République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

Master En Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

KEBBAS Hanane

Titre :

Principe du maximum pour les problèmes de contrôle optimal partiellement observé et avec retard

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**TAMER Lazher**	U. Biskra	Président
Dr.	**LAKHDARI Imad Eddine**	U. Biskra	Encadreur
Dr.	**ABBA Abedelmajid**	U. Biskra	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents

Qui veillent sans cesse sur moi avec leurs prières et leurs recommandations. Que Dieu le tout puissant les protège et leur réserve une longue et meilleure vie.

Mes très chers frères et sœurs

Mon fiancé :Abdelkader

Mes chères amies

Mes collègues de la promotion sans exception.

REMERCIEMENTS

Je remercie dieu tout puissant de m'avoir donné la forces, le courage et la patience d'arrivé a la . . . n des études supérieurs.

Je tiens tout particulièrement à remercier le docteur **LAKHDARI Imad Eddine** qui a encadré

mon travail, qu'il toujours montré à l'écoute et disponible tout au long de la réalisation de se mémoire, ainsi pour l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

Un grand merci également pour les membres du jury **Dr.ABBA Abedelmajid** et **Dr.TAMER Lazher** qui m'ont fait l'honneur d'évaluer ce travail.

Je présente tous mes remerciements aux enseignants du département -MATH- sans exceptions qui ont contribué à ma formation, ainsi que tous ce qui m'ont soutenue et m'ont

aidée tout le long de cette étude et toutes les personnes qui ont contribué directement ou indirectement à ce travail et à tous ceux qui ont montré et disposé à mes questionnements.

Je remercie toute ma famille pour leur soutien moral et leur aide.

Table des matières

Introduction

Un système stochastique de contrôle dont l'état est décrit par la solution d'une équation différentiel stochastique avec retard (**SDDE**) est appelé système avec retardé. Ce type de système émerge naturellement car certains phénomènes ont propriétés dépend du passé, c'est-à-dire que leur comportement à l'instant t ne dépend seulement de la situation actuelle, mais également de leur passé.

Les problèmes de contrôle optimal stochastiques avec retard ont fait l'objet baeucoup d'attentions au cours des dernières années depuis les travaux initiaux de Kolmanovsky et Maizenberg [7], où le système de retard est linéaire avec une fonction de coût quadratique. Un principe du maximum stochastique suffisant.avec retard a été fait par Øksendal et Sulem [11]. La programmation dynamique avec retard a été fait par par Larssen [8].

Récemment, Peng et Yang [14] ont introduit un nouveau type d'équations différentielles stochastiques, appelées équations différentielles rétrogrades anticipées (**ABSDEs**) et ont fourni une nouvelle méthode permettant de traiter le problème du contrôle optimal avec retard. Les **ABSDEs** peuvent être considérées comme une généralisation des **BSDE** classiques, introduites par Bismut [2] sous forme linéaire et généralisées au cas non linéaire par Pardoux et Peng [13]. Par la relation de dualité entre **SDDEs** et **ABSDEs**, Chen et Wu [3] ont obtenu un principe du maximum pour le problème de contrôle optimal stochastique avec retard.

Notre objectif dans ce mémoire est de faire une étude détaillée sur les problèmes de contrôle partiellement observé et avec retard. Nous utilisons le théorème de Girsanov pour transformer notre problème de contrôle optimal en un cas complètement observable pour obtenir le principe du maximum partiellement observé. Cette étude est basé sur le travail de Wu et Shu [20] (S. Wu and L. Shu, Maximum principle for partially-observed optimal control problems of stochastic delay systems, Journal of Systems Science and Complexity 30 (2017), no. 2, 316-328).

Nous présentons notre mémoire de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous donnons un bref rappel sur la théorie du calcul stochastique qui permet d'introduire les outils essentiels pour le deuxieme et le troisième chapitres.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions le principe du maximum pour les problèmes de contrôle partiellement observé et avec retard.

Le dernier chapitre, nous appliquons le principe du maximum au problème de contrôle optimal linéaire-quadratique partiellement observé et avec retard.

Chapitre 1

Généralité sur le calcul stochastique

1.1 processus stochastique

Définition 1.1.1 (Processus stochastique) *Un processus stochastique est une famille $X = (X_t)_{t\in T}$ de variables aléatoires à valeur dans un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ est indéxée par le temps t. Le paramétre de temps t variant dans I.*

1. *Si t fixe : X_t est un v.a définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeur dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.*
2. *Si ω fixe : X_t appelé la trajectoire de $(X_t)_{t\in T}$ associée à ω.*

1. Si $I \subseteq \mathbb{N}$, on dit que le processus a temp discret.
2. Si $I \subseteq \mathbb{R}$, on dit que le processus a temp continue.

Définition 1.1.2 (Filtration) *Une filtration $\mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante de sous-tribus $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour tous $0 \leq s \leq t$ dans T :*

1. Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$est appelé espace de probabilité filtré.
2. On dit que la filtration est naturelle (ou canonique) de processus X si

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t), \qquad t \in T,$$

c'est la plus petite σ-algébre par rapport à laquelle X_s est mesurable pour tous $0 \leq s \leq t$.

3. On dit qu'une filtration $\mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est continue à droite si

$$\mathcal{F}_{t^+} := \cap_{s\geq t}\mathcal{F}s = \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.1.3 (Processus adapté) *Un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est dit adapté par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \in T$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Définition 1.1.4 (Processus a trajectoire continue) *Un processus (X_t) est a trajectoire continue ou simplement processus continue si*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; t \rightarrow X_t(\omega) \text{ est continue}\}) = 1$$

Définition 1.1.5 (Processus progressivement mesurable) *Un processus $(X_t)_{t\in I}$ est dit progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \in T$ l'application*

$(s, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$ est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de la tribu produit $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

Définition 1.1.6 (Processus càdlàg) *Un processus X est dit càdlàg (continue à droite et pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et prouvues de limite à gauche pour presque tout ω.*

Remarque 1.1.1 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

Proposition 1.1.1 *Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continués à droite (ou à gauche), alors X est mesurable et progressivement mesurables s'il est de plus adapté.*

Définition 1.1.7 *On dit que le processus X_t est de Markov par rapport a une filtration canonique $\mathcal{F}_t$ si pour tout fonction F définie sur $\mathbb{R}^n$, et pour tout $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$.*

Définition 1.1.8 (Mouvement Brownien) *on appelle $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifier :*

(i) *Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

(ii) *Si $s \leq t$, $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s$.*

(iii) *Si $s \leq t$, la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0 = X_{t-s}$.*

Définition 1.1.9 (Mouvement Brownien standard) *Soit X un processus stochastique, on dit que X est un mouvement Brownien standard si :*

$$W_0 = 0 \quad \mathbb{P} - p.s, \qquad \mathbb{E}[W_t] = 0 \quad et \quad \mathbb{E}[W_t^2] = t.$$

Dans ce cas la loi de X_t est une loi normale.

Proposition 1.1.2 *Soit W un mouvement Brownien Standard :*

1. *Pour tout $t \geq 0, X_t = tW_{\frac{1}{t}}$, alors (X_t) est un MB.*
2. *Soit c réel positive $(c > 0)$,on a $Z_t = cW_{\frac{t}{c^2}}$, donc (Z_t) est un mouvement Brownien.*
3. *Pour tout $s > 0, \{W_{t+s} - W_s\}_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien indépendant de $\sigma(W_u, u \leq s)$.*

Théorème 1.1.1 *Un processus W est un mouvement Brownien ssi c'est un processus Gaussien continue centré de fonction de covariance :*

$$cov(W_t, W_s) = \mathbb{E}(W_t W_s) = s \wedge t = \min(t, s).$$

Proposition 1.1.3 *Soit W un MB alors presque sûrement on a :*

– *W n'est pas différentiable en aucun point t.*

– *W n'est pas à variation finie en aucun point t.*

Définition 1.1.10 (Temp d'arrêt) *Une variable aléatoire* $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ *est un temp d'arrêt (par rapport a la filtration* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *si pour* $t \in T$ *:*

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega \ / \ \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.1.11 (Martingales) *Un processus* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est dit martingale si :*

1. *Pour tout* $t \geq 0$, M_t *est* $\mathcal{F}_t-$*adapté ;*
2. *Pour tout* $t \geq 0$, M_t *est intégrable, i.e.* $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$;
3. *Pour tout* $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) = M_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$

On définit de manière similaire sur-martingale si (iii) est remplacé par

$$\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \leq M_s, , \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Et sous-martingale si (iii) est remplacé par

$$\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \geq M_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Proposition 1.1.4 *Soit* $(W_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement Brownien*

(i) $W_t^2 - t$ *est une martingale.*

(ii) *Pour tout* $\sigma \in \mathbb{R}, \exp(\sigma W_t - \sigma^2 \frac{t}{2})$ *est une martingale.*

Remarque 1.1.2 *Le mouvement Brownien standard* $(W_t, t \geq 0)$ *est une martingale par rapport à sa filtration naturelle* $\mathcal{F}_t^B = \sigma(W_s, s \leq t)$.

