République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

MAANNSER Samah

Titre :

Sur les L-moments

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Chine amel**	UMKB	Encadreur
Dr.	**DJABRAN Yahia**	UMKB	Président
Dr.	**DHIABI Samra**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Je dédie ce travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère (**meria**).

A mon père (**mohamed salah**) école de mon enfance, qui a été mon ombre durent toutes les années des études, et qui a veillé tout au long de ma vie à m'encourager, à me donner l'aide et à me protéger. A mon mari (**bachir**),A mes frères (**nour eddine, abd albaki,abd elhakim, walid**) et ma sœur : **karima** et mes cousins (**assia, halima ,sabrina, hayat, ...**) que dieu les protèges. A mes chères amies (**amel, wafa, samiha, djamila, bouthaina,meriem, abir, rofaida, ...**).

A toute la famille **maannser,zazel** et **bouzekkoudh.**

A tous ceux qui m'aiment

A tous ceux que j'aime

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout d'abord **DIEU** le tout puissant qui m'a donné durant toutes ces années la santé, le courage et la fois en moi même pour arriver à ce jour.

Le moment est venu pour moi d'exprimer ma plus grande gratitude envers tous celles et ceux qui m.ont aidé et encouragé dans l'accomplissement de cette mémoire dont le prix était l'obtention de diplôme de master

La première personne que je tiens à remercier très chaleureusement est mon encadreuse Dr **Chine Amel** pour ses conseils éclairés et ses encouragements Elle était toujours présente et je voudrais remercie ainsi **Touba Sonia** pour accepter la supervision de ce travail en l'absence de premier encadreur et aidez-moi à terminer ce travail. J'ai beaucoup de respects pour mes encadreurs.

Je suis honorée que Dr **DJABRAN Yahia** et Dr.**DHIABI Samra** ont bien acceptés de participer au jury de cette mémoire et d'examiner mon travail.

Je remercie monsieur, Dr **BENATIA Fateh** pour sa gentillesse, ses conseil et pour toute l'aide qu'il m'apporté malgré leur nombreuse charge.

Je tiens à remercier Dr **Brahimi Brahim** de m'avoir guidé dans certaines difficultés

Nous remercions le chef du département Dr **Hafayed Mokhtar** d'avoir facilité nos affaires et de nous ouvrir des portes tout le temps.

Enfin, honnêtes remerciements à ma mère, mon père, mon mari, mes frères, ma sœur, à toute ma belle famille et mes amis pour le soutien qu'ils m'ont apporté tout au long de la préparation de ce mémoire.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

Par analogie aux moments classiques les L-moments sont introduits pour la première fois par **Hosking** (**1990**). Comme pour les moments ces derniers (L-moments) sont définis comme une combinaison linéaire des statiques d'ordre à une certaine suite de variables aléatoires données. Elles ont été utilisés par caractériser les distributions de probabilités.

Au cours des 25 derniers années, la méthode de L-moment à été utilisée comme une alternative pratique robuste et plus efficace due les méthodes d'estimation traditionnel telle que la méthode des moments et méthode de maximum de vraisemblance, surtout pour les petits l'échantillons et les distributions à queue lourde.

Les L-moments sont devenues très populaire notamment en hydrologie pour résumer les donnés et ajuster les distributions des fréquences de crue, en génie civil, climatologie, météorologie (**kysely** et **picek 2007**) et en économie et socio-économie (**bilkovà 2014**)…..etc.

Notre travail est organisé en trois chapitres et s'étale comme suit :

– Dans le premier chapitre un rappel général sur les statistiques d'ordres et leurs propriétés essentielles est présenté ainsi que la définition et les conditions d'existence des moments présentés.

– Le deuxième chapitre porte essentiellement sur les L-moments leurs liens avec les moments classiques, leurs différentes façons de présentation et de calcul en fonction des statistiques d'ordres et des probabilités pondérés. La méthode d'estimation basée sur l'utilisation des L-moments et ses propriétés essentielles associées sont présentés dans chapitre.

– Le troisième et dernier chapitre est une application de deux méthodes : méthode de les moments et L-moments pour estimer les paramètres de quelques distributions et faire une étude de comparaison selon le calcule de biais et MSE de ces estimateurs.

