République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

Barkati Roufida

Titre :

Sur la loi normale et applications

Membres du Comité d'Examen :

Prof.	**MERAGHNI Djamel**	UMKB	Président
Prof.	**BRAHIMI Brahim**	UMKB	Encadreur
Dr.	**OUANOUGHI Yasmina**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

C'est avec une très grande émotion et un immense plaisir que je dédie Ce modeste travail :

À mes chers parents Mohammed et Roumani Sabrina que je remercie pour tous leurs sacrifices.

À mes chers frères et soeurs : Jad, Hichem, Djouhaina et Salsabil.

À toute ma famille.

À tous mes amis qui m'ont toujours encouragé

À tous ceux que j'aime et ceux qui m'aiment.

REMERCIEMENTS

Après avoir rendu grâce à Dieu Tout puissant et le Miséricordieux.

Je tient tout d'abord à exprimer mes profondes gratitudes et remerciements à mon encadreur Prof. ***Brahimi Brahim*** *pour son aide et son soutient surtout pour sa patience qu'il a fait avec nous et ses précieux conseils.*

*Mes remerciements vont aussi à tous les membres de Jury (Mr.****MERAGHNI*** *et Mme.* ***OUANOUGHI*** *), qui ont accepté de lire et d'évaluer ce travail.*

Je remecie mes amis : ***Abir, Merieme, Safia, Samah, Amel et Bouthaina.***

A la fin, je remercie tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'achèvement de ce travail.

Table des matières

Table des figures

Introduction

De nombreuses situations pratiques peuvent être modélisées à l'aide de variables aléatoires qui sont toujours régies par les lois spécifiques (continues ou discrètes). Ces lois permettent de modéliser ces incertitudes et décrire des phénomènes économiques, physiques, biologique, etc. Donc, il nécessaire d'étudier ces modèles probabilistes.

Pour cela dans ce mémoire on présente la loi la plus utilisé et la plus adaptées pour modéliser des phénomènes naturels, "la loi normale", qui est popularisé par son courbe, "la courbe de Gauss".

Plus formellement, c'est une loi de probabilité absolument continue qui dépend de deux paramètres(l'espérance et la variance). Elle est spéciale par rapport à d'autres lois probabilistes car un grand nombre de méthodes statistiques reposent sur elle.

Cette loi joue un grand rôle dans différents domaines.

Notre mémoire comporte trois chapitres :

Dans le premier chapitre1, nous avons étudié en détail la loi normale, en commençant par retracer ses origines historiques ainsi que son développement au cours des deux derniers siècles. Cette excursion aux temps passé permet de mieux comprendre le rôle qu'occupe actuellement la loi normale. Puis je vais m'atteler à ses caractéristiques
(loi normale générale et standard).

Au deuxième chapitre2, on va aborder quelques propriétés de la loi normale et le théorème central limite, puis nous présentons l'estimation des paramètres par plusieurs méthodes, comme nous parlons de l'intervalle de confiance pour ces paramètres.

Le dernier chapitre3 présente le domaine d'utilisation de la loi normale et les tests de normalité.

Nous terminerons ce mémoire avec une conclusion générale résumons le contexte de notre travail.

Chapitre 1

Loi normale

Dans ce premier chapitre nous énonçons l'historique de la loi normale et leur caractéristiques fondamentales, ainsi que les loi dérivées de cette loi.

1.1 Historique de la loi normale

En probabilité et en statistique, la loi plus connue et la plus populaire est la loi normale· Elle est née au $18^{ème}$ siècle, il tire son origine des travaux des mathématiciens sur la recherche de ‹loi du hasard›, sur cette époque la loi normale a traversé par des étapes importantes :

1.1.1 Jacque Bernoulli

Le point de départ de l'historique de la loi normale présenter par Jacque Bernouli qui ne s'écarte pas de plus d'une quantité donnée, donc que la probabilité que la fréquence de succès tend vers 1 lorsque n est grand. Bernoulli voir que le tirage d'une boule dans une urne contenant t boules (r : blanches et s : noires tel que, $r + s = t$), répété nt fois avec remise que la probabilité de tirer une boule blanche est $p = \frac{r}{t}$.

Bernoulli baser sur le nombre, B_{nt} et à la fréquence $F_{nt} = \frac{B_{nt}}{nt}$ de réalisation de l'une des deux issues (boule blanche). Il preuve que $\forall c$ est assez grand,

$$p\left(\frac{r-1}{t} \leq F_{nt} \leq \frac{r+1}{t}\right) > \frac{c}{c+1}.$$

La probabilité que F_{nt} s'écarte de p de plus de $\frac{1}{t}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et donc que F_{nt} est une approximation de p, on a : $B_{nt} \backsim \beta\,(nt,\ p)$; la probabilité de K échecs sur nt épreuves est :

$$p\,(B_{nt} = nt - k) = \binom{nt}{k}\, p^{nt-k}\,(1-p)^{k}\,.$$

Premièrement Bernoulli fait le développement du binôme de Newton

$$(r+s)^{nt} = \sum\nolimits_{k=0}^{nt} \binom{nt}{k}\, r^{nt-k} s^{k}.$$

Donc il y a $nt+1$ termes noter par $A\,(k)$ et le plus grand terme est :

$$A\,(ns) = \binom{nt}{ns}\, r^{nt-ns} s^{ns}.$$

Alors,

$$A\,(ns-n) = \binom{nt}{ns-n}\, r^{nt-ns+n} s^{ns-n} = p\,(B_{nt} = nt - ns + n)\ \ t^{nt}.$$

$$A\,(ns+n) = \binom{nt}{ns+n}\, r^{nt-ns-n} s^{ns+n} = p\,(B_{nt} = nt - ns - n)\ \ t^{nt}.$$

Ensuite,

$$p\,(nt - ns - n \leq B_{nt} \leq nt - ns + n) > \frac{c}{c+1},$$

$$p\,(n\,(r-1) \leq B_{nt} \leq n\,(r+1))$$

Donc, en quantifiant cette inégalité :

$$\forall t > 0\ \forall c > 0\ \exists N\ \forall n > N\ p\left(n\left(r-1\right) \leq B_{nt} \leq n\left(r+1\right)\right) > \frac{c}{c+1},$$

$$p\left(\frac{r-1}{t} \leq F_{nt} \leq \frac{r+1}{t}\right) > \frac{c}{c+1}.$$

D'ou,

$$\forall t > 0 \lim_{n\to\infty}\left[p\left(\left|F_{nt}-p\right| \leq \frac{1}{t}\right)\right] = 1.$$

1.1.2 Abrahame de Moivre

Moivre reprend l'idée de Bernoulli où les deux issues de l'expérience, répétée n fois, sont également probables $\left(p = q = \frac{1}{2}\right)$.

La probabilité d'obtenir k fois l'une des deux issues est $\binom{n}{k}/2^n;\quad 0 \leq k \leq n.$

On a la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Moivre donne un équivalent à l'infini du terme central du développement de

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^n = \sum\nolimits_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{2^n}.\ \text{(Le binôme de Newton)}.$$

Lorsque n est paire, posons $m = \frac{n}{2}$ on obtient :

$$\frac{\binom{n}{[m]}}{2^n} \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Ensuite, il donne un équivalent du logarithme du rapport de ce terme central à ceux qui en sont distants de l

$$\ln \frac{\binom{n}{m}}{({}^{n}m \pm 1)} \sim \left(m + l - \frac{1}{2}\right) \ln (m + l - 1) + \left(m - l + \frac{1}{2}\right) \ln (m - l + 1) - 2m \ln (m)$$
$$+ \ln \left(\frac{m+1}{[m]}\right).$$

Il obtient alors à l'équivalent suivant :

$$\frac{\binom{n}{m-l}}{2^n} \sim \exp\left(\frac{-2l^2}{n}\right) \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Finalement, en posant $l = s\sqrt{n}$, il obtient comme équivalent de cette somme le produit de $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$ par la somme de la série de terme générale $\frac{(-2)^k \ s^{2k+1}}{k!(2k+1)}$; tel que $s = \frac{1}{2}$.

