République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

AMMARI Madjida

Titre :

Théorie des Semi-martingales

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**LABED Boubakeur**	UMKB	Encadreur
Dr.	**GHERBALE Boulakhras**	UMKB	Président
Dr.	**BOUGHERARA Saliha**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À celle qui s'est privée de tout pour me donner tout, à **ma tendre mère**, *sa présence à mes cotés a toujours été la source de ma force*

À un GRAND homme pour lequel je garde une estime particulière, à **mon trés cher père**, *qui n'a jamais cessé de m'épauler et de me soutenir inconditionnellement, qui a été mon ombre et mon inspiration durant toute ma vie.*

Quoique je dise ou que je fasse, cela n'exprimera jamais le degré de ma gratitude et mon amour envers eux.

Une dédicace du fond du coeur à mes soeurs **Hind** *et* **Lamia**, *et à mon frère* **Tarek**, *qui ont toujours été pour moi des exemples de persévérance, de courage et de réussite, et qui m'ont assisté dans mes moments difficiles et m'ont pris par la main pour y en traverser.*

À mon beau-frère **Hichem**, *qui a été toujours là pour m'aider comme un VRAI frère.*

À ma belle-soeur **Amel**.

À mes adorables nièces : **Belkis**, **Hidaya** *et* **Batoul**. *À mon cher neveu* **Haithem** *qui ont toujours su comment procurer la joie à mon coeur.*

À mes amies de toujours : **Isra** *et* **Manal**. *En sevenir de notre sincère et profonde amitié et des moments agréables que nous avons passé ensemble.*

À toute la famille AMMARI de **Tiflfel**, *petits et grands.*

À tous ceux qui m'aiment.

♡*MIMOUNA*♡

REMERCIEMENTS

D'abord et Avant tout, je remercie *Dieu Le Tout Puissant* de m'avoir donné la force et la patience pour accomplir ce travail.

Louange à Dieu pour Sa Grâce et Sa Bonté.

Je n'aurai pas pu arriver jusque là sans l'équilibre, la chaleur et le bonheur dans lequel j'ai vécu, un énorme merci à mes parents, mes soeurs et mon frère pour leur soutien et encouragement et pour l'infini patience tout au long mon parcours scolaire.

J'adresse mes sincères remerciements à mon respectable encadreur **Pr.LABED Boubakeur** pour l'aide qu'il m'a accordé ; ses conseils judicieux, sa disponibilité et sa générosité. Il m'a donné l'occasion de travailler sur un thème intéressant et il m'a fourni les outils nécessaires pour l'élaboration de ce mémoire.

Je suis honorée que **Dr.GHERBALE Boulakhrass** ait accepté d'être le président de jury de mon mémoire. Je suis également trés reconnaissante envers **Dr.BOUGHERARA Saliha** d'avoir accepter d'examiner mon travail.

Je remercie chaleuresement mes amis qui ont si bien su m'encourager et me soutenir. Un MERCI bien particulier à **Imane Achour,** pour son amitié et l'aide qu'elle m'a apporté tout au long de ma démarche. Une mention spéciale à **Bahi** qui a toujours été là pour m'aider et m'encourager.

Merci à tous celles et ceux qui ont contribué par leurs conseils, suggestions et par leurs douaa à la réalisation de ce travail.

MERCI infiniment.

Table des matières

Introduction

K. Itô a inventé son fameux calcul stochastique sur le mouvement Brownien dans les années 40. Dans la même période, J.L. Doob a developpé une théorie des martingales et les processus stochastiques associé à une famille croissante de σ-algèbres d'évenements $(\mathcal{F}_t)$, où $\mathcal{F}_t$ désigné l'information disponible jusqu'au temps t. Dans les années 60 et 70 "l'école de strasbourg", à sa tête P.A. Meyer, a développé une théorie moderne des martingales, la théorie générale des processus stochastiques et le calcul stochastique sur les semi-martingales. Il s'avère aprés que les semi-martingales constituent une large classe d'intégrateurs adaptés et continus à droite par rapport à lesquelles les intégrales stochastiques d'intégrands simples prévisibles satisfont le théorème de la convergence dominée en probabilité. Le calcul stochastique sur les semi-martingales est devenu non seulemnt un outil important pour la théorie moderne des probabilités et les processus stochastiques, mais aussi a de grandes applications à plusieurs branches des mathématiques (par exemple les équations aux dérivées partielles, geométrie différentielle, contrôle stochastique), Physique, mathématique financière et dans d'autres domaines dans lesquels les structures dynamiques aléatoires sont impliquées.

Ce mémoire donne une vue d'ensemble concise et détaillée sur la théorie des semi-martingales et le calcul stochastique. Dans le chapitre 1, on présente les principaux résultats sur la théorie des processus stochastiques et la théorie des martingales. dans le chapitre 2, on introduit la théorie des semi-martingales et l'intégrale stochastique pour les martingales locales et les semi-martingales, pour des intégrands des processus prévisibles et croissants. On présente la formule d'Itô, la formule de Tanaka et des résultats généraux sur l'existence et l'unicité des solutions pour une équation différentielle stochastqiue dirigée par une semi-martingale.

Chapitre 1

Généralités

Le but de ce chapitre est d'exposer les notions de base qu'on va utiliser dans la suite de ce mémoire. On décrit d'abord les processus stochastiques, en donnant les définitions et les propriétés élémentaires. Ensuite, on présente des généralités sur les temps d'arrêt .Puis, on rapelle les notions essentielles en théorie des martingales. La fin du chapitre est consacrée à l'introduction de la théorie des martingales locales.

1.1 Rappels :Processus stochastiques

1.1.1 Base Stochastique

Définition 1.1 (Processus Stochastique) *Un **processus stochastique** est une famille de variables aléatoires* $(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$*, indexée par l'ensemble* $\mathbb{T}$ *des temps, définie sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, appelé espace de base, et à valeurs dans un espace mesurable* $(\boldsymbol{E},\mathcal{E})$*, appelé espace d'états.*

Un processus dépend de deux paramètres :$X_t(\omega)$ *dépend de* t *(en général le temps),et de l'aléatoire* $\omega \in \Omega$*.*

- *Pour* $t \in \mathbb{T}$ *fixé,* $\omega \in \Omega \longmapsto X_t(\omega)$ *est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- *Pour* $\omega \in \Omega$ *fixé,* $t \in \mathbb{T} \longmapsto X_t(\omega)$ *est une application à valeurs dans* $\boldsymbol{E}$ *,appelée* ***trajectoire***

du processus.

Dans ce qui suit, on prendra tantôt $\mathbb{T} = [0, T]\,, T > 0$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$.

Définition 1.2 (Égalités des processus)

- *On dira que Y est une **version** (ou une **modification**) du processus X si pour tout $t \in \mathbb{T}$, $\mathbb{P}\left(X_t = Y_t\right) = 1$.*
- *Deux processus X et Y sont dit **indistinguables** s'il existe N négligeable tel que pour $\omega \notin N$, on a $X_t\left(\omega\right) = Y_t\left(\omega\right)$ pour tout $t \in \mathbb{T}$, de façon un peu abusive (car $\{X_t = Y_t\ ,\ \forall t \in \mathbb{T}\}$ n'est pas nécessairement un évenement), on écrit : $\mathbb{P}\left(X_t = Y_t,\ \forall t \in \mathbb{T}\right) = 1$.*

Définition 1.3 *Supposons $\mathbb{T}$ muni d'une tribu $\Im$. Le processus $\left(X_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ est dit **mesurable** si l'application $(t, \omega) \longmapsto X_t\left(\omega\right)$ est mesurable sur $\mathbb{T} \times \Omega$ muni de la tribu produit $\Im \otimes \mathcal{F}$.*

Définition 1.4

- *Un processus $\left(X_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ est **un processus à trajectoires continues** (ou simplement **processus continu**) si $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : t \longmapsto X_t\left(\omega\right)\ \text{est continue}\}) = 1$.*
- *Un processus est dit **càdlàg** si ses trajectoires sont continues à droites, pourvues de limites à gauche.*
- *Un processus est dit **càglàd** si ses trajectoires sont continues à gauche, pourvues de limites à droite.*

Définition 1.5 (Filtration) *Une **filtration** $\mathbb{F} = \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante (au sens de l'inclusion) de sous-tribu de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire :*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad \text{pour } s < t \quad \text{et} \quad s, t \in \mathbb{T}.$$

Le quadruplet $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\right)$ est appelé **un espace de probabilité filtré (**ou simplement **espace filtré)** ou **base stochastique.**

Définition 1.6 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé muni d'une filtration $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$. On dit que la filtration satisfait aux conditions habituelles si elle est :*

1. *Compléte : une filtration est complète si l'espace est complet, et si tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables appartiennent à $\mathcal{F}_0$.*

2. *Continue à droite : $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est dite continue à droite si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ où $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$.*

Remarque 1.1 *Une filtration quelconque $(\mathcal{F}_t^\circ)$ peut toujours être complétée :on complète l'espace, et on adjoint à chaque tribu tous les ensembles négligeables. Si l'on fait cette opération sur la famille rendue continue à droite $\mathcal{G}_t^\circ = \mathcal{F}_{t+}^\circ$, on obtient une famille $(\mathcal{F}_t)$ qui satisfait aux conditions habituelles, et qui est appelée l'**augmentation habituelle** de la famille $(\mathcal{F}_t^\circ)$.*

Définition 1.7 *On dit qu'un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est **adapté** à la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ (ou $\mathbb{F}$-adapté) si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \in \mathbb{T}$.*

Remarque 1.2 *Un choix minimal de la filtration pour que le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ soit adapté est sa filtration naturelle qui est donnée par $\left(\mathcal{F}_t^X\right)_{t\in\mathbb{T}}$ où $\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(X_s; s \leq t\right)$*

Définition 1.8 *Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est **progressivement mesurable** ou **progressif** par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ si pour tout $t \in \mathbb{T}$, l'application $(s,\omega) \longmapsto X_s(\omega)$ de $[0,t] \times \Omega$ dans $(\boldsymbol{E},\mathcal{E})$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$.*

Remarque 1.3 *Un processus progressif est adapté et mesurable.*

Proposition 1.1 *Un processus adapté et dont les trajectoires sont continues à droite (à gauche) est progressif.*

Définition 1.9

1. *On appelle **tribu prévisible** la tribu $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ engendrée par les processus $\mathcal{F}_t$-adaptés dont les trajectoires sont continues à gauche .*

2. *Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est dit **prévisible** si la fonction $(t,\omega) \longmapsto X_t(\omega)$ sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ est mesurable pour la tribu prévisible $\mathcal{P}$.*

Définition 1.10 *Un processus stochastique adapté $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est dit **croissant** si $X_0 = 0$ et $t \mapsto X_t$ est une fonction croissante pour tout $t \in \mathbb{T}$.*

1.1.2 Exemple de processus stochastique

Un exemple basique et trés connu de processus stochastique est **le mouvement Brownien**

Définition 1.11 *Sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *un mouvement Brownien (standard)* $B = (B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est un processus stochastique continu qui vérifie :*

1. $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1.$
2. $\forall s \leq t$, $B_t - B_s$ *est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance* $(t-s)$ *.*
3. $\forall n$, $\forall t_i$, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, *les variables* $\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \ldots, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0}\right)$ *sont indépendantes .*

1.1.3 Processus à variation finie

Commençons d'abord par définir les fonctions à variation finie

Définition 1.12 *Soit* A *une fonction définie sur* $\mathbb{R}_+$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *continue à droite avec limite à gauche. Une partition* Δ_t *de l'intervalle* $[0,t]$ *est une suite de points* $(t_i)_{i=0,\ldots,n}$ *tels que* $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t$. *Pour tout* $t > 0$, *on définit*

$$V(A)_t = \sup_{\Delta_t} \sum_{t_i \in \Delta_t} \left| A_{t_{i+1}} - A_{t_i} \right|$$

La fonction $t \longmapsto V(A)_t$ *s'appelle* ***la variation (totale)*** *de* A.
La fonction A *est* ***à variation finie*** *si pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$, $V(A)_t$ *est finie.*

Exemple 1.1 *Les fonctions monotones, lipschitiziennes ou de classe* C^1 *sont à variation finie.*

Définition 1.13 (processus à variation finie) *Un processus adapté* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est* ***à variation finie*** *si* $\mathbb{P}$*-presque toutes les trajectoires* $t \longmapsto X_t(\omega)$ *sont à variation finie au sens de la définition précédente.*

Remarque 1.4 *Soit* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *un processus continu, adapté.* X *est un processus à variation finie si et seulement s'il existe* X_t^1 *et* X_t^2 *deux processus croissants tels que* $X = X_t^1 - X_t^2$.

