

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

Boudib Selma

Titre :

Intoduction aux processus gaussiens

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Ouanoughi Yasmına..	UMKB	Président
Dr. Djaber Ibtissem	UMKB	Encadreur
Dr. Touba sonia	UMKB	Examineur

Juin 2019

DÉDICACE

À ma mère et à mes soeurs,mon frère et mes amis

REMERCIEMENTS

Louange à Dieu le tout puissant pour ce qu'il nous a donné volonté, santé et surtout patience, pour pouvoir, durant toutes ces longues années d'études,

où

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Introduction	1
1 Vecteurs gaussiens	3
1.1 Variables gaussiennes	3
1.2 Vecteurs gaussiens	9
1.2.1 Propriétés des vecteurs gaussiens	10
2 Processus gaussiens	16
2.1 Processus stochastique	16
2.1.1 Propriétés de processus	17
2.1.2 Classification des processus	20
2.2 Processus gaussiens	23
2.2.1 Propriété des processus gaussiennes	23
2.3 Exemples de processus gaussiens	25
2.3.1 Mouvement Brownien	25
2.3.2 Mouvement brownien standard	26

2.3.3	Propriétés du mouvement brownien	27
2.3.4	Caractère gaussien du mouvement brownien	28
2.3.5	Généralisation du mouvement brownien	29
	Conclusion	32
	Bibliographie	33
	Annexe A : Logiciel <i>R</i>	35
2.4	lois des probabilités et processus stochastiques	35
2.4.1	lois des probabilités	35
2.4.2	Processus stochastiques	36
	Annexe B : Abréviations et Notations	39

Table des figures

1	Le mathématicien allemand, Carl Friedrich Gauss (1777, 1855)	2
1.1	Répresentation de la loi normale	4
1.2	La densité binormale	14
2.1	Processus aléatoire	17
2.2	Stationnairité au sens strict d'ordre n	21
2.3	Bruit blanc stationnaire	22
2.4	Le trajectoire du marche aléatoire	22
2.5	Robert Brown, (1773, 1858)	26
2.6	Mouvement brownien	27
2.7	Mouvement brownien arithmétique	30
2.8	Mouvement brownien géométrique	31

Introduction

La classe des processus gaussiens est l'une des familles de processus stochastiques la plus utilisées pour la modélisation des données dépendantes, observées dans le temps ou l'espace (ou le temps et l'espace). La popularité de tel processus découle principalement de ces propriétés.

Dans la théorie des probabilités et les statistiques, un processus gaussien est un processus stochastique (un ensemble de variables aléatoires indexées par le temps ou l'espace), de sorte que chaque ensemble fini de ces variables aléatoires a une distribution normale multivariée, c'est-à-dire que chaque combinaison linéaire finie est normalement distribuée. La distribution d'un processus gaussien est la distribution conjointe de toutes ces variables aléatoires (infiniment nombreuses).

Le concept de processus gaussien est nommé d'après Carl Friedrich Gauss car il est basé sur la notion de distribution gaussienne (distribution normale). Les processus gaussiens peuvent être considérés comme une généralisation à l'infini des distributions de variables normales multivariées.

Les processus gaussiens sont utiles en modélisation statistique, tirant parti des propriétés héritées de la distribution normale. Par exemple, si un processus aléatoire est modélisé comme un processus gaussien, les distributions de différentes quantités dérivées peuvent être obtenues explicitement.

L'objectif de ce mémoire est donner une présentation des vecteurs et processus gaussiens ainsi que leurs propriétés principale et d'utilisée le logiciel statistique R pour définir la

notion des trajectoires de ce processus.

Ce mémoire est divisé en deux chapitres

Le premier chapitre est une présentation rapide des variables et vecteurs gaussiens.

Dans ce chapitre, On rappelle les principaux résultats sur les variables aléatoires gaussiennes et sur les vecteurs aléatoires gaussiens. Ces rappels seront utiles pour généraliser le cadre gaussien aux processus au deuxième chapitre et présenter la notion de processus gaussien.

Le deuxième chapitre permet d'introduit les notions importantes et les résultats sur les processus gaussiens.

Dans ce chapitre, On commence par la présentation des notions générales de processus stochastique. On décrit d'abord les lois des processus, leurs propriétés, les trajectoires des processus. En suite, on présente la classe des processus gaussiens. En fin, on donne un exemple de processus gaussien (mouvement brownien).

Nous assumerons dans notre travail que le lecteur a une connaissance des concepts de base en probabilité. Nous rappelons certains de ces concepts qui nous seront utiles pour présenter l'objet de ce mémoire.



FIG. 1 – Le mathématicien allemand, Carl Friedrich Gauss (1777, 1855)

Chapitre 1

Vecteurs gaussiens

Les vecteurs aléatoires permettent de modéliser des phénomènes et des systèmes dont la description nécessite plusieurs variables aléatoires. Dans ce chapitre, nous sommes intéressés par les vecteurs gaussiens.

On se donne dans tout le chapitre un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1.1 Variables gaussiennes

Les variables gaussiennes sont très utilisées en modélisation à cause de leurs propriétés, que nous allons voir dans cette section.

Définition 1.1.1 *Une variable aléatoire X est dite gaussienne d'espérance μ et variance σ^2 si elle admet la densité :*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

On note

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

Une variable aléatoire Z est dite gaussienne centrée réduite si elle admet pour densité la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

On note

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

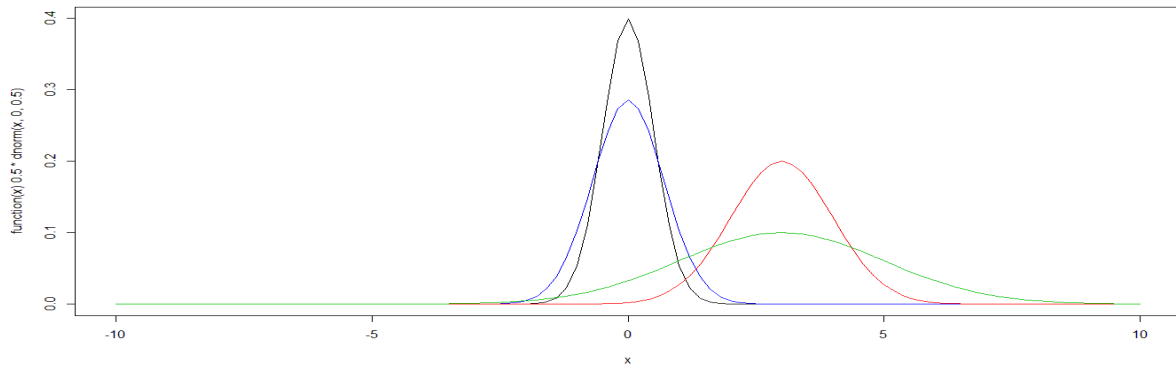


FIG. 1.1 – Représentation de la loi normale

Remarque 1.1.1 Si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et si $X = \mu + \sigma Z$, alors X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Réciproquement si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Une variable gaussienne est caractérisée par sa fonction caractéristique, donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.1.1 La fonction caractéristique de $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \exp\left(it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right). \quad (1.3)$$

Preuve. Soit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{E}[\exp(itZ)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(itz) \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz,$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_Z(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(tz) \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sin(tz) \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (F(t) + iG(t)). \end{aligned}$$