Théorème 1.1.2 (Théorème de représentation des martingales) *Soit* W_t *un mouvement Brownien sur un espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$,*et* M_t *une martingale* $\mathcal{F}_t$*-adapté. Alors, il existe un processus adapté* Z_s *tel que :*

$$M_t = M(0) + \int_0^t Z(s)dW_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Définition 1.1.12 (Martingale local) *Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté à trajectoire continue à droite. On dit que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale local s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$, $\mathbb{P}-p.s.$ et pour tout n, $M^{\tau_n} 1_{\tau_n > 0}$ est une martingale.*

Définition 1.1.13 (Variation finie, bornée et quadratique) *Soit $[0,T]$ un intervalle et $\pi_n = 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n = T$, une subdivision de $[0,T]$ de pas*

$$\|\pi_n\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left|t_i^n - t_{i-1}^n\right|.$$

On appelle variation infinitésimal d'ordre p d'un processus X indexé par $[0,T]$ associé a π_n :

$$V_T^p(\pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left|X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right|^p.$$

Si $V_T^p(\pi_n)$ admet une limite dans (en un certain sens) lorsque $\|\pi_n\|_\infty \to_{n\to\infty} 0$ et la limite ne dépond pas de la subdivision choisie, on appelle $V_T^p = \lim_{\|\pi_n\|_\infty \to 0} V_T^p(\pi_n)$ variation d'ordre p.

a) *Si $p = 1$, la limite V_T^1 est appelée variation totale de X*

- *Si $\forall T$, V_T^1 est fini on dit que X est à variation finie.*
- *Si $\forall T$, V_T^1 est borné on dit que X est à variation finie.*

b) *Si $p = 2$, la limite est appelée variation quadratique de X.*

1.2 Calcul d'Itô

1.2.1 Intégrale stochastique

Il s'agit d'une intégrale définie de façon similaire à l'intégrale de Riemann comme limite d'une somme de Riemann. Si on se donne un processus de Wiener (ou mouvement

Brownien), $W : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ ainsi que $x : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ un processus stochastique adapté à la filtration naturelle associée à W_t, alors l'intégrale d'Itô

$$\int_0^T \phi_s dW_s \text{ est définie par la limite en moyenne quadratique de} \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité et W_t un mouvement Brownien sur cet espace, et la filtration naturelle du mouvement Brownien $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$.
l'objectif c'est définir l'intégrale $\int_0^t \phi_s dW_s$ pour des processus ϕ :

1.Cas étagé

On dit ϕ est un processus étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_i,
$0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et une suite de variable aléatoire ϕ_i telle que ϕ_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables de carré intégrables $\phi_t = \phi_i$ pour tout $t \in]t_i, t_{i+1}]$, soit

$$\phi_s(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(\omega) 1_{]t_i, t_{i+1}]}(s).$$

On définit

$$\int_0^\infty \phi_s dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

On sais que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s dW_s\right] = 0 \text{ et } Var\left[\int_0^\infty \phi_s dW_s\right] = \left[\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right].$$

Alors

$$\int_0^t \phi_s dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1} \wedge t} - W_{t_i \wedge t}).$$

2.Cas général

Soit l'ensemble $\mathcal{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ des processus ϕ $\mathcal{F}_t$-adaptés càglàd (continus à gauche limite à droite).

Si ϕ un meilleur processus, il existe (ϕ_s^n) une suite de processus étagés telle que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\phi_s^n - \phi_s^2) ds\right] \to 0,$$

quand n tend vers ∞.

Ainsi, pour tout $t > 0$ il existe une v.a $I_t(\phi) = \int_0^\infty \phi_s dW_s$ de carré intégrable.

On va montrer que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s dW_s\right] = 0.$$

On a :

$$I_t(\phi) = \int_0^\infty \phi_s dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}),$$

$I_t(\phi)$ est gaussien, car (W_t) est un processus gaussien alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_t(\phi)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right], \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}), \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = 0$ car $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ sont à acroissement indépendantes.

Pour montrer que

$$var[I_t(\phi)] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right].$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
var[I_t(\phi)] &= \mathbb{E}(I_t(\phi)^2) - \mathbb{E}(I_t(\phi))^2, \\
&= \mathbb{E}(I_t(\phi)^2), \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s^2 dW_s\right], \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right)^2\right], \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\phi_i)^2 \mathbb{E}\left[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right], \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\phi_i)^2 (t_{i+1} - t_i), \\
&= \int_0^\infty \phi_s^2 ds.
\end{aligned}$$

1.2.2 Propriétés d'intégrale stochastique

Il y'a quelque propriétés sur l'intégrale stochastique les plus important sont :

1. Linéairité :
$$\int_0^t \left(a\phi_s^1 + b\phi_s^2\right) dW_s = a\int_0^t \phi_s^1 dW_s + b\int_0^t \phi_s^2 dW_s.$$

2. Additivité : pour $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$
$$\int_s^t \phi_v dW_v = \int_s^u \phi_v dW_v + \int_u^t \phi_v dW_v.$$

3. Propriétés de martingale : pour tout processue ϕ les processus :
$$t \to I_t(\phi), \quad \text{et} \quad t \to I_t(\phi)^2 - \int_0^t \phi_s ds,$$

sont des $(\mathcal{F}_t^W)$ -martingale continues.

$$\mathbb{E}[(I_t(\phi) - I_s(\phi))^2 \mid \mathcal{F}_s^W] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_u^2 du/\mathcal{F}_s^W\right].$$

4. Si $(x_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et $\mathbb{E}(\int_0^T |x_s|^2 ds) < +\infty$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t |x_s|^2 dW_s\right|^2\right] \leq 4\left(\int_0^T |x_s|^2 ds\right),$$

5. Isométrie :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t \phi_s^2 ds\right).$$

1.2.3 Processus d'Itô

Définition 1.2.1 (processus d'Itô) *Un processus d'Itô est un processus de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dW_s \quad \mathbb{P}-p.s,$$

avec X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, φ et θ deux processus $\mathcal{F}_t$-adapté vérifiant les conditions d'intégrabilité :

$$\int_0^t |\varphi_s| ds < +\infty \quad et \quad \int_0^t \|\theta_s\|^2 ds < +\infty,$$

où le coefficient φ est le drifte ou la dérivée et θ est le coefficient de diffusion.

On note de manière infinitésimale :

$$dX_t = \varphi_s ds + \theta_s dW_s.$$

1.2.4 Formule d'Itô

Théorème 1.2.1 (première formule d'Itô) *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 à dérivées bornées. Alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)ds,$$

Théorème 1.2.2 (deuxième formule d'Itô) *Soit f une fonction de C^2, on a alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\varphi_s ds + \int_0^t f'(X_s)\theta_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\theta_s^2 ds.$$

La notation infinitésimale de cette relation est donc :

$$df(X_t) = f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X\rangle_s.$$

Remarque 1.2.1 *La formule dItô s'énonce également dans le cas multidimentionnel (ie $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $W(t)$sont des matrices)*

$$\begin{aligned} f(t,X_t) &= f(0,X_0) + \textstyle\int_0^t f_s(s,X_s)\varphi_s ds + \int_0^t f_x(s,X_s)\varphi_s ds \\ &+ \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\theta(s)^T f(s,X(s))\theta(s)\right] + \textstyle\int_0^t f_x(s,X_s)\theta_s dW_s \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 (Formule d'intégration par parties) *Si X et Y sont des processus d'Itô, alors*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X,Y\rangle_t.$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par partie.

Proposition 1.2.2 (Formule d'Itô pour les semi-martingales) *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une semi-martingale. Pour toute fonction $f \in C^{1,2} : [0,T]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$
\begin{aligned}
f(t, X_t) - f(t, X_0) &= \int_0^t \frac{\partial f}{ds}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{dx}(s, X_{s^-})\, dX_s \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{dx^2}(s, X_{s^-})\, d[X, X]_s^c \\
&+ \sum_{0 \le s \le t, \Delta X_s \neq 0} \left[f(s, X_s) - f(s, X_{s-}) - \Delta X_s \frac{\partial f}{dx}(s, X_{s-}) \right],
\end{aligned}
$$

où

$$d[X, X]_s = d[X, X]_s^c + \sum_{0 \le s \le t} (\Delta X_s)^2 .$$

1.3 Equations différentielles stochastiques(EDS)

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une perturbation de l'équation différentielle ordinaire (EDO) avec un terme aléatoire modélisant un bruit autour de phénomène déterministe, la parturbation la plus simple est l'ajout d'un Brownien.

Définition 1.3.1 *Une équation différentielle stochastique (EDS) donnée par :*

$$x_t = x + \int_0^t b(s, x_s) ds \; + \int_0^t \sigma(x_s) dW_s,$$

ou sous forme

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dW_t, \\ x_0 = x, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\{W; t \ge 0\}$ *est un mouvement Brownien d-dimensionnel. Le coefficient* $b(t, x_t)$ *est appelé dérive et le coefficient* $\sigma(t, x_t)$ *de* dW_t *est appelé terme de diffusion.*

Pour trouver une solution (forte) à l'équation (1.1) signifie trouver une processus stochastique (x_t) $t \ge 0$ continue $\mathcal{F}_t$-adapté qui vérifie :

1. Pour tout $t \geq 0$, les intégrales $\int_0^t b(s,x_s)ds$ et $\int_0^t \sigma(s,x_s)dW_s$ sont bien définies :

$$\int_0^t |b(s,x_s)|\, ds < +\infty \text{ et } \int_0^t |\sigma(s,x_s)|^2\, ds < +\infty, \quad \mathbb{P}-p.s.$$

2. (x_t), $t \geq 0$ vérifie (1.1) :

$$x_t = x + \int_0^t b(s,x_s)ds \; + \int_0^t \sigma(s,x_s)dW_s, \quad \mathbb{P}-p.s.$$

1.3.1 Existence et unicité

Le théorème dessous donne les conditions suffisantes sur b et σ pour avoir un résultat l'existence et l'unicité du solution de l'équation (1.1).

