République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifque

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des sciences exactes et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

Master en Mathématiques

Option : Probabilité

Par

FATEN SEHEL

Titre

Principe de maximum pour des équations differentielles stochastiques progressives retrogrades

---

Membres du jurés :

Dr.	**Kourichi Fatiha**	U. Biskra	**Président**
Pr.	**Mokhtar Hafayed**	U. Biskra	**Encadreur**
Dr.	**Ghoul Abdelhak**	U. Biskra	**Examinateur**

Juin 2019

Didicace

À l'esprit de ma mère pure.

À mon encadreur Pr : **Mokhtar Hafayed**.

À mes frères : **Madani** et **Abd el Fatteh**, **Salah Ben hassan**, **Ammar Bouhaf**, **Tergi Lakhdari.**

À mes soeurs : **Nour el Houd**, **Warda**, **Sabra**, **Nawal Bel Aid**, **Souad**, **Olaya**.

Aux anges de la famille : **CHahed Maram**, **Mohsin Seddik**, **Haroun Youssef**, **Nour Sin**, **DJouri DJinnen**, **Djamila Ritaj**, **Aness**, **Amira**, et le petit ange **Rima**.

À toute ma **famille**.

À tous mes **amis**.

À tous mes **professeurs de Mathématiques** à tous les niveau.

À moi **FATEN**.

Remerciements

Un merci spécial à mon encadreur **Mokhtar Hafayed,** qui m'a beaucoup aidé dans ma mémoire. Grand merci à ma famille qui m'a soutenu, merci à tous ceux qui ont aidé à complétes ce mémoire.

Table des matières

Table des matières iii

Abstract v

Résumé vi

Introduction 2

1 Calcul stochastique 5

1.1 **Processus stochastique** 5

1.1.1 **Filtration** 5

1.1.2 **Processus stochastique** 6

1.1.3 **Processus adapté, progressifs** 6

1.1.4 **Modification & indistingubilité d'un processus stochastique :** 6

1.2 **Mouvement brownien** 7

1.3 **l'intégrale stochastique** 8

1.3.1 **Propriétés de l'intégrale stochastique** 8

1.3.2 **Formule d'Itô** 8

2 Classe de contrôle optimal 11

2.1 **Introduction au contrôle stochastique** 11

2.2 **Classes des contrôles** 12

2.2.1 **Contrôle admissible** 12

2.2.2 **Contrôle optimal** 12

2.2.3 **Contrôle presque optimal** 12

2.2.4 **Contrôle feed-back** 13

2.2.5 **Contrôle relaxé** 13

2.2.6 **Arrêt optimal** 13

2.2.7 **Contrôle ergodique et contrôle risk-sensible** 14

2.3 **Méthodes de résolution en contrôle stochastique** 14

2.3.1 **Principe de maximum de Pontryagin** 15

2.3.2 **Principe de la programmation dynamique** 15

3 Principe de maximum **17**

3.1 Équation variationnelles et inégalité variationnelle 18

3.2 Le principe du maximum sous forme globale 27

3.3 Problème avec les contraintes d'état 28

Conclusion **35**

Bibliographie **36**

Annexe B : Abréviations et Notations **37**

Abstract

In this work, we derive a stochastic maximum principle for optimal stochastic control of systems driven by forward-backward stochastic differential equations (**FBSDEs in short)** without controlled diffusion. Our Objectif is to minimize :

$$J\left(u\left(\cdot\right)\right)=\boldsymbol{E}\left[\gamma(y\left(0\right)\right],$$

such that

$$\begin{cases} dx(t)=f\left(t,x(t),u(t)\right)dt+\sigma\left(t,x(t)\right)dW(t), \\ \\ dy(t)=g\left(t,x(t),y(t),z(t),u(t)\right)dt+z(t)dW(t) \\ \\ X\left(0\right)=x_0,\;\; y(T)=h(x\left(T\right) \end{cases}$$

In this work, the control domain is not assumed to be convex. The proof of the main result is based on spike perturbation and Itô formula. This resultat has been developped by **Wensheng Xu** (1995). Stochastic maximum principle for optimal control problem of forward and backward system. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B.* Applied Mathematics, 37, pp 172-185.

Keywords. *Forward-backward stochastic differential equations, optimal stochastic control, Stochastic maximum principle. perturbation forte.*

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse par un problème de controle optimal stochastique qui consiste a minimiser une fonction de coût donnée par :

$$J\left(u\left(\cdot\right)\right)=\boldsymbol{E}\left[\gamma(y\left(0\right)\right],,$$

où $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot))$ est une solution en t d'un systeme gouverné par l'équation différentielle stochastique progressive retrograde (**EDSPR**) faiblement couplées de la forme suivante :

$$\begin{cases} dx(t)=f\left(t,x(t),u(t)\right)dt+\sigma\left(t,x(t)\right)dW(t), \\ dy(t)=g\left(t,x(t),y(t),z(t),u(t)\right)dt+z(t)dW(t) \\ x\left(0\right)=x_0,\ \ y(T)=h(x\left(T\right) \end{cases}$$

où f, et σ et g sont des fonctions déterministes et $W(t)$ un mouvement brownien definit dans un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Notre objectif est d'établir des conditions nécéssaires d'optimalité sous la forme de principe du maximum stochastique de Pontryagin. Le system considéré dans ce travail est gouverné par des équations différentielle progressive retrograde (EDSPRs). Le domaine de controle est n'est pas nécessairement convexe. La preuve de ce resultat est basé sur la perturbation convexe et la formule d'Ito. ce resultat a été developpé par Wensheng Xu (1995). Stochastic maximum principle for optimal control problem of forward and backward system. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B.* Applied Mathematics, 37, pp 172-185.

Mots clés : Principe du maximum, controle optimal, Processus stochastique, Equations Différentielles stochastiques Progressives Rétrogrades, Spike variation.

Introduction générale

Introduction

Dans ce travaiL, on considére un problème de controle optimal stochasstique qui consiste a minimiser une fonction de coût donnée par :

$$J\left(u\left(\cdot\right)\right)=\boldsymbol{E}\left[\gamma(y\left(0\right)\right],$$

où $(x(\cdot),y(\cdot),z(\cdot))$ est une solution en t d'un systeme gouverné par l'équation différentielle stochastique progressive retrograde (**EDSPR**) fiablement couplées de la forme suivante :

$$\begin{cases} dx(t)=f\left(t,x(t),u(t)\right)dt+\sigma\left(t,x(t)\right)dW(t), \\ \\ dy(t)=g\left(t,x(t),y(t),z(t),u(t)\right)dt+z(t)dW(t), \\ \\ x\left(0\right)=x_0,\ y(T)=h(x\left(T\right), \end{cases}$$

où $f,g,$ et σ sont des fonctions déterministes et $W(t)$ un mouvement brownien.

Notre objectif est d'établir des conditions nécéssaires d'optimalité sous la forme de principe du maximum stochastique de Pontryagin. Le system considéré dans ce travail est gouverné par des équations différentielle stochastiques progressive rétrograde faiblement couplées(EDSPRs). Nous supposons le domaine de controle est n'est pas nécessairement convexe. La preuve de ce resultat est basé sur la perturbation forte et la formule d'Ito.

Nous présentons dans ce travail trois chapitres, le premier chapitre est introductif et permet d'introduire les outils essentiels pour le troisième chapitres. Le deuxiéme chapitre est sur les classe de controle stochastiques et les méthode de résolutions.

La suite de ce mémoire est organisée de la maniére suivante :

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse au problème de contrôle stochastique, nous commencons par présenter les résultats principaux des contrôles stochastiques de façons générales. On décrit brièvement les différentes méthodes de résolutions d'un problème de contrôle stochastique, les bien- connues, qui sont la méthode de programmation dynamique (Principe de Bellman) et le principe du maximum de Pontryagin. Dans notre travail, nous employons la deuxième méthode.