Chapitre 1

Statistique d'ordre

Pour commencer notre étude et les explications des L-moments, on s'intéresse dans ce premier chapitre sur les statistiques d'ordres où on donne ces définitions, ces propositions, les lois associées et les moments de la statistique d'ordre qui joue un rôle important dans l'écriture des L-moment comme on le verra dans les prochains chapitres.

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ une suite des variables aléatoires indépendants identiquement distribuées (v.a.i.i.d) de fonction de répartition F tq :

$$F(x) = P(X \leq x), \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

1.1 Lois de statistique d'ordre

Définition 1.1 (Statistique d'ordre) *La statistique d'ordre de l'échantillon* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *est le rréarrangement croissante. On la note par :* $(X_{1,n}, X_{2,n}, ..., X_{n,n})$ *tq :*

$$X_{1,n} \leq X_{2,n}. \leq .... \leq X_{n,n}.$$

Exemple 1.1 *On a* $X_1 = 12$, $X_2 = 3$, $X_3 = 1$, $X_4 = 6$, $X_5 = 10$. *La statistique d'ordre associe à* $(X_1, X_2, ..., X_5)$ *est :* $X_{1,5} = 1 \leq X_{2,5} = 3 \leq X_{3,5} = 6 \leq X_{4,5} = 10 \leq X_{5,5} = 12$.

1.1.1 Densité conjointe de n statistiques d'ordre

Définition 1.2 *Soit* $(X_1, ..., X_n)$ *une suite des v.a.i.i.d de densité f, alors la densité de* $(X_{1,n}, ..., X_{n,n})$ *est donné par [1] :*

$$f_{(X_{1,n},...,X_{n,n})}(x_1, ..., x_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i), \forall\ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 \leq .... \leq x_n\ .$$

Remarque 1.1

1. La v.a $X_{k,n}$ s'appelle la k^{éme} statistique d'ordre.
2. En particulier, dans la statistique d'ordre associes à l'échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ il y a deux statistiques d'ordres qui sont des valeurs extrêmes. On la note par :

$$X_{1,n} = \min_{1<i<n} \{X_i\},$$
$$X_{n,n} = \max_{1<i<n} \{X_i\}.$$

1.1.2 Lois des extrêmes

Pour déduire les lois des extrêmes en utilisant la propriété de l'indépendance des v.a $(X_1, X_2, ..., X_n)$ on a :

1 / Pour le maximum [3] [2] :

$$\begin{aligned} F_{X_{n,n}}(x) &= P\{X_{n,n} \leq x\} \\ &= P\{\max(X_1, X_2, ..., X_n) \leq x\} \\ &= P\{\cap_{i=1}^{n} X_i \leq x\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \leq x\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x) = F_X(x)^n. \end{aligned}$$

Et on déduit la densité :

$f_{X_{n,n}}(x) = \frac{dF_{X_{n,n}}(x)}{dx} = n f_X(x) F_X(x)^{n-1}.$

2 / Pour le minimum [2] [3] :

$$\begin{aligned} F_{X_{1,n}}(x) &= P\{X_{1,n} \leq x\} \\ &= 1 - P\{X_{1,n} > x\} \\ &= 1 - P\{\min(X_1, X_2, ..., X_n) > x\} \\ &= 1 - P\{\cap_{i=1}^{n} X_i > x\} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} P\{X_i > x\} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - P\{X_i \leq x\}] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_{X_i}(x)] \\ &= 1 - [1 - F_X(x)]^n. \end{aligned}$$

Et on déduit la densité :

$f_{X_{1,n}}(x) = \frac{dF_{X_{1,n}}(x)}{dx} = n f_X(x)[1 - F_X(x)]^{n-1}.$

Remarque 1.2 *1. $F_{X_{n,n}}(x) \neq F_X(x)$ et $F_{X_{1,n}}(x) \neq F_X(x)$.*

2. Les $X_{1,n}, X_{2,n}, ..., X_{n,n}$ non i.i.d pour cela on va chercher la loi de $X_{k,n}$.

1.1.3 Loi de $\mathbf{X}_{k,n}$

Pour calculer la loi la de k ^{éme} statistique d'ordre, [3] on va rappelle que :