Moivre a quantifié la probabilité que la fréquence de succès soit comprise entre les valeurs $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n}}$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
Par exemple le jeu de pile ou face, l'intervalle de fluctuation est :

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n}}; \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right] \text{ au seuil de } 68\%$$

1.1.3 Pierre-Simon Laplace

Laplace généralise le résultat de Moivre au cas d'une loi binomiale quelconque$\left(p \neq q \neq \frac{1}{2}\right)$. Il considère d'abord le développement de $(p + (1-p))^{x+x'}$; tel que : $x + x' = n$. et montre que son plus grand terme s'obtient pour x et x' très grands, lorsque $\frac{x}{x'}$ est voisin de $\frac{p}{1-p}$, ensuite baser sur les termes situés avant et aprés de rang l.

Afin d'évaluer la somme des termes dont les rang sont compris entre les deux, il utilise les formule de Stirling et Taylor. En posant $T = \frac{l\sqrt{n}}{\sqrt{2xx'}}$ il trouve l'intervalle de fluctuation tel que :

$$p\left[-\frac{T\sqrt{2xx'}}{n\sqrt{n}} \leq \frac{X}{n} - p \leq \frac{T\sqrt{2xx'}}{n\sqrt{n}}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{T\sqrt{n}}{\sqrt{2xx'}}} \exp\left(-t^2\right) dt + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\ \sqrt{2xx'}} \exp\left(-T^2\right),$$

où X désigne le nombre de succès et T un réel strictement positif. Puis il donne un intervalle de confiance pour p

$$p\left[f_n - \frac{T}{\sqrt{n}}\sqrt{2f_n\left(1-f_n\right)} \leq p \leq f_n + \frac{T}{\sqrt{n}}\sqrt{2f_n\left(1-f_n\right)}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{T} \exp\left(-t^2\right) dt + \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{\exp\left(-T^2\right)}{\sqrt{2f_n\left(1-f_n\right)}},$$

où f_n est la fréquence de succès.

1.1.4 Carl-Friedrich Gauss

Parvient au même résultat que la place en s'intéressant à la distribution des erreurs, il baser sur la méthode des moindres carrés, pour cela il définit la série d'écarts $e_i = x_i - x$ qui sont mutuellement indépendantes et suivent tous la même loi continue de densité φ, pour x donné, la probabilité d'obtenir des écarts compris entre e_i et$e_i + de_i$ est :

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\varphi\left(e_i\right)\right) de_1...de_n.$$

On peut chercher une valeur μ qui est égale à la moyenne arithmétique m de la série.
On note :

$$\psi\left(x\right) = \ln\left(\Pi_{i=1}^{n}\varphi\left(e_i\right)\right).$$

Donc,

$$\psi\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\varphi\left(x_i - x\right)\right).$$

Sa dérivée

$$\psi'\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{d\left(\ln\left(\varphi\left(x_i - x\right)\right)\right)}{dx}.$$

Gauss en déduit qu'il suffit pour cela d'avoir l'égalité terme à terme, soit, pour tout i :

$$\varphi(x_i - x) = C \exp\left(-\frac{k}{2}(x_i - x)^2\right).$$

Gauss obtient une‹loi des erreurs› qui s'exprime sous la forme : $f : x \to C \exp\left(\frac{-k(x-m)^2}{2}\right)$,
où C et k sont des constantes,
respectivement égale à$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ et $\frac{1}{\sigma^2}$ (σ^2 : la variance des observation).

1.1.5 Origine du nom"normale"

Adolphe Quétlet trouve la loi normale dans les erreurs de mesure, puis Francis Galton en 1889, a le premier qui parle de ≪courbe normale≫ pour désigner la distribution des erreurs de mesure. En suite en 1893 Karle Pearson a popularisé le terme ≪loi normale≫ .

1.2 Caractéristiques de la loi normale

Définition 1.2.1 (Loi normale) *Une variable aléatoire réelle X suit une loi normale (ou loi gaussienne, loi de Laplace-Gauss) d'espérance μ et de variance σ^2 si cette variable aléatoire réelle X admet pour densité de probabilité la fonction $f(x)$ définie, pour tout nombre réel x, par :*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}.$$

On résume cette loi par la notion $N(\mu, \sigma^2)$.

1.2.1 Fonction de répartition

Définition 1.2.2 *On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit la loi $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, la fonction définie par :*

$$F_X(a) = P(X \leq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{a} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} dx.$$

Remarque 1.2.1 *L'intégrale de la densité d'une variable aléatoire suit une loi normale, n'ayant pas d'expression mathématique simple, résultant en l'émergence de tables de la fonction de répartition.*

1.2.2 Espérance et Variance

Si X une variable aléatoire suit la loi normale de paramètre μ et σ^2, il admet une espérance et une variance tel que : $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$.

Preuve. L'espérance de X s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}.\end{aligned}$$

En effet un changement de variable : $v = \frac{x-\mu}{\sigma} \Longrightarrow x = v\sigma + \mu \Longrightarrow dx = \sigma dv$

On écrit alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (v\sigma + \mu) \exp\left(-\frac{(v)^2}{2}\right) \sigma dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} v \exp\left(-\frac{(v)^2}{2}\right) dv + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(v)^2}{2}\right) dv \\ &= \mu.\end{aligned}$$

La variance de X s'écrit :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Et on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f(x)\ dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)\ dx.\end{aligned}$$

On procédé au changement de variable $v = \frac{x-\mu}{\sigma}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (v\sigma+\mu)^2 \exp\left(-\frac{(v)^2}{2}\right) \sigma \; dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2\sigma^2 \exp\left(-\frac{(v)^2}{2}\right) dv + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^2 \exp\left(-\frac{(v)^2}{2}\right) dv \\
&+ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v\sigma\mu \exp\left(-\frac{(v)^2}{2}\right) dv \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \exp\left(-\frac{(v)^2}{2}\right) dv + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(v)^2}{2}\right) dv \\
&+ \frac{2\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v \exp\left(-\frac{(v)^2}{2}\right) dv \\
&= \sigma^2 + \mu^2.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \left(\sigma^2+\mu^2\right) - \mu^2 = \sigma^2.
\end{aligned}$$

■

1.2.3 Fonction caractéristique

Définition 1.2.3 *On appelle fonction caractéristique de la variable aléatoire X qui suit la loi $N(\mu,\sigma^2)$.La fonction $\varphi_X(t)$, définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes par :*

$$\varphi_X(t) = \exp(it\mu)\exp\left(-\frac{(t\sigma)^2}{2}\right).$$

Preuve. On a :

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

En effet un changement de variable : $s = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = s\sigma + \mu \Rightarrow dx = \sigma ds$.