Ainsi définie, la fonction

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \cos(tz) \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz, \end{cases}$$

on peut donc appliquer le théorème de Lebesgue en commençant par s'assurer qu'elle est bien définie pour tout réel t puisque :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \cos(tz) \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \cos(tz) \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \right| dz \leq \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \sqrt{2\pi}.$$

On vérifie de même qu'elle est dérivable sur \mathbb{R} , sa dérivée s'obtenant tout simplement en dérivant par rapport à t :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F'(t) = - \int_{\mathbb{R}} z \sin(tz) \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = -tF(t),$$

l'équation différentielle linéaire du premier ordre, qui s'intègre sans problème :

$$F(t) = a \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Et puisqu'on a la condition initiale :

$$F(0) = \int_{\mathbb{R}} \cos(0z) \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi},$$

on déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F(t) = \sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

La fonction G est identiquement nulle et ainsi, lorsque $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, sa fonction caractéristique est :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_Z(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Si on considère $Y = \sigma Z + \mu$, alors $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et sa fonction caractéristique est :

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}[\exp(it(\sigma Z + \mu))] = \exp(it\mu) \mathbb{E}[\exp(i(t\sigma)Z)] = \exp(it\mu) \varphi_Z(t\sigma),$$

et on peut se servir de ce qu'on vient de voir pour en déduire :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_Y(t) = \exp\left(it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

■

Proposition 1.1.1 *Soient $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ indépendantes. Alors*

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Preuve. Il suffit d'utiliser Les fonctions caractéristiques. Par indépendance, on a

$$\begin{aligned}\varphi_{X_1+X_2}(t) &= \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) \\ &= \exp\left(it\mu_1 - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}\right) \exp\left(it\mu_2 - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(it(\mu_1 + \mu_2) - \frac{t^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2}\right).\end{aligned}$$

■

Le caractère universel de la loi normale est illustré par le résultat suivant

Théorème 1.1.2 (*Théorème Central Limite*) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires iid, d'espérance μ et de variance finie σ^2 .

Soit

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

la somme partielle. Alors quand $n \rightarrow +\infty$

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Preuve. Posons $Y_i = X_i - \mu$,

si bien que les variables aléatoires Y_i sont indépendantes de même loi avec

$$\mathbb{E}(Y_i) = 0, \quad \text{et} \quad \text{Var}(Y_i) = \text{Var}(X_i).$$

Notons

$$\acute{S}_n = Y_1 + \dots + Y_n \quad \text{et} \quad Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\acute{S}_n}{\sigma\sqrt{n}}.$$

On a

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(t) &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ it \frac{\dot{S}_n}{\sigma\sqrt{n}} \right\} \right] = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ i \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \dot{S}_n \right\} \right] \\ &= \varphi_{\dot{S}_n} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) = \left(\varphi_{Y_1} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right)^n\end{aligned}$$

Comme Y_i a un moment d'ordre deux, φ_{Y_1} est dérivable deux fois avec

$$\varphi_{Y_1}(0) = 1, \quad \varphi'_{Y_1}(0) = i\mathbb{E}(Y_1) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi''_{Y_1}(0) = i^2 \mathbb{E}(Y_1^2) = -\sigma^2,$$

et comme

$$\begin{aligned}\varphi_{Y_1}(x) &= \varphi_{Y_1}(0) + x\varphi'_{Y_1}(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''_{Y_1}(0) + x^2\epsilon(x) \\ &= 1 - \frac{\sigma^2}{2}x^2 + x^2\epsilon(x),\end{aligned}$$

où la fonction ϵ vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} \epsilon(x) = 0$. On a donc

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(t) &= \left(\varphi_{Y_1} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right)^n \\ &= \left(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2\sigma^2 \sqrt{n}^2} + \frac{t}{\sigma^2 \sqrt{n}^2} \epsilon \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right)^n \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{1}{n} \epsilon \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)^n \\ &= \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{1}{n} \epsilon \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) \right) \\ &= \exp \left(n \left(-\frac{t^2}{2n} + \frac{1}{n} \epsilon \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) \right) = \exp \left(-\frac{t^2}{2} + \epsilon \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)\end{aligned}$$

D'où pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} = \varphi(t)_{\mathcal{N}(0,1)}.$$

■

1.2 Vecteurs gaussiens

Définition 1.2.1 *Un vecteur aléatoire X à valeur dans \mathbb{R}^n est gaussien, si toutes les combinaisons linéaire de ses composantes est une variable gaussienne.*

On définit son vecteur moyenne par

$$\mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_n))^t,$$

et sa matrice de variance-covariance

$$\Gamma = \text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (X - \mathbb{E}(X))^t]$$

c'est à dire

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \text{cov}(X_1, X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \text{cov}(X_2, X_2) & \dots & \text{cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \text{cov}(X_n, X_2) & \dots & \text{cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}$$

Remarque 1.2.1 • *En particulier, une variable aléatoire gaussienne est un vecteur gaussien de dimension 1.*

- *Le vecteur moyenne est quelconque dans \mathbb{R}^n , par contre une matrice de covariance Γ est nécessairement symétrique et positive.*

Par ailleurs, il découle de la définition le résultat suivant :

Proposition 1.2.1 *Soit X est un vecteur gaussien de n dimension alors pour toute $k = 1, \dots, n$, X_k est une variable aléatoire réelle gaussienne ($\forall k = 1, \dots, n, X_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$) mais la réciproque est fausse.*

Preuve. Si $X = (X_1, \dots, X_d)$ est gaussien, alors en prenant $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_k = 0$ pour tout $k \geq 2$, on en déduit que :

$$X_1 = \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k,$$

est gaussienne. Idem pour X_2, \dots, X_n . ■

La réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.2.1 Prenons X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et Y de loi donnée, pour $a > 0$ fixé, par

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } |X| \leq a, \\ -X & \text{si } |X| > a. \end{cases}$$

Alors $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ car

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \mathbb{E}[\exp(itY)] \\ &= \mathbb{E}[\exp(itX) \mathbf{1}_{|X| \leq a} + \mathbb{E} \exp(-itX) \mathbf{1}_{|X| > a}] \\ &= \mathbb{E}[\exp(itX) \mathbf{1}_{|X| \leq a}] + \mathbb{E}[\exp(itX) \mathbf{1}_{|-X| > a}] \\ &= \mathbb{E}[\exp(itX) (\mathbf{1}_{|X| \leq a} + \mathbf{1}_{|X| > a})] \\ &= \mathbb{E}[\exp(itX)] = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \end{aligned}$$

puis, la variable $X + Y$ est donnée par

$$X + Y = \begin{cases} X + X = 2X & \text{si } |X| \leq a \\ X - X = 0 & \text{si } |X| > a \end{cases} = 2X \mathbf{1}_{|X| \leq a}.$$

La combinaison linéaire $X + Y$ ne suit pas une loi gaussienne. Le couple aléatoire (X, Y) n'est donc pas gaussien.