Le troisième chapitre contient la contribution essentielle de ce travail. Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de principe du maximum stochastique où le syteme différentiel est gouverné par des **EDSPRs.** Pour cela, on suppose que la fonction coût $J\left(u\left(\cdot\right)\right)$, où $u\left(\cdot\right)$ est un contrôle addmissible, est différentiable et accepte une minimum en $u^*\left(\cdot\right)$ qu'on appelera contrôle optimal,

$$J\left(u^*\left(\cdot\right)\right) = \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{ad}} \left\{J\left(u\left(\cdot\right)\right),\ u\left(\cdot\right)\in\mathbb{U} : \text{n'est pas nécessairement convexe.}\right\}$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ est l'espace de controle admissible, puis on perturbe le contrôle $u^*\left(\cdot\right)$ sur un intervalle de longueur θ où on obtient un contrôle u_ε.qu'on appelera perturbation forte de u^*, en remarquant ici que $u_\theta\left(\cdot\right)$ est un contrôle admissible, est $\mathcal{F}_t$-adapté. L'intérêt de la perturbation du contrôle optimal $u^*\left(\cdot\right)$ est d'introduire un contrôle $u_\theta\left(\cdot\right)$ sur laquelle nous pourrons dériver la fonction de cout $J\left(u_\theta\left(\cdot\right)\right)$. Le domaine de controle $\mathbb{U}$ est n'est pas nécessairement convexe (general action space). Les conditions nécéssaires vérifiées par le contrôle $u^*\left(\cdot\right)$ appelera conditions nécéssaire d'optimalité. *Notons que ces resultats de principe du maximum ont été établit par* Xu (1995). [1]

[1] W. Xu (1995). Stochastic maximum principle for optimal control problem of forward and backward system. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics, 37, pp 172-185.*

Chapitre §1. Calcul stochastique

Chapitre 1

Calcul stochastique

Dans ce chapitre on va présenter d'une manière simple et brève les principaux outils probabilistes de base utilisés pour formuler le principe de maximum, le point de départ du calcul stochastique est la construction de l'intégrale stochastique, en commençant par : les processus, mouvement brownien et l'espérance conditionnelle. Il y a des nombreux livres détaillant la théorie classique exposée dans ce chapitre, voir le livre de Yong & Zhou 1999, ([4]) et le document de Monique Jeanblanc 2005. ([**?**]) et Pham 2005 ([6]).

1.1 Processus stochastique

1.1.1 Filtration

Définition 1.1.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité. Une filtration sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *est une famille croissante* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ *de sous tribus de* $\mathcal{F}$. *(* $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, *pour tout* $0 \leq s \leq t \leq T$)

La filtration naturelle du processus X, *la suite croissante de tribus complétes* $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t)$

Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *est appelé espace probabilisé filtré.*

tout dans ce qui suit on considère l'espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

($i.e$ $\mathcal{F}_0$ contient tout les ensembles négligeables de $\mathcal{F}_T$). Voir le livre de Yong & Zhou 1999, ([4]) et le document de Monique 2005. ([1]).

1.1.2 Processus stochastique

Définition 1.1.2 *Soit $\mathbb{I}$ un ensemble. On appelle processus stochastique indexé par $\mathbb{I}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ une famille $(X_t)_{t\in I}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$; pour tout $t \in E$, X_t est une variable aléatoire.*

Remarque 1.1.1 Définition 1.1.3 *On peut noter qu'un processus stochastique peut être vu comme une fonction aléatoire : à chaque ω ; on associe la fonction $t \to x_t(\omega)$ qui est appelée trajectoire.*

1.1.3 Processus adapté, progressifs

Définition 1.1.4 *Un processus X est mesurable si l'application $(t, \omega) \to X_t$ de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Un processus X est dit adapté (par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$) si x_t est $\mathcal{F}_t$ $-$mesurable pour tout $t.\mathcal{F}_t^x$.

Il est inutile de dire qu'un processus est toujours adapté par rapport à sa filtration naturelle.

Définition 1.1.5 *Un processus X est progressivememt mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$, l'application $(s, \omega) \to X_s(\omega)$ de $[0, t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

1.1.4 Modification & indistingubilité d'un processus stochastique :

Définition 1.1.6 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace probabilisé filtré. Soient X et Y deux processus, X est une modification de Y si pour tout $t \geq 0$. Les varéables aléatoires X_t et Y_t sont égales $P - p.s$:*

$$\forall t \geq 0, \;\; P(X(t) = Y(t)) = 1.$$

X et Y sont indistinguables si,$P-p.s$ les trajectoires de X et Y sont les même c'est-à-dire :

$$P(X(t) = Y(t), \;\forall t \geq 0) = 1$$

La notion d'indistinguabilité est plus forte que la notion de modification. Notons que si X est une modification de Y et si X et Y sont à trajectoires continues à droite (ou à gauche) alors X et Y sont indistinguables.

1.2 Mouvement brownien

Définition 1.2.1 *On dit que le processus stochastique à valeures réelles $B(t)$ est un mouvement brownien standard s"il satisfaire les condition suivants :*

1. $t \to B(t)(\omega)$ est continue $P - p.s$
2. pour $0 \leq s < t$, $B(t) - B(s)$ est indépendant de la tribu $\delta \{B(u),\ u \leq s\}$ et de loi gaussienne centrée de variance $t - s$.
3. $B(0) = 0\ P - p.s.$
4. Pour tout $t > 0$, la variable aléatoire $B(t)$ suit la loi gaussienne centrée de variance t donc de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{-x^2}{2t}\right\}$. On dit qu'un mouvement brownien (MB) part d'un point x si $B(0) = x$.

Remarque 1.2.1 *On dit que B est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ $-MB$ si B est un processus continu, adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, vérifiant :*

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \forall 0 \leq s \leq t,$$

$$\boldsymbol{E}\left(\exp(iu(B(t) - B(s)))/\mathcal{F}_s\right) = \exp\left\{-u^2(t - s)/2\right\}.$$

Proposition 1.2.1 *Soit B un MB standard définie sur un espace de probabilité.*

1. pour tout $s > 0$. $\{B(t - s) - B(s)\}_{t\geq 0}$ est un MB indépendant de $\sigma\{B(u),\ u \leq s\} = \sigma(B)$
2. $-B$ est aussi MB.
3. pour tout $c > 0$. $\{cB(t/c^2)\}_{t\geq 0}$ est MB.
4. le processus défini par $B(0) = 0$ et $B(t) = tB(1/t)$ est un MB.

1.3 l'intégrale stochastique

On va définir maintenant la $v.a.$ $\int_0^T X_s dW(s)$

quand $\{x(s),\ s \geq 0\}$ est un processus stochastique. Le caractère aléatoire de X va exiger des conditions supplémentaires par rapport au cas de l'intégrale de Wiener. On note $\left\{\mathcal{F}_t^W,\ t \geq 0\right\}$ la filtration naturelle du mouvement brownien W.

Définition 1.3.1 *On dit que $\{X_t,\ t \geq 0\}$ est un bon processus s'il est $\left(\mathcal{F}_t^W\right)-$adapté, càglad, et si :*

$$\boldsymbol{E}\left[\int_0^T X_s^2 ds\right] < +\infty, \quad \textit{pour tout } t > 0.$$

1.3.1 Propriétés de l'intégrale stochastique

Corollaire 1.3.1 *on a les proprietés suivantes :*

Définition 1.3.2
1. *$X \longmapsto \int_0^T X_s dW(s)$ est une application linéaire.*
2. *on a pour $0 \leq s \leq t \leq T$: $\boldsymbol{E}\left[\int_0^T X_s dW(s)\right] = 0$*
3. *$Var\left(\int_0^T X_s dW(s)\right) = \boldsymbol{E}\left[\int_0^T X_s^2 ds\right]$.*

1.3.2 Formule d'Itô

Théor■me 1.3.1 *Soit $(X(t))_{t\in[0,T]}$ un processus d'Itô, de différentielle stochastique :*

$$dX(t) = b(t)\, dt + \sigma(t)\, dW(t) \quad (\forall t \in [0,T])$$

Soit $f : (t,x) \longrightarrow f(t,x)$,une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à t, de classe $\mathcal{C}^2$par rapport à x et on note $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, Alors $(f(t, X(t)))_{t\in[0,T]}$, est un processus d'Itô qui a pour différentielle stochastique :

$$df(t, X(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t))\sigma^2(t)\, dt \tag{1.1}$$

Prenez la forme de l'intégration comme suit :

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) &= f(0, X(0)) + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial t}(s, X(s))ds \\ &+ \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))dX(s) + \tfrac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X(s))\sigma^2(s)\, ds. \end{aligned} \tag{1.2}$$

oô $\sigma^2(s)\, ds = d < X, X >_s$ *Alors la forme générale est :*

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) &= f(0, X(0)) + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial t}(s, X(s))ds \\ &+ \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))dX(s) + \tfrac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X(s))d < X, X >_s \end{aligned} \tag{1.3}$$

Chapitre §.2
Classe de contrôle optimal

Chapitre 2

Classe de contrôle optimal

La théorie du contrôle a été initialement développée dans le but d'obtenir des outils d'analyse et de synthèse des systèmes de contrôle et de système dynamique (c'est à dire l'évolution du système au cours du temps) ; Cette grande théorie a de nombreuses applications en gestion et en finance. Dans ce chapitre on s'intéresse au contrôle optimal et ces déffirentes classes et aux deux méthodes majeures pour la résolution des problèmes des contrôles dans les cas déterministes ou stochastiques, le principe de la programmation dynamique et le principe du maximum de Pontryagin. Voir le livre de Yong & Zhou 1999, ([4]) et Pham 2005 ([6]).