Alors : ■

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\tfrac{(s)^2}{2}\right) \exp(it(s\sigma+\mu))\, \sigma ds \\
&= \tfrac{\exp(it\mu)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(s-\sigma t)^2\right) \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\sigma t)^2\right) \\
&= \tfrac{\exp(it\mu)\exp\left(-\frac{1}{2}(\sigma t)^2\right)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(s-\sigma t)^2\right) ds \\
&= \exp(it\mu) \exp\left(-\tfrac{(t\sigma)^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

1.2.4 Fonction génératrice des moments

Définition 1.2.4 *La fonction génératrice des moments d'une loi $N(\mu,\ \sigma^2)$ est égale, pour tout $t \in \mathbb{R}$ à*

$$g(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

Preuve. On a par la définition de la fonction génératrice des moments que

$$\begin{aligned}
g(t) &= \mathbb{E}[\exp(tX)] \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\tfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \exp(tx)\, dx \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\tfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + tx\right] dx \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\tfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + t(x-\mu+\mu)\right] dx \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(t\mu) \exp\left[-\tfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + t(x-\mu)\right] dx \\
&= \tfrac{\exp(t\mu)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\tfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + t(x-\mu)\right] dx.
\end{aligned}$$

En effet un changement de variable $s = x - \mu$ on obtient :

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{\exp(t\mu)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{s^2}{2\sigma^2} + ts\right] ds \\ &= \frac{\exp(t\mu)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(s^2 - 2\sigma^2 ts + \left(\sigma^2 t\right)^2 - \left(t\sigma^2\right)^2\right)\right] ds \\ &= \frac{\exp(t\mu)\exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(s - \sigma^2 t\right)^2\right] ds \\ &= \exp(t\mu)\exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right). \end{aligned}$$

■

1.2.5 Loi de probabilité d'une somme de variable aléatoire normales

Si l'on considère n variable aléatoire de Gauss indépendantes X_i, d'espérances mathématique μ_i et de variance σ_i^2, la somme de ces variables suit une loi $N\left(\sum \mu_i, \sqrt{\sum \sigma_i^2}\right)$.

1.3 Caractéristique de la loi normale standard

La loi normale standard est un cas particulier de la loi gaussienne de paramètre μ et σ^2 lorsque la moyenne μ vaut 0, et la variance vaut 1 et sera appelée loi normale centré-réduite, la loi sera notée $N(0,1)$.

Définition 1.3.1 *Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite normale standard si elle est absolument continue et admet pour densité*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x)^2}{2}\right) (x \in \mathbb{R}).$$

Seule cette loi est tabulée car les autres lois (c'est-à-dire avec d'autres paramètres)se déduise de celle-ci à l'aide du théorème suivant : si X suit $N(\mu, \sigma^2)$ alors $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit $N(0,1)$.

1.3.1 Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X suivant une loi normale standard est donnée par :

$$\phi(x) = P(Z < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(y)^2}{2}\right) dy,$$

avec Z une variable aléatoire suivant $N(0,1)$.

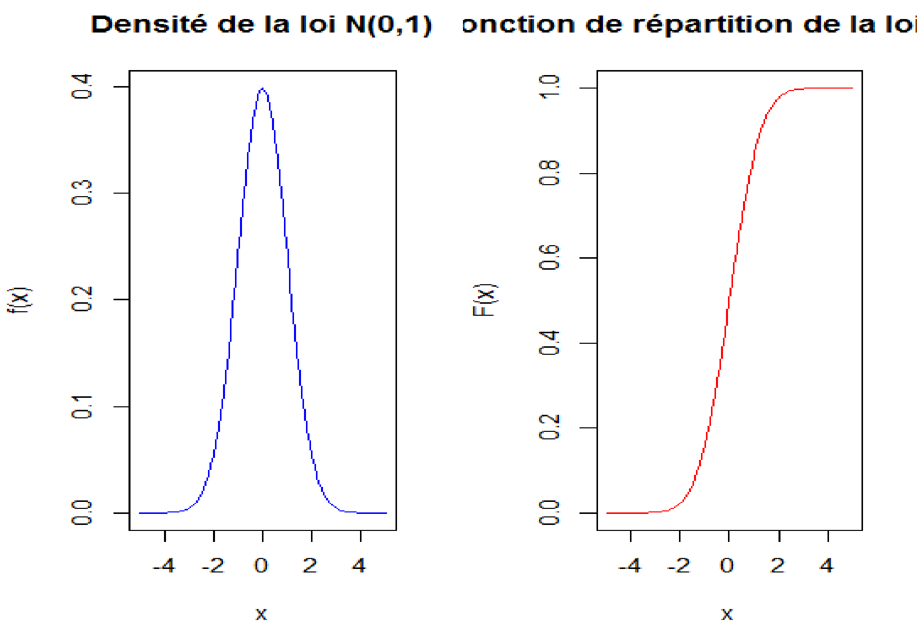

FIG. 1.1 – Densité et Fonction de répartition de $N(0,1)$

1.3.2 Espérance et Variance

Soit X une variable aléatoire suit la loi $N(0,1)$.Alors :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \; et \; \mathbb{V}(X) = 1.$$

1.3.3 Fonction caractéristique

Si X une variable aléatoire suit la loi normale standard, alors sa fonction caractéristique est donnée par :

$$\varphi_{X(t)} = \exp\left(-\frac{(t)^2}{2}\right).$$

1.3.4 Fonction génératrice

La fonction génératrice des moments d'une loi normale $N(0,1)$ égale :

$$g(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$

Remarque 1.3.1 *La somme de deux variables gaussiennes centrées réduites est une variable gaussienne centrée non réduite.*

1.3.5 Lois dérivées de la loi normale

Si on produise une fonction linéaire à partir de la loi normale standard, on arrive a des nouvelles distribution.

Premièrement

Dans le cas où se qu'on fait la somme fini de carré des variables aléatoire suit une loi normale standard on obtient une loi appellée loi du khi-deux ou de pearson χ^2.

Soit $Z_1,\ Z_2, ..., Z_\nu$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $N(0,1)$. Alors la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2$ suit une loi du khi-deux à ν degrés de liberté, noté

$\chi^2(\upsilon)$, sa densité est :

$$f_\nu(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2-1}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Deuxièment

Dans le cas où on a deux variables aléatoires indépendantes Z et Q telles que Z suit $N(0,1)$ et Q suit $\chi^2(\upsilon)$. Alors la variable aleatoire $T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Q}{2}}}$ suit une loi appelée loi de student à ν degrés de liberté, notée $St(\nu)$, sa densité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{1}{\left(\frac{1+x^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}.$$

Troisièment

Si on a deux variables indépendantes Q_1et Q_2 telles que Q_1 suit $\chi^2(\nu_1)$ et Q_2 suit $\chi^2(\nu_2)$ alors la variable aléatoire $F = \frac{Q_1}{\nu_1} \backslash \frac{Q_2}{\nu_2}$ suit une loi de Fisher-Snedecor à (ν_1, ν_2) degrés de liberté, notée $F(\nu_1, \nu_2)$, tel que sa densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} x \; \frac{\frac{\nu_1}{2-1}}{\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}} & si\ x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

1.3.6 Coefficients de Pearson

Coefficient d'asymétrie (Skewness)

Nombre réel sans dimension, indicateur de forme, qui mesure l'asymétrie d'une distribution probabiliste ou statistique.

Le coefficient d'asymétrie est le quotient : $\beta_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$.

La normale est caractérisée par un coefficient d'asymétrie égale à 0.

Coefficient d'aplatissement (Kurtosis)

Nombre réel sans dimension, indicateur de forme, qui mesure l'aplatissement d'une distribution probabiliste ou statistique.

Le coefficient d'aplatissement est le quotient : $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$, avait été introduit par pearson. Pour la loi normale le coefficient d'aplatissement est égale à 3.