$(F(x))\prime = f(x) = lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} \iff \varepsilon f(x) \simeq F(x+\varepsilon) - F(x), \forall\ \varepsilon \to 0.$

Alors :

$\varepsilon f_{X_{k,n}}(x) \simeq F_{X_{k,n}}(x+\varepsilon) - F_{X_{k,n}}(x) = P(x \leq X_{k,n} \leq x+\varepsilon).$

$$\begin{array}{cccc} \underline{\qquad k-1 \qquad}] & \underline{\quad 1 \quad}] & \underline{\qquad n-k \qquad} & \\ -\infty & x & x+\varepsilon & +\infty \end{array}$$

On a : k-1 de X_i telle que : X_i inférieure à x, exactement un de X_i telle que : $x \leq X_i \leq x+\varepsilon$ et le reste n-k de X_i telle que : X_i supérieure à $x+\varepsilon$.

Donc :

Il y a C_n^{k-1} [1]manière de réaliser le premier événement et une seule manière de réaliser le deuxième événement, et il reste C_{n-k+1}^{1} manière de réaliser le dernier événement.

On trouve :

$$\begin{aligned}
\varepsilon f_{X_{k,n}}(x) &\simeq P(x \leq X_{k,n} \leq x+\varepsilon) \\
&= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}[P(X_i \leq x)]^{k-1}[P(x \leq X_i \leq x+\varepsilon)][P(X_i > x+\varepsilon)]^{n-k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}[F_X(x)]^{k-1}[\varepsilon f_X(x)][1-F_X(x)]^{n-k}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
f_{X_{k,n}}(x) &= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} f_X(x)[F_X(x)]^{k-1}[1-F_X(x)]^{n-k}, \\
&= \frac{1}{\beta(k,n-k+1)} f_X(x)[F_X(x)]^{k-1}[1-F_X(x)]^{n-k}. \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

tq : $\beta(s,t) = \int\limits_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$, $x \in [0,1]$
et $\Gamma(n+1) = n!\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Et pour la fonction de répartition [1] on a :

$$\begin{aligned}
F_{X_{k,n}}(x) &= P(X_{k,n} \leq x), \\
&= P(\text{au moins k des } X_i \text{ sont infrèrieur à } x), \\
&= \sum_{i=k}^{n} P(\text{exactement i v.a parmi } X_1, ..., X_n \text{ sont inférieur à } x), \\
&= \sum_{i=k}^{n} C_n^i F(x)^i (1-F(x))^{n-i}. \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

[1] $C_n^k = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!k!} \text{ si : } k \leq n \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$

1.1.4 Loi jointe d'un couple $(X_{i,n}, X_{j,n})$

Définition 1.3 *Soit l'échantillon $X_1, ..., X_n$ de loi F continue et de fonction de densité f, la densité jointe du couple $(X_{i,n}, X_{j,n})$, avec $1 \leq i < j \leq n$ est donnée par :*

$$f_{(X_{i:n},X_{j:n})}(x,y) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} f(x)f(y)\{F(x)\}^{i-1}\{F(y)-F(x)\}^{j-i-1}\{1-F(y)\}^{n-j},$$

$$\textit{avec} \ : -\infty < x < y < +\infty.$$

Preuve. [1] On a : $f_{(X_{i:n},X_{j:n})}(x,y) = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon'\to 0}} \frac{P(x \leq X_{i,n} \leq x+\varepsilon, y \leq X_{j:n} \leq y+\varepsilon')}{\varepsilon\varepsilon'}$
alors :
$\varepsilon\varepsilon' f_{(X_{i:n},X_{j:n})}(x,y) = P(x \leq X_{i,n} \leq x+\varepsilon, y \leq X_{j:n} \leq y+\varepsilon'), \forall \varepsilon \to 0, \varepsilon' \to 0.$
On peut représenté comme suit :

$$\begin{array}{cccccccccccc} & k-1 & & 1 & & j-i-1 & & 1 & & n-j & & \\ & —— &] & ——— &] & —————— &] & ——— &] & ———— & & \\ -\infty & & x & & x+\varepsilon & & y & & y+\varepsilon' & & & +\infty \end{array}$$

On a :

$X_k \leq$ x pour : i-1 des X_k, $x \leq X_k \leq x+\varepsilon$ pour l'un des X_k, $x+\varepsilon \leq X_k \leq y$ pour j-i-1 des X_k, y $\leq$ X_k $\leq$ y+ε' pour l'un des X_k et X_k > y+ε' pour n-j restes des X_k .