2.1 Introduction au contrôle stochastique

D'une manière général, un problème de contrôle se construit des caractéristiques suivants :

1. Ètat du système : un système dynamique caractérisé par son état a tout instant, le temps peut être continue ou bien discret. L'horizon (l'intervale de variation du temps) peut être fini ou infini. L'état du système représente l'ensemble des variables quantitatives constituant une description total du système. On notera $X_t(\omega)$ l'état du système à l'instant t. Une fois défini l'état, il s'agit de décrire les lois d'évolution de cet état en fonction du temps. L'application $t \to X_t$ décrit l'évolution du système. Cette évolution est fournie par un modèle probabiliste.
2. Contrôle : La dynamique X_t de l'état du système est agi par un contrôle que nous

modèlisons comme un processus u_t dont la valeur peut être décidée a tout instant t en fonction des informations disponibles à cet instant, c'est-à-dire que u_t est adapté par rapport à une certaine filtration,et prend ses valeurs dans un espace de contrôle.

3. Critère de côut : Le but principal du contrôle optimal est de minimiser (ou de maximiser celon le cas un gain oubien une perte) une fonctionnelle

$$J(u(\cdot)) = \boldsymbol{E}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))dt + g(X(T))\right], \tag{2.1}$$

sur l'ensemble de touts les contrôles admissibles $\mathcal{U}_{ad}$.

2.2 Classes des contrôles

2.2.1 Contrôle admissible

Définition 2.2.1 *On appelle un contrôle admissible tout processus $(u_t)_{t\in[0,T]}$ mesurable et adapté à valeur daons un borélien $A \subset \mathbb{R}$, notons par $\mathcal{U}_{ad}$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles*

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u : [0,T] \times \Omega \to A,\ u \text{ mesurable et } \mathcal{F}_t - \text{adapté}\}. \tag{2.2}$$

2.2.2 Contrôle optimal

Le problème de contrôle optimal consiste à minimiser une fonction coût $J(u(\cdot))$ sur un ensembles des contrôles admissibles $\mathcal{U}_{ad}$.

Définition 2.2.2 *On dit que le contrôle $\hat{u}$ est optimal si :*

$$J(\hat{u}(t)) \leq J(v(t)) \ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

2.2.3 Contrôle presque optimal

Soit $\varepsilon > 0$, le contrôle u^ε est dit presque optimal ou bien $\varepsilon - optimal$ si :

$$J(u^\varepsilon(t)) \leq J(u(t)) + \varepsilon \ \ \forall u \in \mathcal{U}_{ad}.$$

2.2.4 Contrôle feed-back

Soit u un contrôle $\mathcal{F}_t-$ adapté, et soit $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$ la filtration naturelle engendrée par le processus X, On dit que u_t est Feed-back contrôle si u_t est aussi adapté par rapport à la filtration $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$, On dit aussi qu'un contrôle u est Feed-back si est seulement si u dépend de l'état de system X.

2.2.5 Contrôle relaxé

On considère un ensemble des mesures de Radon V sur $[0,T]\times A$ dont la projection sur $[0,T]$ coïncide avec la mesure de Lebesgue dt muni de la topologie de la convergence stable des mesures. L'espace V est muni de sa tribu borelienne, qui est la plus petite tribu telle que l'application $q\rightarrow\displaystyle\int f(s,a)q(ds,da)$ soit mesurable pour toute fonction f mesurable, bornée et continues en a.

Définition 2.2.3 *Un contrôle relaxé q est une variable alèatoire $q(w,dt,da)$ à valeurs dans l'espace V telle que pour chaque t : $I_{[0,T]}q$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable.*

2.2.6 Arrêt optimal

Couramment, l'horizon du problème est fixé , soit fini ou bien infini. En effet il existe plusieur d'application où le"contrôleur" a aussi la possibilité de décider l'horizon de son objectif. La décision de stopper le processus est modélisée par un temps d'arrêt et le problème d'optimisation associé est appelé problème d'arrêt optimal. Voir Pham ([6])

Dans la formulation générale de tels problèmes, le contrôle est mixte, constitué du couple contrôle/temps d'arrêt (u,a) et la fonctionnelle à optimiser s'écrit :

$$J(u,a)=\boldsymbol{E}\left[\int_0^a f(t,X(t),u(t))dt+g(X(a))\right].$$

Ces problèmes interviennent en finance typiquement dans la volarisation des options américaines où, en plus par rapport aux options européennes, le détenteur de l'option peut exercer son droit et donc recevoir le flux associé à tout instant avant l'échéance.

2.2.7 Contrôle ergodique et contrôle risk-sensible

Certains systèmes stochastiques peuvent exhiber sur le long terme un comportement stationnaire caractérisé par une mesure invariante.

Cette mesure, si elle existe, est obtenue en calculant la moyenne d'état du système sur le long terme. Un problème de contrôle ergodique consiste alors à optimiser sur le long terme un certain critère prenant en compte cette mesure invariante. Voir Pham ([6]). Cette formulation standard consiste à optimiser sur les contrôles $u(t)$ une fonctionnelle de la forme :

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\boldsymbol{E}\left[\int_0^T f(t,X(t),u(t))dt\right].$$

Cette dernière formulation est appelée contrôle $riske - sensible$ dans la liturature et a recemment été utilisée dans plusieurs travaux en mathématiques financiers comme un critère de gestion de portfeuille à long terme. Un autre critère basé sur le comportement de type grandes déviations du système :$si\ T \to +\infty$

$$P\left[X_T : T \geq c\right] \simeq \exp\left(-I(c)T\right).$$

consiste à maximiser sur les contrôles u une fonctionnelle de la forme suivante

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{T} P\left[\frac{1}{T} \geq c\right]$$

2.3 Méthodes de résolution en contrôle stochastique

Dans le domaine de controle optimal, il existe essentiellement deux méthodes majeures pour la résolution des problèmes des contrôles optimal,dans les cas déterministes ou stochastiques, le principe de la programmation dynamique de Bellman, et le principe du maximum de Pontryagin.

2.3.1 Principe de maximum de Pontryagin

Le principe du maximum de Pontryagin connue sous le nom "**conditions nécessaires d'optimalité**" a été introduite par Pontryagin en 1956. Elle s'appuie sur l'idée suivante : si un contrôle optimal existe en utilisant l'approche de Lagrange en calculant des variations sur la fonctionnelle $J(u)$ par rapport à un paramètre de perturbation positive θ ceci mène à :

$$\frac{d}{d\theta} J(u_\theta)\Big|_{\theta=0} \geq 0$$

Ce principe consiste à introduire un processus adjoint $p(t)$ solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde et d'une inégalité variationnelle. Dans notre cas, on s'interesse par cette méthode de résolution pour des systemes gouvernés par des **EDSPRs**. Voir le livre de Yong & Zhou ([4]).

2.3.2 Principe de la programmation dynamique

Cette méthode de résolution a été introduite par Bellman en 1953, elle s'appuie sur la notion de la "politique optimale" qui consiste à résoudre une équation aux dérivées partielles de second ordre, non linéaire.appelé équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. Voir le livre de Yong & Zhou 1999, ([4]) et Pham 2005 ([6]). Elle est fondée sur le principe d'optimisation suivant : Si une trajectoire est optimale alors elle est optimale pour chaque instant, c'est à dire "si on commence à un autre point on ne peut faire mieux que suivre de la tajectoire optimale".

