp discret.

– Si $T \subseteq \mathbb{R}_+$ on dit que le processus est temp continue.

Remarque 1.1.4 *– Pour $t \in T$ fixé, $\omega \longrightarrow X_t(\omega)$ est une variable aléatoire.*

– Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \longrightarrow X_t(\omega)$ est une trajectoire du processus.

Remarque 1.1.5 *La filtration $(\mathcal{F}_t)$ définie par :*

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s; s < t), \quad t \geq 0.$$

S'appelle la filtration naturelle du processus $(X_t)_{t\in T}$ et on la note par $\left(\mathcal{F}_t^X\right)$. L'interprétation de la filtration naturelle $\left(\mathcal{F}_t^X\right)_{t\in T}$ est que $\mathcal{F}_t^X$ contient toutes informations sur les variables aléatoires $(X_s)_{s\leq t}$.

Définition 1.1.6 *Un processus $X = (X_t)_{t\in T}$ est dit **à trajectoires continues** si, les applications $t \to X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.*

Définition 1.1.7 *Un processus $X = (X_t)_{t\in T}$ est dit **mesurable** si, l'application définie sur $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$ par $(t, \omega) \longrightarrow X_t(\omega)$ est mesurable.*

Définition 1.1.8 *Un processus $X = (X_t)_{t\in T}$ est dit **adapté** si pour tout $t \geq 0, X_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Remarque 1.1.6 *Un processus $X = (X_t)_{t\in T}$ est toujours adapté par rapport à sa filtration naturelle*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s; s \leq t).$$

Définition 1.1.9 *Un processus $X = (X_t)_{t\in T}$ est dit **progressif** (ou progressivemment mesurable) si, pour tout $t \geq 0, (s,\omega) \longrightarrow X_s(\omega)$ est mesurable sur $[0,t] \times \Omega$ muni de $\mathfrak{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$.*

Remarque 1.1.7 *Un processus progressif est un processus adapté et mesurable.*

Proposition 1.1.1 *Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ un processus adapté et à trajectoires continues à droite, alors X est progressif.*

Définition 1.1.10 *Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration. Un processus $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dit **prévisible** si, $X_n \subseteq \mathcal{F}_{n-1}$, pour $n \geq 1$.*

Définition 1.1.11 *Un processus $X = (X_t)_{t\in T}$ est dit **gaussien** si, toutes ses lois finidimentielles (X_{t_1},X_{t_2},...,X_{t_n}) sont gaussiennes pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n \in T$.*

Autrement dit $X = (X_t)_{t\in T}$ est un processus gaussien si et seulement si, toute combinaison linéaire de ses marginales

$$a_1 X_{t_1} + a_2 X_{t_2} + ... + a_n X_{t_n}$$

suit une loi gaussienne, $\forall n \in \mathbb{N}$,t_1, t_2,...,$t_n \in T$, $a \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.12 *Un processus est dit **càglàd** (continue à gauche, et limité à droite) si ses trajectoires sont continue à gauche, pourvues de limites à droite.*

Définition 1.1.13 *Un processus est dit **càdlàg** (continue à droite, et limité à gauche) si ses trajectoires sont continue à droite, pourvues de limites à gauche.*

Définition 1.1.14 *Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ et $Y = (Y_t)_{t\in T}$ deux processus stochastiques sont **indistinguable** si et seulement si,*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t : t \in T) = 1.$$

Définition 1.1.15 *Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ un processus stochastique $\mathcal{F}_t$-adapté, on dit que*

i) X est à accroissements indépendants si, pour tout $s \leq t$ la variable aléatoire $X_t - X_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$.

ii) X est à accroissement stastionaire si, la loi de variable aléatoire $X_t - X_s$ pour $s \leq t$, ne dépend que de $t - s$ i.e)

$$X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0 \quad \forall 0 \leq s \leq t.$$

Définition 1.1.16 *Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ un processus stochastique, on appelle variation infinitésimal associé à une subdivision $\pi_n = (t_1^n, t_2^n, ..., t_n^n)$ de l'intervalle $[0, T]$ par*

$$V_T^p(\pi_n) := \sum_{i=1}^{n} \mid X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \mid^p$$

Si $V_T^p(\pi_n)$ a une limite dans un certain sens lorsque

$$\| \pi_n \|_\infty := \max_n \mid t_{i+1}^n - t_i^n \mid \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

la limite ne dépend pas de la subdivision choisie, on l'appelle variation d'ordre p de X sur $[0, T]$.

- Si $p = 1$, la limite s'appelle variation totale de X sur $[0, T]$.
- Si $p = 2$, la limite s'appelle variation quadratique de X sur $[0, T]$ noteé $\langle X, X\rangle_T = \langle X\rangle_T$.

1.1.3 Processus de Markov

Définition 1.1.17 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ une base stochastique, et soit $X = (X_t)_{t\in T}$, $X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ un processus stochastique on dit que X est un processus de Markov si X est adapté et pour tout $s, t \geq 0$ et $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ on a que :*

$$\mathbb{P}(X_{s+t} \in B/\mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_{s+t} \in B/\sigma(X_s)). \qquad \textit{Presque sûre.}$$

1.1.4 Mouvement Brownien

Définition 1.1.18 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ *une base stochastique et* $\omega = (\omega_t)_{t\in T}$ *un processus stochastique, on appelle* ω *est un mouvement brownien si et seulement si :*

i) ω *est* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *−adapté à trajectoire continue* $\mathbb{P}$*.p.s.*

ii) ω *est à accroissements indépendants i.e)* $\forall 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n \leq s \leq t < \infty$, *la variable aléatoire* $\omega_t - \omega_s$ *indépendante de* $\mathcal{F}_s^{\omega} := \sigma(\omega_u, u \leq s)$.

iii) ω *est à accroissements stationnaire i.e)* $\forall 0 \leq s \leq t < \infty$, *on a :* $\omega_t - \omega_s \sim \aleph(0, t-s)$.

Remarque 1.1.8 *Si* $\omega_0 = 0$ $\mathbb{P}$*.p.s. dans ce cas le mouvement brownien est dit mouvement brownien standard* $(\omega_t \sim \aleph(0,t))$.

Définition 1.1.19 *On appelle mouvement brownien dans* $\mathbb{R}^d$, *un vecteur* $\left(\omega^1, \omega^2, ..., \omega^d\right)$ *où les* ω^i *sont des mouvements browniens réels indépendants.*

Remarque 1.1.9 *La variation quadratique d'un mouvement brownien existe dans* $L^2(\Omega)$, $\langle \omega, \omega \rangle_T = T$.

1.1.5 Processus de Poisson

Définition 1.1.20 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ *une base stochastique et* $N = (N_t)_{t\in T}$ *un processus stochastique, on appelle* N *est un processus de poisson avec intensité* λ *si vérifier :*

i) N *est un processus càdlàg (continue à droite et limité à gauche).*

ii) N *est à accroissement indépendante de* $\mathcal{F}_s^N := \sigma(N_u, u \leq s)$.

iii) $N_t - N_s$ *ont des loi de poisson avec paramétre* $\lambda(t-s)$ *i.e)*

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = k) = \frac{(\mu)^k}{k!} e^{-\mu}$$

où $\mu = \lambda(t-s)$.

Propriété 1.1.2 *1. Un processus de poisson est à accroiossements stationnaires.*

2. *Un processus de poisson est localement continu en probabilité.*

Le mouvement brownien et le processus de Poisson sont deux représentant d'une classe plus vaste de processus dit de **Lévy** (processus càdlàg à accroissements indépendants et stationnaires).

1.1.6 Espérance conditionnelle

Définition 1.1.21 *Soit X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, intégrable $(\mathbb{E}[|X|] < \infty)$ et soit $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, on appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$ et on note $\mathbb{E}[X/\mathcal{G}]$, qui satisfait les deux conditions suivants :*

i) $\mathbb{E}[X/\mathcal{G}]$ *est $\mathcal{G}$-mesurable.*

ii) $\forall A \in G$, *on a* $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X/\mathcal{G}]\, d\mathbb{P}$.