Donc :

$P(x \leq X_{i,n} \leq x+\varepsilon, y \leq X_{j:n} \leq y+\varepsilon') = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}\frac{1}{\varepsilon\varepsilon'} f(x)f(y)F(x)^{i-1}[(F(x+\varepsilon)-F(x)]$
$[F(y)-F(x+\varepsilon)]^{j-i-1}[F(y+\varepsilon')-F(y)][1-F(y+\varepsilon')]^{n-j}.$

La densité de couple $(X_{i,n}, X_{j,n})$ est :

$\varepsilon\varepsilon' f_{(X_{i:n},X_{j:n})}(x,y) = P(x \leq X_{i,n} \leq x+\varepsilon, y \leq X_{j:n} \leq y+\varepsilon'), \forall \varepsilon \to 0, \varepsilon' \to 0.$

donc :

$$f_{(X_{i:n},X_{j:n})}(x,y) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} f(x)f(y)F(x)^{i-1}[F(y)-F(x)]^{j-i-1}[1-F(y)]^{n-j}, x<y. \tag{1.3}$$

■

Et la fonction de répartition de $(X_{i,n}, X_{j,n})$ donnée comme suit :

$$F_{(X_{i:n},X_{j:n})}(x,y) = P\{X_{i,n} \leq x, X_{j,n} \leq y\}.$$

Mais on a deux cas :

1^{éme} **cas** : $x \geq y$

$F_{(X_{i:n},X_{j:n})}(x,y) = P\{X_{i,n} \leq x \cap X_{j,n} \leq y\} = P\{X_{j,n} \leq y\} = F_{X_{j:n}}(y).$

2^{éme}**cas** : $x \leq y$

$$\begin{aligned} F_{(X_{i:n},X_{j:n})}(x,y) &= P(X_{i:n} \leq x,\ X_{j:n} \leq y), \\ &= P(\text{au moins } i \text{ des } X_1,...,X_n \text{ sont inférieur à } x, \\ &\text{et au moins } j \text{ des } X_1,...,X_n \text{ sont inférieur à } y) \\ &= \sum_{s=j}^{n}\sum_{r=i}^{s} P(\text{exactement } r \text{ des } X_1,...,X_n \text{ sont inférieur à } x, \\ &\text{et exactement } s \text{ des } X_1,...,X_n \text{ sont inférieur à } y) \\ F_{(X_{i:n},X_{j:n})}(x,y) &= \sum_{s=j}^{n}\sum_{r=i}^{s} \frac{n!}{r!(s-r)!(n-s)!}\{F(x)\}^r\{F(y)-F(x)\}^{s-r}\{1-F(y)\}^{n-s}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

D'aprés le cas génerale de densité jointe de couple $(X_{i,n}, X_{j,n})$ (1.3) on a :

$f_{(X_{1:n},X_{n:n})}(x,y) = n(n-1)f(x)f(y)[F(y)-F(x)]^{n-2}$, $x < y$. telle que i=1, j=n.

1.2 Propriétés des S.O

Proposition 1.1 *Soit $X_1,...,X_n$ des v.a.i.i.d de fonction de répartition F et $(U_1,....,U_n)$ est une suite des v.a.i.i.d suit la loi uniforme continue dans $[0,1]$ et $U_{1,n},....,U_{n,n}$est la s.o associées a l'échentillon $(U_1,....,U_n\ )$,alors :*

$U_{k,n} \rightsquigarrow \beta(k, n-k+1)$ et $(F(X_{1,n}),...,F(X_{n,n}))$ est même loi de $(U_{1,n},....,U_{n,n})$.