Exemple 1.3.1 *la loi normale avec différent valeurs pour μ et σ.*

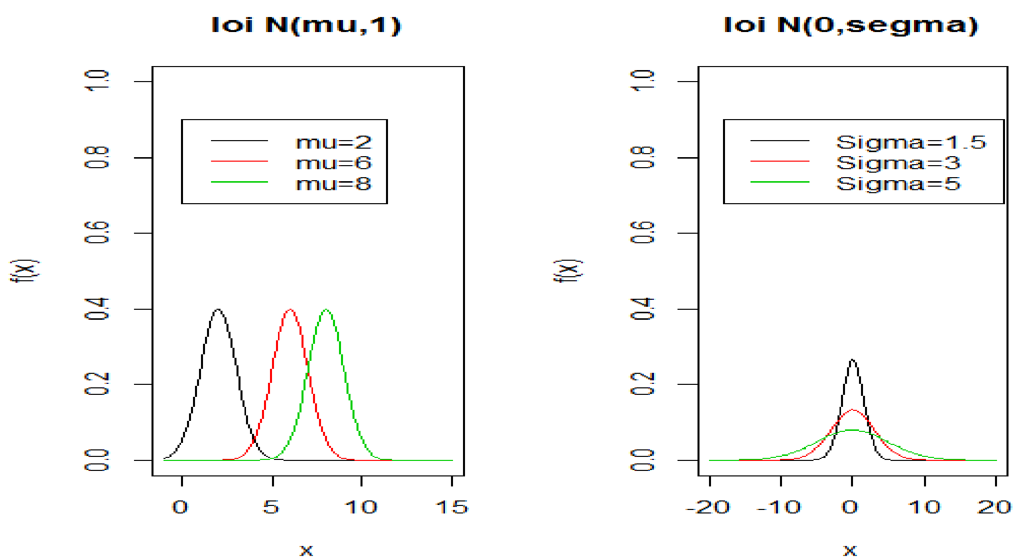

FIG. 1.2 – Densité de la loi normale avec différents valeurs de μ et σ.

Dans cette figure (1.2)on montre bien l'effet de paramètres μ et σ, tel que σ est un paramètre d'échelle qui rend la densité soit plus aplatie soit plus pointue.

En revanche, des variation de paramètre de position μ n'affectent pas la forme de la courbe mais uniquement son emplacement.

Chapitre 2

Proprietés et estimation

2.1 Téorème central limite

Le théorème central limite établit la convergence vers la loi de Gauss sous des hypothèses peut contraignantes.

Théorème 2.1.1 *Soit* (X_n) *une suit de variables aléatoires indépendantes de même loi d'espérance* μ *et d'écart-type* σ*. Alors :*

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1),$$

où $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ *signifie convergence en loi ou en distribution.*

Preuve. L'idée de la preuve consiste à montrer que la fonction génératrice des moments de z_n tend vers la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire suivant une loi $N(0,1)$. Nous avons vu dans le chapitre précédent que la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire suivant une loi $N(0,1)$ correspond à $\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.
Notons $Y_i = \frac{(X_i - \mu)}{\sigma}$; les Y_i sont donc des variables aléatoire indépendante et identiquement distribuées d'espérance nulle et de variance 1. En notant $g(.)$ leur fonction génératrice des moments commune, donc on a : $g_{Z_n}(t) = \left(g\left(t\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)^n$.

Et pour calculer la limite de $g_{Z_n}(t)$, nous utilisons un développement de série de Taylor à l'ordre 2 de $g\left(t\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. On a : $g(0) = 1,\ g'(0) = 0$ et $g''(0) = 1$. Ceci nous donne

$$g_{Z_n}(t) = \left(g(0) + \frac{t}{\sqrt{n}1!}g\prime(0) + \frac{t^2}{n2!}g\prime\prime(0) + R\left(t\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n,$$

où $R\left(t\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ désigne le reste du développement avec $\lim\limits_{n\to\infty} nR\left(t\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$.
Notons $r_n = R\left(t\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. On remplaçant les valeurs de $g(0),\ g'(0)$ et $g''(0)$

$$\begin{aligned} g_{Z_n}(t) &= \left(1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{t^2}{n} + r_n\right)^n \\ &= \left(1 + \tfrac{t^2+2nr_n}{2n}\right)^n \\ &= \left(1 + \tfrac{\frac{1}{2n}}{t^2+2nr_n}\right)^n \\ &= \left(1 + \tfrac{\frac{1}{n}}{\frac{t^2}{2}+nr_n}\right)^{\frac{n}{\frac{t^2}{2}+nr_n}\left(\frac{t^2}{2}+nr_n\right)}. \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \longrightarrow e$, nous avons :

$$\begin{aligned} g_{Z_n}(t) &= \left(1 + \tfrac{\frac{1}{n}}{\frac{t^2}{2}+nr_n}\right)^{\frac{n}{\frac{t^2}{2}+nr_n}\left(\frac{t^2}{2}+nr_n\right)} \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\exp(1))^{\left(\frac{t^2}{2}\right)} \quad \text{car } nr_n \longrightarrow 0 \\ &= \exp\left(\tfrac{t^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Finalement on voir que $g_{Z_n}(t)$ tend vers la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire suivant la loi $N(0,1)$. Alors on peut conclure que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1).$$

■

Exemple 2.1.1 *La vérification graphique de la validitée du T.C.L dans le cas des lois binomiales normalisées* $\left(p = \frac{1}{3}\right.$ *et* $\left.n = 5, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 5000\right)$. *Nous remarquons*

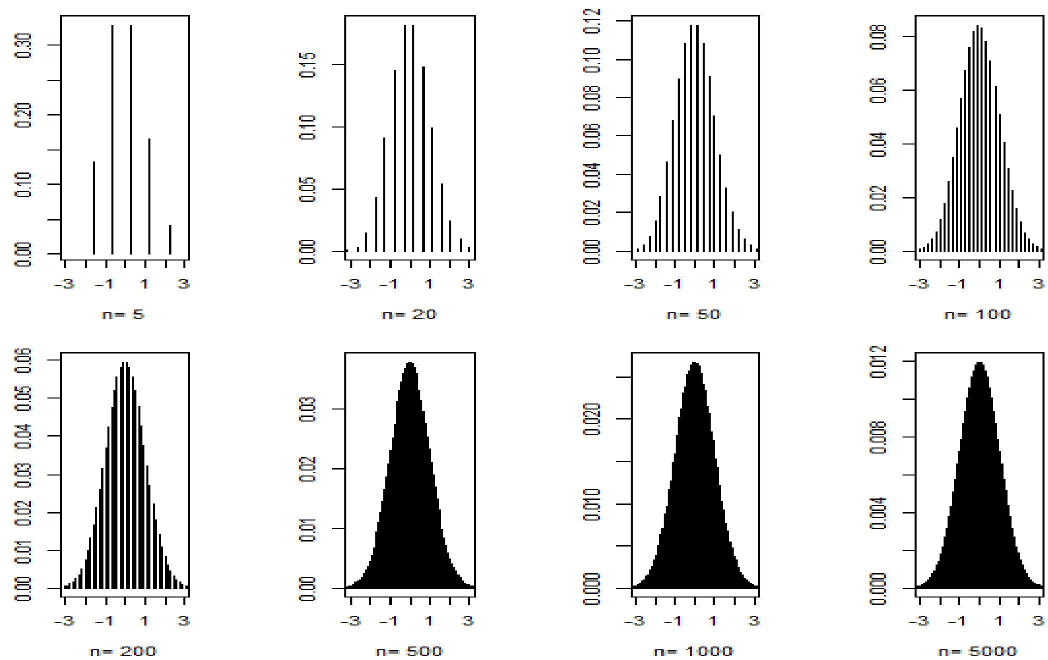

FIG. 2.1 – Illustration de T.C.L.