Propriété 1.1.3

1. $\mathbb{E}[X/\{\varnothing, \Omega\}] = \mathbb{E}[X]$.
2. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{F}]] = \mathbb{E}[X]$.
3. *Si X est $\mathcal{F}$-mesurable, alors* $\mathbb{E}[X/\mathcal{F}] = X$.
4. *Si X est indépendante de $\mathcal{F}$, alors* $\mathbb{E}[X/\mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$.
5. *Linéarité : pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[\lambda X + Y/\mathcal{F}] = \lambda\mathbb{E}[X/\mathcal{F}] + \mathbb{E}[Y/\mathcal{F}]$.
6. *positivité : si* $X \geq 0$, *alors* $\mathbb{E}[X/\mathcal{F}] \geq 0$.
7. *Monotonie : si* $X \leq Y$, *alors*$\mathbb{E}[X/\mathcal{F}] \leq \mathbb{E}[Y/\mathcal{F}]$.
8. *Si Y variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable, alors* $\mathbb{E}[XY/\mathcal{F}] = Y\mathbb{E}[X/\mathcal{F}]$.
9. *Soient $\mathcal{G}$,$\mathcal{H}$ deux sous tribus de $\mathcal{F}$ si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, alors* $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{G}]/\mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{H}]/\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X/\mathcal{H}]$.
10. *Lemme de* ***Fatou*** *: Si les $(X_n)_n$ intégrable et positives, alors :*$\mathbb{E}\left[\underline{\lim}_n X_n / \mathcal{F}\right] \leq \underline{\lim}_n \mathbb{E}[X_n / \mathcal{F}]$.
11. *(* ***Inégalité de Jensen conditionnelle*** *) : Si une ϕ fonction convexe alors :* $\phi[\mathbb{E}(X / \mathcal{F})] \leq \mathbb{E}[\phi(X) / \mathcal{F}]$.

1.1.7 Notions de convergence

Définition 1.1.22 *Soient X et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,*

1. *On dit que X_n converge presque sûrement vers X si,*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

2. *Si $p > 0$, on dénote par $L^P(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'ensemble des variables aléatoires X telle que $E(|X|^p) < +\infty$, si X_n, $X \in L^p$, on dit que X_n converge dans L^P vers X si,*

$$\lim_{n\to+\infty} E(|X_n - X|^p) = 0.$$

3. *On dit que X_n converge en probabilité vers X si,*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) = 0, \forall\varepsilon > 0.$$

Proposition 1.1.2 – *La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.*

– *La convergence dans L^p implique la convergence en probabilité.*

– *La convergence dans L^p implique la convergence dans L^q pour tout $q < p$.*

– *Si $X_n \longrightarrow X$ presque sûrement et $\mid X_n \mid \leq Y$ $\forall n$ avec $Y \in L^p$, alors $X_n \longrightarrow X$ dans L^p.*

Théorème 1.1.1 (Fatou)

$$\mathbb{P}\left(\liminf_n A_n\right) \leq \liminf_n \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_n \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_n A_n\right).$$

Théorème 1.1.2 (Borel-contelli)

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\limsup_n A_n\right) = 0.$$

1.1.8 Théorémes de passage à la limite

Proposition 1.1.3 *(**Convergance monotone**)Si* $X_n \geq 0$ *est une suite croissante de v.a. réelles qui converce p.s vers* X, *alors*

$$\mathbb{E}\left[X_n \diagup \mathcal{G}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[X \diagup \mathcal{G}\right].$$

Théorème 1.1.3 *(**Convergance dominée**)Si* $X_n \longrightarrow X$ *et si* $\exists Z$ *intégrable tel que pour tout* n *on a* $|X_n| \leq Z$ *alors :*

$$\mathbb{E}\left[X_n \diagup \mathcal{G}\right] \longrightarrow \mathbb{E}\left[X \diagup \mathcal{G}\right].$$

1.1.9 Temps d'arrêt

Définition 1.1.23 *Un temps d'arrêt* T *est une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *telle que pour tout* $n \geq 0$

$$\{\omega \diagup T(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Proposition 1.1.4 *soient* S *et* T *des temps d'arrêt, alors* $S+T$, $\sup\{S,T\}$ *et* $\inf\{S,T\}$ *sont temps d'arrét.*

En particulier : $T+k$, $\sup\{T,k\}$ *et* $\inf\{T,k\}$ *sont temps d'arrét,* $\forall k \in \mathbb{N}$.

– *Si* $S \leq T$ *alors,* $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

– *Soit* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *une suite de temps d'arrêt alors,* $\sup_n T_n$ *et* $\inf_n T_n$ *sont deux temps d'arrét.*

Définition 1.1.24 *Etant donné un processus* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de variables aléatoires adaptées et* T *un T.A.on appelle **processus arrêté** à l'instant* T *la suite définie par :* $\forall \omega \in \Omega$

$$X_n^T(\omega) = X_{T(\omega)\wedge n} = X_n 1_{\{n<T(\omega)\}} + X_T 1_{\{n \geq T(\omega)\}}.$$

Remarque 1.1.10 *L'application* $T : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ *est appelée **temps optionnel** par rapport à la filtration* $\mathcal{F}$ *si* $\{\omega \diagup T(\omega) < n\} \in \mathcal{F}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.1.25 *On appelle tribu des évenements interieur à T et on note $\mathcal{F}_T$ la tribu :*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}, \forall n \geq 0, A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

1.2 Intégrabilité uniforme

Définition 1.2.1 *Une famille $(X_i)_i$de variables aléatoires est dite uniformément intégrable si,*

$$\lim_{M \to +\infty} (\sup_i \mathbb{E}[|X_i| \, 1_{\{|X_i| > M\}}]) = 0.$$

une telle famille est nécessairement bornée dans L^1.

Théorème 1.2.1 *Si $X_n \longrightarrow X$ en probabilité, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *La famille $(X_n)_{n \geq 0}$ est uniformément intégrable.*

ii) $X_n \longrightarrow X$ *dans* L^1.

iii) $\mathbb{E}[|X_n|] \longrightarrow \mathbb{E}[|X|]$.

Chapitre 2

Martingales et Semi martingale

En calcul stochastique, une martingale designe un type de processus stochastique, ce type de processus X, est telque sa valeur espéré connaissant l'information disponible à une certaine date s, dénotée $\mathcal{F}_s$ est la valeur à cette même date : $\mathbb{E}\left[X_t/\mathcal{F}_s\right] = .X_s$ Dans cet chapitre on étude les différents types des martingales.

2.1 Martingale

Définition 2.1.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité muni d'une filtration* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$. *Un processus à valeurs réelles* $X = (X_t)_{t\in I}$ *est une* $\mathcal{F}$*-matingale si :*

- *Il est adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$, *ce qui veut dire que pour tout* $t \in I$, X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*
- *Chaque variable* X_t *est intégrable, et pour tout* $(s,t) \in I \times I$ *avec* $s \leq t$ *alors,*

$$X_s = \mathbb{E}\left[X_t/\mathcal{F}_s\right].$$

On dit que X *est une* $\mathcal{F}$*-surmartingale (resp une* $\mathcal{F}$*-sousmartingale) si l'égalité ci dessus est remplacée par :* $X_s \geq \mathbb{E}\left[X_t/\mathcal{F}_s\right]$ *(resp* $X_s \leq \mathbb{E}\left[X_t/\mathcal{F}_s\right]$*).*

***)** *Si* $I \subseteq \mathbb{N}$ *on dit que la martingale au temp discret.*

***)** *Si $I \subseteq \mathbb{R}_+$ on dit que la martingale au temp continue.*

Remarque 2.1.1 *La condition ii) est équivalente à $\mathbb{E}\left[X_t - X_s/\mathcal{F}_s\right] = 0$ car résultat X_s est connu, ou bien*

$$\forall A \in \mathcal{F}_s, \quad \mathbb{E}\left[X_t 1_A\right] = \mathbb{E}\left[X_s 1_A\right].$$

Exemple 2.1.1 (Martingale fermée) *Si $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on pose : $X_n = \mathbb{E}\left[X/\mathcal{F}_n\right]$ alors $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.*
En effet : le processus est adapté et intégrable, et on a $\forall n \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X/\mathcal{F}_{n+1}\right]/\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X/\mathcal{F}_n\right] \\
&= X_n.
\end{aligned}$$

Exemple 2.1.2 (Marche aléatoire sur $\mathbb{R}$) *Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi μ, telle que $\mathbb{E}\left[|Y_1|\right] < +\infty$. On pose : $X_0 = x$ et $X_n = x + Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ si, $n \geq 1$.*
On définit aussi la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\{\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ si, $n \geq 1\}$ alors, $(X_n)_{n\geq 0}$ est

$$\left\{\begin{array}{c}
\text{une martingale si } \mathbb{E}\left[Y_1\right] = 0. \\
\text{une sur-martingale si } \mathbb{E}\left[Y_1\right] \leq 0. \\
\text{une sous-martingale si } \mathbb{E}\left[Y_1\right] \geq 0.
\end{array}\right\}$$

Exemple 2.1.3 *Soit $(N_t)_{t\geq 0}$une processus de poisson de paramétre λ ,alors $(N_t)_{t\geq 0}$ est une sous-martingale par rapport à la filtration naturelle de N et le processus $(N_t - \lambda t)$ est une martingale par rapport à la filtration naturelle.*
les deux processus sont bien évidement adaptés et intégrables et on a $\forall 0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E}\left[N_t - N_s/\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[N_t - N_s\right] = \lambda(t-s) \geq 0.$$

et on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(N_t - \lambda t)/\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[((N_t - N_s + N_s) - \lambda t)/\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(N_t - N_s)/\mathcal{F}_s\right] + N_s - \lambda t \\
&= \lambda (t - s) + N_s - \lambda_t \\
&= N_s - \lambda t.
\end{aligned}$$

2.1.1 Propriétés

1. Le processus X est une martingale si et seulement si, elle à la fois une sous-martingale et une sur-martingale.

2. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq m$, $\mathbb{E}\left[X_m/\mathcal{F}_n\right] = X_n$.