1.1.4 Variation quadratique d'un processus stochastique

Définition 1.14 *Soit* $(\Delta_n)_{n\geq 0} = (t_k^n)_{k=0,\ldots,k(n)}$ *une suite de subdivision de* $[0,t]$*, vérifiant* $|\Delta_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *où* $|\Delta_n| = \sup\limits_{i=0,\ldots,k(n)} \left|t_i^n - t_{i-1}^n\right|$*, et soit* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *un processus continu.*
Posons

$$Q_t^{\Delta_n}(X) = \sum_{i=1}^{k(n)} \left(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right)^2 \tag{1.1}$$

On dit que le processus X *admet une variation quadratique finie sur* $[0,t]$*, si :* $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_t^{\Delta_n}(X)$ *existe en probabilité.*
Dans ce cas, on note par :

$$\langle X\rangle_t = \langle X, X\rangle_t = \lim_{n\to+\infty} Q_t^{\Delta_n}(X)$$

Le processus $(\langle X, X\rangle_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *s'appelle* ***la variation quadratique*** *de* X*.*

Remarque 1.5 *La variation quadratique d'un processus continu à variation finie est nulle.*

Exemple 1.2 *Soit* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un mouvement Brownien réel, alors* X *admet une variation quadratique et* $\mathbb{P}-$*p.s :*

$$\langle X\rangle_t = t \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

1.2 Temps d'arrêt

Définition 1.15 (temps d'arrêt) *Soit* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *une filtration .*
Un $\mathbb{F}$*-temps d'arrêt* τ *est une variable aléatoire sur* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *telle que :*

$$\forall t \in \mathbb{T} \ , \ \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Définition 1.16 *Soit* τ *un* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$*-temps d'arrêt*
On appelle ***tribu des évenements antérieurs*** *à* τ*, et on note* $\mathcal{F}_\tau$*, la tribu définie par :*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ , \forall t \in \mathbb{T}\} \quad \text{où} \ \ \mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t\in\mathbb{T}} \mathcal{F}_t\right)$$

Définition 1.17 *1. Si τ est un temps d'arrêt et $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est un processus à trajectoires continues, on note X^τ le* ***processus arrêté*** *défini par $X_t^\tau = X_{t\wedge\tau}$ pour tout $t \geq 0$.*

2. On appelle ***filtration arrêté*** *la filtration $(\mathcal{F}_{t\wedge\tau})_{t\in\mathbb{T}}$.*

1.3 Martingales

La notion des martingales joue un role centrale dans la théorie des processus stochastiques, en particulier dans le calcul stochastique. Nous nous contentons ici d'une présentation trés partielle limitée aux aspects utiles à ce memoire.

1.3.1 Rappels :Espérance Conditionnelle

Contexte : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. X, Y, Z des vecteurs aléatoires intégrables de $\Omega \to \mathbb{R}^n$

Définition 1.18 *Étant donné $\mathcal{H}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ .On définit $\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$ l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{H}$ comme l'unique vecteur aléatoire de $\Omega \to \mathbb{R}^n$ vérifiant :*

1. *$\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$ est $\mathcal{H}$-mesurable .*
2. *$\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{H})\, d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}$,$\forall A \in \mathcal{H}$. ($\Longleftrightarrow$2'. $\int_\Omega Z.\mathbb{E}(X|\mathcal{H})\, d\mathbb{P} = \int_\Omega Z.X\ d\mathbb{P}$,$\forall Z$ $\mathcal{H}$-mesurable).*

Remarque 1.6 – *Si X est de carré intégrable, alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$ représente la meilleure approximation de X au sens des moindres carrés par une variable.aléatoire de carré integrable $\mathcal{H}$-mesurable. En particulier, on a $\|\mathbb{E}(X|\mathcal{H})\|_{L^2} \leq \|X\|_{L^2}$*

– *Si $\mathcal{H} = \sigma(Y)$, alors on note $\mathbb{E}(X|Y)$ au lieu de $\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$*

– *Il existe φ une application mesurable telle que $\mathbb{E}(X|Y) = \varphi(Y)$, et on note*

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = \varphi(Y)$$

– $\mathbb{P}(A|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(I_A|\mathcal{H})$

Propriétés

a) Linéarité : a,b deux constantes $\mathbb{E}\left(aX+bY\,|\mathcal{H}\right)=a\mathbb{E}\left(X\,|\mathcal{H}\right)+b\mathbb{E}\left(Y\,|\mathcal{H}\right)$

b) Croissance : si $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}\left(X\,|\mathcal{H}\right) \leq \mathbb{E}\left(Y\,|\mathcal{H}\right)$

c) $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X\,|\mathcal{H}\right)\right)=\mathbb{E}\left(X\right)$

d) Si Y est $\mathcal{H}$-mesurable, alors $\mathbb{E}\left(Y.X\,|\mathcal{H}\right)=Y.\mathbb{E}\left(X\,|\mathcal{H}\right)$

e) Si X est indépendant de $\mathcal{H}$, alors $\mathbb{E}\left(X\,|\mathcal{H}\right)=\mathbb{E}\left(X\right)$

f) Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux tribus telles que $\mathcal{H}\subset\mathcal{G}$, alors :

$$\mathbb{E}\left(X\,|\mathcal{H}\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X\,|\mathcal{G}\right)|\mathcal{H}\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X\,|\mathcal{H}\right)|\mathcal{G}\right)$$

1.3.2 Martingales à temps continu

Soit $\left(\Omega,\mathcal{F},\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}},\mathbb{P}\right)$ un espace filtré.

Définition 1.19 *Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ adapté par rapport une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et tel que pour tout $t\geq 0$, $X_t\in\boldsymbol{L}^1$ est appelé :*

– *une martingale si :*

$$\forall s\leq t,\quad \mathbb{E}\left(X_t\,|\mathcal{F}_s\right)=X_s$$

– *une sur-martingale si :*

$$\forall s\leq t,\quad \mathbb{E}\left(X_t\,|\mathcal{F}_s\right)\leq X_s$$

– *une sous-martingale si :*

$$\forall s\leq t,\quad \mathbb{E}\left(X_t\,|\mathcal{F}_s\right)\geq X_s$$

Exemple 1.3 *Soient $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard et $\left(\mathcal{F}_t^B\right)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle.*

1. *$(B_t)_{t\geq 0}$ est une $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-martingale.*
2. *$(B_t^2-t)_{t\geq 0}$ est une $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-martingale.*
3. *Pour tout $\alpha\neq 0$, $\left(\exp\left(\alpha B_t-\frac{\alpha^2}{2}t\right)\right)_{t\geq 0}$ est une martingale.*

Définition 1.20 – *Une martingale* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est dite uniformément intégrable si :*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_t E\left[|M_t|\,1_{|M_t|>n}\right]=0.$$

– *Une martingale* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est dite fermée par une v.a* $M_\infty \in \boldsymbol{L}^1$*, si pour tout* $t\geq 0$,

$$M_t = E\left[M_\infty \left|\mathcal{F}_t\right.\right].$$

– *Une martingale* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est de carré intégrable si pour tout* $t\geq 0$,

$$E\left(|M_t|^2\right)<+\infty.$$

Théorème 1.1 *Soit* M *une martingale continue à droite. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. M *est une martingale fermée.*
2. M *est uniformément intégrable.*
3. *Il existe* $M_\infty \in L^1$ *telle que* $\lim\limits_{t\to+\infty} M_t = M_\infty$ *p.s et dans* L^1.

   On a alors que M_∞ *ferme* M *(i.e : p.s* $M_t = E\left(M_\infty \left|\mathcal{F}_t\right.\right)$*).*

Théorème 1.2 (convergence des martingales)

i) *Soit* $M=(M_t)_{t\geq 0}$ *une surmartingale càd-làg borné dans* L^1*(en particulier si elle est positive). Alors* M_t *converge p.s quand* $t\to+\infty$ *vers une limite intégrable.*

ii) *Soit* $M=(M_t)_{t\geq 0}$ *une martingale càd-làg bornée dans* L^p*(i.e.* $\sup\limits_{t\geq 0} E\left(|M_T|^P\right)<\infty$*). Alors* M *converge p.s quand* $t\to+\infty$ *vers une limite* L^p*-intégrable, et converge aussi dans* L^p.

Théorème 1.3 (Théorème d'arrêt) *Soit* $(M_t)_{t\geq 0}$ *une martingale continue à droite par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

1. *Pour tout temps d'arrêt borné* τ*, la variable.aléatoire* M_τ *est intégrable et* $\mathcal{F}_\tau$*-mesurable.*

2. *Si σ et τ sont deux temps d'arrêt bornés, et si $\sigma \leq \tau$, alors :*

$$M_\sigma = \mathbb{E}\left(M_\tau \left|\mathcal{F}_\sigma\right.\right).$$

Théorème 1.4 (Inégalité de Doob) *Soit $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une sousmartingale positive (ou une martingale),càdlàg. Alors pour tout temps d'arrêt τ, on a :*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq t\leq\tau}|M_t| \geq \lambda\right] \leq \frac{E\left|M_t\right|}{\lambda}\ ,\ \forall\lambda > 0. \tag{1.2}$$

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq\tau}|M_t|\right]^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left[|M_t|^p\right]\ ,\ \forall p > 1.$$

Remarque 1.7 *L'inégalité 1.2 et les théorèmes de convergence des martingales impliquent que si $(M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une martingale càdlàg uniformément intégrable, alors*

$$\sup_{t\in T}|M_t| < +\infty \qquad p.s.$$

Théorème 1.5 *Une martingale continue et bornée $M = (M_t)_{t\geq 0}$ admet une variation quadratique finie $\langle M, M\rangle$.*
De plus, $(\langle M, M\rangle_t)_{t\geq 0}$ est l'unique processus croissant, continu, nul en 0 tel que $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ soit une martingale.