dans le graphe(2.1) *la convergence de la loi binomiale ver la loi normale lorsque n est augmente.*

2.2 Inégalité de Bienaymé-Chebyshev

Définition 2.2.1 *Soit X une variable aléatoire admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$ et de variance finie σ^2.*

L'inégalité de Bienaymé-Chebychev s'énonce de la façon suivante :

Pour tout réel ξ strictement positif,

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \xi) \leq \frac{\sigma^2}{\xi^2}.$$

Propriété 2.2.1 (Intervalles caractéristique d'une loi normale) *Si X suit une loi normale, alors on a :*

– $p(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \simeq 0.68,$

- $p\left(\mu-2\sigma\leq X\leq\mu+2\sigma\right)\simeq 0.95$,
- $p\left(\mu-3\sigma\leq X\leq\mu+3\sigma\right)\simeq 0.997$.

2.3 Estimation

L'estimation consiste à donner des valeurs approximatives aux paramètres d'une population à l'aide d'un échantillon de n observations issues de cette population.

On peut se tromper sur la valeur exacte, mais on donne la ‹meilleur valeur› possible que l'on peut supposer.

2.3.1 Méthode du maximum de Vraisemblance

Définition 2.3.1 *La méthode du maximum de vraisemblance* $(M.V)$*. Cette méthode consiste, étant donné un échantillon de valeur* $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n$ *à prendre comme estimation de* θ *la valeur de* θ *qui rend maximale la vraisemblance :*

$$L\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\prod\nolimits_{i=1}^{n}f\left(x_i;\theta\right).$$

En pratique on prend comme estimation de θ *une solution de l'équation*

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L\left(X;\theta\right)=0,$$

dite $\langle$*équation de la vraisemblance.*$\rangle$.

2.3.2 Méthode des Moments

Définition 2.3.2 *La méthode des moments à été utilisée pour la première foi par Karl Pearson. Cette méthode repose sur l'idée d'égaliser les* k *premiers moments de la distribution en question avec les moments empiriques correspondants. Il faut résoudre un système de* k *équation, avec* k *le nombre de paramètres inconnues.*

Exemple 2.3.1 *On prélève un échantillon aléatoire* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *suit une loi* $N(\mu, \sigma^2)$ *et on peut estimer les paramètres de cette loi par les deux méthodes* $M.V$ *et méthode des moments.*

– ***Par la méthode***$(M.V)$ *:*

On a : la densité de la loi normale

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2\right\}.$$

Alors, l'équation de vraisemblance

$$L\left(x_1, x_2, ..., x_n; \mu, \sigma^2\right) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\},$$

$$\ln L\left(x_1, x_2, ..., x_n; \mu, \sigma^2\right) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2.$$

$$(1)\ \frac{\partial \ln L(x, ...x; \mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{2}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0.$$

$$(2)\ \frac{\partial \ln L(x_1, ..., x_n; \mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -n + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0.$$

Donc,

$$(1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu \Rightarrow \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}.$$

$$(2) \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = n.$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2.$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2.$$

– ***Par la méthode des moments :***

Nous avons vu précédent que $\mathbb{E}(X) = \mu$ *et* $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$.

Alors,

$$\mathbb{E}(X) = \mu = \bar{x}.$$

On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) = \sigma^2 &= \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mu.\end{aligned}$$

Alors,

$$E\left(X^2\right) = \sigma^2 + \mu^2.$$

D'autre par on a :

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{\sum X_i^2}{n}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \frac{\sum X_i^2}{n} - \mu^2 \\ &= \frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2,\end{aligned}$$

et en fin,

$$\mu = \bar{X}.$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2\left(s^2 \textit{ est un estimateur biaisé}\right).$$

2.3.3 Estimation sous R (μ et σ^2)

On peut estimer les paramètres μ et σ^2 de plusieurs manière, parmi les quelles on a l'estimation sous **R.**

On suppose $\hat{\theta}\left(X_1, ..., X_n\right)$ comme estimateur de θ (la valeur inconnue du paramètre).

– Sur un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ on va estimer le paramètre μ.

```
> theta<-4 # valeur supposée inconnue.
> mean(rnorm(200, mean=theta)) # on se sert de l'échantillon observé
```
$(X_1, ..., X_{200})$.
```
[1] 3.909667
```

– Sur un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ on va estimer le paramètre σ.

```
> theta<-3 # 𝕍(X₁), supposée inconnue.
> vecx<-rnorm(200, sd=sqrt(theta))
> mean(vecx^2)-(mean(vecx))^2 # on se sert uniquement de l'échantion observé.
[1] 3.187733
```

2.4 Intervalles de confiance

Aprés l'estimation des paramètres de la loi normale on passe à l'intervalle de confiance.

Définition 2.4.1 *On appelle intervalle de confiance tout intervalle construit autour d'un estimateur ayant une certaine probabilité de contenir la valeur du paramètres correspondant de la population.*

2.4.1 Intervalle pour μ quand σ est connu

Supposons avoir des observation aléatoire i.i.d. $X_1,\ ...,\ X_n$ de la loi commune $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ avec σ^2 connu et μ à estimer.

On a la moyenne empirique $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ qui suit la loi $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Alors,

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \backsim N\left(0, 1\right).$$

En notant $z_{\frac{\alpha}{2}} = \left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$ et $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ les quantiles d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ et $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale standard tel que

$$p\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha.$$

Donc, l'intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ pour le paramètre de position μ quand σ est connu correspond à

$$\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Représentation graphique :