1.2.1 Propriétés des vecteurs gaussiens

La fonction caractéristique d'un vecteur gaussien est donné par la proposition suivante :

Proposition 1.2.2 (fonction caractéristique) Soit X un vecteur gaussien de dimension n admettant une espérance $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ et une matrice de dispersion Γ . Alors

X est un vecteur gaussien, si et seulement si sa fonction caractéristique φ_X est donnée, pour toute $a \in \mathbb{R}^n$, par

$$\varphi_X(a) = \exp\left(i\langle a, m \rangle - \frac{1}{2}\langle a, \Gamma a \rangle\right).$$

Preuve. Posons

$$X = (X_1, \dots, X_n), \quad a = (a_1, \dots, a_n) \quad \text{et} \quad Y = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n,$$

comme X est un vecteur gaussien, la variable aléatoire $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, et de plus

$$\mu_Y = a_1 \mathbb{E}(X_1) + \dots + a_n \mathbb{E}(X_n) = a_1 \mu_1 + \dots + a_n \mu_n,$$

et comme pour toute $a \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \varphi_X(a) &= \mathbb{E}(\exp i(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n)) = \mathbb{E}(\exp iY) = \varphi_Y(1) \\ \varphi_Y(1) &= \exp\left(i\mu_Y - \frac{1}{2}\sigma_Y^2\right). \end{aligned}$$

On obtient

$$\varphi_X(a) = \exp\left(i\langle a, \mu \rangle - \frac{1}{2}\langle a, \Gamma a \rangle\right).$$

Montrons la condition suffisante, soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire quelconque de fonction caractéristique définie sur \mathbb{R}^n par :

$$\varphi_X(a) = \exp\left(i\langle a, \mu \rangle - \frac{1}{2}\langle a, \Gamma a \rangle\right).$$

Soit $Y = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n$ une combinaison linéaire des composantes de X . En considérant

la fonction caractéristique de Y , il vient, pour tout réel t ,

$$\begin{aligned}\varphi_Y(t) &= \mathbb{E}(\exp iYt) = \mathbb{E}(\exp i(t\alpha_1 X_1 + \dots + t\alpha_n X_n)) = \varphi_X(\alpha_1 t, \dots, \alpha_n t) \\ &= \exp\left(it\langle\alpha, \mu\rangle - \frac{1}{2}t^2\langle\alpha, \Gamma\alpha\rangle\right),\end{aligned}$$

où on pose $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ce qui prouve que, pour toute n -uplet de réels $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la variable aléatoire réelle $\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n$ est une variable aléatoire réelle gaussienne de loi $\mathcal{N}(\langle\alpha, \mu\rangle, \langle\alpha, \Gamma\alpha\rangle)$. X est un vecteur gaussien. ■

Le résultat suivant sera utilisée pour prouver que certains vecteurs sont gaussiens.

Proposition 1.2.3 (propriété de linéarité) Si X est un vecteur gaussien n dimensionnelle avec $X \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Gamma)$, si $A \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ et si $B \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$, alors le vecteur $Y = AX + B$ est gaussien avec

$$Y \sim \mathcal{N}_k(A\mu + B, A\Gamma A^t).$$

Preuve. Il suffit d'utiliser la caractérisation par la fonction caractéristique. On a en effet

$$\begin{aligned}\varphi_Y(c) &= \mathbb{E}(\exp(ic^t Y)) && \forall c \in \mathbb{R}^k \\ &= \mathbb{E}[\exp(ic^t (AX + B))] \\ &= \exp(ic^t B) \mathbb{E}[(\exp(ic^t AX))] \\ &= \exp(ic^t B) \varphi_X(c^t A) \\ &= \exp(ic^t B) \exp\left(i\langle c^t A, \mu\rangle - \frac{1}{2}\langle c^t A, \Gamma c^t A\rangle\right) \\ &= \exp\left(ic^t (B + A\mu) - \frac{1}{2}c^t (A\Gamma A^t)\right)\end{aligned}$$

alors,

$$Y \sim \mathcal{N}_k(A\mu + B, A\Gamma A^t).$$

■

La fonction caractéristique d'un vecteur gaussien permet d'établir un critère important d'indépendance des composantes d'un vecteur gaussien.

Proposition 1.2.4 (l'indépendance) *Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur gaussien. Alors la suite de variables aléatoires réelles (X_1, \dots, X_n) est indépendante, si et seulement si la matrice de dispersion de X est diagonale.*

Preuve. • *La condition nécessaire, on sait que si la suite de variables aléatoire est indépendante alors la matrice de dispersion de X est diagonale.*

• *Pour la condition suffisante, en vertu du critère d'indépendance, utilisant les fonctions caractéristiques, il suffit de montrer que si la matrice de dispersion est diagonale, alors pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$\varphi_X(u_1, \dots, u_n) = \varphi_{X_1}(u_1) \dots \varphi_{X_n}(u_n).$$

Or,

$$\varphi_X(u_1, \dots, u_n) = \exp\left(i \sum_{k=1}^n u_k \mathbb{E}(X_k) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n u_k^2 \text{Var}(X_k)\right) = \varphi_{X_1}(u_1) \dots \varphi_{X_n}(u_n),$$

car, pour tout entier k , la variable aléatoire réelle X_k est gaussienne et

$$\varphi_{X_k}(u_k) = \exp\left(iu_k \mathbb{E}(X_k) - \frac{1}{2}u_k^2 \text{Var}(X_k)\right).$$

■

Corollaire 1.2.1 *Soit (X_n) une suite de vecteurs gaussiens à valeurs \mathbb{R}^n qui converge en loi vers un vecteur X . Alors X est gaussien.*

Pour un vecteur aléatoire gaussien, la densité, si elle existe, s'exprime à l'aide de la matrice de covariance et du vecteur des moyennes. Un résultat précisant la forme de la loi normale dans le cas où Γ est une matrice inversible.

Proposition 1.2.5 (La densité vectorielle) Soient $\mu \in \mathbb{R}^n$ et Γ une matrice carré d'ordre n à coefficients réels. Si Γ est inversible, alors la probabilité $\mathcal{N}_n(\mu, \Gamma)$ admet la densité f sur \mathbb{R}^n :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Gamma}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^t \Gamma^{-1} (x - \mu) \right\}.$$

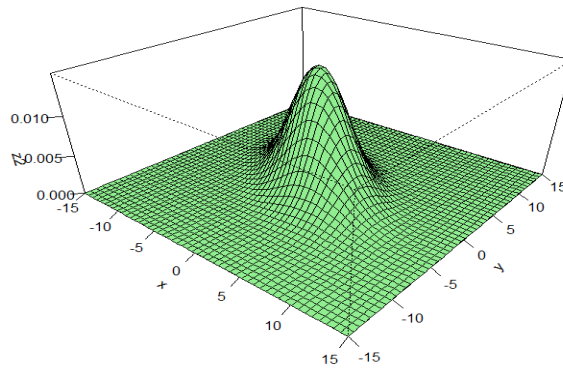


FIG. 1.2 – La densité binormale

Théorème 1.2.1 (Théorème central limite) Soient X_1, \dots, X_n des vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^n i.i.d. admettant un moment d'ordre deux. On note μ leur espérance et Γ leur matrice de variance-covariance. Alors,

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma) \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Preuve. Soit $c \in \mathbb{R}^n$ et $Y_n = cX_n$, Y_n sont des variables aléatoires réelles iid et $\mathbb{E}(|Y_n|^2) < +\infty$.

$$\mathbb{E}(Y_n) = c\mu \quad \text{et} \quad \text{Var}(Y_n) = c^t \Gamma c.$$

Donc, par le théorème central limite dans \mathbb{R} on a

$$\sqrt{n}(\bar{Y}_n - c\mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

En utilisant la convergence en loi des variables réelles Y_n par les fonctions caractéristiques, on en déduit :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{Y_n}(c) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\exp \left(i\sqrt{n}(\bar{Y}_n - c\mu) \right) \right] \\ &= \lim \mathbb{E} \left[\exp \left[i\sqrt{nc} \left(\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) - \mu \right) \right] \right] \\ &= \exp(ic^t \Gamma c). \end{aligned}$$

Comme $c \in \mathbb{R}^n$ est arbitraire, on conclut en utilisant la caractérisation de la convergence en loi des vecteurs aléatoires dans \mathbb{R}^n par les fonctions caractéristiques. ■

Chapitre 2

Processus gaussiens

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions et résultats pour une classe importante de processus stochastiques, les processus gaussiens.