Preuve. 1/ On a : $U \rightsquigarrow U_{[0,1]}$ telle que

$f_U(x) = I_{[0,1]}(x)$[2]

et $F_U(x) = \begin{cases} 0,\text{si } x \leq 0. \\ x,\ x \in [0,1]. \\ 1,\text{sinon.} \end{cases}$

d'aprés (1.1) $f_{U_{k,n}} = \frac{1}{\beta(k,n-k+1)} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$. Donc : $U_{k,n} \rightsquigarrow \beta(k, n-k+1)$.[3]

2/ $\{F(X_{k,n})\}_{1\leq k\leq n} \rightarrow^D \{U_{k,n}\}_{1\leq k\leq n}$?

[2] ona :

$$F_{F(X_{k,n})}(x) = P(F(X_{k:n}) \leq x) = \mathbb{P}(X_{k:n} \leq F^{-1}(x)) = F_{X_{k:n}}(F^{-1}(x)),$$

D'après le proposition suivant :

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ tq : $0 \leq a \leq b \leq c$.

$\forall m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}$ tq : $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq m_3$.

On a : $\sum\limits_{i=m_2}^{m_3} \frac{(c-b)^{m_3-i}(b-a)^{i-m_1}}{(m_3-i)!(i-m_1)!} = \int\limits_a^b \frac{(c-u)^{m_3-m_2}(b-u)^{m_2-m_1-1}}{(m_3-m_2)!(m_2-m_1-1)!} du.$

Donc, on peut écriée :

$F_{X_{k,n}}(x) = \sum\limits_{i=k}^{n} C_n^i F(x)^i (1-F(x))^{n-i} = \frac{1}{\beta(k,n-k+1)} \int\limits_0^{F(x)} u^{k-1}(1-u)^{n-k} du$

alors :

$$\begin{aligned} F_{F(X_{k,n})}(x) &= F_{X_{k:n}}(F^{-1}(x)) \\ &= \frac{1}{\beta(k,n-k+1)} \int\limits_0^{F(F^{-1}(x))} u^{k-1}(1-u)^{n-k} du \\ &= \frac{1}{\beta(k,n-k+1)} \int\limits_0^{x} u^{k-1}(1-u)^{n-k} du \end{aligned}$$

On dérive $F_{F(X_{k,n})}(x)$ comme suit :

[2] $\mathrm{I}_A(x)$: est fonction de l'indecatrice $\mathrm{I}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si : x} \in \text{ A} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

[3] soit X v.a suit la loi beta de paramétre s et t noté par : $X \rightsquigarrow \beta(s,t)\ \forall\ x \in [0,1]$

$f_X(x) \begin{cases} \frac{1}{\beta(s,t)} x^{s-1}(1-x)^{t-1} \text{ si : } x \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$\beta(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$.

$f_{F(X_{k,n})}(x) = \frac{dF_{F(X_{k,n})}(x)}{dx} = \frac{1}{\beta(k,n-k+1)} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$.Donc :

$$\{F(X_{k,n})\}_{1 \le k \le n} \rightsquigarrow \beta(k, n-k+1).$$

■

Définition 1.4 (Fonction de répartition emprique) *La fonction de répartition empirique de l'échantillon* $X_1, ..., X_n$ *définit par :*

$$F_n(x) = \frac{card\{X_i \le x\}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{\{X_i \le x\}}$$

et on peut donné sous forme de la s.o tq :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x < X_{1,n} \\ \frac{i}{n}, X_{i,n} \le x < X_{i+1,n} \ , i = 1, .., n \\ 1, x \ge X_{n,n}. \end{cases}$$

Définition 1.5 (Quantile) *Le quantile (ou fractile) d'une distribution de loi* F *d'ordre* p *notée :*

$$Q_p = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) > p\}, \forall p \in [0,1].$$

Si : F *est continue et strictement croissante, alors :* Q_p *est l'unique point tq :*

$$F(Q_p) = p \Longleftrightarrow Q_p = F^{-1}(p).$$

et sous forme de la s.o on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ X_{i,n} = F^{-1}(U_{i,n}) = Q(U_{i,n}), 1 \le i \le n.$$