En effet :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_m/\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X_m/\mathcal{F}_{m-1})/\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_{m-1}/\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X_{m-1}/\mathcal{F}_{m-2})/\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_{m-2}/\mathcal{F}_n\right] \\
&\vdots \\
&= \mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] = X_n.
\end{aligned}$$

-Si $m \leq n$, $\mathbb{E}\left[X_m/\mathcal{F}_n\right] = X_m$.

3. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathcal{F}$-martingale (resp $\mathcal{F}$-surmartingale, $\mathcal{F}$-sous martingale) alors, la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante (resp décroissante, croissante). En effet : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] = X_n \quad &\Longrightarrow \quad \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X_{n+1}/\mathcal{F}_n]\right] = \mathbb{E}\left[X_n\right] \\
&\Longrightarrow \quad \mathbb{E}\left[X_{n+1}\right] = \mathbb{E}\left[X_n\right].
\end{aligned}$$

2.1.2 Transformées de martingales

Proposition 2.1.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires adaptée telles que $\mathbb{E}\left[|f(X_n)|\right] < \infty$.*

• Si $(X_n)_n$ est une martingale, alors $f(X_n)$ est une sous-martingale.

• Si $(X_n)_n$ est une sous-martingale et f croissante, alors $f(X_n)$ est une sous-martingale.

Preuve. On a par Jensen

$$\mathbb{E}\left[f(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\right] \geq f(\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]) = f(X_n)$$

si $(X_n)_n$ est une martingale. De même,

$$f(\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]) \geq f(X_n).$$

■

Proposition 2.1.2 *Soit (X_n) une suite adaptée de variables $L^1(\Omega)$ et $(H_n)_n$ une suite prévisible bornée. On définit $(H.X)_0 = 0$ et pour tout $n > 0$,*

$$(H.X)_n = H_1(X_1 - X_0) + H_2(X_2 - X_1) + ... + H_n(X_n - X_{n-1})$$

(On peut voir H comme une mise et $X_n - X_{n-1}$ comme un gain.) Alors :

• Si $(X_n)_n$ est une martingale, $(H.X)_n$ aussi.

• Si $(H_n)_n$ est positive, et $(X_n)_n$ une sur/sous-martingale alors $(H.X_n)_n$ est une sur/sous-martingale.

Preuve. Comme $(H_n)_n$ est bornée, $(H.X)_n$ est $L^2(\Omega)$. Elle est aussi bien adaptée. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(H.X)_{n+1} - (H.X)_n|\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[H_{n+1}(X_{n+1} - X_n))|\mathcal{F}_n\right] \\ &= H_{n+1}\mathbb{E}\left[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n\right] = 0.\end{aligned}$$

■

Proposition 2.1.3 ***(Décomposition de Doob)****toutes $\mathcal{F}$-sous martingales $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit de façon unique se la forme :*

$$X_n = M_n + A_n.$$

Où : $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathcal{F}$-martingale et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus croissante et prévisible t.q : $A_0 = 0$.

Preuve. Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $\mathcal{F}$-sous martingale, on définit $A_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_{n+1} = A_n + \mathbb{E}\left[(X_{n+1} - X_n)/\mathcal{F}_n\right].$$

Par construction, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$est un processus croissante et prévisible car $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1}$est $\mathcal{F}_n-$mesurable et

$$A_{n+1} - A_n = \mathbb{E}\left[(X_{n+1} - X_n)/\mathcal{F}_n\right] \geq 0.$$

de plus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[(X_{n+1} - A_{n+1})/\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] - A_{n+1} \\
&= \mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] - A_n - \mathbb{E}\left[(X_{n+1} - X_n)/\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] - A_n - \mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] + X_n \\
&= X_n - A_n \\
&= M_n.
\end{aligned}$$

On va montrer l'unicité : La décomposition est unique car : si, $X_n = M_n + A_n = M'_n + A'_n$,on a : $A_0 = A'_0 = 0$ et

$$\begin{aligned} A'_{n+1} - A'_n &= \left(X_{n+1} - M'_{n+1}\right) - \left(X_n - M'_n\right) \\ &= \left(X_{n+1} - X_n\right) - \left(M'_{n+1} - M'_n\right). \end{aligned}$$

Et

$$A_{n+1} - A_n = \left(X_{n+1} - X_n\right) - \left(M_{n+1} - M_n\right).$$

D'où, en conditionnant par $\mathcal{F}_n$

$$\mathbb{E}\left[A'_{n+1} - A'_n/\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[X_{n+1} - X_n/\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[A_{n+1} - A_n/\mathcal{F}_n\right].$$

Donc $\quad A'_{n+1} - A'_n = A_{n+1} - A_n$ d'où $A'_n = A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et par suite $M'_n = M_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$M_n = X_n - A_n \ , \ M'_n = X_n - A_n.$$

■

Proposition 2.1.4 *Soit* $(X_t)_{t>0}$ *une sous-martingale ou une surmartingale. Alors pour tout* $t > 0$*,*

$$\underset{0<s<t}{sup}\, \mathbb{E}[|X_s|] < \infty.$$

Preuve. Il suffit bien sûr de traiter le cas où $(X_t)_{t>0}$ est une sous-martingale. Puisque $(X_t)_{t>0}$ est une sous-martingale $(X_t)^+$aussi , on a pour tout $s \in [0, t]$,

$$\mathbb{E}[(X_s)^+] \leq \mathbb{E}[(X_t)^+].$$

D'autre part, puisque X est une sous-martingale on a aussi pour $s \in [0, t]$,

$$\mathbb{E}[X_s] \geq \mathbb{E}[X_0].$$

En combinant ces deux inégalités, et en remarquant que $|x| = 2x^+ - x$, on trouve

$$\sup_{s\in[0,t]} \mathbb{E}\left[|X_s|\right] \leq 2\mathbb{E}\left[(X_t)^+\right] - \mathbb{E}\left[X_0\right] < \infty.$$

d'où le résultat voulu. ■

2.2 Théorèmes d'arrêts

Théorème 2.2.1 (Théorème d'arrêt pour un temps d'arrêt borné) *Soient $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale(resp sous martingale, sur martingale) par rapport $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et T un temps d'arrêt borné alors,*

$$\mathbb{E}\left[X_T\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right] \quad (resp\ \mathbb{E}\left[X_T\right] \geq \mathbb{E}\left[X_0\right], \mathbb{E}\left[X_T\right] \leq \mathbb{E}\left[X_0\right]).$$

Preuve. *comme T est borné, il existe $M \geq 1$ tel que $0 \leq T \leq M$ d'où $X_{T\wedge M} = X_T$*

$$X_T = X_{T\wedge M} = X_0 + \sum_{k=0}^{M-1} 1_{\{k<T\}}\left(X_{k+1} - X_k\right).$$

Or,pour chaque $k = 0, 1, ..., M-1$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[1_{\{k<T\}}\left(X_{k+1} - X_k\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[1_{\{k<T\}}\left(X_{k+1} - X_k\right)/\mathcal{F}_k\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[1_{\{k<T\}}\mathbb{E}\left[\left(X_{k+1} - X_k\right)/\mathcal{F}_k\right]\right].\end{aligned}$$

Maintenant, si X est une martingale (resp sous-martingale, sur-martingale), on a

$$\mathbb{E}\left[\left(X_{k+1} - X_k\right)/\mathcal{F}_k\right] = 0 \quad (resp \geq 0, resp \leq 0).$$

d'où

$$\mathbb{E}\left[1_{\{k<T\}}\left(X_{k+1} - X_k\right)\right] = 0 \quad (resp \geq 0, resp \leq 0).$$

par suite,

$$\mathbb{E}\left[X_T\right] = E\left[X_0\right] + \sum_{k=0}^{M-1} \mathbb{E}\left[1_{\{k<T\}}\left(X_{k+1} - X_k\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[X_0\right] \quad (resp \geq \mathbb{E}\left[X_0\right], resp \leq \mathbb{E}\left[X_0\right]).$$