2.1 Processus stochastique

Un processus stochastique est un modèle mathématique pour décrire l'état d'un phénomène aléatoire évoluant dans le temps.

Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et un espace mesurable (E, \mathcal{E}) . On désigne par \mathbb{T} l'ensemble des temps.

Définition 2.1.1 *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $X = (X_t, t \in \mathbb{T})$ définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans un espace mesurable (E, \mathcal{E}) et indicées par un paramètre $t \in \mathbb{T}$.*

- \mathbb{T} est l'espace des paramètres, ou espace du temps car le paramètre $t \in \mathbb{T}$ est souvent un paramètre temporel.
- E est l'espace des valeurs des variables aléatoires X_t , appelé espace d'états.
- Si \mathbb{T} est dénombrable, on parle de processus stochastique à temps discret et si \mathbb{T} est une partie de \mathbb{R} , on parle alors de processus stochastique à temps continu.

- De même pour l'espace E , on parle de processus stochastique discret ou continu.

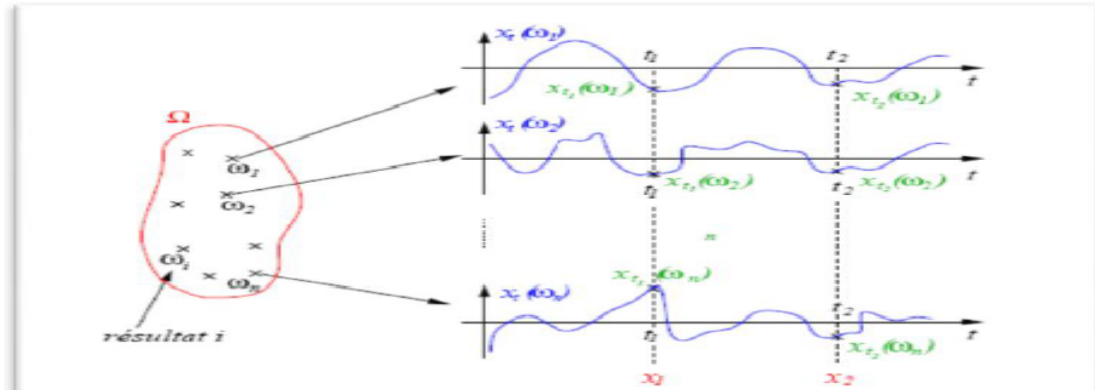


FIG. 2.1 – Processus aléatoire

Remarque 2.1.1 *Un processus stochastique dépend de deux paramètres : t et ω .*

1. *Si t est fixé, l'application $\omega \rightarrow X_t(\omega), \forall \omega \in \Omega$ est une variable aléatoire à valeur dans \mathbb{R} .*
2. *Si ω est fixé, l'application $t \rightarrow X_t(\omega), \forall t \in T$ est appelée trajectoire du processus.*

Exemple 2.1.1 *Jeu de Pile ou Face.*

Après chaque lancer, le joueur gagne s'il obtient Pile et perd s'il obtient Face.

La variable $X_n, n \in \mathbb{N}$ représentant sa fortune après n tirages est un processus à valeurs dans \mathbb{R} , appelé processus de Bernoulli.

2.1.1 Propriétés de processus

Loi de processus

La loi d'un processus aléatoire est caractérisé par la donnée des lois fini-dimensionnelles.

Définition 2.1.2 *Les distributions à dimensions finies du processus stochastique $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ sont les distributions de vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}), t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{T}$ à dimensions finies. Alors*

la famille des lois des variables aléatoires $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ s'appelle la famille des lois fini dimensionnelles ou famille de répartition finie de $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$. Cette fonction est donnée par

$$F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}\{X_{t_1} \leq x_{t_1}, \dots, X_{t_n} \leq x_{t_n}\}, \text{ pour } t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{T}.$$

Les lois fini-dimensionnelles des processus vérifient des propriétés qui peuvent être utiles pour modéliser des phénomènes réels.

Définition 2.1.3 Deux processus stochastiques $(Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$ et $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ sont dits indépendants si tous événements défini à partir du premier est indépendant de tout événement défini à partir du second, c'est-à-dire si pour tout éléments t_1, t_2, \dots, t_m de \mathbb{T} les vecteurs aléatoires $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m})$ et $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_m})$ sont indépendant.

Définition 2.1.4 Soit un processus (X_t) indexé dans un ensemble $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$. La variable aléatoire $(X_{t_i} - X_{t_j})$ où $t_i < t_j$ est l'accroissement du processus sur l'intervalle $[t_i, t_j[$.

Définition 2.1.5 Un processus X_t est dite à accroissements indépendants si por tou $0 < t_1 < \dots < t_n$, les variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

Définition 2.1.6 Un processus stochastique $(Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$ à accroissements stationnaires si $\forall h > 0$ la variable aléatoire $(Y_{t+h} - Y_t)$ on la même distributions $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

Equivalence de deux processus

Soient $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ et $(Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$ deux processus stochastiques définis sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Nous précisons dans la définition suivante des notions qui permettent de comparer ces processus.

Définition 2.1.7 1. On dit que Y_t est une modification du processus X_t si

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{T}, \quad \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

2. X_t et Y_t deux processus sont dit indistinguable si

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \in \mathbb{T}) = 1.$$

3. Deux processus X_t et Y_t ont même loi fini-dimensionnelle si pour tout $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{T}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}).$$

Remarque 2.1.2 Notons les liens entre ces notions : $2 \Rightarrow 1 \Rightarrow 3$.

Continuité des processus

Dire qu'un processus aléatoire est continue c'est par définition dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} |X_{t+h} - X_t| = 0.$$

Selon le type de convergence de cette variable aléatoire, on obtient une continuité plus ou moins forte la plus faible des notions de continuité est liée à la convergence en loi.

Un processus aléatoire est continue en probabilité au point t si :

$$\mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ si } h \rightarrow 0.$$

Kolmogorov a obtenu un résultat remarquable sur la continuité des trajectoires de processus aléatoire $(X_t)_{t \in T}$.

Théorème 2.1.1 Soit un processus stochastique $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ tel que pour tout $t, t + h$ dans $[a, b]$ il existe des constantes $p > 0, c > 0$ et $r > 0$ vérifiant

$$\mathbb{E}[|X_{t+h} - X_t|^p] \leq c |h|^{1+r},$$

alors presque toutes les trajectoires sont continues.

Quelques quantités importantes

Voici aussi des concepts utiles en théorie des processus stochastiques, ce sont les fonctions moyenne, corrélation et covariance.

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ un processus stochastique.