1.3 Moment des statistiques d'ordres

Soit $X_{i:n}$ la $i^{ème}$ statistique d'ordre associée à l'échantillon de taille n de densité f et de fonction de répartition F continue, le $k^{ème}$ moments de la $i^{ème}$ statistique d'ordre est définie par :

$$\begin{aligned} E(X_{i:n}^k) = \mu_{i:n}^k &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_{X_{i:n}}(x)dx \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\{F(x)\}^{i-1}\{1-F(x)\}^{n-i}dx \\ &= \frac{1}{\beta(i,n-i-1)}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\{F(x)\}^{i-1}\{1-F(x)\}^{n-i}dx. \end{aligned} \tag{1.5}$$

et par la forme de quantile il doit étre :

$$E(X_{i:n}^k) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\int_0^1 Q(u)^k u^{i-1}(1-u)^{n-i}du.\text{tq} : U = F(X). \tag{1.6}$$

Théorème 1.1 (Existence de moment de s.o) *Soient $X_1, ..., X_n$ un n-échantillon de v.a de loi F continue, et $X_{1:n}, ..., X_{n:n}$ les statistiques d'ordre associées. Soit k un entier strictement positif, si : X admet un moment d'ordre k, alors pour tout i appartenant à $\{1, ..., n\}$, la $i^{ème}$ statistique d'ordre $X_{i:n}$ admet aussi un moment d'ordre k.*
$\big(c-a-d$: si : $E(X^k)$ existe $\Longrightarrow \forall i \in \{1,...,n\}, E(X_{i:n}^k)$ est aussi existe.$\big)$

Remarque 1.3 *La réciproque est fausse (c-a-d : $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $E(X_{i:n}^k)$ existe $\not\Rightarrow$ $E(X^k)$ est existe.) par exemple loi de cauchy.[4] : il existe $E(X_{i:n}^k)$, $k = 2, ..n-1$.mais $E(X^k)$ n'existe pas.*

Exemple 1.2 *Je veux donne un exemple résume les résultats précédent :*
Soit $X_1, ..., X_n$ n- échantillon et $X_{1:n}, ..., X_{n:n}$ les statistiques d'ordres associées . soit X est de loi expontielle de paramétre $\lambda = 1$ qui sont i.i.d tq : $f(x) = e^{-x}$ et $F(x) = 1-e^{-x}, \forall x \geq 0$.
Alors :

[4]X une v.a suit la loi de cauchy si elle absolument continue et admet densité suivent : $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$

– **Densité jointe de tout statistiques d'ordre :** est donné par

$$f_{(X_{1,n},...,X_{n,n})}(x_1,...,x_n) = n!\prod_{i=1}^{n} f(x_i) = n!\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i\right), \forall x_1,...,x_n \in \mathbb{R}^+.$$

– **Loi des extrêmes :** sont

$$F_{X_{n,n}}(x) = F(x)^n = (1-e^{-x})^n,$$

et

$$F_{X_{1,n}}(x) = 1-[1-F_X(x)]^n = 1-e^{-nx}.$$

– **K $^{\text{éme}}$ statistique d'ordre :** est

$$f_{X_{k,n}}(x) = \frac{1}{\beta(k,n-k+1)}[e^{-x}]^{n-k+1}[1-e^{-x}]^{k-1},$$

et

$$F_{X_{k,n}}(x) = \sum_{i=k}^{n} C_n^i e^{-nx}.$$

– **Le moment de s.o :** est

$$E(X_{i:n}^k) = \frac{1}{\beta(i,n-i-1)}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k[e^{-x}]^{n-i+1}[1-e^{-x}]^{i-1}dx.$$

Chapitre 2

L-moment

Les L-moments sont des combinaisons linéaires des statistiques d'ordres. Ont été introduit et extrait de Silitto (1951) et revu de manière exhaustive par Hosking (1990). Les L-moments sont analogues aux conventionnels moments mais L-moment ont certains avantages notamment : leur existence, leur unicité et leur robustesse. [14] L-moment ont trouvés de nombreuses applications dans des domaines de la recherche appliquées tq : le génie civil, la météorologie et hydrolique...

Donc dans ce chapitre, on donne la définition de L-moment, ses propriétés, ses représentations, leur estimation ...etc.