Proposition 1.2 *Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue, et soit τ un temps d'arrêt. Alors, le processus arrêté $M^\tau = (M_{\tau\wedge t})_{t\geq 0}$ est une martingale* ***(martingale arrêtée).*** *Et de plus,*

$$\langle M^\tau, M^\tau\rangle = \langle M, M\rangle^\tau.$$

1.4 Martingales locales

Les conditions d'intégrabilité pour les martingales peuvent être assez restrectives. Afin de se donner un peu plus de liberté, on introduit, en utilisant le concept de localisation, une nouvelle notion voisine moins restrictive.
On se place dans un espace filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ qui vérifie les conditions habituelles.
Rappelons qu'un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est dit uniformément intégrable si :

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{t\geq 0} \int_{\{|X_t|>\alpha\}} |X_t| \, d\mathbb{P} = 0$$

En théorie des processus, le concept de localisation est trés utile. On dit qu'une propriété d'un processus X est tenue localement (i.e X est localement "truc"), s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt τ_n, appelée **suite localisante (réduit** ou **localise**), telle que $\tau_n \uparrow \infty$ et pour tout n, le processus arrêté X^{τ_n} possède cette propriété(i.e. X^{τ_n} est "truc").

Définition 1.21 (Martingale locale) *On dit qu'un processus adapté à trajectoires continues $\mathbb{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ avec $M_0 = 0$ p.s est une martingale locale (continue) s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n} \tau_n = +\infty$ p.s et que $M_t^{\tau_n}$ soit une martingale uniformément intégrable pour tout n.*
On dit alors que les temps d'arrêt τ_n localisent ou réduisent $\mathbb{M}$.
Plus généralement, lorsque $M_0 \neq 0$, on dit que $\mathbb{M}$ est une martingale locale (continue) si $M_t = M_0 + N_t$, où le processus N est une martingale locale issue de 0

Remarque 1.8 *Toute martingale continue est une martingale locale*
En effet, prenons $\tau_n \equiv n$. On a clairement $\tau_n \uparrow \infty$. À n fixé, $(M_t^n)_{t\in T}$ est bien une martingale uniformément intégrable.

On sait que toute martingale continue est une martingale locale, mais la réciproque n'est pas vraie : les martingales locales sont beaucoup plus générales que les martingales. Il est important de savoir si une martingale locale est une martingale. Nous allons introduire quelques résultats dans ce sens.

Proposition 1.3

i) *Une martingale locale positive M telle que $M_0 \in \mathbf{L}^1$ est une surmartingale.*

ii) *Une martingale locale M bornée, ou plus généralement telle qu'il existe une variable $Z \in \mathbf{L}^1$ telle que pour tout $t \geq 0$, $|M_t| \leq Z$, est une martingale.*

iii) *Si M est une martingale locale avec $M_0 = 0$, la suite de temps d'arrêt*

$\tau_n = \inf\{t \geq 0, |M_t| = n\}$ *réduit M*

Preuve.

i) Écrivons $M_t = M_0 + N_t$, et soit (τ_n) une suite de temps d'arrêt qui réduit N. Alors, si $s \leq t$, on a pour tout n,

$$N_{s\wedge\tau_n} = E\left[N_{t\wedge\tau_n} \left|\mathcal{F}_s\right.\right].$$

En ajoutant des deux membres la variable M_0, on trouve :

$$M_{s\wedge\tau_n} = E\left[M_{t\wedge\tau_n} \left|\mathcal{F}_s\right.\right]$$

Puisque M est à valeurs positives, on peut faire tendre n vers ∞ et appliquer le lemme de Fatou (pour les éspérances conditionnelles) qui donne :

$$M_s \geq E\left[M_t \left|\mathcal{F}_s\right.\right]$$

Lorsque $s = 0$, on obtient $E(M_t) \leq E(M_0) < \infty$, et donc $M_t \in L^1$ pour tout $t \geq 0$.

Alors, M est une surmartingale.

ii) Si M est bornée (ou plus généralement dominée par une variable intégrable), le même raisonnement que si-dessous donne pour $s \leq t$

$$M_{s\wedge\tau_n} = E\left[M_{t\wedge\tau_n} \left|\mathcal{F}_s\right.\right]$$

Or par convergence dominée la suite $M_{t\wedge\tau_n}$ converge dans L^1 vers M_t, et donc on peut passer à la limite $n \to \infty$ pour trouver $M_s = E\left[M_t \left|\mathcal{F}_s\right.\right]$.

iii) C'est une conséquence immédiate de ii).

■

Théorème 1.6 *1. Si X est un processus qui est localement une martingale de carré intégrable. Alors, X est une martingale locale.*

2. Soit X un processus càdlàg adapté et soit $\tau_n \uparrow \infty$ p.s une suite de temps d'arrêt. Si pour chaque n le processus $X^{\tau_n}\mathbf{1}_{\{\tau_n>0\}}$ est une martingale, alors X est une martingale locale.

Propriétés

Voici une collection de propriétés élémentaires pour les martingales locales :

a) Dans la définition d'une martingale locale (issue de 0), on peut remplacer "martingale uniformément integrable" par "martingale" (en effet, on peut ensuite remplacer τ_n par $\tau_n \wedge n$).

b) La somme de deux martingales locales est une martingale locale.

c) Si M est une martingale locale. Alors pour tout temps d'arrêt σ, M^σ et $M^\sigma\mathbf{1}_{\{\sigma>0\}}$ sont des martingales locales (M^σ martingale locale arrêtée).

d) Si τ_n réduit M et si σ_n est une suite de temps d'arrêt telle que $\sigma_n \uparrow \infty$. Alors la suite $(\tau_n \wedge \sigma_n)$ réduit aussi M.

e) Si τ réduit M, et si σ est un temps d'arrêt tel que $\sigma \leq \tau$. Alors σ réduit M.

f) Si τ et σ réduisent M, il en est de même pour $\tau \vee \sigma$.

g) L'espace des martingales locales est un espace vectoriel, noté $\mathcal{M}_{loc}$.

Le théorème suivant sera trés utile dans la suite.

Théorème 1.7 *Soit M une martingale locale (continue) issue de 0. Alors, si M est à variation finie, M est indistinguable de 0.*

Théorème 1.8 (Convergence des martingales locales) *Si (M_t) est une martingale locale sur $[0,T]$ et si :*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s<T}|M_t|\right)<\infty$$

Alors, avec probabilité 1, $M_T=\lim_{t\uparrow T}M_t$ et $\mathbb{E}(M_0)=\mathbb{E}(M_T)$

1.4.1 Variation et covariation quadratique d'une martingale locale

Théorème 1.9 *Soit M une martingale locale continue. On définit sa variation quadratique $\langle M\rangle$ comme l'unique processus croissant, prévisible, continu, nul en 0 tel que $(M_t^2-\langle M\rangle_t)$ soit une martingale locale continue.*

De plus,

$$\sup_{s\leq t}\left|Q_s^{\Delta_n}(M)-\langle M\rangle_s\right|\xrightarrow{\mathcal{P}}0\quad \textit{lorsque}\quad n\longrightarrow+\infty$$

où $Q_s^{\Delta_n}(M)$ est définie par 1.1.

Preuve. Soit $(\tau_n)_n$ une suite de temps d'arrêt telle que $\tau_n\uparrow+\infty$ $p.s$ et telle que M^{τ_n}soit bornée. D'aprés le téorème 1.5, pour tout n, il existe un processus $A^n=\langle M^{\tau_n},M^{\tau_n}\rangle$ tel que $(M^2)^{\tau_n}-A^n$ soit une martingale uniformément intégrable.

$$((M^2)^{\tau_{n+1}}-A^{n+1})^{\tau_n}=(M^2)^{\tau_n}-(A^{n+1})^{\tau_n}$$

Donc (par unicité),

$$(A^{n+1})^{\tau_n}=A^n$$

On peut construire un processus noté $\langle M,M\rangle$ croissant, continu , nul en 0 tel que $\langle M,M\rangle^{\tau_n}=A^n$. Par cette construction, $M^2-\langle M,M\rangle$ est une martingale locale puisque

$$(M^2-\langle M,M\rangle)^{\tau_n}=(M^2)^{\tau_n}-A^n$$

est une martingale uniformément intégrable.

Soit t fixé. Soit $\varepsilon > 0$ et σ un temps d'arrêt tel que M^σ est bornée et $\mathbb{P}(\sigma \leq t) \leq \delta$. Sur l'intervalle $[0, \sigma]$, $Q^\Delta(M)$ et $\langle M, M \rangle$ coincide avec $Q^\Delta(M^\sigma)$ et $\langle M^\sigma, M^\sigma \rangle$ donc :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq t} \left|Q_s^\Delta(M) - \langle M, M \rangle_s\right| > \varepsilon\right) \leq \delta + \mathbb{P}\left(\sup_{s \leq t} \left|Q_s^\Delta(M^\sigma) - \langle M^\sigma, M^\sigma \rangle_s\right| > \varepsilon\right)$$

et le dernier terme tend vers 0 lorsque le pas de Δ tend vers 0. ■

Définition 1.22 *Soient X et Y deux martingales locales. On définit leur covariation quadratique , notée $\langle X, Y \rangle$, par :*

$$\langle X, Y \rangle_t = \frac{1}{4}\left(\langle X + Y \rangle_t - \langle X - Y \rangle_t\right)$$

Corollaire 1.1 *Soient M et N deux martingales locales continues. Leur covariation quadratique $\langle M, N \rangle$ est l'unique processus continu, à variation finie et nul en 0 tel que $M.N - \langle M, N \rangle$ soit une martingale locale continue.*
De plus, pour tout t et pour toute suite de subdivisions $(\Delta_n)_n$ de $[0, t]$ telle que $|\Delta_n| \longrightarrow 0$,

$$\sup_{s \leq t} \left|\tilde{Q}_s^{\Delta_n}(M, N) - \langle M, N \rangle_s\right| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad \textit{lorsque} \quad n \longrightarrow +\infty$$

où :

$$\tilde{Q}_s^{\Delta_n}(M, N) = \sum_{t_i \in \Delta_n} \left(M_{t_{i+1}}^s - M_{t_i}^s\right)\left(N_{t_{i+1}}^s - N_{t_i}^s\right)$$

Preuve. Il suffit de remarquer que :

$$\tilde{Q}_s^{\Delta_n}(M, N) = \frac{1}{4}\left(\tilde{Q}_s^{\Delta_n}(M + N) - \tilde{Q}_s^{\Delta_n}(M - N)\right)$$

et d'utiliser le Théorème 1.9 ■

Remarque 1.9

(1) *L'application $(M, N) \to \langle M, N \rangle$ est bilinéaire, symétrique et positive. Elle est aussi dégénérée au sens où :*

$$\langle M, M \rangle = 0 \Longleftrightarrow M = M_0 \quad p.s$$

(2) *Soient M et N deus martingales locales continues.*

MN *est une martingale locale* $\Longleftrightarrow \langle M, N\rangle = 0.$

(3) *Soient M et N deus martingales locales et τ un temps d'arrêt. Alors,*

$$\langle M^{\tau}, N^{\tau}\rangle_t = \langle M^{\tau}, N\rangle_t = \langle M, N^{\tau}\rangle_t = \langle M, N\rangle_t^{\tau}$$

D'aprés cette proprieté, on trouve que $M^{\tau}(N - N^{\tau})$ est une martingale locale.