Définition 2.1.8 • *La fonction moyenne d'un processus stochastique est donné par*

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}[X_t].$$

• *La variance d'un processus stochastique X_t est donné par*

$$\text{Var}(X_t) = \sigma_t^2 = \mathbb{E}[X_t - \mathbb{E}[X_t]]^2.$$

• *La fonction de covariance,*

$$\Gamma(t, s) = \text{Cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_s - \mathbb{E}(X_s))].$$

• *La fonction d'autocorrélation :*

$$\text{Corr}(X_t, X_s) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_s)}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\text{Var}(X_s)}}.$$

Remarque 2.1.3 *On dit que le processus est centré si $\mathbb{E}[X_t] = 0, \forall t \in \mathbb{T}$.*

2.1.2 Classification des processus

Processus stationnaires

La stationnarété fixe la propriété d'invariance par rapport au temps t des loi de probabilité qui caractérisent le processus stochastique. Elle est en pratique très importante et peut être définie de différentes façon.

Définition 2.1.9 On dit que le processus stochastique $\{X_t, t \in T\}$ est stationnaire, ou stationnaire au sens strict, si :

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}) \text{ pour tout } h.$$

La figure 2.2 ci dessus présente l'état stationnaire d'ordre n .

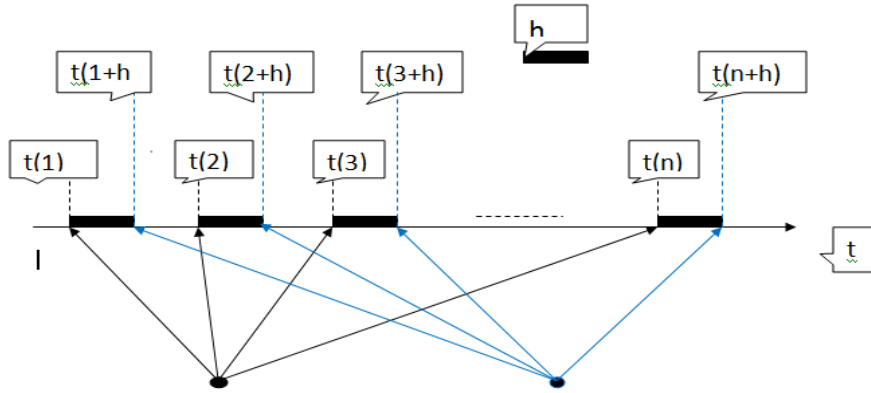


FIG. 2.2 – Stationnairité au sens strict d'ordre n

Remarque 2.1.4 Pour un processus stationnaire les vecteurs $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ et $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ ont meme loi mais ne sont pas nécessairement identiques.

La stationnairété au sens large est une notion plus pratique qui est définie à l'ordre deux et généralement à partir des deux premiers moments du processus.

Définition 2.1.10 On dit que le processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ est stationnaire au sens large si :

- $\mathbb{E}(X_t) = \mu_X(t) = \text{constante}$.
- $\Gamma(t, s) = \Gamma(|t - s|)$.

Exemple 2.1.2 Un processus ε_t est dit bruit blanc gaussien si :

- $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ et $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 < +\infty$ pour tout t .
- $\mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-i}) = 0$ pour tout t et $i \neq 0$.

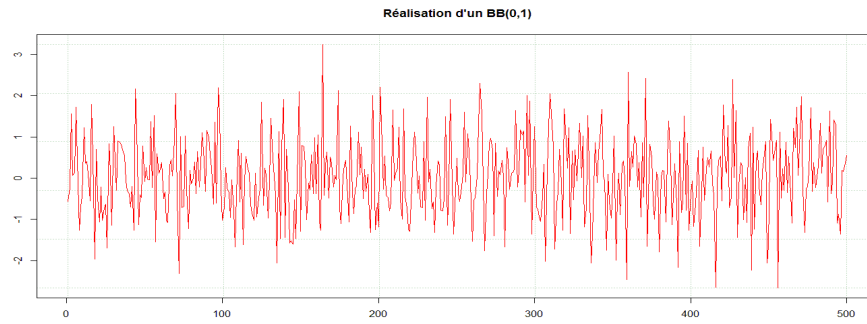


FIG. 2.3 – Bruit blanc stationnaire

Exemple 2.1.3 *Processus marche aléatoire (random walk) non stationnaire :*

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{où } \varepsilon_t \text{ est } BB(0,1) \quad .$$

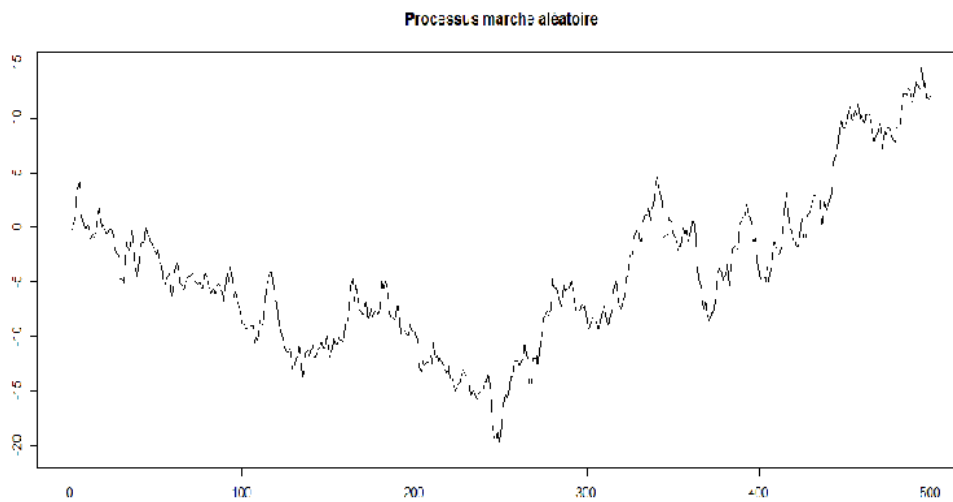


FIG. 2.4 – Le trajectoire du marche aléatoire

2.2 Processus gaussiens

Ces processus constituent une extension de la notion de vecteur gaussien à des familles infinies ou finies de composantes.

Définition 2.2.1 *Un processus $(X_t)_{t \in T}$ réel est gaussien si : $\forall n \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$, le vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est gaussien.*

Remarque 2.2.1 • *Toutes les marginales d'un processus gaussien sont gaussiennes.*

• *Toute combinaison linéaire de marginales d'un processus gaussien est gaussienne.*

Il est clair que la loi d'un vecteur gaussien $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est déterminée par le vecteur moyenne μ_X et la matrice de covariance Γ , et aussi toutes les lois fini-dimensionnelles d'un processus gaussien est connue dès qu'on se donne la fonction moyenne $\mu(t) = \mathbb{E}(X_t)$ et de covariance $\Gamma(t, s) = \text{Cov}(X_t, X_s)$. Car, la loi fini-dimensionnelle de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est la loi gaussienne de dimension n $\mathcal{N}(\mu_n, \Gamma_n)$. Mais est-ce que la réciproque est vraie ?

Le théorème suivante donne la réponse à la question précédente.