Théorème 1.3.1 (d'existence et d'unicité) *Si b et σ sont des fonctions continues telles qu'il existe $k < +\infty$:*

1. *Conditons de lipschitz :* $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq k\,|x-y|$.
2. *Conditons de coissance linéaire ;* $|b(t,x) - \sigma(t,x)| \leq k(1+|x|)$.
3. $\mathbb{E}(x^2) < +\infty$.

Alors : pour tout $t \geq 0$ l'équation (1.1) admet solution unique dans $[0,T]$. D'autre part la solution $(x_s)_{0\leq s\leq T}$ vérifie

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T} |x_s|^2) < +\infty.$$

Preuve. a- Pour démontrer l'existence d'une solution forte, on définit l'espace S_c^2 par :

$$S_c^2 = \left\{ \begin{array}{c} \text{les processus progressivement mesurables tel que } \mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T} |x_s|^2) < +\infty \text{ continue,} \\ \text{muni de } \|x\| = \mathbb{E}\left(\left[\sup_{0\leq s\leq T} |x_s|^2\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty\right). \end{array} \right\}$$

Pour $x \in S_c^2$ posons, pour tout $t \in [0,T]$

$$\Psi(x_t) = x + \int_0^t b(s,x_s)ds \; + \int_0^t \sigma(s,x_s)dW_s,$$

le processus $\Psi(x)$ est bien définie.et est continu si $x \in S_c^2$.

Soient x et y deux éléments de S_c^2 on utilisant le fait que $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ on a pour tout $0 \leq t \leq u \leq T$,

$$|\Psi(x_t) - \Psi(y_t)|^2 \leq 2 \sup_{0\leq t\leq u} \left| \int_0^t (b(s,x_s)ds - b(s,y_s))\, ds \right|^2 + 2 \sup_{0\leq t\leq u} \left| \int_0^t (\sigma(s,x_s)ds - \sigma(s,y_s))\, dW_s \right|^2.$$

En utilise les propriétés (4 et 5) de l'intégrale stochastique alors on obient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |\Psi(x_t) - \Psi(y_t)|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^u |b(s,x_s)ds - b(s,y_s)|\, ds\right)^2\right] \\ &+ 8\mathbb{E}\left[\int_0^u |\sigma(s,x_s) - \sigma(s,y_s)|^2\, ds\right].\end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder donne alors la majoration

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |\Psi(x_t) - \Psi(y_t)|^2\right] &\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^u |b(s,x_s) - b(s,y_s)|^2\, ds\right] \\ &+ 8\mathbb{E}\left[\int_0^u |\sigma(s,x_s)ds - \sigma(s,y_s)|^2\, ds\right].\end{aligned}$$

Comme les fonction b et σ sont lipschiz

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |\Psi(x_t) - \Psi(y_t)|^2\right] \leq 2k^2(T+4)\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq r} |x_t - y_t|^2\, dr\right]. \tag{1.2}$$

De plus, notant 0 le processus nul, on a, comme $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$,
$|\Psi(0)|^2 \leq 3x^2 + 3\sup_{0\leq t\leq T} \left|\int_0^t b(s,0)ds\right|^2 + 3\sup_{0\leq t\leq T} \left|\int_0^t \sigma(s,0)dW_s\right|^2$,
d'où l'on tire en utilisant l'inégalité de Doob et la croussance linéaire de b et σ,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\Psi(0)|^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}(x^2) + K^2T^2 + 4K^2T\right), \tag{1.3}$$

Les estimations (1.2) et (1.3) montrant alors que le processus $\Psi(x)$ appartient à S_c^2 dés que x appartient à S_c^2.

On définit alors par récurrence une suit de processus de S_c^2 en posant

$$x_0 = 0, \quad \text{et}, \quad x^{n+1} = \Psi(x^n), \text{ pour } n \geq 0.$$

On obtient (1.2), pour tout $n \geq 0$ notant par C à la place de $2k^2(T+4)$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2\right] \leq \frac{C^nT^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^1\right|^2\right],$$

et notant D le majorant de l'inégalité (1.3),

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2\right] \leq D\frac{C^nT^n}{n!}.$$

Il résulte de cette dernière inégalité que

$$\sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2\right\|_{L^1} \leq \sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2\right\|_{L^2} \leq \sqrt{D}\frac{(CT)^{n/2}}{\sqrt{n!}} < \infty.$$

Alors le série $\sum_{n\geq 0}\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|$ converge $\mathbb{P} - p.s$ et donc, $\mathbb{P} - p.s$, x^n converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus continue. De plus $x \in S_c^2$. On vérifier que x est solution de l'EDS (1.1) en passant à la limite dans la définition $x^{n+1} = \Psi(x^n)$.
Si x et y deux solution de (1.1) dans S_c^2 alors : $x = \Psi(x_t)$ et $y = \Psi(y_t)$. L'inégalité (1.2) alors donne pour tout $u \in [0T]$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|x_t - y_t|^2\right] \leq 2K^2(T+4)\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq r}|x_s - y_s|^2\right]dr,$$

le lemme de Gronwall donne

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|x_t - y_t|^2\right] = 0,$$

ce si implique que x et y sont indistinguables i.e. $\mathbb{P}(x_t = y_t, \forall 0 \leq t \leq T)$. ■

Chapitre 2

Principe du maximum

2.1 Formulation du problème

Dans ce chapitre, on note $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien à n dimensions, $\mathbb{R}^{n\times d}$ la collection de matrices $n \times d$. Pour un espace euclidien donné, on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$. (resp $|\cdot|$) le produit scalaire (resp. norme). L'exposant τ désigne la transposition de vecteur ou de matrice.

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité filtré complet muni d'une filtration naturelle

$$\mathcal{F}_t = \sigma \{W(s), Y(s) ; \quad 0 \leq s \leq t\},$$

où $W(\cdot)$ et $Y(\cdot)$ sont deux mouvements browniens standards indépendants à valeur dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^r$ respectivement. Soit $\mathcal{F} := \mathcal{F}_t$, et soit $T > 0$ est le temps finie, et $0 < \delta \leq T$ est le temps de retard constant. $\mathbb{E}$ indique l'espérance sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$.

De plus, on note :

– $L^2(r, s, \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions déterministes $\varphi(t)$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$ satisfaisant

$$\int_r^s |\varphi(t)|^2 \, dt < +\infty.$$

– $L^2(\mathcal{F}_t; \mathbb{R}^n)$ l'espace des variables aléatoires ς qui sont $\mathcal{F}_t$-mesurables à valeur dans $\mathbb{R}^n$

satisfaisant

$$\mathbb{E}\left|\varsigma\right|^2 < +\infty.$$

– $C\left([-\delta,0];\mathbb{R}^n\right)$ l'espace des fonctions continues à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

– $L^2_F\left(r,s;\mathbb{R}^n\right)$ l'espace des processus $\psi(\cdot)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$et $\mathcal{F}_t$-adaptés satisfaisant

$$\mathbb{E}\int_r^s \left|\psi(t)\right|^2 dt < +\infty.$$

On définit $\mathcal{F}_t^Y = \sigma\left\{Y(s);0\leq s\leq t\right\}$. Soit U un sous-ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^k$. Une variable de contrôle $\upsilon:[0,T]\times\Omega\rightarrow U$ est appelée admissible, si elle est $\mathcal{F}_t^Y$ -adaptée et satisfait $\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left|\upsilon_t\right|^m < +\infty$, $m=2,3\cdots$. L'ensemble des variables de contrôle admissibles est désigné par U_{ad}.

Pour $\upsilon(\cdot)\in U_{ad}$, considérons le système de contrôle stochastique suivant avec retard :

$$\begin{cases} dx^\upsilon(t) = b\left(t,x^\upsilon(t),x^\upsilon(t-\delta),\upsilon(t)\right)dt + \sigma\left(t,x^\upsilon(t),x^\upsilon(t-\delta),\upsilon(t)\right)dW(t), & t\in[0,T], \\ x^\upsilon(t) = \eta(t), \qquad t\in[-\delta,0], \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\eta\in C\left([-\delta,0];\mathbb{R}^n\right)$ est l'état initial de $x(\cdot)$ et

$$b:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times U\rightarrow\mathbb{R}^n,$$

$$\sigma:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times U\rightarrow\mathbb{R}^{n\times d}.$$

Nous supposons que le processus d'état $x^\upsilon(\cdot)$ ne peuvent pas être observés directement, mais les contrôleurs peuvent observer un processus $Y(\cdot)$ associé au processus d'état décrit par

$$\begin{cases} dY(t) = h\left(t,x^\upsilon(t),x^\upsilon(t-\delta),\upsilon(t)\right)dt + d\overline{W}(t), \\ Y(0)=0, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $h:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times U\rightarrow\mathbb{R}^r$ et $\overline{W}(\cdot)$ désigne un processus stochastique dépendant de la variable de contrôle $\upsilon(\cdot)$.

Nous supposons que l'hypothèse suivante est vérifiée.

(**H1**) Les fonctions b, σ sont continues différentiables en (x, y), et leurs dérivées partielles sont uniformément bornées. Ils sont uniformément Lipschitz en υ et il existe une constante $C > 0$ telle que b et σ sont bornée par $C(1 + |x| + |y| + |\upsilon|)$; h est continue différentiable en (x, y) et continue en υ. La fonction h et ses dérivés sont tous uniformément bornées.