■

Théorème 2.2.2 (Théorème d'arrêt pour les martingales dominées) *Soient $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $\mathcal{F}$-martingale, et T un temps d'arrêt on suppose, de plus que*
a) $\mathbb{P}\left(\{T < +\infty\}\right) = 1.$
b) $\mathbb{E}\left[\sup\limits_{n\geq 0} |X_{T\wedge n}|\right] < +\infty.$
Alors $\mathbb{E}\left[|X_T|\right] < +\infty$ *et* $\mathbb{E}\left[X_T\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right].$

Preuve. Comme $T \wedge n$ est un temps d'arrêt borné, d'aprés la théorème précédente le processus arrêté $(X_{T\wedge n})$ implique $\mathbb{E}\left[X_{T\wedge n}\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right]$. Pour démontrer le théorème, il suffit de prover que $\mathbb{E}\left[X_{T\wedge n}\right] \longrightarrow \mathbb{E}\left[X_T\right]$ et que X_T est intégrable.
La condition (a) implique que l'on a : $X_{T\wedge n} \longrightarrow X_T$ quand $n \longrightarrow +\infty$.En générale,ce résultat n'implique pas nécessairement que l'on a :$\mathbb{E}\left[X_{T\wedge n}\right] \longrightarrow \mathbb{E}\left[X_T\right]$.Ceci est pourtant vrai ici, mais pour des raisons bien préciser que l'on détaille ci-aprés. posons $Z := \sup\limits_{n\geq 0} |X_{T\wedge n}|$. D'aprés la condition (b), cette variable aléatoire, évidemment positive, est intégrable et naturellement, pour tout $n \geq 0$, on a : $| X_{T\wedge n}| \leq Z$. Les conditions d'aplication du théorème de convergence dominée de Lebesgue sont satisfaites. On peut donc conclure que X_T est intégrable et que $\mathbb{E}\left[X_{T\wedge n}\right] \longrightarrow \mathbb{E}\left[X_T\right]$, lorsque n tend vers l'infini. ■

Théorème 2.2.3 *Soit $(X_t)_{t\in I}$ une sous-martingale positive indéxée par $I \subset \mathbb{R}_+$. Et on note par J l'ensemble des T.A. prenant leurs valeurs dans un sous-ensemble fini de I. Alors la famille $\{X_\tau, \tau \in J\}$ est uniformement intégrable.*

2.3 Théorème de convergence des martingales réelles dans $L^p\,(p \geq 1)$

Théorème 2.3.1 (La convergence dans L^1) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)$-martingale, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *(X_n) est uniformément intégrable.*

ii) *Il existe v.a.r.intégrable X telle que $X_n = \mathbb{E}\left[X \diagup \mathcal{F}_n\right]$ p.s pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

iii) *$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ vers une v.a. X_∞.*

Théorème 2.3.2 *Soient $p \in]1,\infty[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale positive, possédant la propriété suivante :*

(i) $\sup\limits_n \mathbb{E}\left[|X_n|^p\right] < \infty$. Alors $\sup\limits_n X_n \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ et on a :

$$\left\|\sup_n X_n\right\|_p \leq \frac{p}{p-1}\left\|X_\infty\right\|_p \leq \frac{p}{p-1}\sup_n \left\|X_n\right\|_p .$$

Preuve. On a $\sup\limits_n \mathbb{E}\left[|X_n|\right] \leq \sup\limits_n \left(\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. (Hôlder). Alors la sous-martingale (X_n) converge p.s. vers une v.a. X_∞, et le lemme de Fatou en trouve que :

$$\mathbb{E}\left[|X_\infty|^p\right] \leq \liminf_n \mathbb{E}\left[|X_n|^p\right] \leq \sup_n \mathbb{E}\left[|X_n|^p\right] = \sup_n \left\|X_n\right\|_p .$$

$$\Longrightarrow \left\|X_\infty\right\|_p \leq \sup_n \left\|X_n\right\|_p .$$

La propriété (i) entraîne l'uniforme intégrabilité de (X_n), (car $\sup\limits_n \mathbb{E}\left[|X_n|\right] < \infty$), par suite on a la convergence dans L^1 et $(X_n)_{n\in\bar{\mathbb{N}}}$ est une sous-martingale.

On pose $X^* = \sup\limits_n X_n$et on désigne par μ sa loi $(\mu(A) = \mathbb{P}(\{X^* \in A\})$ probabilitéportéepar $\mathbb{R}^+)$ .D'aprés une des inégalités de Doob on a :

$$\alpha \mathbb{P}(\{X^* > \alpha\}) \leq \int_{\{X^* > \alpha\}} X_\infty d\mathbb{P} \quad \forall \alpha > 0 \tag{2.1}$$

On a aussi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(X^*)^p\right] &= \int_0^{\infty} y^p \mu\left(dy\right) = \int_0^{\infty}\left(\int_0^y p\zeta^{p-1}d\zeta\right)\mu\left(dy\right)\\ &= \iint\limits_D p\zeta^{p-1}d\zeta\mu\left(dy\right).\end{aligned}$$

Où $D = \{(\zeta, y), 0 \leq \zeta \leq y \leq \infty\}$. En utilissant le théorème de Fubini et l'inégalité (2.1) ,on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(X^*)^p\right] &= \int_0^{\infty}\left(\int_{\zeta}^{\infty} p\zeta^{p-1}\mu\left(dy\right)\right)d\zeta\\ &= \int_0^{\infty} p\zeta^{p-1}\mu\left(]\zeta,\infty[\right)d\zeta\\ &= \int_0^{\infty} p\zeta^{p-1}\mathbb{P}\left(\{X^* > \zeta\}\right)d\zeta\\ &\leq \int_0^{\infty} p\zeta^{p-2}\left(\int_{\{X^*>\zeta\}} X_{\infty}d\mathbb{P}\right)d\zeta = I.\end{aligned}$$

D'aoprés Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}I &= \int_{\Omega} X_{\infty}\left(\int_0^{X^*} p\zeta^{p-1}d\zeta\right)d\mathbb{P}\\ &= \int_{\Omega} X_{\infty}\frac{p}{p-1}\left[\zeta^{p-1}\right]_0^{X^*}d\mathbb{P}\\ &= \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\left[X_{\infty}\left(X^*\right)^{p-1}\right].\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbb{E}\left[(X^*)^p\right] \leq \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\left[X_{\infty}\left(X^*\right)^{p-1}\right].$$

En utilisant l'inégalité de Hôlder $\left(\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}\right)$ on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_{\infty}\left(X^*\right)^{p-1}\right] &\leq \left\|X_{\infty}\right\|_p\left(\mathbb{E}\left[\left(X^*\right)^{p-1}\right]^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \left\|X_{\infty}\right\|_p\left(\mathbb{E}\left[(X^*)^p\right]\right)^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

Et en multipliant le premier et le dernier membre par $\left(\mathbb{E}\left[(X^*)^p\right]\right)^{\frac{p-1}{p}}$ on obtient :

$$\left(\mathbb{E}\left[(X^*)^p\right]\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \left\|X_\infty\right\|_p .$$

■

2.4 Processus à variations bornées

2.4.1 Fonctions a variation fnie

Définition 2.4.1 *Soit $T > 0$. Une fonction continue $F : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$ est dite à variation finie s'il existe une mesure signée. (ie : diférence de deux mesures positives finies) μ telle que $F(t) = \mu([0,t])$ pour tout $t \in [0,T]$. La mesure est alors déterminée de façon unique : l'expression $\mu(]s,t]) = F(t) - F(s)$ la détermine uniquement sur la famille des intervalles $]s,t]$ puis, par un argument de classe monotone, sur $\mathcal{B}([0,T])$. De plus, F étant continue, μ est sans atome.(ie : $\mu(\{t\}) = 0$ pour tout $t \in [0,T]$).*

Proposition 2.4.1 *Il existe une seule décomposition $\mu{=}\mu_+ - \mu_-$ minimale dans le sens où μ_+ et μ_- sont deux mesures positives finies portées par des boréliens disjoints. Il s'agit de la décomposition canonique de μ.*

Proposition 2.4.2 *Une fonction F est à variation finie ssi F est diférence de deux fonctions croissantes continues nulles en 0.*

Preuve. Si F est à variation finie, $F(t) = ([0,t])$ et avec la décomposition canonique de μ de la Proposition (2.4.1), F est diférence de deux fonctions croissantes continues et nulles en 0 : $F(t) = \mu_+([0,t]) - \mu_-([0,t])$ (si μ_+ et μ_- ont des atomes, ils doivent nécessairement coïncider pour s'annuler (μ n'en ayant pas). Mais comme μ_+ et μ_- sont censés avoir des supports disjoints, c'est que de tels atomes n'existent pas : μ_+ et μ_- sont bien sans atome. Réciproquement, si $F = F_1 - F_2$ avec F_1, F_2 fonctions croissantes continues et nulles en 0 alors on associe μ_1 et μ_2 des mesures positives finies a F_1, F_2 et F s'écrit alors $F(t) = ([0,t])$ pour la mesure signée $\mu = \mu_1 - \mu_2$. ■

Proposition 2.4.3 *(**Variation finie ou bornée**) Pour tout t∈[0,T], on a :*

$$|\mu|([0,t]) = \sup_{\{t_i\}_{1\leq i\leq n}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |F(t_i) - F(t_{i-1})| \right\}$$

où le supremum porte sur toutes les subdivisions $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = t$ de $[0,t]$.