Notation 1 *On notera*

$$\bar{\mathbb{T}} = \begin{cases} [0, T] & si \;\; \mathbb{T} = [0, T] \\ [0, +\infty] & si \;\; \mathbb{T} = [0, +\infty[\end{cases}$$

On note aussi $\bar{T}$ le bord à droite de $\mathbb{T}$.

Théorème 1.10 (Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy) *Pour tout $p > 0$, il existe des constantes positives c_p et C_p telles que pour toute martingale locale continue $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et tout temps d'arrêt τ à valeurs dans $\bar{\mathbb{T}}$, on ait :*

$$c_p E\left[\langle M\rangle_{\tau}^{p/2}\right] \leq E\left[\sup_{0\leq t\leq\tau} |M_t|\right]^p \leq C_p E\left[\langle M\rangle_{\tau}^{p/2}\right].$$

Le résultat suivant est une conséquence des inégalités de Doob (Théorème 1.4) et Burkholder-Davis-Gundy (Téorème 1.10)

Proposition 1.4 *Soit $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une martingale locale continue. Alors, il y a équivalence entre :*

1. *M est une martingale de carré intégrable.*
2. *$E[\langle M, M\rangle_t] < +\infty$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.*

Dans ce cas, $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ est une martingale continue et si $M_0 = 0$, on a :

$$E\left[M_t^2\right] = E\left[\langle M, M\rangle_t\right] \quad , \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

De plus, on a équivalence entre :

1. *M est une martingale bornée dans L^2.*

2. $E\left[\langle M, M\rangle_{\bar{T}}\right] < +\infty$

Et dans ce cas :

$$E\left[M_{\bar{T}}^2\right] = E\left[\langle M, M\rangle_{\bar{T}}\right]$$

où $M_{\bar{T}}$ est la limite p.s de M quand t tend vers $\bar{T}$

Proposition 1.5 (Inégalité de Kunita-Watanabe) *Soient M et N deux martingales locales et H et K deux processus mesurables. Alors :*

$$\int_0^\infty |H_s| . |K_s| \quad |d\langle M, N\rangle_s| \leq \left(\int_0^\infty H_s^2 \; d\langle M\rangle_s\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty K_s^2 \; d\langle N\rangle_s\right)^{1/2}$$

Preuve. Notons $\langle M, N\rangle_s^t = \langle M, N\rangle_t - \langle M, N\rangle_s$ pour $s \leq t$. On commence par remarquer que $p.s$ pour tous $s < t$ rationnels (donc aussi par continuité pour tous $s < t$) on a

$$\left|\langle M, N\rangle_s^t\right| \leq \sqrt{\langle M, M\rangle_s^t}\sqrt{\langle N, N\rangle_s^t}$$

En effet, cela découle immédiatement des approximations de $\langle M, M\rangle$ et $\langle M, N\rangle$ données dans le théorème 1.9 et le corollaire 1.1 respectivement, ainsi que de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour une subdivision $s = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \left|\langle M, N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}\right| &\leq \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\langle M, M\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}}\sqrt{\langle N, N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{p} \langle M, M\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{p} \langle N, N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{\langle M, M\rangle_s^t}\sqrt{\langle N, N\rangle_s^t}
\end{aligned}$$

et puisque

$$\int_s^t |d\langle M, N\rangle_u| = \sup \sum_{i=1}^{p} \left|\langle M, N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}\right|$$

on en déduit que

$$\int_s^t |d\langle M, N\rangle_u| \leq \sqrt{\langle M, M\rangle_s^t}\sqrt{\langle N, N\rangle_s^t}$$

On généralise ensuite cette inégalité à tout borélien borné A de $\mathbb{R}_+$

$$\int_A |d\langle M,N\rangle_u| \leq \sqrt{\int_A d\langle M,M\rangle_u}\sqrt{\int_A d\langle N,N\rangle_u}$$

Soit maintenant $h = \sum_i \lambda_i 1_{A_i}$ et $k = \sum_i \mu_i 1_{A_i}$ deux fonctions étagés positives. Alors,

$$\begin{aligned}
\int h(u)\,k(u)\,|d\langle M,N\rangle_u| &= \sum_i \lambda_i \mu_i \int_{A_i} |d\langle M,N\rangle_u| \\
&\leq \left(\sum \lambda_i^2 \int_{A_i} d\langle M,M\rangle_u\right)^{1/2} \left(\sum \mu_i^2 \int_{A_i} d\langle N,N\rangle_u\right)^{1/2} \\
&= \left(\int h(u)^2\, d\langle M,M\rangle_u\right)^{1/2} \left(\int k(u)^2\, d\langle M,M\rangle_u\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

On conclut en utilisant le fait que toute fonction mesurable positive est limite d'une suite croissante de fonctions étagées. ■

Chapitre 2

Semi-martingales et Calcul Stochastique

Ce chapitre traite l'objet principal de ce mémoire : le calcul stochastique pour les semi-martingales. Ces derniers constituent la classe générale de processus pour laquelle on peut développer une théorie de l'intégration stochastique.
Aprés avoir présenté l'espace des semi-martingales et ses propriétés élémentaires, nous allons étudier séparément les deux parties du calcul stochastique : calcul intégral et calcul différentiel. Premièrement, nous définissons l'intégrale stochastique, d'abord, par rapport à une semi-martingale continue, ensuite,trés brièvement (à cause des difficultés techniques supplémentaires), par rapport à une semi-martingale càdlàg. Nous établissons ensuite la célèbre formule de Itô. Deuxiement, on s'intéresse aux équations différentielles stochastiques par rapport à une semi-martingale continue.

2.1 Semimartingales

Une semimartingale est un processus qui se décompose en une martingale locale (section 1.4), et un processus à variation finie. Ses propriétés en font un "bon" integrateur.

2.1.1 Définitions et propriétés

Dans la suite, on se place dans une base stochastique $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\right)$ telle que $\mathbb{F}$ satisfait les conditions habituelles.

Définition 2.1 *Un processus càdlàg adapté $X = (X_t)$ est* ***une semimartingale*** *s'il admet une décomposition*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t \tag{2.1}$$

où

- *M est une martingale locale càdlàg nulle en 0*
- *A est un processus adapté continu à droite, nul en 0,dont les trajectoires sont à variation finie.*

Définition 2.2 *Une semimartingale X est dite* ***spéciale*** *s'il existe une décomposition 2.1 pour laquelle A est prévisible.*

Remarque 2.1

1. *Toute martingale locale, tout processus à variation finie est une semimartingale. Toute surmartingale continue à droite est une semimartingale spéciale.*
2. *En générale, la décomposition 2.1 n'est pas unique.Cependant, il existe au plus une décomposition 2.1 pour laquelle A est prévisible, cette décomposition est appelée* ***décomposition canonique*** *de X.*
3. *La classe des semimartingale est notée $\mathcal{S}$ et celle des semimartingales spéciales est notée $\mathcal{S}_p$ Ils sont des espaces vectoriels stables .*

Exemple 2.1 • *$X_t = B_t^2$ où (B_t) est un mouvement Brownien, est une semimartingale.*

En effet,

(X_t) peut s'écrire comme : $X_t = M_t + A_t$, avec $M_t = B_t^2 - t$ une martingale et $A_t = t$ est un processus à variation finie.

• *$X_t = N_t$ avec (N_t) est un processus de Poisson, est une semimartingale comme il est à variation finie.*

- $X_t = W_t$ *avec* (W_t) *est un processus de Weiner (mouvement Brownien) est une semimartingale, car il est une martingale avec des trajectoires continues si* W_0 *est intégrable donc une martingale locale continue.*
- *Plus généralement, tous processus de Lévy est une semimartingale.*
- *On peut obtenir une semimartingale en appliquant une* C^2-*fonction sur une autre semimartingale.*

Le théorème suivant donne plusieurs caractérisations utiles des semimartingales spéciales

Théorème 2.1 *Soit* X *une semimartingale. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. X *est une semimartingale spéciale.*
2. *Pour toute décomposition* $X_t = X_0 + M_t + A_t$*,* A *est à variation localement intégrable.*
3. X *admet une décomposition* $X_t = X_0 + M_t + A_t$ *où* A *est à variation localement intégrable.*
4. *Le processus croissant* $X^* = \sup_{s \leq t} |X_s|$ *est localement intégrable.*

L'espace des semimartingales est stable pour une large variété des transformations :

►Pour le changement du temps :

Définition 2.3 (Changement de temps) *Une famille de temps d'arrêt* $\tau = (\tau_t)_{t \geq 0}$ *est appelée un changement de temps (continu) si* τ *est un processus (continu) croissant à valeurs dans* $\bar{\mathbb{R}}_+$.

Théorème 2.2 *Supposons que* X *est une semimartingale. Soit* $\tau = (\tau_t)$ *un changement de temps et pour tout* $t \geq 0$ *,* $\tau_t < \infty$ *.Posons :*

$$Y_t = X_{\tau_t} \quad , \quad \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau_t} \quad ,t \geq 0$$

Alors $Y = (Y_t)$ *est une semimartingale de* $\mathcal{G}_t$ *.*

►Pour la localisation :

Théorème 2.3 *$\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_p$ sont stable par localisation, i.e :*

$$\mathcal{S}_{loc} = \mathcal{S} \quad et \quad (\mathcal{S}_p)_{loc} = \mathcal{S}_p$$

►Pour temps d'arrêt :

Lemme 2.1 *Si τ est un temps d'arrêt, et $X \in \mathcal{S}$. Alors, $X^\tau \in \mathcal{S}$*

► Pour changement de la mesure de probabilité :

Théorème 2.4 *Soit $\mathbb{Q}$ une loi de probabilité sur Ω, absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$. Alors, toute $\mathbb{P}-$semimartingale est une $\mathbb{Q}-$semimartingale.*

► Pour changement de filtration :

Théorème 2.5 *Soit X une semimartingale pour la filtration $\mathcal{F}$, et soit $\mathcal{G}$ une sous-filtration de $\mathcal{F}$ tel que X soit $\mathcal{G}-$adapté. Alors, X est une semimartingale pour $\mathcal{G}$. En particulier, X est une semimartingale par rapport à sa filtration naturelle.*

Théorème 2.6

– *Si X est une semimartingale, et si f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ .Alors, le processus $f \circ X$ est une semimartingale .*

– *Soit f une fonction à valeurs réelles sur $\mathbb{R}_+$. Pour que le processus $X_t(\omega) = f(t)$ soit une semimartingale, il est nécessaire et suffisant que f soit càdlàg, à variation finie sur chaque intervalle fini.*

Définition 2.4 *Une semimartingale continue est une semimartingale telle que dans la décomposition 2.1, M et A sont continus. Une telle décomposition où M et A sont continus, est unique.*

2.1.2 Variation quadratique d'une semimartingale

Puisque le processus à variation finie a une variation quadratique nulle, on obtient :

Théorème 2.7 *Soit*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t \ , \forall t \geq 0$$

une semimartingale continue. Pour tout $t \geq 0$*, si* $0 = t_0^n \leq t_1^n \leq \cdots \leq t_{k(n)}^n = t$ *est une subdivision de* $[0, t]$ *de pas tendant vers* 0*, on a la convergence en probabilité :*

$$\langle X, X \rangle_t = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{k(n)} \left(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right)^2$$

Nous écrivons donc :

$$\langle X, X \rangle = \langle M, M \rangle .$$

Corollaire 2.1 *Si* X *est une semimartingale continue à variation finie .Alors,* $\langle X, Y \rangle_t = 0$ *,* $\forall Y \in \mathcal{S}$*.*

2.2 Intégrales stochastiques

Dans cette section , on définit l'intégrale stochastique par rapport à une semimartingale. La construction de cette dernière se fait en deux étapes : nous commençons par intégrer par rapport à des martingales bornée dans L^2. Ensuite, nous définissons l'intégrale par rapport à une martingale locale puis par rapport à une semimartingale. On s'intérèsse à des semimartingales à trajectoires continues ainsi que des semimartingales à trajectoire càdlàg.