Chapitre §.3
Principe du maximum pour EDSPRs

Chapitre 3

Principe de maximum

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un'espace de probabilité filtrée, soit $W(t) = (W^1(t), W^2(t), ..., W^n(t))$ un mouvement Brownian $U \subset \mathbb{R}^k$ et supposant que $x(t) = x^{(u)}(t) \in \mathbb{R}$ est donné par l'équation différetielle stochastique progressive retrograde **EDSPRs** de la forme suivante :

$$\begin{cases} dx(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right) dt + \sigma\left(t, x(t)\right) dW(t), \\ dy(t) = g\left(t, x(t), y(t), z(t), u(t)\right) dt + z(t) dW(t) \\ x\left(0\right) = x_0, \;\; y(T) = h(x\left(T\right). \end{cases} \tag{3.1}$$

tel que :

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times [0, T] \to \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n\right),$$

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m\right) \times \mathbb{R}^k \times [0, T] \to \mathbb{R}^m,$$

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Soit U un sous- ensemble non vide de $\mathbb{R}^k$. Nous fixons

$$\mathbf{U}_{ad} = \{\upsilon(\cdot) \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(O, T, \mathbb{R}^k) : \upsilon\left(t\right) \in U\}.$$

Notre problème de contrôle optimale est de minimmiser la fonction de coût

$$J(v(\cdot)) = \mathbf{E}\gamma(y(0)),$$

plus de $\mathcal{U}_{ad}$, où $\gamma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$. Nous supposons :

Conditions H1 f, g, σ, h, γ sont continuellement différentiables par rapport à (x, y, z) ;

Conditions H2 Les dérivés de f, g et σ et a par rapport à x, y, z sont bornés

$$|f_x| \leq C, \qquad \text{pour} \qquad f_x = f_x, \sigma_x, g_x, g_y, g_z,$$

et

$$|h_x| \leq C(1 + |x|), \qquad |\gamma_y| \leq C(1 + |y|).$$

3.1 Équation variationnelles et inégalité variationnelle

Le but de cette sexion est d'introduire les équations variationnelles de premie ordre habituelles et dériver l'inégalité variationnelle.Soit $(u(\cdot), x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot))$ une solution optimale du problème.nous introduisons le contrôle variation de pointes :

$$u^\theta(t) \begin{cases} v, & \tau \leq t \leq t + \theta, \\ \\ u(t), & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\theta > 0$ est suffisamment petit, v est un arbitraire $\mathcal{F}^\tau-$v.a.mesurable avec des valeursdans U, $0 \leq t < T$, et $\sup_{\omega \in \Omega} |v(\omega)| < \infty$. Soit $\left(x^\theta(\cdot), y^\theta(\cdot), z^\theta(\cdot)\right)$ soit le trajectoire du système (3.1) correspondant à la commande $u^\theta(\cdot)$.

Nous introduisons les équation variationnelles suivantes :

$$\begin{cases} dx_1 = \left[f_x x_1 + f\left(u^\theta\right) - f\left(u\right)\right] dt + \sigma_x x_1 dW_t, \\ x_1(0) = 0, \\ \\ dy_1 = \left[g_x x_1 + g_y y_1 + g_z z_1 + g\left(u^\theta\right) - g\left(u\right)\right] dt + z_1 dW_t, \\ y_1(T) = h_x(x(T)) x_1\left(T\right). \end{cases} \tag{3.2}$$

Pour plus de commodité, nous utilisons la notation suivante.

$$\begin{aligned} f_x &\triangleq f_x(x(t), u(t), t), \\ g_x &\triangleq g_x(x(t), y(t), z(t), u(t), t), \\ f\left(u^\theta\right) &\triangleq f\left(x\left(t\right), u^\theta\left(t\right), t\right), \\ f(t) &\triangleq f(x(t), u(t), t). \end{aligned}$$

L'négalité variationnelle pour être obtenue par le fait $J\left(u^\theta\left(\cdot\right)\right) - J\left(u\left(\cdot\right)\right) \geq 0$. Le les lemmes suivants sont nécessaires pour établir l'inégalité.

Lemme 3.1.1 *Supposons que conditions (H_1) et (H_2) sont vérifiées. Pour les variations de premier ordre x_1, y_1, z_1, nous avoir les estimations suivantes :*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbf{E}\left|x_1\left(t\right)\right|^2 \leq C\theta^2, \tag{3.3}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbf{E}\left|x_1\left(t\right)\right|^4 \leq C\theta^4, \tag{3.4}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbf{E}\left|y_1\left(t\right)\right|^2 \leq C\theta^2, \tag{3.5}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbf{E}\left|y_1\left(t\right)\right|^4 \leq C\theta^4, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{E}\int_0^T (z_1\left(t\right))^2 ds \leq C\theta^2, \tag{3.7}$$

$$\mathbf{E}(\int_0^T (z_1\left(t\right))^2 ds)^2 \leq C\theta^4. \tag{3.8}$$

Remarque 3.1.1 *Les équations differentielles stochastiques progressives rétrogrades ED-*

SPRs faiblement couplées

$$\begin{cases} dx(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right) dt + \sigma\left(t, x(t)\right) dW(t), \\ \\ dy(t) = g\left(t, x(t), y(t), z(t), u(t)\right) dt - z(t)dW(t) \\ \\ x\left(0\right) = x_0, \;\; y(T) = h(x\left(T\right). \end{cases}$$

Les équations differentielles stochastiques progressives rétrogrades EDSPRs fortement couplées

$$\begin{cases} dx(t) = f\left(t, x(t), y(t), z(t), u(t)\right) dt + \sigma\left(t, x(t), y(t), z(t), u(t)\right) dW(t), \\ \\ dy(t) = g\left(t, x(t), y(t), z(t), u(t)\right) dt - z(t)dW(t) \\ \\ x\left(0\right) = x_0, \;\; y(T) = h(x\left(T\right). \end{cases}$$

Preuve. Nous prouvons d'abord (3.3) et (3.4). la première équation de (3.2) donne :

$$x_1\left(t\right) = \int_0^t \left[f_x x_1 + f\left(u^\theta\right) - f\left(u\right)\right] ds + \int_0^t \sigma_x x_1 dW_s,$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left|x_1\left(t\right)\right|^2 &= \mathbf{E}\left[\int_0^t \left[f_x x_1 + f\left(u^\theta\right) - f\left(u\right)\right] dt + \int_0^t \sigma_x x_1 dW_s\right]^2 \\ &\leq 3\left[\mathbf{E}(\int_0^t f_x x_1 ds)^2 + \mathbf{E}(\int_0^t f\left(u^\theta\right) - f\left(u\right) dt)^2 + \mathbf{E}(\int_0^t \sigma_x x_1 ds)^2\right], \end{aligned}$$

$\theta <<< 0$

Le processus X_1 est bien définie et est continue on va utilisés l'enégalitie suivant :

$$\left(a+b\right)^2 \leq 2a^2 + 2b^2 = 2\left(a^2 + b^2\right),$$

$$et$$

$$\left(a+b+c\right)^2 \leq 2a^2 + 2b^2 + c^2 = 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

■

et on a :

$$f_x \leq C \Longrightarrow (f_x)^2 \leq C^2,$$

$$et$$

$$\sigma_x \leq C \Longrightarrow (\sigma_x)^2 \leq C^2,$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left|x_1(t)\right|^2 &\leq 3C^2T\ \mathbf{E}\int_0^t x_1^2 ds + 3C^2T\ \mathbf{E}\int_0^t x_1^2 ds + 3\mathbf{E}(\int_0^t f\left(u^\theta\right) - f(u)\, ds)^2 \\ &\leq 6C^2T\ \mathbf{E}(\int_0^t x_1^2 ds + 3\mathbf{E}(\int_0^t f\left(u^\theta\right) - f(u)\, ds)^2.\end{aligned}$$

d'aprés l'inégalité de Gronwall's,

$$\mathbf{E}\left|x_1(t)\right|^2 \leq C\theta^2 \quad \text{pour} \quad t \in [0,T] \ \text{ uniforme.}$$

De même (3.4) tient.

Nous estimons ensuite y_1 et z_1.la quadrature des deus côtés de

la deuxième équation de (3.2) donne :

$$\begin{aligned}y_1(t) &= h_x(x(T)\,x_1(T)) + \int_T^t \left(g_x x_1 + g_y y_1 + g_z z_1 + g\left(u^\theta\right) - g(u)\right) ds + \int_T^t z_1(s)\, dW_s \\ &= h_x(x(T)\,x_1(T)) - \int_t^T \left(g_x x_1 + g_y y_1 + g_z z_1 + g\left(u^\theta\right) - g(u)\right) ds - \int_t^T z_1(s)\, dW_s,\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$-y_1(t) = -h_x(x(T)\,x_1(T)) + \int_t^T \left(g_x x_1 + g_y y_1 + g_z z_1 + g\left(u^\theta\right) - g(u)\right) ds + \int_t^T z_1(s)\, dW_s.$$

Nous estimons ensuite y_1 et z_1, la quadrature des deux côtés de

$$-y_1(t) - \int_t^T z_1(s)\, dW_s \iff$$

$$
\begin{aligned}
& - h_x \left(x\left(T\right) x_1 \left(T\right) \right) + \int_t^T \left(g_x x_1 + g_y y_1 + g_z z_1 + g\left(u^\theta \right) - g\left(u\right) \right) ds \\
& + \int_t^T z_1 \left(s\right) dW_s - \int_t^T z_1 \left(s\right) dW_s \\
& = -h_x \left(x\left(T\right) x_1 \left(T\right) \right) + \int_t^T \left(g_x x_1 + g_y y_1 + g_z z_1 + g\left(u^\theta \right) - g\left(u\right) \right) ds
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$

$$
\mathbf{E}\left(-y_1 \left(t\right) - \int_t^T z_1 \left(s\right) dW_s \right)^2 = \mathbf{E}\left| y_1 \left(t\right) \right|^2 + \mathbf{E}\int_t^T (z_1 \left(s\right))^2 ds - 2\mathbf{E}\ y_1 \left(t\right) \int_t^T z_1 \left(s\right) dW_s,
$$

$$
\mathbf{E}\ y_1 \left(t\right) \int_t^T z_1 \left(s\right) dW_s.
$$

Donc on a :