2.4.2 Processus à variation finie

Définition 2.4.2 *Un processus à variation finie $V = (V_t)_{t\geq 0}$ est un processus adapté dont toutes les trajectoires sont à variation finie au sens de la Définition* (2.4.1)*.*

2.5 Martingales de carré intégrables et variations quadratiques

Définition 2.5.1 *La martingale continue M est dite de carré intégrable (ou martingale L^2) si pour chaque t, $M_t \in L^2$.*

propriétés des martingale $\mathbf{L}^2$:

1. $(M_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale.
2. Les accroissements $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$ de toute martingales de carré intégrable $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non corrélés, c-à-d orthogonaux dans L^2.

Théorème 2.5.1 (Inégalité de Kolmogorov pour les martingales $\mathbf{L}^2$) *Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une martingale L^2, on a : chaque $n \geq 1$*

$$\mathbb{P}(\max(|M_1|, \ |M_2|, ..., \ |M_n|) \geq \theta) \leq \frac{\mathbb{E}[M_n^2]}{\theta^2}.$$

Preuve. *Soit* $T = \inf\{k \in \mathbb{N}^*, \ |M_k| \geq \theta\}$ *c'est un temps d'arrêt, et par l'inégalité de Markov*

$$\mathbb{P}(\max(|M_1|, \ |M_2|, ..., \ |M_n|) \geq \theta) = \mathbb{P}(\{|M_{T\wedge n}| \geq \theta\}) \leq \frac{\mathbb{E}\left[M_{T\wedge n}^2\right]}{\theta^2}.$$

Or $T \wedge n$ *est un T.A. et* $T \wedge n \leq n$. *Et donc par le théorème d'arrêt de Doob,* $M_{T\wedge n} = \mathbb{E}[M_n / \mathcal{F}_{T\wedge n}]$ *et comme* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une martingale* L^2, $M_{T\wedge n}$ *l'est aussi et donc :*

$$\mathbb{E}\left[M_{T\wedge n}^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_n^2 / \mathcal{F}_{T\wedge n}\right]\right] = \mathbb{E}\left[M_n^2\right] < +\infty.$$

D'où on obtient le résultat chercher

$$\mathbb{P}(\max(|M_1|, \ |M_2|, ..., \ |M_n|) \geq \theta) \leq \frac{\mathbb{E}\left[M_{T\wedge n}^2\right]}{\theta^2} \leq \frac{\mathbb{E}\left[M_n^2\right]}{\theta^2}.$$

■

2.6 Martingales locales continues

Définition 2.6.1 *Un processus adapté à trajectoires continues* $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tel que* $M_0 = 0$ *p.s. est une martingale locale (continue), s'il existe une suite croissante* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de temps d'arrêt telle que* $T_n \uparrow \infty$ *et pour tout* n, *le processus arrêté* M^{T_n} *est une martingale uniformément intégrable.*
Plus généralement, lorsque $M_0 \neq 0$, *on dit que* M *est une martingale locale si* $M_n = M_0 + N_n$, *où le processus* N *est une martingale locale issue de* 0.
Dans tous les cas, on dit que la suite de temps d'arrêt $T_n \uparrow \infty$ *réduit* M *si, pour tout* n, *le processus arrêté* M^{T_n} *est une martingale uniformément intégrable.*

Propriété 2.6.1 (Propriétés des martingales locales) a) *Une martingale à trajectoires continues est une martingale locale (et la suite* $T_n = n$ *réduit* M*).*

b) *Dans la définition d'une martingale locale issue de* 0 *on peut remplacer "martingale uniformément intégrable" par "martingale" (en effet on peut ensuite remplacer* T_n *par* $T_n \wedge n$*).*

c) *Si* M *est une martingale locale, pour tout temps d'arrêt* T*,* M^T *est une martingale locale.*

d) *Si* (T_n) *réduit* M *et si* S_n *est une suite de temps d'arrêt telle que* $S_n \uparrow \infty$*, alors la suite* $(T_n \wedge S_n)$ *réduit aussi* M*.*

e) *L'espace des martingales locales est un espace vectoriel.*

Proposition 2.6.1 **i)** *Une martingale locale positive* M *telle que* $M_0 \in L^1$ *est une surmartingale.*

ii) *Une martingale locale* M *bornée, ou plus généralement telle qu'il existe une variable* $Z \in L^1$ *telle que, pour tout* $t \geq 0$*,* $|M_t| \leq Z$*, est une martingale (automatiquement uniformément intégrable).*

Preuve. (i) Ecrivons $M_t = M_0 + N_t$. Par définition, il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêt qui réduit N. Alors, si $s \leq t$, on a pour tout n,

$$N_{s\wedge T_n} = \mathbb{E}[N_{t\wedge T_n} / \mathcal{F}_s].$$

En ajoutant des deux côtés la variable M_0 (qui est $\mathcal{F}_0$-mesurable et dans L^1),on trouve

$$M_{s\wedge T_n} = \mathbb{E}[M_{t\wedge T_n} / \mathcal{F}_s].$$

Puisque M est à valeurs positives, on peut faire tendre n vers ∞ et appliquer le lemme de Fatou (pour les espérances conditionnelles) qui donne :

$$M_s \geq \mathbb{E}[M_t / \mathcal{F}_s].$$

En prenant $s = 0$, on voit que $\mathbb{E}[M_t] \leq \mathbb{E}[M_0] < \infty$, donc $M_t \in L^1$ pour tout $t \geq 0$. L'inégalité précédente montre alors que M est une sur-martingale.

ii) Si M est bornée (ou plus généralement dominée par une variable intégrable), le même raisonnement que ci-dessus donne pour $s \leq t$

$$M_{s \wedge T_n} = \mathbb{E}[M_{t \wedge T_n} \diagup \mathcal{F}_s].$$

Or par convergence dominée la suite $M_{t \wedge T_n}$ converge dans L^1 vers M_t, et donc on peut passer à la limite $n \longrightarrow \infty$ pour trouver :

$$M_s = \mathbb{E}[M_t \diagup \mathcal{F}_s].$$

■

Lemme 2.6.1 *La somme de deux martingales locales est une martingale locale.*

Preuve. Si (T_n) réduit la martingale locale M et (S_n) réduit la martingale locale N, alors $(T_n \wedge S_n)$ réduit la somme $M + N$. Car $(T_n \wedge S_n)$ suite croissante de T.A. tendant vers l'infini et $(M + N)^{(T_n \wedge S_n)} = \left(M^{T_n}\right)^{S_n} + \left(N^{S_n}\right)^{T_n}$ est une martingale (puisque $\left(M^{T_n}\right)^{S_n}$ et $\left(N^{S_n}\right)^{T_n}$ sont des martingales). ■

Théorème 2.6.1 *Soit M une martingale locale. Alors si M est un processus à variation finie, M est indistinguable de 0.*

2.6.1 Variation quadratique d'une martingale locale

Théorème 2.6.2 *Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale locale. Il existe un processus croissan continu et adapté noté $(\langle M, M \rangle_t)_{t \geq 0}$, unique (à indistingabilité prés) tel que $M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$,soit une martingale locale. De plus, pour tout $T > 0$, si $0 = t_0^n < t_1^n < .... < t_{p_n}^n =$*

T, est une suite de subdivisions emboîtées de $[0,T]$ de pas tendant vers 0, on a :

$$\langle M,M\rangle_T=\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i=1}^{p_n}\left(M_{t_i^n}-M_{t_{i-1}^n}\right)^2$$

au sens de la convergence en probabilité. Le processus $\langle M,M\rangle$ est appelé ***la variation quadratique*** *de M.*

Propriété 2.6.2 *Si T est un temps d'arrêt on a p.s. pour tout $t\geq 0$,*

$$\left\langle M^T,M^T\right\rangle_t=\langle M,M\rangle_{t\wedge T}$$

Cela découle du fait que $M_{t\wedge T}^2-\langle M,M\rangle_{t\wedge T}$ est une martingale locale comme martingale locale arrêtée.

2.6.2 Crochet de deux martingales locales

Si M et N sont deux martingales locales, on pose

$$\begin{aligned}\langle M,N\rangle_t&=\frac{1}{2}\left(\langle M+N,M+N\rangle_t-\langle M,M\rangle_t-\langle N,N\rangle_t\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\langle M+N,M+N\rangle_t-\langle M-N,M-N\rangle_t\right).\end{aligned}$$

En particulier, $\langle M,M\rangle=\langle M\rangle$.