Pour tout $\upsilon(\cdot) \in U_{ad}$, sous l'hypothèse $(\mathbf{H1})$, l'équation (2.1) admet une solution unique $\mathcal{F}_t$-adaptée. On définit $d\mathbb{P}^\upsilon = Z^\upsilon(t)\, d\mathbb{P}$ avec

$$Z^\upsilon(t) = \exp\left\{ \int_0^t h^\tau(s, x^\upsilon(s), x^\upsilon(s-\delta), \upsilon(s))\, dY(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |h(s, x^\upsilon(s), x^\upsilon(s-\delta), \upsilon(s))|^2\, ds \right\}.$$

où $Z(\cdot)$ est la solution unique $\mathcal{F}_t^Y$ -adapté de

$$dZ^\upsilon(t) = Z^\upsilon(t)\;\; h^\tau(s, x^\upsilon(s), x^\upsilon(s-\delta), \upsilon(s))\, dY(t), \qquad Z^\upsilon(0) = 1. \tag{2.3}$$

Selon la formule d'Itô, nous pouvons prouver que $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|Z_t^\upsilon\right|^m < +\infty$, $m = 2, 3 \ldots$Par conséquent, d'après le théorème de Girsanov et (**H1**), $\mathbb{P}^\upsilon$ est une nouvelle mesure de probabilité et $\left(W(\cdot), \overline{W}(\cdot)\right)$ sont deux mouvement brownien standard à valeurs $\mathbb{R}^{d+r}$-définit sur le nouvel espace de probabilité $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}^\upsilon\right)$. Nous introduisons le coût fonctionnel suivant

$$J(\upsilon(\cdot)) = \mathbb{E}^\upsilon \int_0^T l(t, x^\upsilon(t), \upsilon(t))\, dt + \phi(x^\upsilon(T)), \tag{2.4}$$

où $\mathbb{E}^\upsilon$ désigne l'espérance sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}^\upsilon\right)$ et

$$l : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R},$$

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Maintenant, nous avons besoin de l'hypothèse suivante :

(**H2**) (i) l est continue en v et continue différentiable en x, et ses dérivées partielles sont continues en (x, v) et bornée par $C(1+|x|+|v|)$;

(ii) ϕ est continue différentiable et ϕ_x est bornée par $C(1+|x|)$.

Notre problème de contrôle optimal partiellement observé consiste à minimiser le coût fonctionnel (2.4) sur $v(\cdot) \in U_{ad}$, telle que (2.1) et (2.2) sont vérifiées, c'est-à-dire à trouver $u(\cdot) \in U_{ad}$ satisfaisant

$$J(u(\cdot)) = \inf \{J(v(\cdot)); \quad v(\cdot) \in U_{ad}\}. \tag{2.5}$$

Evidemment, le coût fonctionnel (2.4) peut être réécrit comme suit :

$$J(v(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T Z^v(t)\, l(t, x^v(t), v(t))\, dt + Z^v(T)\, \phi(x^v(T))\right]. \tag{2.6}$$

Alors le problème initial (2.5) équivalent à minimise (2.6) sur $v(\cdot) \in U_{ad}$, telle que (2.1) et (2.3) sont vérifiées. Notre objectif principal est de trouver la condition nécessaire du contrôle optimal partiellement observé $u(\cdot)$ sous la forme de principe du maximum stochastique de Pontryagin.

2.2 Principe du maximum partiellement observé

Dans cette section, en combinant le théorème de Girsanov avec une technique variationnelle convexe standard, nous étudions le principe du maximum pour le problème de contrôle optimal partiellement observé précédemment mentionné.

Soit $u(\cdot)$ est optimal. Alors pour tout $0 \leq \varepsilon \leq 1$ et $v(\cdot) \in U_{ad}$, on prend le contrôle variationnel $v^{\varepsilon}(\cdot) = u(\cdot) + \varepsilon v(\cdot)$. Puisque U est convexe, $v^{\epsilon}(\cdot)$ est en U_{ad}.

Pour simplifier, on note $x^{\varepsilon}(\cdot)$, $x(\cdot)$, $z^{\varepsilon}(\cdot)$, $z(\cdot)$ les trajectoires d'état de l'équation (2.1) et (2.2) correspondant à $v^{\epsilon}(\cdot)$ et $u(\cdot)$ respectivement, et nous introduisons les notations suivantes :

$$\theta\left(\upsilon^{\varepsilon}\left(\cdot\right)\right)=\theta\left(t,x\left(t\right),x\left(t-\delta\right),\upsilon^{\varepsilon}\left(t\right)\right),\qquad\theta\left(u\left(t\right)\right)=\theta\left(t,x\left(t\right),x\left(t-\delta\right),u\left(t\right)\right),$$

où $\theta=b$, σ, h ainsi que leurs dérivées partielles en trajectoire optimale (x,y).

Maintenant, nous introduisons les équations variationnelles suivantes :

$$\begin{cases} dx_1\left(t\right) & =\left[b_x\left(u\left(t\right)\right)x_1\left(t\right)+b_y\left(u\left(t\right)\right)x_1\left(t-\delta\right)+b_\upsilon\left(u\left(t\right)\right)\upsilon\left(t\right)\right]dt \\ & +\left[\sigma_x\left(u\left(t\right)\right)x_1\left(t\right)+\sigma_y\left(u\left(t\right)\right)x_1\left(t-\delta\right)+\sigma_\upsilon\left(u\left(t\right)\right)\upsilon\left(t\right)\right]dW\left(t\right), \\ x_1\left(t\right) & =0,\qquad t\in\left[-\delta,0\right], \end{cases}\tag{2.7}$$

et

$$\begin{cases} dZ_1\left(t\right) & =\left[Z_1\left(t\right)h\left(u\left(t\right)\right)+Z\left(t\right)h_x\left(u\left(t\right)\right)x_1\left(t\right)+Z\left(t\right)h_y\left(u\left(t\right)\right)x_1\left(t-\delta\right)\right. \\ & \left.+Z\left(t\right)h_\upsilon\left(u\left(t\right)\right)\upsilon\left(t\right)\right]^{\tau}dY\left(t\right), \\ Z_1\left(0\right) & =0. \end{cases}\tag{2.8}$$

Par l'hypothèse (**H1**) et le théorème 2.2.1dans [3], les équations (2.7) et (2.8) admettent des solutions uniques et adaptées $x_1\left(\cdot\right)$ et $Z_1\left(\cdot\right)$, respectivement.

Le lemme suivant est dû par Chen et Wu [3].

Lemme 2.2.1 *Sous l'hypothèse* (**H1**)*. Alors, nous avons :*

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left|\frac{x^{\varepsilon}\left(t\right)-x\left(t\right)}{\varepsilon}-x_1\left(t\right)\right|^2=0.$$

Nous avons besoin, également d'obtenir des estimations de l'ordre ε de la différence entre le processus observé perturbé $Z^{\varepsilon}\left(\cdot\right)$ avec la somme du processus observé optimal $Z\left(\cdot\right)$ et $Z_1\left(\cdot\right)$. Le lemme suivant joue un rôle important dans l'inégalité variationnelle.

Lemme 2.2.2 *Sous l'hypothèse* (**H1**)*. Alors, nous avons :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left|\frac{Z^{\varepsilon}(t)-Z(t)}{\varepsilon}-Z_1(t)\right|^2=0.$$

Preuve. Par la définition de $Z(\cdot.)$ et $Z_1(\cdot)$, on a

$$\begin{aligned}
Z(t)+\varepsilon Z_1(t) &= 1+\int_0^t Z(s)\,h^{\tau}(u(s))\,dY(s)\\
&+\varepsilon\int_0^t \left[Z_1(s)\,h(u(s))+Z(s)\,h_x(u(s))\,x_1(s)\right.\\
&\left.+Z(s)\,h_y(u(s))\,x_1(s-\delta)+Z(s)\,h_v(u(s))\,v(s)\right]^{\tau} dY(s)\\
&=1+\varepsilon\int_0^t Z_1(s)\,h^{\tau}(u(s))\,dY(s)\\
&+\int_0^t Z(s)\left[h(s,x(s)+\varepsilon x_1(s),x(s-\delta)+\varepsilon x_1(s-\delta),u(s)+\varepsilon v(s))\right]^{\tau} dY(s)\\
&-\varepsilon\int_0^t Z(s)\left[A^{\varepsilon}(s)\right]^{\tau} dY(s),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
&A^{\varepsilon}(s)\\
&=\int_0^1\left[h_x(s,x(s)+\lambda\varepsilon x_1(s),x(s-\delta)+\lambda\varepsilon x_1(s-\delta),u(s)+\lambda\varepsilon v(s))-h_x(u(s))\right]d\lambda x_1(s)\\
&+\int_0^1\left[h_y(s,x(s)+\lambda\varepsilon x_1(s),x(s-\delta)+\lambda\varepsilon x_1(s-\delta),u(s)+\lambda\varepsilon v(s))-h_y(u(s))\right]d\lambda x_1(s-\delta)\\
&+\int_0^1\left[h_v(s,x(s)+\lambda\varepsilon x_1(s),x(s-\delta)+\lambda\varepsilon x_1(s-\delta),u(s)+\lambda\varepsilon v(s))-h_v(u(s))\right]d\lambda v(s).
\end{aligned}$$