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left| y_1 \left(t\right) \right|^2 + \mathbf{E}\int_t^T (z_1 \left(s\right))^2 ds \\
& = \mathbf{E}\left[-h_x \left(x\left(T\right) x_1 \left(T\right) \right) + \int_t^T \left(g_x x_1 + g_y y_1 + g_z z_1 + g\left(u^\theta \right) - g\left(u\right) \right) ds \right]^2 \\
& \leq 5\mathbf{E}\left[-h_x \left(x\left(T\right) x_1 \left(T\right) \right) \right]^2 + 5\mathbf{E}\left[\int_t^T g_x x_1 ds \right]^2 + 5\mathbf{E}\left[\int_t^T g_y y_1 ds \right]^2 \\
& + 5\mathbf{E}\left[\int_t^T g_z z_1 ds \right]^2 + 5E\left[\int_t^T g\left(u^\theta \right) - g\left(u\right) ds \right]^2,
\end{aligned}
$$

et on a

$$
\begin{aligned}
& \left| g_x \right| \leq C \Longrightarrow g_x^2 \leq C^2, \\
& \left| g_y \right| \leq C \Longrightarrow g_y^2 \leq C^2, \\
& \left| g_z \right| \leq C \Longrightarrow g_z^2 \leq C^2, \\
& \left| h_x \right| \leq C\left(1 + \left| x\right| \right) \Longrightarrow \left| h_x \right| \leq C^2 \left(1 + \left| x\right| \right)^2,
\end{aligned}
$$

donc on a

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left|y_1(t)\right|^2+\mathbf{E}\int_t^T (z_1(s))^2 ds \\
&\leq 5\mathbf{E}\left[-h_x\left(x(T)\,x_1(T)\right)\right]^2+5C^2\mathbf{E}\left[x_1(T)\right]^2+5C^2T\ \mathbf{E}\left[\int_t^T x_1^2(s)\,ds\right]+5C^2T\ \mathbf{E}\left[\int_t^T y_1^2(s)\,ds\right] \\
&+5C^2(T-t)\,\mathbf{E}\left[\int_t^T z_1^2(s)\,ds\right]+5\mathbf{E}\left[\int_t^T g\left(u^\theta\right)-g(u)\,ds\right]^2.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left|y_1(t)\right|^2+\mathbf{E}\int_t^T (z_1(s))^2 ds-\frac{1}{2}\mathbf{E}\int_t^T (z_1(s))^2 ds \\
&=\mathbf{E}\left|y_1(t)\right|^2+\frac{1}{2}\mathbf{E}\int_t^T (z_1(s))^2 ds \\
&\leq 5C^2\mathbf{E}\left[x_1(T)\right]^2+5C^2T\ \mathbf{E}\left[\int_t^T x_1^2(s)\,ds\right]+5C^2T\ \mathbf{E}\left[\int_t^T y_1^2(s)\,ds\right] \\
&-\frac{1}{2}\mathbf{E}\left[\int_t^T z_1^2(s)\,ds\right]+5\mathbf{E}\left[\int_t^T g\left(u^\theta\right)-g(u)\,ds\right]^2 \\
&=5C^2\mathbf{E}\left[x_1(T)\right]^2+5C^2T\ \mathbf{E}\left[\int_t^T x_1^2(s)\,ds\right]+5C^2T\ \mathbf{E}\left[\int_t^T y_1^2(s)\,ds\right] \\
&+\frac{10C^2(T-t)-1}{2}\mathbf{E}\left[\int_t^T z_1^2(s)\,ds\right]+5\mathbf{E}\left[\int_t^T g\left(u^\theta\right)-g(u)\,ds\right]^2,
\end{aligned}$$

poson : $10C^2=\dfrac{1}{\delta} \implies \delta=\dfrac{1}{10C^2}$ avec $t\in[T-\delta,T]$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left|y_1(t)\right|^2+\frac{1}{2}\mathbf{E}\int_t^{T-\delta}(z_1(s))^2ds &\leq 5C^2\mathbf{E}\left[x_1(T)\right]^2+5C^2T\ \mathbf{E}\left[\int_t^{T-\delta} x_1^2(s)\,ds\right]+5C^2T\ \mathbf{E}\left[\int_t^{T-\delta} y_1^2(s)\,ds\right] \\
&+\frac{10C^2(T-t)-1}{2}\mathbf{E}\left[\int_t^{T-\delta} z_1^2(s)\,ds\right]+5\mathbf{E}\left[\int_t^{T-\delta} g\left(u^\theta\right)-g(u)\,ds\right]^2,
\end{aligned}$$

Ainsi, en applique l'inégalité de Gronwall's

$$\begin{gathered}
\mathbf{E}\left|y_1(t)\right|^2\leq C\theta^2,\quad t\in[T-2\delta,T]\,, \\
\mathbf{E}\int_t^{T-\delta} z_1^2(s)\,ds\leq C\theta^2,\quad t\in[T-2\delta,T]\,.
\end{gathered}$$

Aprés un nombre fini d'itérations,on obtient (3.5) et (7). (6) et (8) peuvent être prouvés, en utilisant une méthode similaire et l'inégalité

$$\mathbf{E}\left(\int_t^T z_1(s)\,dW_s\right)^4 \geq \beta\mathbf{E}\left(\int_t^T z_1^2(s)\,ds\right)^2, \qquad \beta > 0.$$

Lemme 3.1.2 *Supposons que* (H_1) *et* (H_2) *tiennent. Ensuite, nous avons les estimations suivantes :*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbf{E}\left|x^\theta(t) - x(t) - x_1(t)\right|^2 \leq C_\theta\theta^2, \qquad C_\theta \to 0, \tag{3.9}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbf{E}\left|y^\theta(t) - y(t) - y_1(t)\right|^2 \leq C_\theta\theta^2, \qquad C_\theta \to 0, \tag{3.10}$$

$$\mathbf{E}\int_0^T \left|z^\theta(t) - z(t) - z_1(t)\right|^2 ds \leq C_\theta\theta^2, \qquad C_\theta \to 0, \tag{3.11}$$

Preuve. Pour prouver (3.9) , nous observons que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t f(x+x_1,u^\theta)ds + \int_0^t \sigma(x+x_1)dW_s \\
&= \int_0^t \left[f\left(x,u^\theta\right) + \int_0^1 f_x\left(x+\lambda x_1,u^\theta\right)d\lambda x_1\right]ds \\
&+ \int_0^t \left[\sigma(x) + \int_0^1 \sigma(x+\lambda x_1)d\lambda x_1\right]dW_s \\
&= \int_0^t f(x,u)\,ds + \int_0^t \sigma(x)dW_s + \int_0^t \left[f_x x_1 + f\left(u^\theta\right) - f(u)\right]ds \\
&+ \int_0^t \sigma_x x_1 dW_s + \int_0^t \mathbf{A}^\theta ds + \int_0^t \mathbf{B}^\theta dW_s \\
&= x(t) - x_0 + x_1(t) + \int_0^t \mathbf{A}^\theta ds + \int_0^t \mathbf{B}^\theta dW_s,
\end{aligned}$$

dans lequel

$$\mathbf{A}^\theta = \int_0^1 \left[f_x\left(x+\lambda x_1,u^\theta\right) - f(x,u)\right]d\lambda x_1,$$

$$\mathbf{B}^\theta = \int_0^1 \left[\sigma(x+\lambda x_1) - \sigma_x(x)\right]d\lambda x_1.$$

Il découle facilement du Lemme 1 que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbf{E}\left\{\left(\int_0^t \mathbf{A}^\theta ds\right)^2 + \left(\int_0^t \mathbf{B}^\theta dW_s\right)^2\right\} = o\left(\theta^2\right). \tag{3.12}$$

■

Puisque

$$x^{\theta}(t) - x_0 = \int_0^t f\left(x^{\theta}, u^{\theta}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(x^{\theta}\right) dW_s,$$

on a

$$\begin{aligned} x^{\theta}(t) - x(t) - x_1(t) &= \int_0^t \mathbf{C}^{\theta}(s)\left(x^{\theta} - x - x_1\right) ds + \int_0^t \mathbf{D}^{\theta}(s)\left(x^{\theta} - x - x_1\right) dW_s \\ &+ \int_0^t \mathbf{A}^{\theta} ds + \int_0^t \mathbf{B}^{\theta} dW_s, \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{C}^{\theta}(s) = \int_0^1 f_x\left(x + x_1 + \lambda\left(x^{\theta} - x - x_1\right), u^{\theta}\right) d\lambda,$$

$$\mathbf{D}^{\theta}(s) = \int_0^1 \sigma_x\left(x + x_1 + \lambda\left(x^{\theta} - x - x_1\right), u^{\theta}\right) d\lambda.$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall's, (3.9) découle de la relation ci-dessus et (3.12).