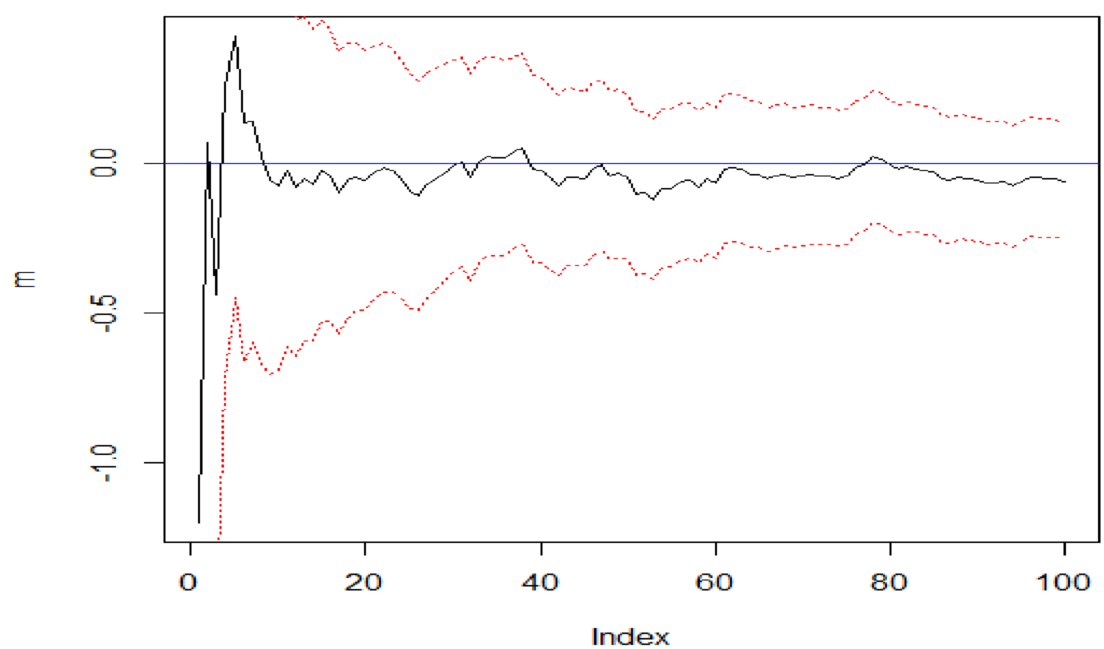

FIG. 2.2 – Intervalle pour μ quand σ est connu

Code R

```
> n <- 100
> x <- rnorm(n)
> mu <- cumsum(x)/(1 :n) ; v <- 1
> q <- qnorm(0.975)
> ic1 <- mu+q*sqrt(v)/sqrt(1 :n)
```

```
> ic2 <- mu-q*sqrt(v)/sqrt(1 :n)
> plot(mu,type="l")
> abline(h=0,col="blue")
> lines(ic1,col="red",lty="dotted")
> lines(ic2,col="red",lty="dotted")
```

2.4.2 Intervalle pour μ quand σ est inconnu

Lorsque le paramètre d'échelle est inconnu on utilise leur estimateur s^2, tel que

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \text{(estimateur sans biais)}.$$

Donc, on obtient la statistique de test suivante :

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}.$$

Lemme 2.4.1 *Soient $X_1,\ ...,\ X_n$ des variables aléatoires i.i.d de loi commune $N\left(\mu,\sigma^2\right)$. Alors nous avons*

•*La moyenne empirique $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est de loi $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.*

•*En notant $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$ la variance empirique, il suit que $\frac{(n-1)\ s^2}{\sigma^2}$ suit une loi de khi-deux de degré $n-1$.*

D'après le lemme2.4.1 précédent on obtient :

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\frac{\sqrt{\frac{(n-1)\ s^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{(n-1)}}} \backsim t_{n-1.}$$

Par une simplification on a :

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \backsim t_{n-1}.$$

Comme précédemment on déduire l'intervalle de confiance en partant de

$$p\left(-t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \leq t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha.$$

On aboutisse à l'intervalle de confiance

$$\left[\bar{X} - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Représentation graphique :

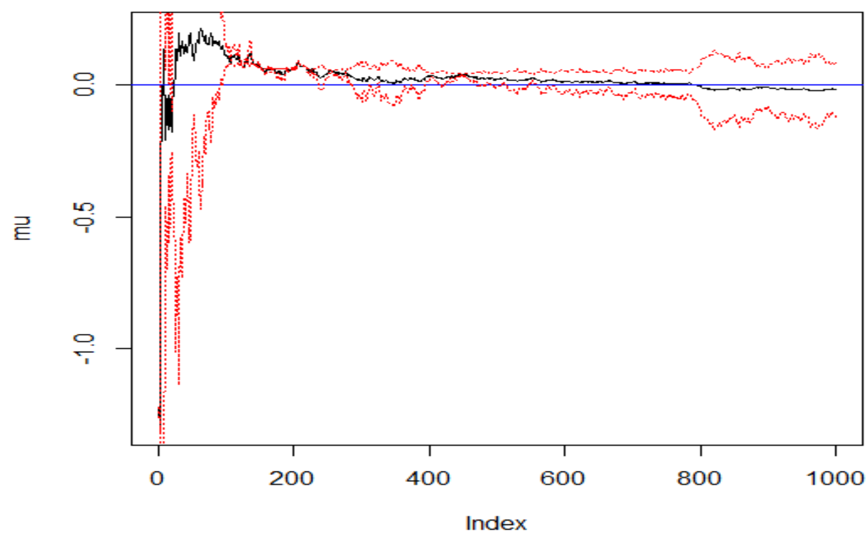

FIG. 2.3 – Intervalle pour μ quand σ est inconnu

Code R

```
> n<-1000
> x<-rnorm(n)
> mu<-cumsum(x)/(1 :n)
> ss<-cumsum(x-mu)^2
> s<-c(ss[1],ss[2 :n]/(1 :(n-1)))
> q<-qt(0.975,n-1)
> ic1<-mu+q*s/sqrt(1 :n)
> ic2<-mu-q*s/sqrt(1 :n)
> plot(mu,type="l")
> abline(h=0,col="blue")
> lines(ic1,col="red",lty="dotted")
> lines(ic2,col="red",lty="dotted")
```

2.4.3 Intervalle pour σ

On utilise le lemme de Fisher pour produire l'intervalle de confiance pour le paramètre d'échelle. Donc d'après les quantile de la loi de $\chi^2(n-1)$ on construire l'intervalle de confiance.

Premièrement on a :

$$p\left(\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(n-1)\ s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha.$$

Par simples manipulations on aboutisse à l'intervalle de confiance

$$\left[\frac{(n-1)\ s^2}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}};\frac{(n-1)\ s^2}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}}\right].$$

Représentation graphique :

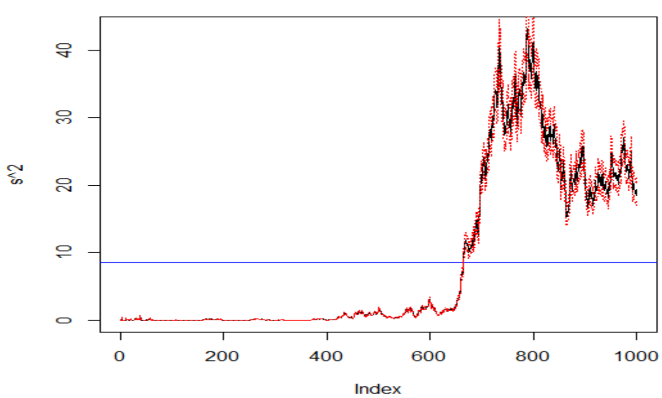

FIG. 2.4 – Intervalle pour σ

Code R

```
> n<-1000
> x<-rnorm(n)
> mu<-cumsum(x)/(1 :n)
> ss<-cumsum(x-mu)^2
```

```
> s<-c(ss[1],ss[2 :(n-1)]/(1 :(n-2)),ss[n]/(n-1))
> l1<-qchisq(0.975,n-1)
> l2<-qchisq(0.025,n-1)
> ic1<-((n-1)*s^2)/l1
> ic2<-((n-1)*s^2)/l2
> plot(s^2,type="l")
> abline(h=mean(s^2),col="blue")
> lines(ic1,col="red",lty="dotted")
> lines(ic2,col="red",lty="dotted")
```

Chapitre 3

Application de la loi normale

3.1 Domaine d'utilisation

•La loi normale est une des lois de probabilité la plus utilisée. Elle s'applique à de nombreux phénomènes, en physique, en économie(erreur de mesure) . De plus, elle est la forme limite de nombreuses distribution discrètes.

•Elle représente la loi de distribution d'une variable aléatoire X dépendant d'un grand nombre de facteurs agissant sous forme additive, chacun ayant une variable faible par rapport à la variance résultante.

•Elle peut représenter la fin de vie des dispositifs subissant un phénomène de vieillissement, usure, corrosion...

Remarque 3.1.1 *Les variables utilisées dans le domaine téchnologique ou économique sont en général positives.*

La loi normale pourra représenter un tel phénomène si la probabilité d'obtenir les valeurs négatives de la variable est très faible. Il faut, en particulier, éviter de l'utiliser pour

les queues des distribution.