Proposition 2.6.2 **i)** *$\langle M,N\rangle$ est l'unique (à indistinguabilité prés) processus à variation fini tel que $M_tN_t-\langle M,N\rangle_t$ soit une martingale locale.*

ii) *L'application $(M,N)\longrightarrow\langle M,N\rangle$ est bilinéaire symétrique.*

iii) *Si $0=t_0^n<t_1^n<...<t_{p_n}^n=t$ est une suite de subdivisions emboîtées de $[0,t]$, de pas tendant vers 0, on a :*

$$\langle M,N\rangle_t=\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i=1}^{p_n}\left(M_{t_i^n}-M_{t_{i-1}^n}\right)\left(N_{t_i^n}-N_{t_{i-1}^n}\right)$$

en probabilité.

iv) *Pour tout temps d'arrêt T,*

$$\left\langle M^T, N^T \right\rangle_t = \left\langle M^T, N \right\rangle_t = \langle M, N \rangle_{t \wedge T} .$$

Preuve. (i)découle de la caractérisation analogue dans le Théorème (2.6.2) (et l'unicité découle du Théorème (2.6.1)). (iii) est de même une conséquence de l'assertion analogue dans le Théorème (2.6.2)). (ii) découle de (iii). Ensuite, on peut voir (iv) comme une conséquence de la propriété (iii), en remarquant que cette propriété entraîne, pour tous $0 \leq s \leq t$,

$$p.s. \left\langle M^T, N^T \right\rangle_t = \left\langle M^T, N \right\rangle_t = \langle M, N \rangle_t \quad \text{sur } \{T \geq t\} .$$

$$\left\langle M^T, N^T \right\rangle_t - \left\langle M^T, N^T \right\rangle_s = \left\langle M^T, N \right\rangle_t - \left\langle M^T, N \right\rangle_s = 0 \quad \text{sur } \{T \leq s \leq t\} .$$

■

Définition 2.6.2 *Deux martingales locales M et N sont dites orthogonales si $\langle M, N \rangle = 0$, ce qui équivaut à dire que le produit MN est une martingale locale.*

2.7 Semimartingales continues

Définition 2.7.1 *Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est une semimartingale continue s'il s'écrit sous la forme :*

$$X_t = M_t + V_t.$$

Où M est une martingale locale et V est un processus à variation finie.
La décomposition ci-dessus est unique à indistinguabilité prés, toujours à cause du Théorème (2.6.1).

Si $Y_t = M'_t + V'_t$ *est une autre semimartingale continue on pose par définition :*

$$\langle X, Y\rangle_t = \langle M, M'\rangle_t .$$

En particulier,

$$\langle X, X\rangle_t = \langle M, M\rangle_t .$$

Proposition 2.7.1 *Soit* $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n = t$ *une suite de subdivisions emboîtées de* $[0, t]$ *de pas tendant vers* 0. *Alors,*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right)\left(Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}\right) = \langle X, Y\rangle_t . \qquad \textit{En probabilité.}$$

Preuve. Pour simplifier, traitons seulement le cas où $X = Y$. Alors,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(V_{t_i^n} - V_{t_{i-1}^n}\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\left(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}\right)\left(V_{t_i^n} - V_{t_{i-1}^n}\right).$$

On sait déjà Théorème(2.6.2) que :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}\right)^2 = \langle M, M\rangle_t = \langle X, X\rangle_t .$$

En probabilité. D'autre part :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(V_{t_i^n} - V_{t_{i-1}^n}\right)^2 &\leq \left(\sup_{1\leq i\leq p_n}\left|V_{t_i^n} - V_{t_{i-1}^n}\right|\right)\sum_{i=1}^{n}\left|V_{t_i^n} - V_{t_{i-1}^n}\right| \\ &\leq \left(\int_0^t |dV_s|\right)\sup_{1\leq i\leq p_n}\left|V_{t_i^n} - V_{t_{i-1}^n}\right| .\end{aligned}$$

qui tend vers 0 $p.s.$ quand $n \longrightarrow \infty$ par continuité de la fonction $s \longrightarrow Vs$ et $\int_0^t |dV_s|$ est bornée (processus a variation bornée) Le même raisonnement montre que :

$$\left|\sum_{i=1}^{p_n}\left(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}\right)\left(V_{t_i^n} - V_{t_{i-1}^n}\right)\right| \leq \left(\int_0^t |dV_s|\right)\sup_{1\leq i\leq p_n}\left|M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}\right| .$$

tend vers 0 *p.s.* ■

Proposition 2.7.2 (Inégalité de Kunita-Watanabe) *Soient X, Y deux semimartingales et H, K deux processus localement bornés (pour tout t, $\sup\limits_{s\leq t}|H_s| < \infty$, idem pour K). Alors p.s pour $t \geq 0$*

$$\int_0^{+\infty} |H_s|\,|K_s|\,|d\langle X,Y\rangle_s| \leq \left(\int_0^{+\infty} \left|H_s^2\right| |d\langle X,X\rangle_s|\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} \left|K_s^2\right| |d\langle Y,Y\rangle_s|\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Chapitre 3

Intégrale Stochastique

Beaucoup de phénomènes en finance sont aléatoires et peuvent être caractérisé par les outils de calcul stochastique qui est une extension de calcul différentiel et intégrale classique dans laquelle les processus à temps continue remplacent les fonctions et les martingales jouent le rôle des constantes. Il sert à la fois à construire de nouveau processus ; indispensable notament pour les modèles financiers et certains modèles de l'assurance et à determiner leurs propriétés. Ce chapitre est constitué de deux sections, premièrement en commence par l'intégrale stochastique par rapport è une martingale, deuxièment le cas d'un semimartingale.

3.1 Intégrale stochastique

Définition 3.1.1 *On veut généraliser l'intégrale de* ***Wiener*** *et définir* $\int_0^t \theta_s dB_s$ *pour des processus stochastiques* θ.

Cas de processus étagés On dit qu'un processus θ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_j, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et une suite de variables aléatoires θ_j telles que θ_j soit $\mathcal{F}_{t_j}$ -mesurable, appartienne à $L^2(\Omega)$ et que $\theta_t = \theta_j$ pour tout $t \in]t_j, t_{j+1}]$, soit $\theta_s(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(\omega) 1_{]t_j,t_{j+1}]}(s)$

On définie alors

$$\int_0^\infty \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j \left(B\left(t_{j+1}\right) - B\left(t_j\right)\right)$$

On a $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s dB_s\right] = 0$ et $Var\left[\int_0^\infty \theta_s dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s^2 ds\right]$. On obtient :

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j \left(B\left(t_{j+1} \wedge t\right) - B\left(t_j \wedge t\right)\right).$$

ce qui établit la continuité de l'application $t \to \int_0^t \theta_s dB_s$. Si T_j, $0 \leq T_0 \leq T_1 \leq ... \leq T_n$ est une suite croissante de temps d'arrêt, et si $\theta_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(\omega) 1_{]t_j, t_{j+1}]}(s)$ où θ_j est une suite de variables aléatoires telles que θ_j soit $\mathcal{F}_{T_j}$ -mesurable, appartienne à $L^2(\Omega)$, on définit alors

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j \left(B\left(T_{j+1} \wedge t\right) - B\left(T_j \wedge t\right)\right).$$

Cas général On peut prolonger la définition de l'intégrale de **Wiener** à une classe plus grande de processus. On perd le caractère gaussien de l'intégrale, ce qui est déja le cas pour le cas de processus étagé. On définit les processus càglàd de carré intégrable (appartenant à $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$) comme l'ensemble Γ des processus θ adaptés continus à gauche limités à droite, $(\mathcal{F}_t)$-adaptés tels que

$$\|\theta\|^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_t^2 dt\right] < \infty.$$

Les processus étagés appartiennent à Γ. On dit que θ_n converge vers θ dans $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ si $\|\theta - \theta_n\|^2 \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$.

L'application $\theta \longrightarrow \|\theta\|$ définit une norme qui fait de Γ un espace complet.

On a alors $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s dB_s\right] = 0$ et $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty \theta_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s^2 ds\right]$.

On note $\int_0^t \theta_s dB_s = \int_0^\infty \theta_s 1_{[0,t]}(s) dB_s$. Si θ est étagé $\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_i \theta_i \left(B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}\right)$.

Plus généralement, si τ est un temps d'arrêt, le processus $1_{]0,\tau]}(t)$ est adapté et on définit

$$\int_0^{\tau \wedge t} \theta_s dB_s = \int_0^t \theta_s 1_{]0,\tau]}(s)\, dB_s.$$

Propriétés de L'intégrale stochastique On note Λ l'ensemble $L^2_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ des processus θ adaptés càglàd vérifiant $\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < \infty$, $\forall t$.