Nous prouvons ensuite (3.10) et (3.11). On peut facilement vérifie que

$$\begin{aligned} &\int_t^T g\left(x + x_1, y + y_1, z + z_1, u^{\theta}\right) ds + \int_t^T \left(z(s) + z_1(s)\right) dW_s \\ &= h(x(T)) + h_x(x(T))\, x_1(T) - y(t) - y_1(t) + \int_t^T \mathbf{G}^{\theta} ds, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{\theta} &= \int_0^1 \left(g\left(x + \lambda x_1, y + \lambda y_1, z + \lambda z_1, u^{\theta}\right) - g_x\right) d\lambda x_1 \\ &+ \int_0^1 \left(g\left(x + \lambda x_1, y + \lambda y_1, z + \lambda z_1, u^{\theta}\right) - g_y\right) d\lambda y_1 \\ &+ \int_0^1 \left(g\left(x + \lambda x_1, y + \lambda y_1, z + \lambda z_1, u^{\theta}\right) - g_z\right) d\lambda z_1. \end{aligned}$$

Donc nous avons

$$\begin{aligned} -\left(y^{\theta}(t)-y(t)-y_1(t)\right) = & -\left(h\left(x^{\theta}(T)\right)-h(x(T))\right)+h(x(T))\,x_1(T) \\ & +\int_t^T\left[g\left(x^{\theta},y^{\theta},z^{\theta},u^{\theta}\right)-g\left(x+x_1,y+y_1,z+z_1,u^{\theta}\right)\right]ds \\ & +\int_t^T\left(z^{\theta}(s)-z(s)-z_1(s)\right)dW_s+\int_t^T \mathbf{G}^{\theta}ds. \end{aligned}$$

Ainsi, il sénsuit cett

$$\begin{gathered} \mathbf{E}\left|\left(y^{\theta}(t)-y(t)-y_1(t)\right)\right|^2+\mathbf{E}\int_t^T\left|z^{\theta}(t)-z(t)-z_1(t)\right|^2ds \\ =\mathbf{E}\{-\left(h\left(x^{\theta}(T)\right)\right)-h(x(T))+(x_1(T)) \\ -\textstyle\int_0^1\left[h_x(x(T)+\lambda x_1(T))-h_x(x(T))\right]d\lambda x_1(T)+\int_t^T\mathbf{G}^{\theta}ds \\ \textstyle\int_t^T\left[g\left(x^{\theta},y^{\theta},z^{\theta},u^{\theta}\right)-g\left(x+x_1,y+y_1,z+z_1,u^{\theta}\right)\right]ds\}^2. \end{gathered}$$

Àpartir le lemme (1) et (3.9), on voit ça

$$\sup_{0\le t\le T}\mathbf{E}\left(\int_t^T\mathbf{G}^{\theta}ds\right)^2=o\left(\theta^2\right),$$

$$\mathbf{E}\left[h\left(x^{\theta}(T)\right)-h(x(T))+x_1(T)\right]^2=o\left(\theta^2\right).$$

On obtient (3.10) et (3.11) en appliquant la méthode itérative utilisée dans le Lemme 1 à la relation ci-dessus.

Lemme 3.1.3 *Sous les hypothèses* (H_1) *et* $(H2)$, *l'inégalité variationnelle suivante détient :*

$$\mathbf{E}\gamma_y(y(0))\,y_1(0)\ge o(\theta).$$

Preuve. À partire du Lemme 2, nous avons l'estimation

$$\mathbf{E}\left[\gamma\left(y^{\theta}(0)\right)-\gamma(y(0)+y_1(0))\right]=o(\theta).$$

Donc

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \mathbf{E}\left[\gamma(y\left(0\right)+y_1\left(0\right))-\gamma\left(y\left(0\right)\right)\right]+o\left(\theta\right) \\
&= \mathbf{E}\gamma_y(y\left(0\right))y_1\left(0\right)+o\left(\theta\right).
\end{aligned}
$$

■

3.2 Le principe du maximum sous forme globale

Nous introduisons les équations adjointes et la fonction de Hmilton pour notre problème. A partir de l'inégalité variationnelle ontenire dans le Lemme 3, le prinsipe maximum peut être prouvé en appliquant la formul d'ITô.

les équations adjointes sont

$$
\begin{cases}
-dp = & \left(f_x^* p + g_x^* q + \sigma_x^* k\right) dt - kdW_t, \\
p\left(T\right) = & -h_x^*\left(x\left(T\right)\right) q\left(T\right), \\
-dq = & g_y^* q dt + g_z^* q dW_t, \\
q\left(0\right) = & -\gamma_y\left(y\left(0\right)\right),
\end{cases}
\tag{3.13}
$$

et la fonction Hamiltonienne est

$$
H\left(x,y,z,v,p,q,k,t\right) \triangleq \left\langle p, f\left(x,v,t\right)\right\rangle + \left\langle q, g\left(x,y,z,v,t\right)\right\rangle + \left\langle k, \sigma\left(x\right)\right\rangle,
$$

où

$$
\begin{aligned}
H &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m\right) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n\right) \\
&\times [0,T] \to \mathbb{R}^n,
\end{aligned}
$$

Les relations (3.13) peuvent être réécrites comme

$$\begin{cases} -dp &= H_x dt - k dW_t, \\ p(T) &= -h_x^*(x(T))\, q(T), \\ -dq &= H_y dt + H_z dW_t, \\ q(0) &= -\gamma_y(y(0)), \end{cases} \tag{3.14}$$

À partie de (3.14) et du Lemme 3, nous avons

Théor■me 3.2.1 *Supposons que* (H_1) *et* $(H2)$ *tiennent. Soit* $(u(\cdot), x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot))$ *une valeur optimale contrôle et sa trajectoire correspondante de* (3.1), $(p(\cdot), q(\cdot), k(\cdot))$ *soit le solution de* (3.14). *En suite , le principe du maximum est valable, à savoir*

$$\begin{aligned} &H(x(t), y(t), z(t), \upsilon, p(t), q(t), k(t), t) \\ &\geq H(x(t), y(t), z(t), u(t), p(t), q(t), k(t), t), \forall \upsilon \in U\ , \end{aligned} \tag{3.15}$$

Preuve. En appliquant la formule d'ITô à $\langle p, x_1 \rangle$ et $\langle q, y_1 \rangle$, il en résulte de (3.2) et (3.14) cette

$$\begin{aligned} o(\theta) &\leq \mathbf{E}\gamma_y(y(0))\, y_1(0) \\ &= \mathbf{E}\int_0^T [H\left(x(t), y(t), z(t), u^\theta(t), p(t), q(t), k(t)\right) \\ &- H(x(t), y(t), z(t), u(t), p(t), q(t), k(t))]dt. \end{aligned}$$

De l'inégalité ci-dessus, (3.15) peut être facilement dérivé. ■

3.3 Problème avec les contraintes d'état

Dans cette section, nous discutons brièvement du cas où il y a des contraintes d'état final sur les variables d'état :

$$\mathbf{EG}_1(x(T)) = 0,$$

$$\mathbf{EG}_1(x(T)) = 0,$$

où

$$\mathbf{G}_1 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_1}, \qquad n_1 < n,$$

$$\mathbf{G}_0 \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m_1}, \qquad m_1 < m.$$

Nous supposons

(H_3) $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1$ sont continuellement différentiables et $\mathbf{G}_{0_x}, \mathbf{G}_{1_x}$ sont bornés :

(H_4) le domaine de contrôle U est fermé.

Nous appliquons le principe variationnel d'Ekeland pour résoudre ce problème de contrôle optimale. Nous d'abord définir la metrique en Pour $u(\cdot), \upsilon(\cdot) \in \mathbf{U}_{ad}$, laissez

$$d(u(\cdot), \upsilon(\cdot)) = \mathbf{E}\{t \in [0,T] : u(t) \neq \upsilon(t)\}.$$

Avec cette métrique, $(\mathbf{U}_{ad}, d(\cdot,\cdot))$ est un espace complet.