2.2.1 Cas continu

On considère dans un premier temps le cas où X est continue. Avec la décomposition 2.1, l'intégrale par rapport à X est la somme de deux intégrales, l'une par rapport à la partie à variation finie A, et l'autre par rapport à la partie martingale locale continue M. L'intégrale par rapport à A est définie trajectoriellement comme une intégrale de Stieljes (voir Annexe A).

Par contre, on ne peut pas définir l'intégrale par rapport à M de manière trajectorielle comme des intégrales de Stieljes. La notion d'intégrale stochastique par rapport à M est basée sur l'existence d'une variation quadratique $\langle M \rangle$, qui permet de définir l'intégrale comme limite des suites simples de type Riemann dans L^2.

Considérons un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant les conditions habituelles.

Intégrale Stochastique par rapport à une martingale bornée dans L^2

Notation 2

1. *On note H^2 l'espace des martingales continues M bornées dans L^2 avec $M_0 = 0$. H^2 muni du produit scalaire $(M, N)_{H^2} = E\left(\langle M, N \rangle_\infty\right)$ (la norme associée à ce produit est donnée par : $\|M\|_{H^2} = E\left(\langle M, N \rangle_\infty\right)^{1/2}$) est un espace de Hilbert.*

2. *Pour $M \in H^2$, on note $L^2(M)$ l'espace des processus progressifs K tels que :*

$$E\left[\int_0^\infty K_s^2 d\left\langle M, M\right\rangle_s\right] < +\infty$$

   $L^2(M)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(H, K)_{L^2(M)} = E\left[\int_0^\infty H_s K_s d\left\langle M, M\right\rangle_s\right]$.

3. *On note $\mathcal{E}$ la famille des processus élémentaires, c'est-à-dire les processus H définies par :*

$$H_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}(\omega)\, 1_{]t_i, t_{i+1}]}(s)$$

   où pour $i = 0, \ldots, p$, $H_{(i)}$ sont $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables et bornées.

   Notons que pour tout $M \in H^2, \mathcal{E}$ est dense dans $L^2(M)$

On commence par définir $H.M$, où $H \in \mathcal{E}$, par

$$(H.M)_t = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}(\omega)\left(M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}\right)(s)$$

Pour $H \in \mathcal{E}$, $H.M \in H^2$ si $M \in H^2$.

Théorème 2.8 (Existence de l'intégrale) *Soit $M \in H^2$.*

L'application $H \in \mathcal{E} \longmapsto H.M$ s'étend à une isométrie de $L^2(M)$ dans H^2. De plus

i) La martingale $H.M$ est caractérisée par la relation :

$$\langle H.M, N \rangle = H. \langle M, N \rangle, \quad \forall N \in H^2$$

ii) Si T est un temps d'arrêt, on a :

$$\left(1_{[0,T]} H\right).M = (H.M)^T = H.M^T \tag{2.2}$$

Remarque 2.2 *En générale, on utilise la notation intégrale :*

$$(H.M)_t = \int_0^t H_s dM_s$$

Preuve. Si $H \in \mathcal{E}$, alors $H.M$ est la somme des martingales $M_t^i = H_{(i)} \left(M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}\right)$ telles que

$$\left\langle M^i, M^j \right\rangle_t = 0 \text{ si } i \neq j$$

et

$$\left\langle M^i, M^j \right\rangle_t = H_{(i)}^2 \left(\langle M, M \rangle_{t\wedge t_{i+1}} - \langle M, M \rangle_{t\wedge t_i}\right)$$

Par conséquent,

$$\langle H.M, H.M \rangle_t = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}^2 \left(\langle M, M \rangle_{t\wedge t_{i+1}} - \langle M, M \rangle_{t\wedge t_i}\right)$$

et donc

$$\begin{aligned}\|H.M\|_{H^2} &= E\left[\sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}^2\left(\langle M,M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M,M\rangle_{t_i}\right)\right]\\ &= E\left[\int_0^\infty H_s^2 d\langle M,M\rangle_s\right]\\ &= \|H\|_{L^2(M)}^2\end{aligned}$$

L'application $H \longmapsto H.M$ est donc une isométrie de $\mathcal{E}$ dans H^2. Puisque $\mathcal{E}$ est dense dans $L^2(M)$ et H^2 est un espace de Hilbert, on peut prolonger de manière unique cette application en une isométrie de $L^2(M)$ dans H^2.

$i)$ Si $H \in \mathcal{E}$,on a $\langle H.M, N\rangle = \sum_{i=0}^{p-1}\langle M^i, N\rangle$ et

$$\left\langle M^i, N\right\rangle_t = H_{(i)}\left(\langle M,N\rangle_{t\wedge t_{i+1}} - \langle M,N\rangle_{t\wedge t_i}\right)$$

On en déduit que :

$$\langle H.M, N\rangle_t = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}\left(\langle M,N\rangle_{t\wedge t_{i+1}} - \langle M,N\rangle_{t\wedge t_i}\right) = \int_0^t H_s d\langle M,N\rangle_s$$

Ce qui donne $i)$ si $H \in \mathcal{E}$. D'aprés l'inégalité de Kunita-Watanabe, pour tout $N \in H^2$, l'application $X \longmapsto \langle X, N\rangle_\infty$ est continue de H^2 dans L^1.

Si $H^n \in \mathcal{E}$ et $H^n \to H$ dans $L^2(M)$, on a :

$$\langle H.M, N\rangle_\infty = \lim_{n\to\infty}\langle H^n.M, N\rangle_\infty = \lim_{n\to\infty}\left(H^n.\langle M,N\rangle\right)_\infty = \left(H.\langle M,N\rangle\right)_\infty$$

où les convergences ont lieu dans L^1 et la derniere égalité découle de l'inégalité de Kunita-Watanabe :

$$E\left[\left|\int_0^\infty \left(H_s^n - H_s\right) d\langle M,N\rangle_s\right|\right] \leq E\left[\langle M,N\rangle_\infty\right]^{1/2}\|H^n - H\|_{L^2(M)}$$

En prenant N^t au lieu de N dans l'égalité $\langle H.M, N\rangle_\infty = \left(H.\langle M,N\rangle\right)_\infty$, on en déduit $i)$.

ii) Si $N \in H^2$, $\left\langle (H.M)^T, N \right\rangle_t = \langle H.M, N\rangle_{t\wedge T} = (H.\langle M,N\rangle)_{t\wedge T} = \left(H1_{[0,T]}.\langle M,N\rangle\right)_t$, ce qui montre que $(H.M)^T$ vérifie la propriété caractéristique de l'intégrale $\left(H1_{[0,T]}\right).M$. On obtient donc $\left(H1_{[0,T]}\right).M = (H.M)^T$ et d'une manière analogue on trouve $H.M^T = \left(H1_{[0,T]}\right).M$.

■

Proposition 2.1 (Associativité de l'intégrale stochastique) *Si $K \in L^2(M)$ et $H \in L^2(K.M)$, alors $HK \in L^2(M)$ et*

$$(HK).M = H.(K.M)$$

La martingale $H.M$ est appelée intégrale stochastique de H par rapport à M et notée

$$\int_0 H_s dM_s$$

Intégrale stochastique par rapport à une martingale locale

En utilisant la propriété 2.2,on étend maintenant la définition de $H.M$ au cas où M est une martingale locale continue.

Soit M une martingale locale issue de 0. On note $L^2_{loc}(M)$ l'espace des processus progressifs H tels que pour tout $t \geq 0$

$$\int_0^t H_s^2 d\langle M,M\rangle_s < \infty$$

Théorème 2.9 (Existence de l'intégrale stochastique) *Soit M une martingale locale issue de 0. Pour tout $H \in L^2_{loc}(M)$, il existe une unique martingale locale issue de 0, notée $H.M$ qui est caractérisée par*

$$\langle H.M, N\rangle = H.\langle M,N\rangle, \quad \textit{pour toute martingale locale } N$$

Remarque 2.3

1. *On note habituellement $(H.M)_t = \int_0^t H_s dM_s$.*

2. *La propriété 2.2 reste vérifiée.*

3. *La propriété de l'associativité de la Proposition 2.1 reste vraie sous des hypothèses convenables.*

Preuve. On peut construire une suite de temps d'arrêt $(T_n)_n \uparrow +\infty$ tels que $M^{T_n} \in H^2$ et $H^{T_n} \in L^2\left(M^{T_n}\right)$. Donc pour tout n, on peut définir l'intégrale stochastique $X^{(n)} = H^{T_n}.M^{T_n} \in H^2$. Si on arrête $X^{(n+1)}$ en T_n, on trouve :

$$\begin{aligned}(X^{(n+1)})^{T_n} &= \left(H^{T_{n+1}}.M^{T_{n+1}}\right)^{T_n} \\ &= H^{T_{n+1}} 1_{[0,T_n]}.M^{T_{n+1}} \\ &= H 1_{[0,T_n]}.M^{T_n}\end{aligned}$$

On peut donc définir $H.M$ en posant $(H.M)_t = X_t^{(n)}$ sur $[0, T_n]$. $(H.M)_t$ est une martingale locale continue car $(H.M)^{T_n} = X^{(n)} \in H^2$.

Puisque,

$$\langle H.M, N\rangle^{T_n} = (H.\langle M, N\rangle)^{T_n}$$

on a clairement :

$$\langle H.M, N\rangle = H.\langle M, N\rangle$$

■

Intégrale stochastique par rapport à une semimartingale continue

On achève dans ce paragraphe la construction de l'intégrale stochastique en intégrant finalement par rapport aux semimartingales continues.