Ensuite

$$
\begin{aligned}
& Z^{\varepsilon}(t)-Z(t)-\varepsilon Z_1(t) \\
& =\int_0^t Z^{\varepsilon}(s)\left[h\left(s, x^{\varepsilon}(s), x^{\varepsilon}(s-\delta), \upsilon^{\varepsilon}(s)\right)\right]^{\tau} dY(s)-\varepsilon \int_0^t Z_1(s) h^{\tau}(u(s)) dY(s) \\
& -\int_0^t Z(s)\left[h\left(s, x(s)+\varepsilon x_1(s), x(s-\delta)+\varepsilon x_1(s-\delta), u(s)+\varepsilon \upsilon(s)\right)\right]^{\tau} dY(s) \\
& +\varepsilon \int_0^t Z(s)\left[A^{\varepsilon}(s)\right]^{\tau} dY(s) \\
& =\int_0^t\left(Z^{\varepsilon}(s)-Z(s)-\varepsilon Z_1(s)\right)\left[h\left(s, x^{\varepsilon}(s), x^{\varepsilon}(s-\delta), \upsilon^{\varepsilon}(s)\right)\right]^{\tau} dY(s) \\
& +\int_0^t Z(s)+\varepsilon Z_1(s)\left[h\left(s, x^{\varepsilon}(s), x^{\varepsilon}(s-\delta), \upsilon^{\varepsilon}(s)\right)-h(s, x(s)\right. \\
& \left.\left.+\varepsilon x_1(s), x(s-\delta)+\varepsilon x_1(s-\delta), u(s)+\varepsilon \upsilon(s)\right)\right]^{\tau} dY(s) \\
& +\varepsilon \int_0^t Z_1(s)\left[h\left(s, x(s)+\varepsilon x_1(s), x(s-\delta)+\varepsilon x_1(s-\delta), u(s)+\varepsilon \upsilon(s)\right)\right]^{\tau} dY(s) \\
& -\varepsilon \int_0^t Z_1(s) h^{\tau}(u(s)) dY(s)+\varepsilon \int_0^t Z(s)\left[A^{\varepsilon}(s)\right]^{\tau} dY(s) \\
& =\int_0^t\left(Z^{\varepsilon}(s)-Z(s)-\varepsilon Z_1(s)\right)\left[h\left(s, x^{\varepsilon}(s), x^{\varepsilon}(s-\delta), \upsilon^{\varepsilon}(s)\right)\right]^{\tau} dY(s) \\
& +\int_0^t\left(Z(s)+\varepsilon Z_1(s)\right)\left[B_1^{\varepsilon}(s)\right]^{\tau} dY(s)+\varepsilon \int_0^t Z_1(s)\left[B_2^{\varepsilon}(s)\right]^{\tau} dY(s) \\
& +\varepsilon \int_0^t Z(s)\left[A^{\varepsilon}(s)\right]^{\tau} dY(s),
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
B_1^{\varepsilon}(s) &= h\left(s, x^{\varepsilon}(s), x^{\varepsilon}(s-\delta), \upsilon^{\varepsilon}(s)\right) \\
&\qquad -h\left(s, x(s)+\varepsilon x_1(s), x(s-\delta)+\varepsilon x_1(s-\delta), u(s)+\varepsilon \upsilon(s)\right), \\
B_2^{\varepsilon}(s) &= h\left(s, x(s)+\varepsilon x_1(s), x(s-\delta)+\varepsilon x_1(s-\delta), u(s)+\varepsilon \upsilon(s)\right)-h(u(s)).
\end{aligned}
$$

Notez que

$$
\begin{aligned}
&B_1^{\varepsilon}(s) \\
&= \int_0^1 \left[h_x\left(s, x(s)+\varepsilon x_1(s)+\lambda\left(x^{\varepsilon}(s)-x(s)-\varepsilon x_1(s)\right), x(s-\delta)+\varepsilon x_1(s-\delta)\right)\right. \\
&+ \left.\lambda\left(x^{\varepsilon}(s-\delta)-x(s-\delta)-\varepsilon x_1(s-\delta)\right), \upsilon^{\varepsilon}(s)\right)\right] d\lambda\left(x^{\varepsilon}(s)-x(s)-\varepsilon x_1(s)\right) \\
&+ \int_0^1 \left[h_y\left(s, x(s)+\varepsilon x_1(s)+\lambda\left(x^{\varepsilon}(s)-x(s)-\varepsilon x_1(s)\right), x(s-\delta)+\varepsilon x_1(s-\delta)\right)\right. \\
&+ \left.\lambda\left(x^{\varepsilon}(s-\delta)-x(s-\delta)-\varepsilon x_1(s-\delta)\right), \upsilon^{\varepsilon}(s)\right)\right] d\lambda\left(x^{\varepsilon}(s-\delta)-x(s-\delta)-\varepsilon x_1(s-\delta)\right).
\end{aligned}
$$

En effet, pour tout $t \in [0, T]$,

$$
\sup_{0\leq s\leq t} \mathbb{E}\left|x^{\varepsilon}(s-\delta)-x(s-\delta)-\varepsilon x_1(s-\delta)\right|^2 \leq \sup_{0\leq s\leq t} \mathbb{E}\left|x^{\varepsilon}(s)-x(s)-\varepsilon x_1(s)\right|^2,
$$

et d'aprés le Lemme 2.2.1, on a,

$$
\mathbb{E}\int_0^t \left|\left(Z(s)+\varepsilon Z_1(s)\right) B_1^{\varepsilon}(s)\right|^2 ds \leq C_{\varepsilon}\varepsilon^2, \tag{2.9}
$$

C_{ε} désigne une constante non négative telle que $C_{\varepsilon} \to 0$ et $\varepsilon \to 0$.

De plus, il est facile de voir que

$$
\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left(\varepsilon \int_0^t Z(s)\left[A^{\varepsilon}(s)\right]^{\tau} dY(s)\right)^2 \leq C_{\varepsilon}\varepsilon^2, \tag{2.10}
$$

et

$$
\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left(\varepsilon \int_0^t Z_1(s)\left[B_2^{\varepsilon}(s)\right]^{\tau} dY(s)\right)^2 \leq C_{\varepsilon}\varepsilon^2. \tag{2.11}
$$

Par $(2.9), (2.10)$ et (2.11), on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|Z^{\varepsilon}(t)-Z(t)-\varepsilon Z_1(t)\right|^2\\
&\leq C\left[\int_0^t \mathbb{E}\left|Z^{\varepsilon}(s)-Z(s)-\varepsilon Z_1(s)\right|^2 ds+\mathbb{E}\int_0^t \left|\left(Z(s)+\varepsilon Z_1(s)\right)B_1^{\varepsilon}(s)\right|^2 ds\right.\\
&\left.+\sup\nolimits_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left(\varepsilon\int_0^t Z(s)\left[A^{\varepsilon}(s)\right]^{\tau} dY(s)\right)^2+\sup\nolimits_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left(\varepsilon\int_0^t Z_1(s)\left[B_2^{\varepsilon}(s)\right]^{\tau} dY(s)\right)^2\right]\\
&\leq C\int_0^t \mathbb{E}\left|Z^{\varepsilon}(s)-Z(s)-\varepsilon Z_1(s)\right|^2 ds+C_{\varepsilon}\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Gronwall, nous obtenons le résultat souhaité. ■

Nous avons ensuite l'inégalité variationnelle suivante.

Lemme 2.2.3 *Sous l'hypothèse* $(\mathbf{H1})-(\mathbf{H2})$. *Alors, nous avons :*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T \left[Z_1(t)\,l(t,x(t),u(t))+Z(t)\,l_x^{\tau}(t,x(t),u(t))\,x_1(t)+Z(t)\,l_v^{\tau}(t,x(t),u(t))\,\upsilon(t)\right]dt\\
&+\mathbb{E}\left[Z_1(T)\,\phi(x(T))\right]+\mathbb{E}\left[Z(T)\,\phi_x(x(T))\,x_1(T)\right]\geq 0.
\end{aligned}\tag{2.12}$$

Preuve. En utilisant le dévelepement de Taylor, Lemme 2.2.1 et Lemme 2.2.2, on obtient

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\mathbb{E}\left[Z^{\varepsilon}(T)\,\phi(x^{\varepsilon}(T))-Z(T)\,\phi(x(T))\right]\\
&=\mathbb{E}\left[Z_1(T)\,\phi(x(T))+Z(T)\,\phi_x(x(T))\,x_1(T)\right],
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\lim\nolimits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\mathbb{E}\int_0^T \left[Z^{\varepsilon}(t)\,l(t,x^{\varepsilon}(t),u^{\varepsilon}(t))-Z(t)\,l(t,x(t),u(t))\right]dt\\
&=\mathbb{E}\int_0^T \left[Z_1(t)\,l(t,x(t),u(t))+Z(t)\,l_x^{\tau}(t,x(t),u(t))\,x_1(t)+Z(t)\,l_v^{\tau}(t,x(t),u(t))\,\upsilon(t)\right]dt.
\end{aligned}$$

Alors,que $\varepsilon^{-1}\left[J\left(u\left(.\right)\right)+\varepsilon v\left(.\right)-J\left(u\left(.\right)\right)\right]\geq 0$ ■

Nous nous concentrons maintenant sur une condition nécessaire du contrôle optimal $u\left(\cdot\right)$.