1) *Linéarité*

Soit a et b des constantes et $(\theta_i; i = 1, 2)$ deux processus de Λ. On a

$$\int_0^t \left(a\theta_s^1 + b\theta_s^2\right) dB_s = a \int_0^t \theta_s^1 dB_s + b \int_0^t \theta_s^2 dB_s.$$

2) *Propriétés de martingale*

Proposition 3.1.1 *Soit* $M_t = \int_0^t \theta_s dB_s$ *où* $\theta \in \Lambda$.

a) Le processus M *est une martingale à trajectoires continues.*

b) Soit $N_t = \left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds$. *Le processus* $(N_t,\ t \geq 0)$ *est une martingale.*

Preuve. La propriété de martingale s'écrit

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_u dB_u\right) \diagup \mathcal{F}_s\right] = \int_0^s \theta_u dB_u, \quad \forall t \geq s$$

où

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \theta_u dB_u\right) \diagup \mathcal{F}_s\right] = 0$$

et implique en particulier que $\mathbb{E}\left[\int_s^t \theta_u dB_u\right] = 0$.

La propriété $b)$ équivaut à

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \theta_u dB_u\right)^2 \diagup \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \theta_u^2 du\right) \diagup \mathcal{F}_s\right]$$

Si l'on veut définir M_t pour $t \leq T$, il suffit de demander que $\theta \in L^2(\Omega \times [0, T])$, c'est à dire $\mathbb{E}\left[\int_0^T \theta_t^2 dt\right] < \infty$ et que θ soit adapté. Sous cette condition, $(M_t, t \leq T)$ est encore une martingale. ■

Corollaire 3.1.1 *L'espérance de M_t est nulle et sa variance est égale à $\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$.*
Soit $\phi \in \Lambda$.

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)\left(\int_0^t \phi_s dB_s\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s \phi_s ds\right].$$

Si $M_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dB_s$ et $M_t(\phi) = \int_0^t \phi_s dB_s$, le processus

$$M_t(\theta) M_t(\phi) - \int_0^t \theta_s \phi_s ds.$$

est une martingale.

3.1.1 Intégration pour les martingales dans L^2

Définition 3.1.2 (Espace $\mathbf{H}_c^2$) *On note H_c^2 l'espace des martingales M continues bornées dans $L^2(\Omega)$ et telles que $M_0 = 0$.*

On définit alors un produit scalaire sur H_c^2 par $(M, N)_{H_c^2} := \mathbb{E}[\langle M, N\rangle_\infty]$ et on note $\|.\|_{H_c^2}$ la norme sur H_c^2 associée à ce produit scalaire :

$$\|M\|_{H_c^2} = (M, M)_{H_c^2}^{\frac{1}{2}} = \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty]^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 3.1.3 (Espace $L^2(M)$) *Pour $M \in H_c^2$, on note*

$$L^2(M) = L^2\left(\mathbb{R}_+ \times \Omega, Prog, d\mathbb{P} \otimes d\langle M, M\rangle\right).$$

L'espace des processus progressifs $H = (H_s)_{s\geq 0}$ tels que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} H_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right] < +\infty.$$

L'espace $L^2(M)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(H,K)_{L^2(M)} = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} H_s K_s d\left\langle M,M\right\rangle_s\right].$$

Définition 3.1.4 (Processus simple) *On note* **S** *le sous-espace vectoriel de $L^2(M)$ formé des processus H (dits simples) de la forme*

$$H_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}(\omega)\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s). \tag{3.1}$$

Où $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_p$ et pour chaque $0 \leq i \leq p$, $H_{(i)}$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable et bornée.

Définition 3.1.5 *Soient $M \in H_c^2$ et $H \in$* **S** *de la forme (3.1). On définit $H.M$ par*

$$(H.M)_t = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t}).$$

Proposition 3.1.2 *Soient $M \in H_c^2$ et $H \in$* **S**. *On a $H.M \in H_c^2$ et pour tout $N \in H_c^2$:*

$$\left\langle H.M, N\right\rangle_t = \int_0^t H_s d\left\langle M,N\right\rangle_s = H.\left\langle M,N\right\rangle_t.$$

Remarque 3.1.1 *En général, on utilise la notation intégrale :*

$$(H.M)_t = \int_0^t H_t dM_s.$$

Preuve. On écrit $H.M = \sum_{i=0}^{p-1} M_t^i$ où $M_t^i := H_{(i)}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})$ On commence par observer que, pour chaque $1 \leq i \leq p$: $(M_t^i)_{t\geq 0}$est une martingale, En effet : pour $s \leq t$.

Si $s \geq t_i$

$$\mathbb{E}\left[H_{(i)}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})\diagup\mathcal{F}_s\right] = H_{(i)}\mathbb{E}\left[(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})\diagup\mathcal{F}_s\right]$$
$$= H_{(i)}(M_{t_{i+1}\wedge s} - M_{t_i\wedge s}) = M_s^i.$$

puis si $s < t_i$

$$\mathbb{E}\left[H_{(i)}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})\diagup\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[H_{(i)}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})\diagup\mathcal{F}_{t_i}\right]\diagup\mathcal{F}_s\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[H_{(i)}\mathbb{E}\left[(M_{t_i\wedge t} - M_{t_i\wedge t})\diagup\mathcal{F}_{t_i}\right]\diagup\mathcal{F}_s\right] = 0 = M_s^i.$$

On a donc $\mathbb{E}[M_t^i\diagup\mathcal{F}_s] = M_s^i$ pour tout $t \geq s$ et $H.M = \sum_{i=0}^{p} M^i$ est bien une martingale.
De plus, comme H est bornée et $M \in H_c^2$, on a aussi $H.M \in H_c^2$.
Pour la deuxième partie, d'abord, si $H = H_{(i)}\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}$, comme $MN - \langle M, N\rangle$ est une martingale (car martingale locale bornée dans L^2 d'aprés la Proposition(2.6.2), alors

$$M^{t_{i+1}}N - \langle M, N\rangle^{t_{i+1}}, \text{et } M^{t_i}N - \langle M, N\rangle^{t_i}$$

Sont des martingales. Par conséquent la diférence

$$\left(M^{t_{i+1}} - M^{t_i}\right)N - \left(\langle M, N\rangle^{t_{i+1}} - \langle M, N\rangle^{t_i}\right).$$

Est aussi une martingale. Comme cette martingale est nulle en $t \leq ti$ et comme $H_{(i)} \in \mathcal{F}_{t_i}$

$$H_{(i)}\left(M^{t_{i+1}} - M^{t_i}\right)N - H_{(i)}\left(\langle M, N\rangle^{t_{i+1}} - \langle M, N\rangle^{t_i}\right).$$

Est encore une martingale puis en sommant sur $1 \leq i \leq p$, $(H.M)N - \int_0^{\cdot} H_s d\langle M, N\rangle_s$ .reste aussi une martingale. D'aprés la Proposition (2.6.2), on identife le crochet de $(H.M)$ et de N :

$$\langle (H.M), N\rangle = H.\langle M, N\rangle.$$

Noter en particulier que :

$$\langle H.M, H.M \rangle = H^2. \langle M, M \rangle .$$

■

Théorème 3.1.1 (Existence de l'intégrale stochastique L^2) *Soit $M \in H_c^2$. L'application $H \in \mathbf{S} \longrightarrow H.M$ s'étend en une isométrie de $L^2(M)$ dans H_c^2. De plus,*

1. *La martingale $H.M$ est caractérisée par la relation*

$$\langle H.M, N \rangle = H. \langle M, N \rangle , \quad \forall N \in H_c^2. \tag{3.2}$$

2. *Puis, si T est un temps d'arrêt, on a une propriété d'arrêt*

$$(\mathbf{1}_{[0,T]} H).M = (H.M)^T = H.M^T. \tag{3.3}$$

Avec des notations intégrales, cette dernière propriété s'écrit de façon naturelle :

$$\int_0^t \mathbf{1}_{[0,T]} H \ dM = \int_0^{t \wedge T} H \ dM = \int_0^t H \ dM^T.$$

Proposition 3.1.3 (Associativité de l'intégrale stochastique $\mathbf{L}^2$) *Soit $M \in H_c^2$. Si $K \in L^2(M)$ et $H \in L^2(K.M)$ alors $HK \in L^2(M)$ et*

$$(HK).M = H.(K.M).$$

Preuve. D'aprés le Théorème précédante, on a :

$$\langle K.M, K.M \rangle = K. \langle M, K.M \rangle = K^2. \langle M, M \rangle .$$

Et donc

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} H_s^2 K_s^2 d\left\langle M,M\right\rangle_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} H_s^2 d\left\langle K.M,K.M\right\rangle_s\right] < +\infty.$$