On dit qu'un processus progressif H est localement borné si :

$$p.s. \quad \forall t \geq 0, \qquad \sup_{s \leq t} |H_s| < \infty$$

Un processus adapté et continu est localement borné. De plus, si H est localement borné, on a pour tout processus à variation finie V

$$p.s. \quad \forall t \geq 0, \qquad \int_0^t |H_s| \, |dV_s| < \infty$$

De même, pour toute martingale locale M, on a $H \in L^2_{loc}(M)$ car

$$\int_0^t H_s^2 d \langle M, M \rangle_s \leq \sup_{s \in [0,t]} \langle M, M \rangle_s < +\infty$$

Définition 2.5 *Soit $X = X_0 + M + V$ une semimartingale continue, et soit H un processus progressif localement borné. L'intégrale stochastique $H.X$ est alors définie par :*

$$H.X = H.M + H.V$$

On note traditionnellement

$$(H.X)_t = \int_0^t H_s dX_s$$

Des propriétés déjà vues pour l'intégrale contre une martingale locale ou contre un processus à variation finie, on déduit facilement :

Proposition 2.2

1. *L'application $(H, X) \longmapsto H.X$ est bilinéaire.*
2. *$H.(K.X) = (HK).X$, si H et K sont localement bornés.*
3. *Pour tout temps d'arrêt T, $(H.X)^T = H1_{[0,T]}.X = H.X^T$.*
4. *Si $H \in \mathcal{E}$, alors :*
$$(H.X)_t = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)} \left(X_{t_{i+1} \wedge t} - X_{t_i \wedge t} \right).$$
5. *Soit X une semimartingale continue et soit H un processus adapté continu. Alors, si $(\Delta_n)_n = (t_i^n)$ est une suite de subdivisions de $[0, t]$ telle que $|\Delta_n| \to 0$, on a au sens de la convergence en probabilité :*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{t_i^n \in \Delta_n} H_{t_i^n} \left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n} \right) = \int_0^t H_s dX_s \ .$$

2.2.2 Cas non continu

On s'intérèsse maintenant à des semimartingales càdlàg. On intègre alors des processus prévisibles. Dans ce cas, la décompostion de la semimartingale en une martingale locale et un processus à variation finie n'est plus unique (on peut jouer sur les sauts), à moins d'imposer par exemple que le processus à variation finie soit prévisible (il suffit de fixer les sauts).

Remarque 2.4 *On a besoin d'introduire deux crochets $[M,M]_t$ et $\langle M,M\rangle_t$ (qui est la projection prévisible de $[M,M]_t$). Chacun de ces crochets hérite une des propriétés fondamentales présentées dans le théorème 1.9 :*
– $[M,M]_t = \lim\limits_{|\Delta|\to\infty} \sum\limits_{t_i\in\Delta} \left(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}\right)^2$ *est la variation quadratique de* M.
– $\langle M,M\rangle_t$ *est l'unique processus prévisible tel que* $M^2 - \langle M,M\rangle$ *soit une martingale locale.*

Intégrale stochastique par rapport à une martingale

Pour un processus prévisible simple (ou élémentaire) défini par :

$$H_t = H_0 I_0 + \sum_{i=0}^{n-1} H_i I_{[\tau_i,\tau_{i+1}]}(t),$$

où $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots \leq \tau_n \leq \tau$ sont des temps d'arrêt, et H_i est $\mathcal{F}_{\tau_i}$-mesurable pour chaque i, l'intégrale stochastique est définie comme la somme :

$$\int_0^\tau H_t dM_t = \sum_{i=0}^{n-1} H_i \left(M_{\tau_{i+1}} - M_{\tau_i}\right).$$

Si M est une martingale locallement de carré intégrable, et par la théorie de L^2 (espace de Hilbert), on peut donc étendre l'intégrale stochastique à la classe des processus prévisibles H tel que :

$$\left(\int_0^\tau H_t^2 d\langle M,M\rangle_t\right)^{1/2} \quad \text{soit locallement intégrable} \tag{2.3}$$

Si M est une martingale locale continue, l'intégrale stochastique est donc définie pour une classe plus large des processus prévisibles H satisfaisants :

$$\int_0^\tau H_t^2 d\left\langle M\right\rangle_t < \infty \quad p.s$$

Propriétés de l'intégrale stochastique par rapport à une martingale

1. Si M est une martingale locale, l'intégrale $\int_0^t H_s dM_s$ est une martingale locale.
2. Si M est une martingale de carré intégrable et H satisfait :

$$E\left(\int_0^t H_s^2 d\left\langle M\right\rangle_s\right) < \infty$$

   Alors, $\int_0^t H_s dM_s$ est une martingale de carré intégrable d'éspérance 0 et de variance :

$$E\left(\int_0^t H_s dM_s\right)^2 = E\left(\int_0^t H_s^2 d\left\langle M\right\rangle_s\right).$$

3. Si la martingale locale M est à variation finie, alors l'intégrale stochastique est indistinguable de l'intégrale de Stieljes.

Intégrale stochastique par rapport à une semimartingale

Soit $X = X_0 + M_t + A_t$ une semimartingale.

Soit H un processus prévisible tel que la condition 2.3 et

$$\int_0^t |H_s|\, dV_A(s) < \infty$$

où $V_A(s)$ est la variation de A .

Alors, l'intégrale stochastique est définie comme la somme des intégrales :

$$\int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dA_s$$

Comme la décomposition de X n'est pas unique, il faut qu'on vérifie que cette intégrale ne dépend pas de la décomposition utilisée.

En effet,

Si $X_t = X_0 + M'_t + A'_t$ est une autre décomposition de X, alors $(M - M')_t = -(A - A')_t$. Donc, $M - M'$ est une martingale locale à variation finie. Mais pour des telles martingales, les intégrales stochastiques et les intégrales de Stieljes sont les mêmes, et par conséquence :

$$\int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dA_s = \int_0^t H_s dM'_s + \int_0^t H_s dA'_s = \int_0^t H_s dX_s \ .$$

Puisque l'intégrale par rapport à une martingale locale est une martingale locale , et l'intégrale par rapport à un processus à variation finie est un processus à variation finie .Alors , l'intégrale stochastique par rapport à une semimartingale est une semimartingale.

Propriétés de l'intégrale stochastique par rapport à une semimartigale

Soit X une semimartingale et H un processus prévisible tels que l'intégrale stochastique existe pour $0 \leq t \leq T$, on note :

$$(H.X)_t : = \int_0^t H_s dX_s$$

L'intégrale stochastique $H.X$ a les propriétés suivantes :

1. $\Delta (H.X)_t = H_t \Delta X_t$ (En particulier, l'intégrale stochastique par rapport à une semimartingale continue est continue).

2. Si τ est une temps d'arrêt, alors on définit l'intégrale arrêtée comme l'intégrale par rapport la semimartingale arrêtée

$$\int_0^{t\wedge\tau} H_s dX_s = \int_0^t H_s I_{(s\leq\tau)} dX_s = \int_0^t H_s dX_{s\wedge\tau}$$

3. Si X est à variation finie, alors $H.X$ est indistinguable de l'intégrale de Stieljes définie trajectoriellement.

4. Si $Y_t = (H.X)_t$ est une semimartingale, et K est un processus prévisible tel que $(K.Y)_t = \int_0^t K_s dY_s$ soit définie. Alors,

$$K.Y = K.(H.X) = (KH).X$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^t K_s dY_s = \int_0^t K_s H_s dX_s$$

2.2.3 Variation quadratique de l'intégrale stochastique

Voilà quelques propriétés de la covariation de l'intégrale stochastique :

$$\left[\int_0^\cdot H_s dX_s, \int_0^\cdot K_s dY_s\right]_t = \int_0^t H_s K_s d\left[X,Y\right]_s$$

En particulier, sa variation quadratique est donnée par :

$$\left[\int_0^\cdot H_s dX_s, \int_0^\cdot H_s dX_s\right]_t = \int_0^t H_s^2 d\left[X,X\right]_s$$

et

$$\left[\int_0^\cdot H_s dX_s, Y\right]_t = \left[\int_0^\cdot H_s dX_s, \int_0^\cdot 1 dY_s\right]_t = \int_0^t H_s d\left[X,Y\right]_s$$

2.2.4 Formule d'Itô

À la base du calcul stochastique se trouve la formule fondamentale de changement de variables, aussi connu par "**la formule de Itô**", qui est sans doute l'outil le plus puissant de la théorie du calcul stochastique.

La formule d'Itô montre qu'une fonction de classe C^2 de $d-$semimartingales continues est encore une semimartingale continue, et elle exprime explicitement la décomposition de cette semimartingale.

Théorème 2.10

(i) *Cas unidimensionnel : Soient X une semimartingale continue, et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors, $F(X)$ est une semimartingale et :*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\, d\langle X\rangle_s \ .$$

(ii) *<u>Cas multidimensionnel</u> : Soient $X = \left(X^1, X^2, \ldots, X^d\right)$ une semimartingale continue à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (i.e : pour chaque $i = 1, ..., d$, X^i est une semimartingale continue), et $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors, $F(X)$ est une semimartingale et :*

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s)\, dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\, d\left\langle X^i, X^j \right\rangle_s \ .$$

Preuve.

(i) Considérons une suite $\left\{0 = t_0^n < \cdots < t_{p_n}^n = t\right\}_{n \geq 0}$ de subdivisions emboitées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0. Alors en télescopant la somme, on a :

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=0}^{p_n - 1} \left(F\left(X_{t_{i+1}^n}\right) - F\left(X_{t_i^n}\right)\right)$$

La formule de Taylor (Lagrange) à l'ordre 2 sur l'intervalle (non ordonné) $\left(X_{t_i^n}, X_{t_{i+1}^n}\right)$ donne pour chaque $\omega \in \Omega$:

$$F\left(X_{t_{i+1}^n}\right) - F\left(X_{t_i^n}\right) = F'\left(X_{t_{i+1}^n}\right)\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right) + \frac{f_{n,i}(\omega)}{2}\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right)^2$$

où

$$\inf_{\theta \in [0,1]} F"\left(X_{t_i^n} + \theta\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right)\right) \leq f_{n,i} \leq \sup_{\theta \in [0,1]} F"\left(X_{t_i^n} + \theta\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right)\right)$$

D'aprés la propriété 5. de la Proposition 2.2, avec $H_s = F'(X_s)$, on a au sens de la convergence en probabilité :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{p_n - 1} F'\left(X_{t_{i+1}^n}\right)\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right) = \int_0^t F'(X_s)\, dX_s$$

Pour compléter la preuve, il suffit de montrer la convergence en probabilité :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{p_n - 1} f_{n,i}\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right)^2 = \int_0^t F"(X_s)\, d\langle X_s \rangle \qquad (*)$$

Commençons par observer que pour $m < n$,

$$\left| \sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i} \left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n} \right)^2 - \sum_{i=0}^{p_m-1} f_{m,j} \sum_{\left\{ i, t_j^m \leq t_i^n < t_{j+1}^m \right\}} \left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n} \right)^2 \right|$$
$$\leq Z_{m,n} \left(\sum_{i=0}^{p_n-1} \left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n} \right)^2 \right)$$

avec

$$Z_{m,n} = \sup_{0 \leq j \leq p_m - 1} \left(\sup_{\left\{ i, t_j^m \leq t_i^n < t_{j+1}^m \right\}} |f_{n,i} - f_{m,j}| \right)$$

la continuité de F" assure que $Z_{m,n} \to 0$ $p.s$ quand $m, n \to \infty$.