•En mathématiques : la loi normale est utilisée dans plusieurs domaines des mathématiques.

Le mouvement brownien, ou processus de wiener est une description mathématique du mouvement aléatoire de particules en suspension dans un liquide. Ce comportement a été décrit physiquement par le biologiste Robert Brownen en 1827. L'objet mathématique est un processus gaussien dont la variance des accroissement est égale au temps écoulé.

Définition 3.1.1 *On appelle mouvement brownien tout fonction aléatoire réelle continue*

$$B = (B(t)\,;\ t \geq 0)\,,$$

à accroissements indépendants gaussiens

$$B(t) - B(s) \sim N(0,\ t-s)\,,$$

avec,

$B(0) = 0$

pour $t > 0,\ B_t$ *suit une loi normale centré de variance* $t\ ;\ B_t \sim N(0,\ t)$

(B_t) *à trajectoires continues.*

Parmi les procédures communes pour vérifier si un échantillon aléatoire d'observation indépendantes de taille n proviennent d'un population avec une distribution normale : méthodes graphique (histogramme, boxplots, Q-Q-plot), méthodes numériques (le coefficient d'aplatissement et d'asymétrie) et les tests de normalité.

3.2 Tests de normalité

Les tests de normalité sont des cas particulier de test d'adéquation, qui permettent de statuer sur la compatibilité d'une distribution normale. Ces tests revêt une importance supplémentaire. En effet, l'hypothèse de normalité des distribution sous-tend souvent de nombreux tests paramétriques comme (comparaison de moyennes, résidus de la régression, etc). En tout rigueur, s'assurer au préable la compatibilité des distributions avec l'hypothèse de normalité avant de procéder au test statistique proprement dit devrait être incontournable, surtout pour les petits effectifs.

On cherche à se déterminer entre

$$\begin{cases} H_0 : & \text{les données suivent une loi normale.} \\ H_1 : & \text{les données ne suivent pas une loi normale.} \end{cases}.$$

3.2.1 Test de kolmogorov-Smirnov

Le test de kolmogorov est un test non paramétrique qui compare la distribution d'un échantillon statistique à une distribution fixée. les distribution sont représentées par leurs fonction de répartition, utilisées pour l'exécution du test.

Etant donnés :

•Un échantillon$(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n valeurs observées d'une variable aléatoire numérique X de fonction de répartition $F(X)$.

•Hypothèse testée. $H_0 : F = \mathring{F}$ contre $H_1 : F \neq \mathring{F}$.

Pour cela on définit la statistique de Kolmogorov-Smirnov par :

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|.$$

où $F_n(x)$ est la proportion des observation dont la valeur est inférieure ou égale à x (fonction de répartition empirique). La région critique : on rejette H_0 si $D_n > d(n)$ où $d(n)$ est le quantile théorique (si $n \leq 80$ on lu à partir la table uniforme, si $n > 80$ on utilise la table de Kolmogorov-Smirnov).

3.2.2 Test de Jarque-Bera

Le test de Jarque-Bera, introduit par Carlos Jarque et Anil Bera en 1980, ce test il est également fondé les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement. Il évalue les écarts simultanés de ces coefficients avec les valeurs de référence de la loi normale.

Prenons les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement de pearson :

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \text{ et } \beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}.$$

On propose les estimateurs

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_i \left(x_i - \bar{x}\right)^3}{\left(\frac{1}{n}\sum_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\frac{1}{n}\sum_i \left(x_i - \bar{x}\right)^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2\right)^{2}}.$$

La loi conjointe de ces estimateurs est normale bivariée, on écrit :

$$\sqrt{n}\binom{\hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_2} \backsim N\left[\binom{0}{3}, \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}\right].$$

$\hat{\beta}_1 \,\mathrm{II}\, \hat{\beta}_2 \Longleftrightarrow cov\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\right) = 0.$

On peut traduire les hypothèses sous la forme :

$$\begin{cases} H_0: & \hat{\beta}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \hat{\beta}_2 = 3 \\ H_1: & \hat{\beta}_1 \neq 0 \quad \text{ou} \quad \hat{\beta}_2 \neq 3 \end{cases}.$$

On calcule

$$JB = \left(\frac{\hat{\beta}_1^2}{6} + \frac{\left(\hat{\beta}_2 - 3\right)^2}{24}\right),$$

où n est le nombre d'observation. Il faut que n soit suffisamment grand.

La statistique de JB suit asymptotiquement une loi du χ^2 a 2 degrés de liberté.

La région critique pour un risque α du test de Jarque-Bera est définie par :

$$JB > \chi^2_{1-\alpha}(2).$$

3.2.3 Test de Shapiro-Wilk

Le test de Shapiro-Wilk est très connue et populaire, il est basé sur la statistique W. En comparaison des autres tests, il est particulièrement puissant pour les petits effectifs $(n \leq 50)$.

La statistique W est donnée par :

$$W = \frac{\left[\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_i \left(x_{(n-i+1)} - x_{(i)}\right)\right]^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}.$$

Où

•$x_{(i)}$ correspond à la série des données triée.

• $\left[\frac{n}{2}\right]$ est la partie entière du rapport $\frac{n}{2}$.

•a_i sont des constantes générées à partir de la moyenne et de la matrice de variance co-variance des quantiles d'un échantillon de taille n suivant la loi normale.

La statistique W peut donc être interprétée comme le coefficient de détermination (le carré du coefficient de corrélation) entre la série des quantille générées à partir de la loi normale et les quantille empiriques obtenues à partir des données.

La région critique

$$W < W_{crit}.$$

Les valeurs seuils W_{crit} pour différent risque α et effectif n sont lues dans la table de Shapiro-Wilk.

Exemple 3.2.1 *pour tester la normalité des variables X et Y, on utilise le test de shapiro-*

wilk, qui vérifier la normalité avec la p-value.

⋆⋆⋆charger le package"nortest" ⋆⋆⋆ library(nortest)

```
> x<-rnorm(200)
>y<-runif(200, -3, 3)
> shapiro.test(x)
Shapiro-Wilk normality test
data : x
W = 0.99583, p-value = 0.862
> shapiro.test(y)
Shapiro-Wilk normality test
data : y
W = 0.94625, p-value = 8.343e-07
```

Comentaire : On observe que :

-Pour la variable X, p-value =0.862>0.05,

le test est non significatif. On ne peut pas rejeter l'hypothèse H_0.

-Pour la variable Y, p-value =8.343e-07<0.05,

le test est significatif. On peut rejeter l'hypothèse H_0.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté une étude sur la loi normale et application où nous donnons leur histoire, de sa genèse jusqu'au moment où elle a été repérée comme la loi naturelle à utiliser en beaucoup de circonstance, puis nous détaillons les caractéristiques de cette loi.
Nous avons ensuit étudié brièvement l'estimation de paramètres de la loi normale.

La méthode de maximum de vraisemblance, méthodes des moments et sous **R**, aussi nous donnons pour quoi cette loi est popularisé et différente aux autre lois, puis nous avons révélé les tests de normalité. On résume quelques propriétés de la loi normale dans les points suivant :

-La fonction de densité d'une loi normale sous forme d'une courbe en cloche aussi appelée courbe en chapeau de gendarme.
-La densité f est symétrique par rapport à μ, elle admet un maximum en μ et vaut $1/\sigma\sqrt{2\pi}$.
-Toute transformée affine d'une variable aléatoire suivant une loi normale suit aussi une loi normale.
-Tout les moments d'ordre k de la loi normale existe.