Théorème 2.2.1 *Soit Γ une fonction symétrique de type positif sur $T \times T$. Il existe alors un processus gaussien dont la fonction de covariance est Γ .*

2.2.1 Propriété des processus gaussiennes

Définition 2.2.2 *Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus gaussien réel pour toutes $s, t \in T$, on définit*

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}(X_t),$$

la fonction moyenne du processus X_t , et

$$\Gamma(s, t) = \mathbb{E}[(X_t - \mu(t))(X_s - \mu(s))],$$

la fonction covariance du processus gaussien X_t .

Remarque 2.2.2 *Remarquons que*

1. Pour toute partie finie $I \subset T$ la matrice des $\Gamma_I = \Gamma(t_i, t_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est de type positif.
2. Les deux fonction μ et Γ caractérisent entièrement la loi d'un processus gaussien.

Proposition 2.2.1 *Un processus gaussien X_t est stationnaire ssi $\mathbb{E}(X_t)$ est constante, et $\Gamma(s, t) = \Gamma(|s - t|)$.*

Preuve. On va montrer la condition nécessaires (X_t processus gaussien est stationnaire $\implies \mathbb{E}(X_t) = \text{constante}$ et $\Gamma(s, t) = \Gamma(|s - t|)$.)

Soit on a X_t un processus gaussien alors,

$$\forall t, s \in \mathbb{R}_+ \quad \mathcal{L}(X_t) = \mathcal{L}(X_s)$$

alors,

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_s),$$

donc la fonction moyenne est constante, de même pour la covariance,

$$\forall t, s, h \in \mathbb{R}_+ \quad \mathcal{L}(X_t, X_s) = \mathcal{L}(X_{t+h}, X_{s+h}),$$

on a

$$Cov(X_t, X_s) = Cov(X_{t+h}, X_{s+h}),$$

la dernière quantité indépendante de h .

La réciproque : ($\mathbb{E}(X_t) = \text{constante}$ et $\Gamma(s, t) = \Gamma(|s - t|) \implies X_t$ processus gaussien est stationnaire).

Elles sont suffisantes seulement dans le cas gaussien puisque dans ce cas, la loi est caractérisée par la fonction moyenne et covariance. Il est facile alors de voir dans ce cas qu'une translation dans les paramètres de temps ne modifie pas ces fonctions sous les hypothèses de la proposition. ■

Théorème 2.2.2 (Régularité) Soit X_t un processus gaussien centré, de fonction de covariance $\Gamma(s, t)$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout s, t :

$$\Gamma(t, t) + \Gamma(s, s) - 2\Gamma(s, t) \leq c |t - s|^\alpha.$$

Aors il existe une version continue \tilde{X} de X .

2.3 Exemples de processus gaussiens

2.3.1 Mouvement Brownien

L'un des processus stochastique à temps continu les plus important et les plus utilisés est le mouvement brownien aussi appelé processus de wiener. Le mouvement brownien décrit le déplacement dans une direction d'une particule en suspension dans une liquide, par exemple d'un grain de pollen dans l'eau. Le nom fait référence à sa découverte expérimentale au début du 19ème siècle, dans des recherches en botanique par R.Brown. Les premier études mathématiques datent du début du 20ème siècle par Einstein, Bachelier, Lévy, Wiener...

Aujourd'hui, c'est un processus stochastique de base, aux applications multiples : finance ; physique, chimie biologie...

Historique

Robert Brown est un botaniste célèbre qui a observe en 1827 le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau. En 1877, Delsaux explique les changements incessants de direction de trajectoire par les chocs entre les particules de pollen et molécules d'eau.

En 1900, Louis Bachelier introduit le mouvement brownien pour modéliser la dynamique des prix actions à la bourse, mais sa démarche en suite oubliée jusque vers les années 1960.

En 1905, Albert Einstein détermine la densité de transition du mouvement brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur et relie ainsi le mouvement brownien et les équations aux dérivées partielles de type parabolique.

En 1923, la première étude mathématique rigoureuse est faite par l'américain Norbert Wiener qui exhibe également une démonstration de l'existence du mouvement brownien. Il établit en particulier que les trajectoires sont continues, et ainsi d'autres mathématiciens de nombreuses propriétés du mouvement brownien.



FIG. 2.5 – Robert Brown, (1773, 1858)

2.3.2 Mouvement brownien standard

Définition 2.3.1 (2.3.1) *Un processus stochastique $(B_t; t \geq 0)$ à valeurs réelles est appelé mouvement brownien standard s'il vérifie les propriétés suivantes :*

1. $B_0 = 0$.
2. Pour tout $s \leq t$, l'accroissement $B_t - B_s$ suit la loi gaussienne centrée de variance $t - s$.
3. Si $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, les accroissements $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendants.
4. Les trajectoires $t \rightarrow B_t(\omega)$ sont continues.

Remarque 2.3.1 *Notons que*

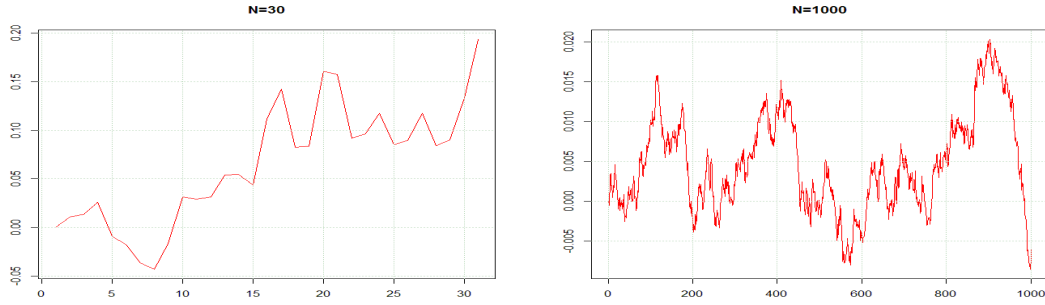


FIG. 2.6 – Mouvement brownien

1. La densité de la variable aléatoire B_t est

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right).$$

2. Un mouvement brownien standard est donc un processus continu à accroissements indépendants et stationnaires.

2.3.3 Propriétés du mouvement brownien

Proposition 2.3.1 (Propriétés en loi du mouvement brownien) Si (B_t) est un mouvement brownien, alors il en est de même pour les processus suivante.

1. $X_t = \frac{1}{\alpha} B_{\alpha^2 t}$ pour la constante $\alpha \neq 0$ (invariance par changement d'échelle).
2. $X_t = t B_{\frac{1}{t}}$ pour $t > 0$ et $X_0 = 0$ (invariance par inversion de temps).
3. $X_t = -B_t$ (symétrique).
4. $X_t = B_{t+s} - B_s$ (invariance par arrêt du temps).

Preuve. 1) Pour tout $\alpha \neq 0$ $X_t = \frac{1}{\alpha} B_{\alpha^2 t}$ est un mouvement brownien (standard).

En effet : X_t est un processus gaussien car ses lois fini dimensionnelles en sont de B ; le processus est centré, a trajectoires continues (car X l'est) et de fonction de covariance

$$\text{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}(X_s X_t) = \frac{1}{\alpha^2} \mathbb{E}(B_{\alpha^2 s} B_{\alpha^2 t}) = \frac{1}{\alpha^2} \inf(\alpha^2 s, \alpha^2 t) = \inf(s, t) = \text{Cov}(B_s, B_t).$$

2) Le processus X_t défini par $X_t = tB_{\frac{1}{t}}$ si $t > 0$ et $X_0 = 0$ est un mouvement brownien standard.