D'aprés le Théorème 2.7, on a :

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} \left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n} \right)^2 \xrightarrow{\mathcal{P}} \langle X, X \rangle_t$$

Et donc pour $\epsilon > 0$ donné, on peut choisir m assez grand tel que pour tout $n > m$

$$\mathbb{P} \left[Z_{m,n} \left(\sum_{i=0}^{p_n-1} \left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n} \right)^2 \right) \geq \epsilon \right] \leq \epsilon$$

Ensuite, pour cette valeur fixée de m, le Théorème 2.7 montre aussi que :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{p_m-1} f_{m,j} \sum_{\left\{ i, t_j^m \leq t_i^n < t_{j+1}^m \right\}} \left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n} \right)^2 = \sum_{i=0}^{p_m-1} f_{m,j} \left(\langle X, X \rangle_{t_{j+1}^m} - \langle X, X \rangle_{t_j^m} \right)^2$$
$$= \int_0^t h_m(s) \, d \langle X, X \rangle_s$$

où $h_m(s) = f_{m,j}$ si $t_j^m \leq s < t_{j+1}^m$. il est clair que $h_m(s) \to F$" (X_s) $p.s$ quand $m \to \infty$.

Donc, quitte à prendre m encore plus grand, on peut supposer que :

$$\mathbb{P} \left[\left| \sum_{i=0}^{p_n-1} h_m(s) \, d \langle X, X \rangle_s - \int_0^t F\text{"} (X_s) \, d \langle X, X \rangle_s \right| \geq \epsilon \right] \leq \epsilon$$

Finalement, en combinant ce qui précède on voit que pour $n > m$ assez grand,

$$\mathbb{P}\left[\left|\sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i}\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right)^2 - \int_0^t F"\left(X_s\right) d\left\langle X, X\right\rangle_s\right| \geq 3\epsilon\right] \leq 3\epsilon$$

Ce qui termine la preuve de *

(ii) Pour d quelconque, la formule de Taylor (toujours à l'ordre 2) donne :

$$\begin{aligned}
&F\left(X_{t_{i+1}^n}^1, \ldots, X_{t_{i+1}^n}^d\right) - F\left(X_{t_i^n}^1, \ldots, X_{t_i^n}^d\right) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial F}{\partial x^k}\left(X_{t_i^n}^1, \ldots, X_{t_i^n}^d\right)\left(X_{t_{i+1}^n}^k - X_{t_i^n}^k\right) + \sum_{k,l=1}^{p} \frac{f_{n,i}^{k,l}}{2}\left(X_{t_{i+1}^n}^k - X_{t_i^n}^k\right)\left(X_{t_{i+1}^n}^l - X_{t_i^n}^l\right)
\end{aligned}$$

avec

$$\inf_{\theta \in [0,1]} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}\left(X_{t_i^n}^1 + \theta\left(X_{t_{i+1}^n}^1 - X_{t_i^n}^1\right), \ldots\right) \leq f_{n,i}^{k,l} \leq \sup_{\theta \in [0,1]} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}\left(X_{t_i^n}^1 + \theta\left(X_{t_{i+1}^n}^1 - X_{t_i^n}^1\right), \ldots\right)$$

La propriété 5. dans la Proposition 2.2 donne à nouveau la limite cherchée pour les termes faisant intervenir les dérivées premières :

$$\sum_{k=1}^{p_n-1} \frac{\partial F}{\partial x^k}\left(X_{t_i^n}^1, \ldots, X_{t_i^n}^d\right)\left(X_{t_{i+1}^n}^k - X_{t_i^n}^k\right) \xrightarrow{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x^i}\left(X_s^1, \ldots, X_s^d\right) dX_s^k$$

En adaptant légèrement les arguments de (i), on montre que pour tous $k, l \in \{1, \ldots, d\}$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i}^{k,l}\left(X_{t_{i+1}^n}^k - X_{t_i^n}^k\right)\left(X_{t_{i+1}^n}^l - X_{t_i^n}^l\right) = \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial x^l}\left(X_s^1, \ldots, X_s^d\right) d\left\langle X^k, X^l\right\rangle_s$$

Celà achève la preuve de la formule dans le cas multidimensionnel.

■

Remarque 2.5

1. *La forme différentielle de la forme de Itô :*

– *Cas unidimensionnel* :

$$dF(X) = F'(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}F''(X)\,d\langle X\rangle_t$$

– *Cas multidimensionnel* :

$$dF(X_t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_t)\,dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_t)\,d\left\langle X^i, X^j\right\rangle_t$$

2. *Les propriétés de la différentiabilité de F peuvent être assouplies. Par exemple, si X est à variation finie, F doit être seulement de classe C^1. Ou bien, si X prend p.s ses valeurs dans un domaine ouvert convexe $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$, F doit être définie et de classe C^2 seulement sur $\mathcal{D}$ pas sur tout $\mathbb{R}^d$.*

3. *Puisque $F(X)$ est une semimartingale, sa décomposition en une martingale locale et un processus à variation finie peut être obtenue de la formule de Itô en divisant l'intégrale stochastique par rapport à X_t en intégrale par rapport à une martingale locale et un processus à variation finie .*

Un cas particulier important de la formule de Itô est la formule d'intégration par parties (en appliquant la formule d'Itô à $F(x,y) = xy$ qui est bien de classe C^2) :

Proposition 2.3 (IPP) *Soient X et Y deus semimartingales continues, on a :*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t$$

En particulier, si $Y = X$ on obtient :

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s dX_s + \langle X, X\rangle_t\,.$$

2.3 Équations différentielles stochastiques

Les EDS par rapport à une semimartingale continue sont analysées éssentiellement en utilisant les mêmes techniques que dans le cas des EDS par rapport un mouvement Brownien. On s'intéressera à l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dU_t = b\left(t, ., U\right) dY_t, \quad t \geq 0 \\ U_0 = \xi_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

où :

1. $Y = \left(Y^1, Y^2, \ldots, Y^m\right)$ tel que $Y^1, Y^2, \ldots, Y^m$ sont des semimartingales continues.
2. Notons $C_d = C\left([0, \infty), \mathbb{R}^d\right)$ et $L\left(d, m\right)$ l'espace des matrices $m \times d$. La fonction b est définie par la donnée d'une fonction $a : [0, \infty) \times \Omega \times C_d \longrightarrow L\left(d, m\right)$ telle que pour tout $\varsigma \in C_d : (t, \omega) \mapsto a\left(t, \omega, \varsigma\right)$ est un processus càdlàg adapté, et telle qu'il existe un processus càdlàg adapté et croissant K tel que pour tout $\varsigma_1, \varsigma_2 \in C_d$:

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \left\| a\left(s, \omega, \varsigma_2\right) - a\left(s, \omega, \varsigma_2\right) \right\| \leq K_t\left(\omega\right) \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \varsigma_2\left(s\right) - \varsigma_1\left(s\right) \right| \tag{2.5}$$

et on définit $b : [0, \infty) \times \Omega \times C_d \longrightarrow L\left(d, m\right)$ par

$$b\left(s, \omega, \varsigma\right) = a\left(s-, \omega, \varsigma\right) \tag{2.6}$$

Celà donne que :

(i) Pour tout $t \geq 0$, $(\omega, \varsigma) \mapsto a\left(t, \omega, \varsigma\right)$ est $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}\left(C_d\right)$ $-$mesurable.

(ii) Pour tout processus adapté continu V, $Z_t = a\left(t, ., V\right)$ est processus adapté càglàg.

(iii) Pout tout temps d'arrêt τ, $(\omega, \varsigma) \mapsto a\left(\tau\left(\omega\right), \omega, \varsigma\right)$ est $\mathcal{F}_\tau \otimes \mathcal{B}\left(C_d\right)$ $-$mesurable.

On se donne un espace de probabilité $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$. Un processus adapté continu U est une solution de 2.4 si :

$$U_t = \xi_0 + \int_{0+}^{t} b\left(s, ., U\right) dY_s \tag{2.7}$$

i.e. pour $1 \leq j \leq d$

$$U_t^j = \xi_0^j + \sum_{i=1}^{m} \int_{0+}^{t} b_{jk}\left(s,.,U\right) dY_s^k$$

où $U = \left(U^1, \ldots, U^d\right)$ et $b = \left(b_{jk}\right)$. Car, l'intégrale dans 2.7 est une intégrale de la forme $\int f dX$ où f est à valeurs matricielles et X est à valeurs vectorielles qui est définie comme suit :

Définition 2.6 *Soit $X^1, X^2, \ldots, X^m$ des semimartingales continues.*
On dit que $X = (X^1, X^2, \ldots, X^m)$ est une semimartingale à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Pour $1 \leq j \leq d$, $1 \leq k \leq m$, soit f_{jk} un processus prévisible localement borné. Alors, $f = (f_{jk})$ est dit un processus prévisible localement borné à valeurs dans $L\left(d,m\right)$. L'intégrale stochastique $Z = \int f dX$ est définie par $Z = \left(Z^1, Z^2, \ldots, Z^d\right)$ où :

$$Z^j = \sum_{i=1}^{m} \int f_{jk} dX^k$$

Théorème 2.11 (unicité) *Soit $X = (X^1, X^2, \ldots, X^m)$ une semimartingale à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Supposons que a satisfait la condition 2.5 et b soit définie par 2.6. Soit ξ_0 une variable $\mathcal{F}_0-$mesurable quelconque. Si V et $\tilde{V}$ deux processus adaptés continus qui satisfaient :*

$$V_t = \xi_0 + \int_{0+}^{t} b\left(s,.,V\right) dX_s$$

$$\tilde{V}_t = \xi_0 + \int_{0+}^{t} b\left(s,.,\tilde{V}\right) dX_s$$

Alors,

$$\mathbb{P}\left(V_t = V_t\ ,\ \forall t \geq 0\right) = 1.$$

Preuve. La preuve est faite d'une manière analogue au cas ou X est un mouvement Brownien, en utilisant un changement de temps.
Rappelons qu'un changement de temps est une famille de temps d'arrêt $\left(\phi_t\right)_{t\geq 0}$ telle que pour tout ω, $t \mapsto \phi_t\left(\omega\right)$ est une fonction continue croissante.(Voir [7, Chap.7, Section.1])
Soit ϕ un changement de temps, on définit $\mathcal{G} = \left(\phi\mathcal{F}\right)$ et les semimartingales continues $Y^j =$

$\phi\left[X^j\right],\ 1 \leq j \leq m$ tels que chaque Y^j satisfait la condition (avec $Y^j = N^j + B^j$)

$$\textit{pour } 0 \leq s \leq t < \infty,\ \left\langle N^j, N^j\right\rangle_t - \left\langle N^j, N^j\right\rangle_s \leq (t-s) \quad \text{et} \quad \left|B^j\right|_t - \left|B^j\right|_s \leq (t-s)$$

Soit $\psi_t = (\phi)^{-1} = \inf\left\{s \geq 0, \phi_s \geq t\right\}$.