Soit $(u(\cdot), x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot))$ une solution optimale du problème. Pour $\upsilon(\cdot) \in \mathbf{U}_{ad}$, nous déffinissons

$$\begin{aligned} J_\rho(\upsilon(\cdot)) = \{ & \mathbf{E}\left|\mathbf{G}_1(x(T;\upsilon))\right|^2 + \mathbf{E}\left|\mathbf{G}_0(y(0;\upsilon))\right|^2 \\ & + \left[\mathbf{E}\gamma(y(0;\upsilon)) - \mathbf{E}\gamma(y(0)) + \rho\right]^2\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On peut vérifier que $J_\rho(\upsilon(\cdot)) : \mathbf{U}_{ad} \to \mathbb{R}^1$ est continu,et

$$J_\rho(\upsilon(\cdot)) \geq 0, \qquad \forall \upsilon(\cdot) \in \mathbf{U}_{ad},$$

$$J_\rho(\upsilon(\cdot)) = \rho.$$

De tout évidence, nous avons

$$J_\rho(\upsilon(\cdot)) \leq \inf_{\upsilon(\cdot) \in \mathbf{U}_{ad}} J_\rho(\upsilon(\cdot)) + \rho.$$

D'après le principe variationnel d'Ekeland, il existe $\upsilon(\cdot) \in \mathbf{U}_{ad}$ attad tq

$$\begin{aligned}
&(1) \quad J_\rho(\upsilon_\rho(\cdot)) \leq J_\rho(u(\cdot)) = \rho, \\
&(2) \quad d(\upsilon_\rho(\upsilon(\cdot), u(\cdot)) \leq \sqrt{\rho}, \\
&(3) \quad J_\rho(\omega(\cdot)) \geq J_\rho(\upsilon_\rho(\cdot)) - \sqrt{\rho} d(\omega(\cdot),\ \upsilon_\rho(\cdot)), \quad \text{pour} \quad \omega(\cdot) \in \mathbf{U}_{ad}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Fair "variation de pointe"

$$\upsilon_\rho^\theta(t) = \begin{cases} \upsilon, & \tau \leq t \leq \tau + \theta, \\ \upsilon_\rho(t), & \text{si non,} \end{cases}$$

pour υ_ρ comme dans la section 3, il résulte de (3.16) que

$$J_\rho\left(\upsilon_\rho^\theta(\cdot)\right) - J_\rho(\upsilon_\rho(\cdot)) + \sqrt{\rho} d\left(\upsilon_\rho^\theta(\cdot); \upsilon_\rho(\cdot)\right) \geq 0. \tag{3.17}$$

soit (x_ρ, y_ρ, z_ρ) et $\left(x_\rho^\theta, y_\rho^\theta, z_\rho^\theta\right)$ les trajectoires correspondantes à $\upsilon_\rho(\cdot)$ et $\upsilon_\rho^\theta(\cdot)$ respectivement. Les équations variationnelles sont les mêmes que celles de la section 3, avec $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)) = (x_\rho(\cdot), y_\rho(\cdot), z_\rho(\cdot)),\ u(\cdot) = \upsilon_\rho(\cdot)$. Similaire à l'approche du Lemme 2, on peut montrer que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E}\left|x_\rho^\theta(t) - x_\rho(t) - x_{\rho 1}(t)\right|^2 \leq C_\theta \theta^2, \quad C_\theta \to 0,$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E}\left|y_\rho^\theta(t) - y_\rho(t) - y_{\rho 1}(t)\right|^2 \leq C_\theta \theta^2, \quad C_\theta \to 0,$$

$$\mathbf{E}\int_0^T \left|z_\rho^\theta(t) - z_\rho(t) - z_{\rho 1}(t)\right|^2 \leq C_\theta \theta^2, \quad C_\theta \to 0,$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
J_\rho^2\left(\upsilon_\rho^\theta(\cdot)\right) - J_\rho^2(\upsilon_\rho(\cdot)) &= 2\left\langle \mathbf{E}\mathbf{G}_1(x_\rho(T)), \mathbf{E}\mathbf{G}_{1x}(x_\rho(T))\, x_{\rho 1}(T)\right\rangle \\
&+ 2\left\langle \mathbf{E}\mathbf{G}_0(y_\rho(0)), \mathbf{E}\mathbf{G}_{0x}(y_\rho(0))\, y_{\rho 1}(0)\right\rangle \\
&+ 2\left\langle \mathbf{E}\mathbf{G}(\gamma(y_\rho(0)) - \gamma(y(0)) + \rho), \mathbf{E}\gamma_y(y_\rho(0))\, y_{\rho 1}(0) + o(\theta)\right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Laisser

$$
\begin{aligned}
h_{\rho 1}^{\theta} &= \frac{2\mathbf{E}\mathbf{G}_1\left(x_\rho\left(T\right)\right)}{J_\rho\left(\upsilon_\rho^{\theta}\left(\cdot\right)\right)+J_\rho\left(\upsilon_\rho\left(\cdot\right)\right)}, \\
h_{\rho 2}^{\theta} &= \frac{2\mathbf{E}\mathbf{G}_0\left(y_\rho\left(0\right)\right)}{J_\rho\left(\upsilon_\rho^{\theta}\left(\cdot\right)\right)+J_\rho\left(\upsilon_\rho\left(\cdot\right)\right)}, \\
h_{\rho 0}^{\theta} &= \frac{2\mathbf{E}\left[\gamma\left(y_\rho\left(0\right)\right)-\gamma\left(y\left(0\right)\right)+\rho\right]}{J_\rho\left(\upsilon_\rho^{\theta}\left(\cdot\right)\right)+J_\rho\left(\upsilon_\rho\left(\cdot\right)\right)}.
\end{aligned}
$$

puisque

$$
J_\rho\left(\upsilon\left(\cdot\right)\right)>0, \qquad J_\rho\left(\upsilon_\rho^{\theta}\left(\cdot\right)\right)>0, \qquad J_\rho\left(\upsilon_\rho^{\theta}\left(\cdot\right)\right)\rightarrow J_\rho\left(\upsilon\left(\cdot\right)\right)>0, \qquad \theta\rightarrow 0,
$$

il résulte de (17) et (18) that

$$
\begin{aligned}
&\left\langle h_{\rho 1}^{\theta},\mathbf{E}\mathbf{G}_{1x}\left(x_\rho\left(T\right)\right)x_{\rho 1}\left(T\right)\right\rangle+\left\langle h_{\rho 2}^{\theta},\mathbf{E}\mathbf{G}_{0x}\left(y_\rho\left(0\right)\right)y_{\rho 1}\left(0\right)\right\rangle \\
&+\left\langle h_{\rho 0}^{\theta},\mathbf{E}\gamma_y\left(y_\rho\left(0\right)\right)y_{\rho 1}\left(0\right)\right\rangle+\theta\sqrt{\rho}+\sigma\left(\theta\right) \\
&\geq 0.
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

Soit $\left(p_\rho^{\theta},k_\rho^{\theta},q_\rho^{\theta}\right)$ la solution de

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
-dp_\rho^{\theta} & = & \left[f_x^*\left(x_\rho,\upsilon_\rho\right)p_\rho^{\theta}+g_x^*\left(x_\rho,y_\rho,z_\rho,\upsilon_\rho\right)q_\rho^{\theta}+\sigma_x^*\left(x_\rho\right)k_\rho^{\theta}\right]dt-k_\rho^{\theta}dW_t, \\
p_\rho^{\theta}\left(T\right) & = & \mathbf{G}_{1x}\left(x_\rho\left(T\right)\right)h\rho_1^{\theta}-h_x^*\left(x_\rho\left(T\right)\right)q_\rho^{\theta}\left(T\right), \\
-dq_\rho^{\theta} & = & g_x^*\left(x_\rho,y_\rho,z_\rho,\upsilon_\rho\right)q_\rho^{\theta}dt+g_z^*\left(x_\rho,y_\rho,z_\rho,\upsilon_\rho\right)q_\rho^{\theta}dW_t, \\
q_\rho^{\theta}\left(0\right) & = & -\left(\mathbf{G}_{0x}\left(y_\rho\left(0\right)\right)h_{\rho 2}^{\theta}+\gamma_y\left(y_\rho\left(0\right)\right)h_{\rho 0}^{\theta}\right).
\end{array}
\right. \tag{3.20}
$$