Pour cela, nous définissons la fonction Hamiltonienne.

$$H\left(t,x,y,v,p,q,\overline{z}\right) \quad = l\left(t,x,v\right)+\left\langle p,b\left(t,x,y,v\right)\right\rangle+\left\langle q,\sigma\left(t,x,y,v\right)\right\rangle+\left\langle \overline{z},h\left(t,x,y,v\right)\right\rangle, \tag{2.13}$$

où

$$H:[0,T]\times\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{n}\times U\times\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{n\times d}\times\mathbb{R}^{r}\rightarrow\mathbb{R}.$$

2.2.1 Equations adjointes

Pour obtenir le principe du maximum, on introduit les équations adjointes suivantes :

$$\begin{cases} -dy\left(t\right)=l\left(u\left(t\right)\right)dt-z\left(t\right)dW\left(t\right)-\overline{z}d\overline{W}\left(t\right), & t\in\left[0,T\right], \\ y\left(T\right)=\phi\left(x\left(T\right)\right),\overline{z}\left(t\right)=0, & t\in\left(T,T+\delta\right], \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\begin{cases} -dp\left(t\right)=\left\{b_{x}^{\tau}\left(u\left(t\right)\right)p\left(t\right)+\mathbb{E}^{u}\left[b_{y}^{\tau}\left(u\left(t+\delta\right)\right)p\left(t+\delta\right)\mid\mathcal{F}_{t}\right]+\sigma_{x}^{\tau}\left(u\left(t\right)\right)q\left(t\right)\right. \\ \qquad +\mathbb{E}^{u}\left[\sigma_{y}^{\tau}\left(u\left(t+\delta\right)\right)q\left(t+\delta\right)\mid\mathcal{F}_{t}\right]+h_{x}^{\tau}\left(u\left(t\right)\right)\overline{z}\left(t\right)+\mathbb{E}^{u}\left[h_{y}^{\tau}\left(u\left(t+\delta\right)\right)\overline{z}\left(t+\delta\right)\mid\mathcal{F}_{t}\right] \\ \qquad \left.+l_{x}\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)dt\right\}-q\left(t\right)dW\left(t\right)-\overline{q}\left(t\right)d\overline{W}\left(t\right), \qquad t\in\left[0,T\right], \\ p\left(T\right)=\phi_{x}\left(x\left(T\right)\right), \quad p\left(t\right)=0, \quad t\in\left(T,T+\delta\right], \quad q\left(t\right)=0, \quad t\in\left[T,T+\delta\right]. \end{cases} \tag{2.15}$$

Notez que

$$\begin{cases} d\widetilde{Z}\left(t\right)=\left[h_{x}\left(u\left(t\right)\right)x_{1}\left(t\right)+h_{y}\left(u\left(t\right)\right)x_{1}\left(t-\delta\right)+h_{v}\left(u\left(t\right)\right)v\left(t\right)\right]^{\tau}d\overline{W}\left(t\right), \\ \widetilde{Z}\left(0\right)=0, \end{cases}$$

où

$$\widetilde{Z}\left(t\right) \quad =Z^{-1}\left(t\right)Z_{1}\left(t\right).$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^u\int_0^T \left\{\left\langle \overline{p}\left(t\right), -\overline{b}_y\left(u\left(t\right)\right)x_1\left(t-\delta\right)\right\rangle + \left\langle \mathbb{E}^u\left[\overline{b}_y^{\tau}\left(u\left(t+\delta\right)\right)\overline{p}\left(t+\delta\right) \mid \mathcal{F}_t\right], x_1\left(t\right)\right\rangle\right\} dt \\
&= \mathbb{E}^u\int_0^T \left\langle \overline{p}\left(t\right), -\overline{b}_y\left(u\left(t\right)\right)x_1\left(t-\delta\right)\right\rangle dt + \mathbb{E}^u\int_\delta^{T+\delta} \left\langle \overline{b}_y^{\tau}\left(u\left(t\right)\right)\overline{p}\left(t\right), x_1\left(t-\delta\right)\right\rangle dt \\
&= \mathbb{E}^u\int_0^\delta \left\langle \overline{p}\left(t\right), -\overline{b}_y\left(u\left(t\right)\right)x_1\left(t-\delta\right)\right\rangle dt + \mathbb{E}^u\int_T^{T+\delta} \left\langle \overline{b}_y^{\tau}\left(u\left(t\right)\right)\overline{p}\left(t\right), x_1\left(t-\delta\right)\right\rangle dt = 0,
\end{aligned}$$

où $\overline{p} = p,q, \overline{z}$ et $\overline{b} = b,\sigma, h$, en conséquence. En appliquant la formule d'Itô's à $\left\langle y\left(t\right), \widetilde{Z}\left(t\right)\right\rangle +$ $\left\langle p\left(t\right), x_1\left(t\right)\right\rangle$ et en comparant par l'inégalité variationnelle (2.12), nous pouvons obtenir

$$\mathbb{E}^u\int_0^T \left\langle b_v^{\tau}\left(u\left(t\right)\right)p\left(t\right) + \sigma_v^{\tau}\left(u\left(t\right)\right)q\left(t\right) + h_v^{\tau}\left(u\left(t\right)\right)\overline{z}\left(t\right) + l_v\left(t, x\left(t\right), u\left(t\right)\right), \upsilon\left(t\right)\right\rangle \geq 0. \tag{2.16}$$

Par (2.13), (2.16) on obtient

$$\mathbb{E}^u\int_0^T \left\langle H_v\left(t, x\left(t\right), x\left(t-\delta\right), u\left(t\right), p\left(t\right), q\left(t\right), \overline{z}\left(t\right)\right), \upsilon\left(t\right)\right\rangle dt \geq 0. \tag{2.17}$$

En utilisant la méthode similaire à celle de Références [3, 15], nous pouvons déduire le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 2.2.1 *Supposons que* (**H1**) *et* (**H2**) *sont vérifiées et* $u(\cdot)$ *est un contrôle optimal. Alors*

$$\mathbb{E}^u\left[\left\langle H_v\left(t, x\left(t\right), x\left(t-\delta\right), u\left(t\right), p\left(t\right), q\left(t\right), \overline{z}\left(t\right)\right), \upsilon - u\left(t\right)\right\rangle \mid \mathcal{F}_t^Y\right] \geq 0, \quad \forall \upsilon \in U\ , P-p.s,$$

où la fonction Hamiltonienne H est défini par (2.13).

Remarque 2.2.1 *Dans notre problème de contrôle optimal partiellement observé avec retard, nous supposons que le coefficient contient la variable de contrôle et que le domaine* *de contrôle est convexe. À notre connaissance, le principe du maximum général pour les systèmes stochastiques avec retard reste un problème ouvert, même si le système est complètement observé. D'autre part, il convient de noter que notre problème doit être distingué des problèmes de contrôle optimal avec des informations partielles, où sous-filtration est donnée pour représenter les informations disponibles pour le contrôleur au lieu d'un processus d'observation.*

Chapitre 3

Application : Problème LQ partiellement observé

Dans ce chapitre, nous donnons un exemple de problème de contrôle optimal linéaire-quadratique partiellement observé et avec retard. Considérons le système de contrôle stochastique suivant avec retard $(d = r = 1)$:

$$\begin{cases} dx^{\upsilon}(t) & = [A(t)x^{\upsilon}(t) + A_{\delta}(t)x^{\upsilon}(t-\delta) + B(t)\upsilon(t)]\,dt + C(t)\,dW(t), \qquad t \in [0,T], \\ x^{\upsilon}(t) & = \eta(t), \qquad t \in [-\delta, 0], \end{cases} \tag{3.1}$$

et

$$dY(t) = D(t)\,dt + d\overline{W}(t), \qquad Y(0) = 0. \tag{3.2}$$

Le coût fonctionnel est décrit comme suit :

$$J(\upsilon(.)) = \frac{1}{2}\mathbb{E}^{\upsilon}\int_0^T [\langle R(t)x^{\upsilon}(t), x^{\upsilon}(t)\rangle + \langle N(t)\upsilon(t), \upsilon(t)\rangle]\,dt + \langle Mx^{\upsilon}(T), x^{\upsilon}(T)\rangle, \tag{3.3}$$

où $A(\cdot)$, $A_{\delta}(\cdot)$ sont des fonctions déterministes à matrice bornée de dimension $n \times n$, $B(\cdot)$ est une fonction déterministe à matrice bornée de dimension $n \times k$, $C(\cdot)$ est une fonction déterministe à matrice bornée de dimension $n \times d$, $D(\cdot)$ est une fonction déterministes à matrice bornée de dimension $r \times 1$, $R(\cdot)$ est une fonction déterministe symétrique non-négative de dimension $n \times n$, $N(\cdot)$ est un fonction déterministe de dimension $k \times k$ de la matrice bornée symétrique positif et $N(\cdot)^{-1}$ est également bornée, et M est la matrice déterministe de dimension $n \times n$ symétrique non négative. La fonction Hamiltonienne est donnée par

$$\begin{aligned} H(t,x,y,v,p,q,\overline{z}) &= \tfrac{1}{2}\left[\langle R(t)x,x\rangle + \langle N(t)v,v\rangle\right] + \langle p, A(t)x + A_\delta(t)y + B(t)v\rangle \\ &\quad + \langle q, C(t)\rangle + \langle \overline{z}, D(t)\rangle . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Si $u(\cdot)$ est optimal, alors d'aprés le théorème(2.2.1) et (3.4), on a

$$u(t) = -N^{-1}(t)\,B^{\tau}(t)\,\mathbb{E}^{u}\left[p(t) \mid \mathcal{F}_t^Y\right] \qquad 0 \le t \le T, \tag{3.5}$$

où $(p(\cdot), q(\cdot), x^u(\cdot))$ est la solution du système stochastique avant-arrière (**FBSDE**) suivant

$$\begin{cases} dx^u(t) &= \left\{A(t)x^u(t) + A_\delta(t)x^u(t-\delta) - B(t)N^{-1}(t)B^{\tau}(t)\mathbb{E}^u\left[p(t) \mid \mathcal{F}_t^Y\right]\right\}dt \\ &\quad + C(t)\,dW(t), \qquad t \in [0,T], \\ -dp(t) &= \left\{A^{\tau}(t)p(t) + \mathbb{E}^u\left[A_\delta^{\tau}(t+\delta)p(t+\delta \mid \mathcal{F}_t)\right] + R(t)x^u(t)\right\}dt \\ &\quad - q(t)\,dW(t) - \overline{q}(t)\,d\overline{W}(t), \qquad t \in [0,T], \\ p(T) &= Mx^u(T), \qquad p(t) = 0, \qquad (t \in T, T+\delta], \\ q(t) &= 0, \qquad \overline{q}(t) = 0, \qquad t \in [T, T+\delta]. \end{cases} \tag{3.6}$$