En effet, X_t gaussien car a nouveau ses lois fini-dimensionnelles sont des transformations linéaires de celles de B , le processus est centré de covariance,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_s, X_t) &= \mathbb{E}(X_s X_t) = ts \mathbb{E}\left(B_{\frac{1}{t}} B_{\frac{1}{s}}\right) \\ &= st \inf\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right) = \inf(t, s) \\ &= \text{Cov}(B_t, B_s). \end{aligned}$$

De même manière on montre les autres propriétés. ■

Proposition 2.3.2 *Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement Brownien, alors presque sûrement les trajectoires de B_t ne sont dérivables en aucun point.*

2.3.4 Caractère gaussien du mouvement brownien

Théorème 2.3.1 *Un mouvement brownien est un processus gaussien.*

Preuve. Si $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien. Alors $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ est un vecteur formé gaussiennes indépendantes, donc un vecteur gaussien. Le vecteur $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ qui s'obtient par transformation linéaire du précédent est également gaussien. ■

On peut aussi prouver le résultat suivant :

Théorème 2.3.2 *Soit $(B_t, t \geq 0)$ un processus gaussien centré continue telle que*

$$\forall s, t \geq 0, \quad \text{Cov}(B_s, B_t) = t \wedge s.$$

Alors $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

Preuve. Le point (4) de la définition (2.3.1) est vérifié.

Comme

$$\mathbb{E}(B_0) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}ar(B_0) = \min(0, 0) = 0,$$

alors B_0 est nul avec probabilité 1.

Pour les points (2) et (3) on se donne $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$. Pour $1 < i < n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) &= \mathbb{V}ar(B_{t_i}) - 2Cov(B_{t_i}, B_{t_{i-1}}) + \mathbb{V}ar(B_{t_{i-1}}) \\ &= t_i - 2\min(t_i, t_{i-1}) + t_{i-1} = t_i - t_{i-1}. \end{aligned}$$

Et pour $1 \leq i < j \leq n$,

$$\begin{aligned} Cov(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}, B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) &= Cov(B_{t_i}, B_{t_j}) - Cov(B_{t_i}, B_{t_{j-1}}) \\ &\quad - Cov(B_{t_{i-1}}, B_{t_j}) + Cov(B_{t_{i-1}}, B_{t_{j-1}}) \\ &= \min(t_i, t_j) - \min(t_i, t_{j-1}) - \min(t_{i-1}, t_j) + \min(t_{i-1}, t_{j-1}) \\ &= t_i - t_i - t_{i-1} + t_{i-1} = 0. \end{aligned}$$

Comme (B_t) est un processus gaussien, on conclut que les variables $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont des gaussiennes centrées indépendantes de variances respectives $t_1, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1}$. ■

2.3.5 Généralisation du mouvement brownien

Mouvement brownien arithmétique

Définition 2.3.2 *Un processus $(Y_t)_{t>0}$ est appelé mouvement brownien avec dérive μ et variance σ^2 (arithmétique) si :*

- i) $Y_0 = 0$.
- ii) Y_t a des accroissements indépendants et stationnaires.
- iii) Y_t suit la loi $\mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$.

Si B_t est un mouvement brownien standard, alors

$$Y_t = \mu t + \sigma B_t.$$

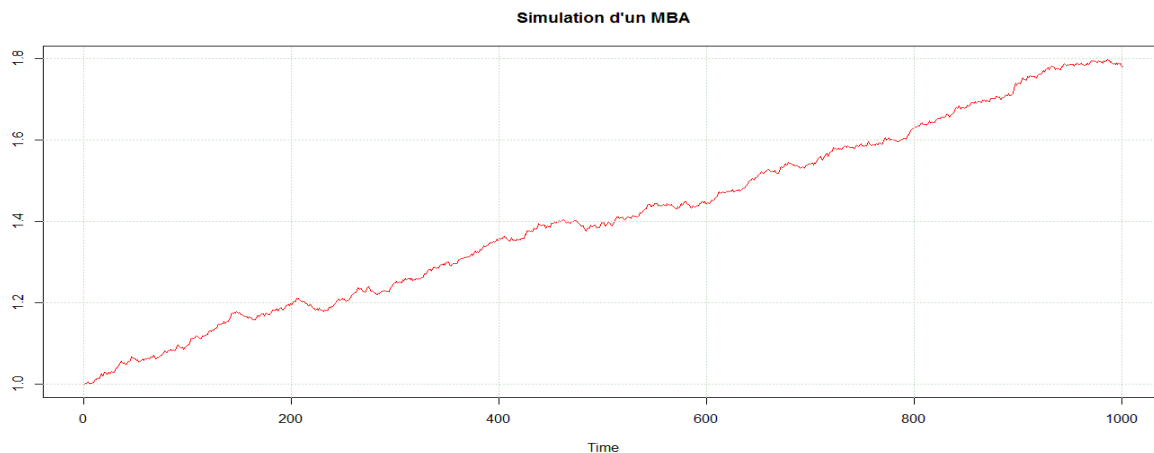


FIG. 2.7 – Mouvement brownien arithmétique

Remarque 2.3.2 *On remarque que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_t) &= \mu t + \sigma \mathbb{E}(B_t) = \mu t \\ \text{Var}(Y_t) &= \sigma^2 \text{Var}(B_t) = \sigma^2 t.\end{aligned}$$

Mouvement brownien géométrique

Définition 2.3.3 *Soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ est appelé mouvement brownien géométrique μ et variance σ^2 , alors le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ défini par,*

$$X_t = \exp(Y_t)$$

Définition 2.3.4 *Une variable aléatoire X est dite suit la loi log-normale de paramètre*

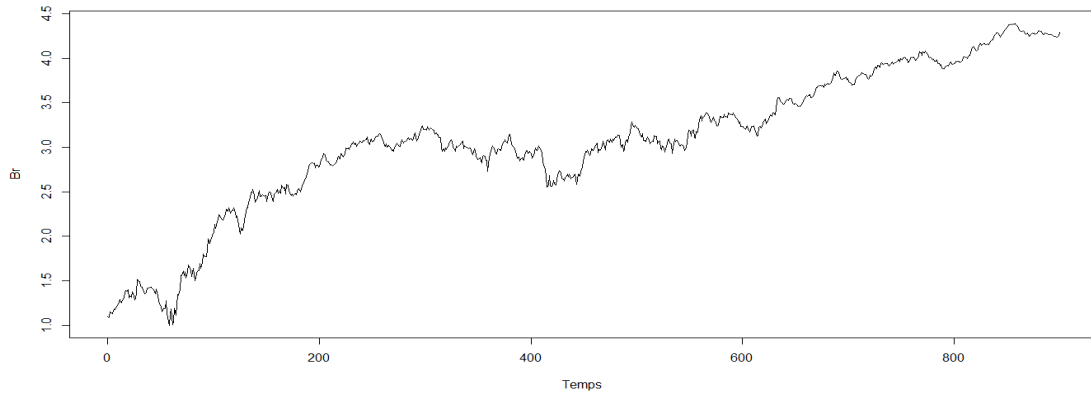


FIG. 2.8 – Mouvement brownien géométrique

μ et σ^2 si la variable $Y = \ln(X)$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. La densité de X est alors,

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Par conséquent, si X_t est un mouvement brownien géométrique, pour tout $t > 0$, la densité de X_t est

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2t\sigma^2}\right).$$

Remarque 2.3.3 *Le mouvement brownien géométrique est très utilisé en finance.*

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté les processus gaussiens, qui sont un modèle très populaire pour l'étude non paramétrique de fonction. En effet, ils bénéficient de plusieurs propriétés avantageuses.