En utilisant la formule d'Itô, (3.19) peut être réécrit comme

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\int_0^T\left[H\left(x_\rho,y_\rho,z_\rho,\upsilon_\rho,p_\rho^{\theta},q_\rho^{\theta},k_\rho^{\theta}\right)\right. \\
&-H\left(x_\rho,y_\rho,z_\rho,\upsilon_\rho,p_\rho^{\theta},q_\rho^{\theta},k_\rho^{\theta}\right)dt+\theta\sqrt{\rho}+o\left(\theta\right) \\
&\geq 0,
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

où

$$H(x,y,z,\upsilon,p,q,k) \triangleq \langle p,\ f(x,\upsilon)\rangle + \langle q, g(x,y,z,\upsilon)\rangle + \langle k, \sigma(x)\rangle .$$

puisque

$$\lim_{\theta\to\infty}\left(\left|h^{\theta}_{\rho 0}\right|^2 + \left\|h^{\theta}_{\rho 1}\right\|^2 + \left\|h^{\theta}_{\rho 1}\right\|^2\right) = 1,$$

il exixte une sous-séquence convergent $\left(h^{\theta}_{\rho 0}, h^{\theta}_{\rho 1}, h^{\theta}_{\rho 2}\right)$ avec

$$\left(h^{\theta}_{\rho 0}, h^{\theta}_{\rho 1}, h^{\theta}_{\rho 2}\right) \to \left(h_{\rho 0}, h_{\rho 1}, h_{\rho 2}\right), \quad \theta \to 0, \tag{3.22}$$
$$\left|h_{\rho 0}\right|^2 + \left\|h_{\rho 1}\right\|^2 + \left\|h_{\rho 2}\right\|^2) = 1.$$

Soit (p_ρ, q_ρ, k_ρ) la solution de

$$\begin{cases} -dp_\rho &= \left[f^*_x(x_\rho,\upsilon_\rho)\,p_\rho + g^*_x(x_\rho,y_\rho,z_\rho,\upsilon_\rho)\,q_\rho + \sigma^*_x(x_\rho)\,k_\rho\right]dt - k_\rho dW_t, \\ p_\rho(T) &= \mathbf{G}_{1x}(x_\rho(T))\,h\rho_1 - h^*_x(x_\rho(T))\,q_\rho(T), \\ -dq_\rho &= g^*_x(x_\rho,y_\rho,z_\rho,\upsilon_\rho)\,q_\rho dt + g^*_z(x_\rho,y_\rho,z_\rho,\upsilon_\rho)\,q_\rho dW_t, \\ q_\rho(0) &= -\left(\mathbf{G}_{0x}(y_\rho(0))\,h_{\rho 2} + \gamma_y(y_\rho(0))\,h_{\rho 0}\right). \end{cases}$$

on peu facilement prouver que

$$p^{\theta}_{\rho} \to p_\rho \quad \text{dans} \quad \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbb{R}^n).$$
$$q^{\theta}_{\rho} \to q_\rho \quad \text{dans} \quad \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbb{R}^m).$$
$$k^{\theta}_{\rho} \to k_\rho \quad \text{dans} \quad \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}\left(0,T,\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^n\right)\right).$$

Donc de (3.21) nous avons

$$H(x_\rho,y_\rho,z_\rho,\upsilon,p_\rho,q_\rho,k_\rho) - H(x_\rho,y_\rho,z_\rho,\upsilon,p_\rho,q_\rho,k_\rho) \tag{3.23}$$
$$+\sqrt{\rho} \geq 0 \quad \forall \upsilon \in U.$$

Dz même, à partir de (3.22), ilexiste une sous- séquence de $(h_{\rho 0}, h_{\rho 1}, h_{\rho 2})$ qui converge vers (h_0, h_1, h_2) avec

$$\left\|h_0\right\|^2 + \left\|h_1\right\|^2 + \left\|h_2\right\|^2 = 1.$$

puisque $\upsilon_\rho(\cdot) \to u(\cdot) \quad \rho \to 0$, conséquent

$$\begin{aligned}
x_\rho(\cdot) \to x(\cdot) &\quad \text{dans} \quad \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbb{R}^n),\\
y_\rho(\cdot) \to y(\cdot) &\quad \text{dans} \quad \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbb{R}^m),\\
z_\rho(\cdot) \to z(\cdot) &\quad \text{dans} \quad \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}\left(0,T,\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^n\right)\right),\\
x_{\rho 1}(\cdot) \to x_1(\cdot) &\quad \text{dans} \quad \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbb{R}^n),\\
y_{\rho 1}(\cdot) \to y_1(\cdot) &\quad \text{dans} \quad \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbb{R}^m),\\
z_{\rho 1}(\cdot) \to z_1(\cdot) &\quad \text{dans} \quad \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}\left(0,T,\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^n\right)\right),
\end{aligned}$$

où $(x_1(\cdot), y_1(\cdot), z_1(\cdot))$ est la solution des équations variationnnelles dont les formes sont le même que (3.2).

Nous introduisons les équations les équations adjointes des équations variationnelles ci-dessus comme

$$\begin{cases}
-dp &= \left[f_x^*(x,\upsilon)\,p + g_x^*(x,y,z,\upsilon)\,q + \sigma_x^*(x)\,k\right]dt - kdW_t,\\
p(T) &= \mathbf{G}_{1x}(x(T))\,h_1 - h_x^*(x(T))\,q(T),\\
-dq &= g_x^*(x,y,z,\upsilon)\,qdt + g_z^*(x,y,z,\upsilon)\,qdW_t,\\
q(0) &= -\left(\mathbf{G}_{0x}(y(0))\,h_2 + \gamma_y(y(0))\,h_0\right).
\end{cases} \tag{3.24}$$

On peut prouver que

$$\begin{aligned}
p_\rho(\cdot) \to p(\cdot) &\quad \text{dans} \quad \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbb{R}^n),\\
q_\rho(\cdot) \to q(\cdot) &\quad \text{dans} \quad \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbb{R}^m),\\
k_\rho(\cdot) \to k(\cdot) &\quad \text{dans} \quad \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}\left(0,T,\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^n\right)\right),
\end{aligned}$$

Soit $\rho \to 0$ dans (3.23). Alors l'inégalité suivante est vraie

$$\begin{aligned}
&H(x(t), y(t), z(t), \upsilon, p(t), q(t), k(t)) - \\
&H(x(t), y(t), z(t), u(t), p(t), q(t), k(t))\\
&\geq 0, \quad \forall \upsilon \in U.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 3.3.1 *Supposons que* $(H_1),(H_2),(H_3),(H_4)$, *tiennent. Soit* $(u(\cdot),x(\cdot),y(\cdot),z(\cdot),)$ *un solution optimale du problème contrôle optimal indiqué au début de cette section, et* $(p(\cdot),q(\cdot),k(\cdot))$ *soit la solution correspondante des équations adjointes* (3.24). *ensuite le principe du maximum* (3.25) *est valable.*

Remarque 3.3.1 *Pour le système stochastique direct dans lequel le contrôle entre dans la codiffusion efficace, le principe du maximum en forme globale peut être trouvé dans Arkin et Saksonov* [4], *Bismul* [6] , *Cadennillas et Karatzas* [7], *et Peng* [12] . *Mais pour le futur et système stochastique arrière, un tel problème de contrôle optimale reste un problème ouvert.*

Conclusion

Dan ce travail, un problème du contrôle optimal stochastique pour des équations differentielles stochastiques progrssive retrograde non linear, fiablement couplée **EDSPRs** a été discuté. Des conditions necessaires pour l'optimalité pour les systèmes gouverné par des **EDSPRs** sont prouvées par des techniques de perturbation forte et la formule d'Ito.

Bibliographie

[1] Monique Jeannblanc. (2006). Cours de calcul stochastique. Master 2IF EVRY. Lecture Notes.

[2] W. Xu (1995) Stochastic maximum principle for optimal control problem of forward and backward system. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B.* Applied Mathematics, 37, pp 172-185.

[3] M. Hafayed (2009), Gradient généralisés et contrôle stochastique, Université Mohamed khider Biskra, pp 102.

[4] J. Yong and X.Y. Zhou (1999), *Stochastic controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations.* Springer Verlag.

[5] Ma, J. and Yong J. : *Forward-Backward Stochastic Differential Equations and Their Applications.* Lecture Notes in Mathematics, Springer (1999).

[6] H. Pham (2005), Optimisation et Contrôle Stochastique Appliqués à la Finance.Vol. 61, Springer Verlage.

Annexe B : Abréviations et Notations

$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$	Espace de probabilité filltré.
EDSPR	Equation différentielle stochastique progressive retrograde
MB	Mouvement Brownien.
$P-p.s$	Presque sûrment pour la mesure de probabilité P.
$u(\cdot)$	Contrôle stochastique.
$(p(t), q(t), k(t))$	Processus adjoint.
$H(t,x,y,z,u,p,q,k)$	L'Hamiltonian.
L'inegalitie de Gronwall	$x(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^{t} k(s)\, x(s)\, ds \qquad t \in [0,T]$,
	avec $k(t) \geq 0$,
	$x(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^{t} (h(s)\, k(s) \exp\left[\int_{s}^{t} k(u)\, du\right])ds.$