Notez que **ESD** de (3.6) contient l'espérance conditionnelle de $p(t)$ vis-à-vis de $\mathcal{F}_t^Y$. Alors elle se distingue de **FBSDE** générale dans [4], et l'existence et l'unicité de la solution de (3.6) ne sont pas clair. Si on fixe la trajectoire $x^u(\cdot)$, alors $((p(\cdot), q(\cdot), \overline{q}(\cdot))$ satisfait un certain équation différentielle stochastique anticipéé.(**ABSDE**) qui est bien définie.

Notez que

$\mathbb{E}^u\left[p(t+\delta) \mid \mathcal{F}_t^Y\right] = \mathbb{E}^u\left\{\mathbb{E}^u\left[p(t+\delta) \mid \mathcal{F}_{t+\delta}^Y\right] \mid \mathcal{F}_t^Y\right\} = \mathbb{E}^u\left[p(t+\delta) \mid \mathcal{F}_t^Y\right]$ à partir de Théorème 8.1 et Théorème 8.4 dans [9], nous avons :

$$\begin{cases} d\widehat{x}^u(t) &= \left[A(t)\widehat{x}^u(t) + A_\delta(t)\widehat{x}^u(t-\delta) - B(t)N^{-1}(t)B^\tau(t)\widehat{p}(t)\right]dt, \quad t\in[0,T], \\ -d\widehat{p}(t) &= \left\{A^\tau(t)\widehat{p}(t) + \mathbb{E}^u\left[A_\delta^\tau(t+\delta)\widehat{p}\left(t+\delta \mid \mathcal{F}_t^Y\right)\right] + R(t)\widehat{x}^u(t)\right\}dt \\ & \qquad -\widehat{\overline{q}}(t)\,d\overline{W}, \qquad t\in[0,T], \\ \widehat{p}(T) &= M\widehat{x}^u(T), \quad \widehat{p}(t)=0, \quad t\in(T,T+\delta], \quad \widehat{\overline{q}}(t)=0, \quad t\in[T,T+\delta], \end{cases} \tag{3.7}$$

où $\widehat{\phi}(t) = \mathbb{E}^u[\phi(t)|\mathcal{F}_t^Y]$ est l'estimation filtrante de l'état $\phi(t)$ en fonction de filtration observable $\mathcal{F}_t^Y$, où $\phi = x; p, \overline{q}$ D'après le théorème 2.1 de [4], le système **FBSDE** général (3.7) possède une solution de filtration unique$\left(\widehat{x}^u(\cdot), \widehat{p}(\cdot), \widehat{\overline{q}}(\cdot)\right)$, et cela implique que (3.6) admette un solution $(x^u(\cdot), p(\cdot), q(t), \overline{q}(\cdot))$.

Notre prochain travail consiste à prouver le contrôle admissible (3.5) qui est déterminé par (3.6) est vraiment optimal. Notez que $\mathbb{E}^v$ et $\mathbb{E}^u$ sont équivalentes. Alors pour toute contrôle admissible $v(\cdot)$, nous avons

$$\begin{aligned} & J(v(\cdot)) - J(u(\cdot)) \\ & = \frac{1}{2}\mathbb{E}^u \int_0^T \left[\langle R(t)(x^v(t) - x(t)), x^v(t)\rangle + \langle N(t)(v(t)-u(t)), v(t)-u(t)\rangle\right. \\ & + 2\langle R(t)x(t), x^v(t)-x(t)\rangle + 2\langle N(t)u(t), v(t)-u(t)\rangle\left.\right]dt \\ & + \frac{1}{2}\mathbb{E}^u\left[\langle M(x^v(T)-x(T)), x^v(T)-x(T)\rangle + 2\langle Mx(T), x^v(T)-x(T)\rangle\right]. \end{aligned}$$

Par les conditions initiales et terminales, on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^u \textstyle\int_0^T \left\{\langle A_\delta(t)(x^v(t-\delta) - x(t-\delta)), p(t)\rangle - \langle x^v(t) - x(t), \mathbb{E}^u\left[A_\delta^\tau(t+\delta)p(t+\delta) \mid \mathcal{F}_t\right]\rangle\right\}dt \\ & = \mathbb{E}^u \textstyle\int_0^T \langle A_\delta(t)(x^v(t-\delta) - x(t-\delta)), p(t)\rangle dt - \mathbb{E}^u \displaystyle\int_\delta^{T+\delta} \langle x^v(t-\delta) - x(t-\delta), A_\delta^\tau(t)p(t)\rangle dt \\ & = 0. \end{aligned}$$

Appliquant la formule d'Itô à $\langle x^{\upsilon}(t-\delta)-x(t-\delta), p(t)\rangle$, on trouve

$\mathbb{E}^{u}\langle x^{\upsilon}(T)-x(T), p(T)\rangle=-\mathbb{E}^{u}\int_{0}^{T}[\langle R(t)(x^{\upsilon}(t)-x(t)), x(t)\rangle+B(t)(\upsilon(t)-u(t)), p(t)]\,dt.$

Comme $R(t)$, M sont non négatifs et que $N(t)$ est positif, nous pouvons dériver

$$\begin{aligned} J(\upsilon(\cdot))-J(u(\cdot)) &\geq \mathbb{E}^{u}\int_{0}^{T}\langle N(t)u(t)+B^{\tau}(t)p(t), \upsilon(t)-u(t)\rangle\,dt \\ &=\mathbb{E}^{u}\int_{0}^{T}\left\langle N(t)u(t)+B^{\tau}(t)\mathbb{E}^{u}\left[p(t)\mid F_{t}^{Y}\right], \upsilon(t)-u(t)\right\rangle dt. \end{aligned}$$

Il est donc clair que $u(t)=-N(t)^{-1}B^{\tau}(t)\mathbb{E}^{u}\left[p(t)\mid\mathcal{F}_{t}^{Y}\right]$ est optimal.

La tâche qui reste consiste à calculer l'estimation filtrante de $\widehat{p}(t)$. À partir de (3.7), il est évident que $\widehat{q}(\cdot)=0$, alors(3.7) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} d\widehat{x}(t) &=[A(t)\widehat{x}(t)+A_{\delta}(t)\widehat{x}(t-\delta)-B(t)N^{-1}(t)\widehat{p}(t)]\,dt, \qquad t\in[0,T], \\ -d\widehat{p}(t) &=[A^{\tau}(t)\widehat{p}(t)+A_{\delta}^{\tau}(t+\delta)\widehat{p}(t+\delta)+R(t)\widehat{x}(t)]\,dt, \qquad t\in[0,T], \\ \widehat{p}(T) &=M\widehat{x}(T), \qquad \widehat{p}(t)=0, \qquad t\in(T,T+\delta]. \end{cases} \tag{3.8}$$

Nous mettons l'indice u pour simplifier. Bien que (3.8) est une **FBSDE** déterministe, nous n'obtenons pas sa solution explicite au moyen de la technique **FBSDE** commune en raison des durées de temps retardées et avancées. Cependant, nous pouvons relier (3.8) à un problème de contrôle optimal quadratique linéaire déterministe avec un retard comme suit :

$$\begin{cases} dx^{\upsilon}(t) &=[A(t)x^{\upsilon}(t)+A_{\delta}(t)x^{\upsilon}(t-\delta)+B(t)\upsilon(t)]\,dt, \qquad t\in[0,T], \\ x^{\upsilon}(t) &=\eta(t), \qquad t\in[-\delta,0], \end{cases} \tag{3.9}$$

et la fonction de coût

$$J(\upsilon(.)) \quad =\frac{1}{2}\int_{0}^{T}\langle R(t)x^{\upsilon}(t), x^{\upsilon}(t)\rangle+\langle N(t)\upsilon(t), \upsilon(t)\rangle\,dt+\langle Mx^{\upsilon}(T), x^{\upsilon}(T)\rangle, \tag{3.10}$$

où le contrôle admissible $\upsilon(\cdot)$ est déterministe satisfaisant $\int_{0}^{T}|\upsilon(t)|^{2}\,dt<+\infty$.