Ce qui garantit $HK \in L^2(M)$. On montre la propriété caractéristique (3.2) : si $N \in H_c^2$ on a :

$$\left\langle (HK).M,N\right\rangle = HK.\left\langle M,N\right\rangle = H.(K.\left\langle M,N\right\rangle) = H.\left\langle K.M,N\right\rangle = \left\langle H.(K.M),N\right\rangle.$$

■

3.1.2 Cas d'une martingale locale

Définition 3.1.6 (Espaces $\mathbf{L}^2_{loc}(\mathbf{M})$) *On note $L^2_{loc}(M)$ l'espace des processus progressifs H tels que pour tout $t \geq 0$,*

$$\int_0^t H_s^2 d\left\langle M,M\right\rangle_s < +\infty \quad p.s.$$

On rappelle que, pour M une martingale locale, on note toujours $L^2(M)$ l'espace des processus progressifs H tels que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} H_s^2 d\left\langle M,M\right\rangle_s\right] < +\infty.$$

Théorème 3.1.2 (Existence de l'intégrale stochastique générale) *Soit M une martingale locale issue de 0. Pour tout $H \in L^2_{loc}(M)$, il existe une unique martingale locale issue de 0, notée $H.M$, telle que pour toute martingale locale N,*

$$\left\langle H.M,N\right\rangle = H.\left\langle M,N\right\rangle.$$

De plus, la propriété d'arrêt (3.3) *reste vraie : Si T est un temps d'arrêt, on a :*

$$(\mathbf{1}_{[0,T]}H).M = (H.M)^T = H.M^T. \tag{3.4}$$

Proposition 3.1.4 *Soit M une martingale locale, et soit $H \in L^2_{loc}(M)$. Alors, pour tout $t \geq 0$*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s dM_s\right)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 d\left\langle M, M\right\rangle_s\right] \tag{3.5}$$

Remarque 3.1.2 *Le mouvement brownien B est une martingale locale pour laquelle le Théorème(**??**) définit donc l'intégrale $(H.B)_t = \int_0^t H_s dB_s$ pour $H \in L^2_{loc}(B)$. Les intégrales stochastiques par rapport au mouvement brownien B s'appellent les intégrales d'**Itô**.*

3.1.3 Par rapport à une semi-martingale

On achève dans cette section la construction de l'intégrale stochastique en intégrant finalement par rapport aux semi-martingales continues. Pour cela, on dit qu'un processus progressif H est localement borné si,

$$\sup_{s \leq t} |H_s| < +\infty, \quad p.s., \forall t \geq 0$$

En particulier, tout processus continu adapté est localement borné. De plus, si H est localement borné, pour tout processus V à variation finie on a :

$$\int_0^t |H_s| \, |dV_s| < +\infty, \quad p.s., \forall t \geq 0$$

De même, pour toute martingale locale M, on a $\int_0^t H_s^2 d\left\langle M, M\right\rangle_s < +\infty$, ie) $H \in L^2_{loc}(M)$.

Définition 3.1.7 *Soit $X = M + V$ une semimartingale continue, et soit H un processus (progressif) localement borné. L'intégrale stochastique $H.X$ est alors définie par :*

$$H.X = H.M + H.V.$$

Et on note :

$$(H.X)_t = \int_0^t H_s dX_s.$$

Propriété 3.1.1 **i)** *L'application* $(H, X) \longrightarrow H.X$ *est bilinéaire.*

ii) $H.(K.X) = (HK).X$*, si* H *et* K *sont localement bornés.*

iii) *Pour tout temps d'arrêt* T*,* $(H.X)^T = H\mathbf{1}_{[0,T]}.X = H.X^T$

iv) *Si* X *est une martingale locale, resp. si* X *est un processus à variation finie, alors il en va de même pour* $H.X$*.*

v) *Si* H *est un processus progressif de la forme :*

$$H_s(w) = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}(w)\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s).$$

Où, pour chaque i*,* $H_{(i)}$ *est* $\mathcal{F}_{t_i}$*-mesurable, alors :*

$$(H.X)_t = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}(X_{t_{i+1}\wedge t} - X_{t_i\wedge t}).$$

Proposition 3.1.5 *Soit* X *une semimartingale continue et soit* H *un processus adapté à trajectoires continues. Alors, pour tout* $t > 0$*, pour toute suite* $0 = t_0^n < ... < t_{p_n}^n = t$ *de subdivisions de* $[0, t]$ *de pas tendant vers* 0*, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} H_{t_i^n}\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right) = \int_0^t H_s dX_s$$

au sens de la convergence en probabilité.

Preuve. On peut traiter séparément les parties martingale et à variation finie de X. On peut donc supposer que $X = M$ est une martingale locale issue de 0. Pour chaque n, définissons un processus $H^{(n)}$ par

$$H_s^{(n)} = \begin{cases} H_{t_i^n} & si\ t_i^n \le s \le t_{i+1}^n \\ 0 & si\ s > t \text{ ou } s = 0. \end{cases}$$

Posons enfin, pour tout $p \geq 1$,

$$T_p = \inf \{s \geq t : |H_s| + \langle M, M \rangle_s \geq p\}$$

et remarquons que H, $H^{(n)}$ et $\langle M, M \rangle$ sont bornés par p sur l'intervalle $]0, T_p]$.

D'après (3.5) , pour tout p fixé,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\left(H^{(n)}.M^{T_p}\right)_t - \left(H.M^{T_p}\right)_t\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\left(H^{(n)}\mathbf{1}_{[0,T_p]}.M\right)_t - \left(H\mathbf{1}_{[0,T_p]}.M\right)_t\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\left(\left(H^{(n)} - H\right)\mathbf{1}_{[0,T_p]}\right).M\right)_t^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(H^{(n)} - H\right)^2 \mathbf{1}_{[0,T_p]}(s)\, d\langle M, M \rangle_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge T_p} \left(H^{(n)} - H\right)^2 d\langle M, M \rangle_s\right].
\end{aligned}$$

converge vers 0 quand $n \to \infty$ par convergence dominée. En utilisant (3.4), on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \left(H^{(n)}.M\right)_{t\wedge T_p} = (H.M)_{t\wedge T_p}$$

dans L^2. puisque que $\mathbb{P}[T_p > t] \uparrow 1$ quand $p \uparrow \infty$, on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} \left(H^{(n)}.M\right)_t = (H.M)_t$$

en probabilité. Cela termine la preuve puisque d'aprés la propriété (v) ci-dessus on a

$$(H^{(n)}.X)_t = \sum_{i=0}^{p_n-1} H_{t_i^n}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}).$$

■

Conclusion

Dans ce travail, nous présentons martingale comme un jeu équitable. Elle à des définitions très précises, donc elle n'est pas facile à comprendre.

Dans ce travail, nous expliquons les caractéristiques importantes de semi-martingale, et leur différence, ainsi que l'intégrale stochastique par rapport à une martingale et une semi-martingale.

Nous proposons dans des travaux ultérieurs l'application de ce processus aléatoire à la recherche l'existence et l'unicité des solutions pour Equations Différentielles Stochastiques « EDS ».

Bibliographie

[1] Boutabia, H. Cours D.E.A, processus stouchastique,université d'Annaba, 2000-2001 .

[2] Foata, D. Fuches, A. Processus stochastique, octobre 2004.

[3] Doob, J. L. Stochastic Processes, 11 janvier 1990

[4] Le Gall, J. F. Intégrations, probabilités et processus aléatoires, septembre 2006.

[5] Le Gall, J. F. Mouvememt brownien, Martingales et Calcul stochastique,.

[6] Breton, J. C. Cours Master, université de Rannes 1, septembre-octobre 2017.

[7] Bergland, N. Martingales et calcul stochastique, université d'Orléans, Janvier 2014.

[8] Touzi, N. Martingales en temps discret et chaines de Markov, septembre 2009.

[9] Méléard, S. Mouvement brownien et calcul stochastique, université Paris 10.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\mathbf{1}_A$	Fonction indicatrice de A.
$\mathbb{N}$	Ensemble des enties naturels.
Ω	Ensemble fondamentale.
$\mathcal{F}$	Tribu d'événements sur Ω.
$\mathcal{F}_t^X$	Tribu engendrée par la famille $\{X_u; 0 \leq u \leq t\}$.
$(\Omega, \mathcal{F})$	Espace probabilisable.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace probabilité.
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P}\right)$	Espace de probabilité filtré.
$T.A$	temps d'arrêt.
$B = (B_t)_{t\geq 0}$	Mouvement Brownien.
$v.a$	variable aléatoire.
$\mathbb{P}.p.s$	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
M^T	Processus arrêté.
$\langle M, N\rangle$	Crochet de deux martingales.
$\int_0^t H_s dB_s$	Intégrale stochastique.