Fixons ω. On définit $\theta_\omega(\zeta) \in C_d$ par $\theta_\omega(\zeta)(s) = \zeta(\psi_s(\omega))$ et soit

$$c(t,\omega,\zeta) = a(\phi_t(\omega), \omega, \theta_\omega(\zeta)),$$
$$d(t,\omega,\zeta) = b(\phi_t(\omega), \omega, \theta_\omega(\zeta)).$$

avec $d(t,\omega,\zeta) = c(t-,\omega,\zeta)$ (car ϕ est continue). On a pour tout $\zeta_1, \zeta_2 \in C_d$

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq u\leq s} \left\|c(u,\omega,\zeta_2) - c(u,\omega,\zeta_1)\right\| && (*)\\
&= \sup_{0\leq u\leq s} \left\|a(\phi_u,\omega,\theta_\omega(\zeta_2)) - a(\phi_u(\omega),\omega,\theta_\omega(\zeta_1))\right\| \\
&\leq K_{\phi_s}(\omega) \sup_{0\leq v\leq \phi_s(\omega)} \left|\theta_\omega(\zeta_2)(v) - \theta_\omega(\zeta_1)(v)\right| \\
&\leq K_{\phi_s}(\omega) \sup_{0\leq v\leq \phi_s(\omega)} \left|\zeta_2(\psi_v(\omega)) - \zeta_1(\psi_v(\omega))\right| \\
&\leq K_{\phi_s}(\omega) \sup_{0\leq u\leq s} \left|\zeta_2(u) - \zeta_1(u)\right|.
\end{aligned}$$

On voit que pour tout ζ, $(t,\omega) \longmapsto c(t,\omega,\zeta)$ est un processus càdlàg $\mathcal{G}-$adapté.

Pour $H = \phi[K]$ un processus $\mathcal{G}-$adapté et coissant, * devient :

$$\sup_{0\leq u\leq s} \left\|c(u,\omega,\zeta_2) - c(u,\omega,\zeta_1)\right\| \leq H_s(\omega) \sup_{0\leq u\leq s} \left|\zeta_2(u) - \zeta_1(u)\right|$$

Puisque $d(s,.,\zeta) = c(s-,.,\zeta)$, on a :

$$\sup_{0\leq u\leq s} \left\|d(u,\omega,\zeta_2) - d(u,\omega,\zeta_1)\right\| \leq H_{s-}(\omega) \sup_{0\leq u\leq s} \left|\zeta_2(u) - \zeta_1(u)\right|$$

Soient $U = \phi[V]$, $\tilde{U} = \phi\left[\tilde{V}\right]$ et donc $V = \psi[U]$, $\tilde{V} = \psi\left[\tilde{U}\right]$. On note $A_s = b(s,.,V)$,

$\tilde{A}_s = b\left(s, ., \tilde{V}\right)$, $B_s = A_{\phi_s}$ et $\tilde{B}_s = \tilde{A}_{\phi_s}$, donc :

$$\begin{aligned} B_s &= A_{\phi_s} \\ &= b\left(\phi_s, ., \psi\left(U\right)\right) \\ &= d\left(s, ., U\right) \end{aligned}$$

de même, $\tilde{B}_t = d\left(t, ., \tilde{U}\right)$
Ainsi les processus $U, \tilde{U}$ satisfaient

$$U_t = \xi + \int_{0+}^{t} d\left(s, ., U\right) d\tilde{Y}_s,$$

$$\tilde{U}_t = \xi + \int_{0+}^{t} d\left(s, ., \tilde{U}\right) d\tilde{Y}_s.$$

Puisque c, d satisfaient 2.6, et d'aprés Théorème 7.20 de [7, page 232], ona :

$$\mathbb{P}\left(U_t = \tilde{U}_t \ , \forall t \geq 0\right) = 1$$

Puisque $V = \psi\left[U\right]$ et $\tilde{V} = \psi\left[\tilde{U}\right]$, on trouve

$$\mathbb{P}\left(V_t = \tilde{V}_t \ , \forall t \geq 0\right) = 1$$

■

Théorème 2.12 (Existence) *Soit $X^1, \ldots, X^m$ des semimartingales continues. Supposons que a satisfait la condition 2.5 et b soit définie par 2.6. Soit ξ_0 une variable $\mathcal{F}_0-$mesurable quelconque. Alors, il existe un processus adapté continu qui satisfait :*

$$V_t = \xi_0 + \int_{0+}^{t} b\left(s, ., V\right) dX_s \tag{2.8}$$

Preuve. On va construire des approximations et montrer que ces processus convergent $p.s$ et la limite est la solution requise de 2.8, en utilisant encore une fois un changement de temps. Pour une démonstration détaillée, je recommande [7, p.237] ■

.

Conclusion

Ce travail est consacré à l'étude de la théorie des semimartingales, qui nous fournira d'une classe d'intégrateurs la plus genérale pour le calcul stochastique. Pour cela, on a défini les processus à variation finie et on a donné une présentation détaillée des martingales locales. En particulier, nous nous sommes intéressés au calcul stochastique par rapport à une semimartingale. On a commencé par la contruction de l'intégrale stochastique par rapport à une semimartingale prenant en considération les deux cas :continu et non continu. On a consacré la dernière section de ce mémoire à une étude non exhaustive des EDS dirigées par les smimartingales continues.

Bibliographie

[1] Breton,J.C.(2018).Processus stochastiques.Université de Rennes 1.

[2] Dellacherie,C.& Meyer,P.A.(1975).Probabilités et Potentiel vol.A.Hermann.

[3] Dellacherie,C.& Meyer,P.A.(1980).Probabilités et Potentiel vol.B :Théorie des martingales.Hermann.

[4] Guillotin-Plantard,N.(2009).Introduction au calcul stochastique.

[5] Guiol,H.(2006).Calcul Stochastique avancé.TIMB/TIMC-IMAG.

[6] He,S.& Wang,J.& Yan,J.(1992).Semimartingale Theory and stochastic calculus. Science Press & CRC Press INC.

[7] Karandikar,R.L.& Rao,B.V.(2018).Introduction to Stochastic Calculus.Springer.

[8] Klebaner,F.(2005).Introduction to Stochastic Calculus with Applications.Imperial College Press.

[9] Le Gall,J.F.(2013).Mouvement Brownien,martingales et calcul stochastique.Springer

[10] Pham,H.(2007).Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance.Springer.

Annexe A : Intégrale de Stieltjes

L'intégrale stochastique par rapport à une semimartingale peut être considérée comme une extension de l'intégrale de Stieltjes.

Soit X un processus croissant. Fixons ω tel que $t \mapsto X_t(\omega)$ soit continue à droite et croissante. Cette fonction induit une mesure positive $\mu_X(\omega, ds)$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\mu_X(\omega, [a, b[) = X_b(\omega) - X_a(\omega) \quad \text{pour tout } a \leq b$$

Plus généralement, si f est une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}_+$, alors :

$$\int_0^t f(s)\, dX_s(\omega) := \int_0^t f(s)\, \mu_X(\omega, ds)$$

est bien définie pour tout $t > 0$.

De même si $H_s = H(s, \omega)$ est un processus mesurable, on peut définir ω par ω l'intégrale

$$(H.X)_t(\omega) = \int_0^t H(s, \omega)\, dX_s(\omega)$$

En procédant de façon analogue si X est un processus à variation finie, on a une mesure induite $\mu_X(\omega, ds)$ (qui est cette fois une mesure signée :la mesure peut être négative) et on peut définir l'intégrale :

$$(H.X)_t(\omega) = \int_0^t H(s, \omega)\, dX_s(\omega)$$

pour tout H mesurable borné.

Notation 3 *Etant donné un processus à variation finie X et un processus mesurable H tel* *que p.s* $\int_0^t H(s,\omega)\,dX_s(\omega)$ *existe et soit fini pour tout* $t>0$*. On notera* $H.X$ *,ou de façon équivalente* $\int HdX$*, le processus* $\left((H.X)_t\right)_{t\geq 0}$ *qu'on appellera* ***intégrale de Stieltjes*** *de* H *par rapport* X*.*

Théorème 2.13 *1. Soient* X *et* Y *deux processus adaptés croissants tels que* $Y.X$ *soit aussi un processus croissant. Alors, il existe un processus mesurable adapté* H *tel que :*

$$0\leq H\leq 1 \quad et \quad X=H.Y=\int HdY$$

2. Soit X *un processus adapté à variation finie. Alors, il existe une processus mesurable adapté* H *tel que :*

$$-1\leq H\leq 1 \quad et \quad V(X)=H.X=\int HdX \quad et \quad X=H.V(X)=\int HdV(X)$$

où le processus $V(X)$ *est la variation totale de* X *définie par :*

$$V(X)=\sup_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{2^n}\left|X_{kt/2^n}-X_{(k-1)t/2^n}\right|$$

Lorsque H est à trajectoires continues, l'intégrale de Stieltjes est aussi connu comme **l'intégrale de Riemann-Stieltjes.** Dans ce cas, on définit l'intégrale comme la limite des sommes approximées

Théorème 2.14 *Soit* A *un processus à variation finie, et soit* H *un processus mesurable tel que p.s* $s\longmapsto H(s,\omega)$ *est continue Alors, on a pour tous* $n\geq 1$ *et* $i=1,\ldots,k(n)$, $t_{i-1}^n\leq s_i^n\leq t_i^n$ *:*

$$\int_0^t H_s dX_s=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k(n)} H(s_i^n)\left(X(t_i^n)-X\left(t_{i-1}^n\right)\right)$$

où $\Delta_n=(t_i^n)_{i=1,\ldots,k(n)}$ *est une suite de subdivisions de* $[0,t]$ *de pas* $|\Delta_n|\to 0$ *lorsque* $n\to\infty$*.*

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliqués ci-dessous :

$\mathbb{P}$	:	la mesure de probabilité
C^k $(k = 1, 2)$	:	la classe des fonctions $k-$ fois continuement dérivables
L^1	:	l'espace (des classes d'équivalence) des variables aléatoires intégrables $(E\left\|X\right\| < \infty)$
L^2	:	l'espace (des classes d'équivalence) des variables aléatoires de carré intégrable $(E\left\|X\right\|^2 < \infty)$.
$\mathcal{B}(.)$	:	la tribu borélienne sur .
$\sigma(.)$	:	la tribu engendrée par .
$\\|.\\|$	:	norme
$(.,.)$	:	produit scalaire
$C(.)$	:	l'espace des fonctions rélles continues sur .

Les abréviations utilisées dans ce mémoire sont :

$\mathbb{P}-p.s$	:	presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$\xrightarrow{\mathcal{P}}$	:	convergence en probabilité.
$i.e$	:	c'est à dire.
EDS	:	équations différentielles stochastiques.