Donc $u(t) = -N^{-1}(t)\, B^{\tau}(t)\, \widehat{p}(t)$ est optimal avec les équations (3.9) et (3.10) sont vérifiées, et $\widehat{p}(t)$ est déterminé par (3.8). Grâce au Théorème de [5], nous avons que

$$u(t) = -N^{-1}(t)\, B^{\tau}(t) \left(\mathbb{E}_0(t)\, \widehat{x}(t) + \int_{t-\delta}^{t} \mathbb{E}_1(t, \theta - t)\, \widehat{x}(\theta)\, d\theta \right), \qquad t \in [0, T], \quad (3.11)$$

est optimal, où $\mathbb{E}_0(t)$, $\mathbb{E}_1(t,\theta)$, $\mathbb{E}_2(t,\theta,\varsigma)$, $t \in [0,T]$, $\theta, \varsigma \in [-\delta, 0]$ satisfait aux ensembles d'équations suivants

$$\begin{cases} \mathbb{E}_0(t) + \mathbb{E}_0(t)\, A(t) + A^{\tau}(t)\, \mathbb{E}_0(t) + \mathbb{E}_1(t,0) + \mathbb{E}_1^{\tau}(t,0) + R(t) \\ -\mathbb{E}_0^{\tau}(t)\, B(t)\, N^{-1}(t)\, B^{\tau}(t)\, \mathbb{E}_0(t) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{E}_1(t,\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}\mathbb{E}_1(t,\theta) + A^{\tau}(t)\, \mathbb{E}_1(t,\theta) + \mathbb{E}_2(t,\theta,\varsigma) \\ -\mathbb{E}_0^{\tau}(t)\, B(t)\, N^{-1}(t)\, B^{\tau}(t)\, \mathbb{E}_1(t,\theta) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{E}_2(t,\theta,\varsigma) - \frac{\partial}{\partial \theta}\mathbb{E}_2(t,\theta,\varsigma) - \frac{\partial}{\partial \varsigma}\mathbb{E}_2(t,\theta,\varsigma) \\ -\mathbb{E}_1^{\tau}(t,\theta)\, B(t)\, N^{-1}(t)\, B^{\tau}(t)\, \mathbb{E}_1(t,\theta) = 0, \\ \mathbb{E}_2(t,\theta,\varsigma) = \mathbb{E}_2(t,\varsigma,\theta), \qquad t \in [0,T], \qquad \theta,\varsigma \in [-\delta, 0]. \end{cases} \quad (3.12)$$

Avec des conditions aux limites

$$\begin{cases} \mathbb{E}_0(T) = M, \qquad \mathbb{E}_0(t)\, A_{\delta}(t) = \mathbb{E}_1(t,-\delta), \qquad \mathbb{E}_1(T,\theta) = \mathbb{E}_2(T,\theta,\varsigma) = 0, \\ \mathbb{E}_1^{\tau}(t,\theta)\, A_{\delta}(t) = \mathbb{E}_2(t,\theta,-\delta), \qquad t \in [0,T], \qquad \theta,\varsigma \in [-\delta,0]. \end{cases}$$

De plus, en utilisant la règle parallèle, nous pouvons prouver l'unicité du contrôle optimal, ce qui donne la relation entre $\widehat{p}(t)$ et $\widehat{x}(t)$ que $\widehat{p}(t) = \mathbb{E}_0(t)\, \widehat{x}(t) + \int_{t-\delta}^{t} \mathbb{E}_1(t, \theta - t)\, \widehat{x}(\theta)\, d\theta$. Maintenant, nous résumons tous les résultats obtenus jusqu'à présent et donnons la proposition suivante

Proposition 3.0.1 *Pour notre problème de contrôle optimal linéaire-quadratique partiellement observé* (3.1)-(3.3)*, un contrôle optimal observable* $u(\cdot)$ *est donné par* (3.5)*, où* $\widehat{p}(t) = \mathbb{E}^{u}\left[p(t) \mid \mathcal{F}_t^{Y}\right]$ *est la solution de* ***FBSDE*** (3.8)*. De plus, le régulateur à rétroac-*

tion de l'estimation de filtrage pour une trajectoire optimale est donné par (3.11), *où* $\mathbb{E}_0(t)$, $\mathbb{E}_1(t,\theta)$, $\mathbb{E}_2(t,\theta,\zeta), t \in [0,T], \theta, \zeta \in [-\delta, 0]$ *vérifie les ensembles des équations* (3.12).

Bibliographie

[1] A. Bensoussan, Maximum principle and dynamic programming approaches of the optimal control of partially observed diffusions, Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes 9 (1983), no. 3, 169-222.

[2] J. M. Bismut, An introductory approach to duality in optimal stochastic control, SIAM review 20 (1978), no. 1, 62-78.

[3] L. Chen and Z. Wu, Maximum principle for the stochastic optimal control problem with delay and application, Automatica 46 (2010), no. 6, 1074-1080.

[4] L. Chen and Z. Wu, A type of general forward-backward stochastic differential equations and applications, Chinese Annals of Mathematics, Series B 32 (2011), no. 2, 279-292.

[5] J. Huang, X. Li and J. Shi, Forward–backward linear quadratic stochastic optimal control problem with delay, Systems & control letters 61 (2012), no. 5, 623-630.

[6] J. Huang, G. Wang and J. Xiong, A maximum principle for partial information backward stochastic control problems with applications, SIAM Journal on Control and Optimization 48 (2009), no. 4, 2106-2117.

[7] V. Kolmanovskii and T. Maizenberg, Optimal control of stochastic systems with aftereffect, Avtomat. i Telemeh 1 (1973), 47-61.

[8] B. Larssen, Dynamic programming in stochastic control of systems with delay, Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes 74 (2002), no. 3-4, 651-673.

[9] R. Liptser, A. Shiryayev, "Statistics of random processes," Springer-Verlag, New York, 1977.

[10] X. Li and S. Tang, General necessary conditions for partially observed optimal stochastic controls, Journal of applied probability 32 (1995), no. 4, 1118-1137.

[11] B. Øksendal and A. Sulem, A maximum principle for optimal control of stochastic systems with delay, with applications to finance, Preprint series. Pure mathematics http ://urn. nb. no/URN : NBN : no-8076 (2000).

[12] B. Øksendal, A. Sulem and T. Zhang, Optimal control of stochastic delay equations and time-advanced backward stochastic differential equations, Advances in Applied Probability 43 (2011), no. 2, 572-596.

[13] E. Pardoux and S. Peng, Adapted solution of a backward stochastic differential equation, Systems & control letters 14 (1990), no. 1, 55-61.

[14] S. Peng and Z. Yang, Anticipated backward stochastic differential equations, The Annals of Probability 37 (2009), no. 3, 877-902.

[15] J. Shi and Z. Wu, Maximum principle for partially-observed optimal control of fully-coupled forward-backward stochastic systems, Journal of Optimization Theory and Applications 145 (2010), no. 3, 543-578.

[16] S. Tang, The maximum principle for partially observed optimal control of stochastic differential equations, SIAM Journal on Control and Optimization 36 (1998), no. 5, 1596-1617.

[17] G. Wang, C. Zhang and W. Zhang, Stochastic maximum principle for mean-field type optimal control under partial information, IEEE Transactions on Automatic control 59 (2013), no. 2, 522-528.

[18] G. Wang and Z. Wu, General maximum principles for partially observed risk-sensitive optimal control problems and applications to finance, Journal of Optimization Theory and Applications 141 (2009), no. 3, 677-700.

[19] Z. Wu, A maximum principle for partially observed optimal control of forward-backward stochastic control systems, Science China information sciences 53 (2010), no. 11, 2205-2214.

[20] S. Wu and L. Shu, Maximum principle for partially-observed optimal control problems of stochastic delay systems, Journal of Systems Science and Complexity 30 (2017), no. 2, 316-328.

[21] W. Zhang, Y. Zhao and L. Sheng, Some remarks on stability of stochastic singular systems with state-dependent noise, Automatica 51 (2015), 273-277.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

tion différentiel stochastique de retard

$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	Une espace de probabilité filtré.
$\mathcal{F}_t$	Filtration naturel.
U	Sous ensemble convexe
U_{ad}	L'ensemble des variables de contrôle admissible.
u	Contrôle optimale
v	Variable de contrôle admissible.
EDS ou **SDE**	Equation différentielle stochastique.
ABSDE	Equation différentielle stochastique.rétrograde anticipée (avancées).
SDDE	Equation différentielle stochastique.avec retard.
FBSDE	Système stochastique avant-arrière

Résumé

Dans ce mémoire nous étudions les problèmes de contrôle optimal partiellement observés et avec retard. En combinant le théorème de Girsanov à avec une technique variationnelle standard, on obtient un principe du maximum en supposant que le domaine de contrôle est convexe.

Mots-Clés : Equations différentielles stochastiques avec retard, équations adjointes, contrôle optimal.

Abstract

In this dissertation we have studied optimal control problems for stochastic delay systems. Combining Girsanov's theorem with a standard variational technique, we get a maximum principle on the assumption that the system equation contains time delay and the control domain is convex.

Key-Words: SDDE, adjoin equations, optimal control.

الملخص

ندرس في هذه المذكرة مشاكل التحكم المثلى الملحوظة جزئيا لأنظمة التأخير العشوائي من خلال الجمع بين نظرية غيرسانوف و تقنية التباين المعياري.

نتحصل على مبدأ الحد الأقصى من خلال افتراض معادلة النظام حيث تحتوي على تأخير وان مجال التحكم هو عبارة عن مجال محدب.

الكلمات المفتاحية : المعادلات التفاضلية العشوائية مع التأخير، المعادلات المرافقة ،التحكم الأمثل.