Un processus gaussien est caractérisé par une fonction moyenne et une fonction de covariance, qu'il est souvent possible de choisir selon le problème considéré.

Les processus gaussiens sont des processus très importants du fait qu'on les rencontre très souvent en pratique.

Bibliographie

- [1] Arnaud Guyader, Espérance conditionnelle & Chaînes de Markov, Université Rennes 2 Licence MASS3.
- [2] Bruno Saussereau. (2013-2014), Cours de théorie des probabilités avec exercices corrigés et devoirs. Licence de mathématiques, 3^{ième} année.
- [3] Jean-François le Gall. (2013). Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique. Springer science + Business Media (www.springer.com).
- [4] Hweip-Hsu, Ph.D. Professor of Electrical Engineering Fairleigh Dickinson University. Théorie and Problems of probability, Random variables, and Random processus.
- [5] Leonard Gallardo. (2008). Mouvement brownien et calcul d'Itô. Hemmann éditeurs, 6 rue de la sorbonne 75005 paris.
- [6] Madalina Deaconu, (2015-2016). Cours 2G245. Équations différentielles stochastiques : Résolution numérique et application.
- [7] Yves Gaumel. (2011). Probabilités et processus stochastiques. Springer-Verlag France est membre du groupe Springer Science + Business Media.
- [8] Jean-Christophe BRTON, September-Décembre 2013. Probabilités, Processus stochastique M_2 Mathématique. Université de Rennes 1. https://perso.univ-rennes1.fr/breton/Fichiers/processus_M2.pdf.
- [9] Franck Jedrzejewski. (2009). Modèles aléatoires et physique probabiliste, Springer-Verlag.

- [10] JeanFrançois Delmas&B.J&B.L. [https ://cermics.enpc.fr/~delmas/Enseig/enpc-processus-cours.pdf](https://cermics.enpc.fr/~delmas/Enseig/enpc-processus-cours.pdf).
- [11] Pierre, Lafayede Micheaux. (2011). Springer-Verlag.
- [12] [http ://math.univ-lyon1.fr~gelineaufilesvecteurs_gaussiens.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~gelineaufilesvecteurs_gaussiens.pdf)

Annexe A : Logiciel *R*

Le langage *R* est un logiciel dans lequel de nombreuses techniques statistiques modernes et classiques ont été implémentées. Il comporte des moyens qui rendent possible la manipulation des données, les représentations graphiques et les calculs. Dans ce mémoire on va donner les représentations graphiques des quelque lois des probabilités et on va simuler quelque processus stochastiques.

2.4 lois des probabilités et processus stochastiques

2.4.1 lois des probabilités

Programme de la loi normale :

```
x <- rnorm(1000,0,0.5)
y <- rnorm(1000,3,1)
r <- c(-10,10)
plot(function(x) 0.5*dnorm(x,0,0.5),xlim=r,col=1,add=TRUE)
plot(function(x) 0.5*dnorm(x,0,0.7),xlim=r,col=4,add=TRUE)
plot(function(x) 0.5*dnorm(x,3,1),xlim=r,col=2,add=TRUE)
plot(function(x) 0.5*dnorm(x,3,2),xlim=r,col=3,add=TRUE)
```

Programme de la loi binormale :

```
#on construit la fonction à représenter f
#####
```

```
mu1<-0
mu2<-0
s11<-15
s12<-20
s22<-10
rho<-0.5
f<-function(x,y){
term1<-1/(2*pi*sqrt(s11*s22*(1-rho^2)))
term2<-1/(2*(1-rho^2))
term3<-(x-mu1)^2/s11
term4<-(y-mu2)^2/s22
term5<-2*rho*((x-mu1)*(y-mu2))/(sqrt(s11)*sqrt(s22))
term1*exp(term2*(term3+term4-term5))}
# on définit deux vecteurs correspondant aux axes x et y
x<-seq(-15,15,length=50)
y<-x
# on calcule la valeur de z=f(x,y) pour tous les couples x[i],y[i] avec la fonction outer
z<-outer(x,y,f)
#on utilise la fonction persp
x11()
persp(x,y,z,theta=40,phi=30,expand=0.5,col="lightgreen",ticktype="detailed")
x11()
```

2.4.2 Processus stochastiques

programme de bruit blanc :

```
set.seed(123)
bb <- rnorm(500, 0, 1)
```

```
plot.ts(bb, xlab = "", ylab = "", main = "Réalisation d'un BB(0,1)", panel.first = grid(),  
col = "red")
```

Programme de la marche aléatoire :

```
X1 <- cumsum(rnorm(500)) # marche aléatoire.  
plot.ts(X1, xlab = "", ylab = "", main = "Processus marche aléatoire")
```

Programme du mouvement brownien :

```
T <- 1  
n1 <- 30  
n2 <- 1000  
delta1 <- T/n1  
delta2 <- T/n2  
x1 <- numeric(n1)  
x2 <- numeric(n2)  
for (i in 1 :n1) x1[i + 1] <- x1[i] + delta1 * rnorm(1)  
for (i in 1 :n2) x2[i + 1] <- x2[i] + delta2 * rnorm(1)  
par(mfrow = c(1, 2))  
plot.ts(x1, xlab = "", ylab = "", main = "N=30", col = 2)  
grid()  
plot.ts(x2, xlab = "", ylab = "", main = "N=1000", col = 2)  
grid()
```

Programme du mouvement brownien arithmétique :

```
T <- 1  
n <- 1000  
dt <- T/n  
dW <- sqrt(dt) * rnorm(n)  
param <- c(0.75, 0.1)  
X <- numeric(n)
```

```
X[1] <- 1
for (i in 1 :n) {
X[i + 1] <- X[i] + param[1] * dt + param[2] * dW[i]
}
plot.ts(X, ylab = "", type = "l", main = "Simulation d'un MBA", col = 2)
grid()
```

Programme du mouvement brownien géométrique :

```
T <- 1
n <- 1000
dt <- T/n
dW <- sqrt(dt) * rnorm(n)
param <- c(0.75, 0.1)
X <- numeric(n)
X[1] <- 1
for (i in 1 :n) {
X[i + 1] <- X[i] + param[1] * X[i] * dt + param[2] * X[i] * dW[i]
}
plot.ts(X, ylab = "", type = "l", main = "Simulation d'un MBG", col = 2)
grid()
```

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\mathbb{E}(X)$	L'espérance
$\text{Var}(X)$	Variance
$\text{Cov}(X_i, X_j)$	Covariance
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	L'ensemble des matrices
$\langle a, b \rangle$	Le produit scalaire
$s \wedge t$	$\inf(s, t)$
B_t	Mouvement brownien
$\stackrel{\mathcal{L}}{=}$	L'inégalité en loi
$\stackrel{\mathcal{L}}{\rightarrow}$	L'approximation en loi
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité
\mathbb{P}	Probabilité
$\mathbf{1}$	La fonction de l'indicatrice
(E, \mathcal{E})	L'espace probabilisable
iid	Indépendantes et identiquement distribuées
f_X	La densité