Bibliographie

[1] Comets F, Meyre T. (2006) . Calcul Stochastique et Modèles de diffusions cours et exercices corrigés. Dunod Paris.

[2] De Micheaux P, Drouilhet R, Liquet B. (2011). Le logiciel R : Maitriser Ie langage-Effectuer des analyses statistiques. Springer-Verlag France.

[3] Dress F. (2004) . Les probabilités et la statistique de A à Z, dictionnaire.

[4] Dubois A, Bertrand J, Comets E. (2009) . Introduction au logiciel R.

[5] Dufour A,Chessel D et Lobry J. (2018) . Lois de Probabilités. Univ-lyon1.

[6] Dusart P. (2015). Cours de Statistiques inférentielles.

[7] Foata D, Fuchs A. (1998). CALCUL DES PROBABILIT´ES Cours, exercices et probl‘emes corrig´es. Dunod, Paris.

[8] Fourcistié J, Laslier J. (1987) . Probabilités et statistique. Bordas, paris. 3 ed.

[9] Henkouche M. (2001) . Elements de probabilites et de statistique pour ingenieurs. Office Des publication universitaire.

[10] Kahane J. (2006). Le mouvement brownien et son histoire, réponses à quelques questions. Université Paris-Sud Orsay.

[11] Parzsz B. (2013) : La longue genèse de la loi normale. Le Bulletin vert.

[12] Rakotomalala R. (2011) . Tests de normalité-Techniques empiriques et tests statistiques. Université Lumière Lyon 2. 2 ed.

[13] Saporta G. (2006). Probabilités, analyse des données et statististique. 2 ed. Technip FRANCE.

[14] Schalbar K. (2016). La loi normale.

[15] Shuyan L. (2014) . Notes de cours Statistique avec le logiciel R. Univ-paris1.

[16] Veysseyre R. (2006) . Aide-mémoire-Statistique et probabilités pour l'ingénieur. Dunod Paris.

Annexe A : Rappels sur les probabilités

-**Loi de probabilité** : On appelle loi de probabilité de X la mesure image de p par X et on la note p_X.

-**Variable aléatoire** : Une variable aléatoire réelle est une application mesurable de (Ω, φ, p) dans $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne $(\mathbb{R}, B)$.

Pour tout borélien B on définit $p_X(B)$ par :

$$\begin{aligned} p_x(B) &= p(\{w \ / \ X(w) \in B\}) \\ &= p([X^{-1}(B)]) \end{aligned}.$$

-**Variable aléatoire continue** : La notion de variable continue, se confond avec celle de variable admettant une densité de probabilité.

-**Densité de probabilité** : Fonction réelle positive continue f associée à tout variable aléatoire réelle absolument continue X . Elle fourni par intégration les probabilités d'intervalle

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

La densité est la dérivée de la fonction de répartition : $f(x) = F'(x)$, et inversement la fonction de répartition est sa primitive $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$.

-**Fonction de répartition** : On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire

X l'application F de $\mathbb{R}$ dans$[0,\ 1]$ définie par :

$$F(x) = p(X \leq x).$$

Cette fonction est croissante et varie de 0 pour $x = -\infty$ à 1 pour $x = +\infty$.

Si X est une variable aléatoire continue, elle varie continument.

-**Indépendance de deux variables aléatoires** : Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé. Le couple$(X,\ Y)$ est donc une application mesurable de (Ω, φ, p) dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa tribu borélienne.

X et Y sont indépendantes si pour tout couple de boréliens B_i et B_j, on a :

$$p((X \in B_i) \cap (Y \in B_j)) = p(X \in B_i)\, p(Y \in B_j).$$

-**Moments d'une variable aléatoire** : Une loi de probabilité peut être caractérisée par certaines valeurs typiques associées aux notions de valeur centrale, de distribution et de forme de la distribution.

– **Espérance mathématique** : X étant une variable aléatoire réelle sur(Ω, φ, p), l'espérance mathématique de X est, si elle existe, l'intégrale de X par rapport à la mesure p.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} x dp.$$

D'après le théorème de la mesure image on a :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x dp_X(x).$$

– **Variance** : On appelle variance de X notée $\mathbb{V}(X)$ ou σ^2 la quantité définie par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right) = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 \, dp_X(x) .$$

Où σ s'appelle l'écart-type de X tel que $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

– **Autres moments** : On définit, si ils existent, les moments centrés d'ordre k

$$\mu_k = \mathbb{E}\left[(X-\mu)^k\right].$$

-**Fonctions génératrices des moments** : Soit X une variable aléatoire, on appelle fonction génératrice des moments de X quand elle existe, la fonction $g(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)]$ définie pour tout réel t

$$g(t) = \int \exp(tx) f(x) \, dx.$$

-**Fonctions caractéristiques** : La fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X est la transformation de Fourier de sa loi de probabilité. Elle est notée φ_X et on a :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(itX)] = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx) \, dp_X(x) .$$

Cette fonction existe toujours car p_X est une mesure bornée et $|\exp(itx)| = 1$. Il s'ensuit que la fonction caractéristique est continue.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abrévariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\mathbb{E}(X), \mu$	Espérance de X.
$\mathbb{V}(X), \sigma^2$	Variance de X.
σ	L'écart-type.
F_X	Fonction de répartition de X.
$f(x)$	Fonction de densité.
$\phi(x)$	Fonction de répartition de la loi normale standard.
$\varphi_X(t)$	Fonction caractéristique de X.
$g(t)$	Fonction génératrice des moments.
$\bar{X}$	Moyenne empirique.
s^2	Variance empirique.
μ	Estimateur de l'espérance de la loi $N(\mu, \sigma^2)$.
$\hat{\sigma}^2$	Estimateur de la variance de la loi $N(\mu, \sigma^2)$.
θ	Un paramètre inconnue.
$\hat{\theta}$	Estimateur de la valeur θ.
H_0	Hypothèse nulle.
H_1	Hypothèse alternative.

β_1	Coefficient de symétrie.
β_2	Coefficient d'aplatissement.
$L(x_1, x_2, ..., x_n)$	Fonction de vraisemblance.
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	Convergence en loi.
D_n	La statistique de Kolmogorov-Smirnov.
JB	La statistique de Jarque-Bera.
W	La statistique de Shapiro-Wilk.
$N(\mu, \sigma^2)$	Loi normale.
$N(0, 1)$	Loi normale standard.
$T.C.L$	Téorème central limite.
$i.i.d$	Indépendant identiquement distribuer.

ملخــــص

نقــدم في هــذه المــذكرة لمــحة حــول القــانون الطبيعــي, هــذا الاخيـر يلعــب دورا اساســيا في الاحتمــالات و الاحصــاءات الرياضــية, فنجــده كنموذج متكرر في مختلف المجالات.

يبـرز دوره الرئيســي في الاحصــاءات الحقيقيــة في انــه يظهــر كحــد مــــــن الخصــــــائص المتعلقــــــة بعينــــــة كبيــــــرة.

Abstract

We present in this thesis a preview about the normal law, this last, plays a fundamental role in probabilities and mathematical statistics. It is a model frequently used in various field, their main role in statistics actually stems from what is appears to be a law limiting characteristics related to a large sample.

Résumé

Nous présentons dans ce mémoire un aperçu sur la loi normale, cette dernière, joue un rôle fondamental en probabilités et statistique mathématique. Elle constitue un modèle fréquemment utilisé dans divers domaine, leur rôle principale en statistique provient en réalité de ce qu'elle apparaît comme loi limite de caractéristiques liées à un échantillon de grande taille.