2.1 L-moment de distribution de probabilité

Définition 2.1 *Soit X une v.a.r de taille n d'une distribution F et de quantile $\{Q(u) = F^{-1}(u)\ \}$ et soit $X_{1:n}, ..., X_{n:n}$ la s.o associe de $(X_1, ..., X_n)$. Le $r^{éme}$ L-moment est défini par :*

$$\lambda_r = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k \binom{r-1}{k} E(X_{r-k:r}), r = 1, 2, ... \tag{2.1}$$

telle que : $E(X_{r-k:r})$ est l'espérance de s.o $(r-k)$ de taille r (voir : (1.6)). [7]

Les quatre premiers L-moments sont donnés par :

- Le premier L-moment λ_1 est utilisé pour calculer la moyenne **(mesure de position)** est défini par :

$$\lambda_1 = E(X_{1:1}).$$

- Le deuxième L-moment λ_2 est utilisé pour calculer la différence moyenne de Gini **(mesure de dispersion ou d'échelle)** est donné par :

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}E(X_{2:2} - X_{1:2}).$$

- Le troisième L-moment λ_3 pour étudier la symétrique **(mesure de skewnes)** est donné par :

$$\lambda_3 = \frac{1}{3}E(X_{3,3} - 2X_{2:3} + X_{1:3}).$$

- Le quatrième L-moment λ_4 pour étudier l'aplatissement **(mesure de kurtosis)** est défini par :

$$\lambda_4 = \frac{1}{4}E(X_{4,4} - 3X_{3,4} + 3X_{2:4} - X_{1:4}).$$

Remarque 2.1 *Les quatre premiers L-moments précédents sont analogues aux moments classiques.*

2.1.1 Proportion des L-moments

Définition 2.2 *On définis les proportions des L-moments (ou ratio L-moment) par :*

$$\tau_r = \frac{\lambda_r}{\lambda_2}, r \geq 3.$$

qui sont des rapport entres les L-moments et la mesure d'échelle λ_2 .
Où :

- Pour r= 3, $\tau_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$: s'appelle **L-skewnes.**
- Pour r= 4, $\tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2}$: s'appelle **L-kurtosis.**

Il est également possible de définir une fonction de L-moment analogue au coéffécient de

variation (écart type devise par la moyenne i.e : $C_v = \frac{\sigma}{\mu}$), c'est L-variation (noté : **L-CV**) est un rapport entre le deuxième L-moment et le premier **L-CV :** $\tau = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.
Les bornes des proportions des L-moments et L-CV sont donnés par le théorème suivant (hosking 1989) :

Théorème 2.1 *Soit X v.a de moyenne finie* ($E(X) < \infty$)*, alors les rapports de L-moments satisfait* $|\tau_r| < 1, r \geq 3$.
Si : en plus $X > 0$ *alors le L-CV satisfait :* $0 < \tau < 1$. *[7]*

2.2 Représentation de L-moment

a / Sous forme de polynôme de Legendre décalé :

On remplace l'équation (1.6) dans la formule (2.1) et d'après quelque simplification, on peut écrire les L-moments sous forme de polynôme de Legendre décalé comme suit :

$$\lambda_r = \int_0^1 Q(u)P^*_{r-1}(u)du, r = 1, 2, ...,$$

tq :
- $P^*_r(u) = \sum_{k=0}^{r} P^*_{r,k}u^k$ et $P^*_{r,k} = (-1)^{r-k}\binom{r}{k}\binom{r+k}{k}$.
- $P^*_r(u)$ est un polynôme de Legendre décalé du r-éme rang, lie aux polynôme de Legendre habituelle P_r tq : $P^*_r(u) = P_r(2u-1)$,les P^*_r sont orthogonaux sur l'intervelle [0,1].[10]

Pour r=1,2,3,4. Les L-moments sont donnés par :

$$\lambda_1 = \int_0^1 Q(u)du,$$
$$\lambda_2 = \int_0^1 Q(u)(2u-1)du,$$
$$\lambda_3 = \int_0^1 Q(u)(6u^2-6u+1)du,$$

$$\lambda_4 = \int_0^1 Q(u)(20u^3 - 30u^2 + 12u - 1)du.$$

où $\begin{cases} P_0^*(u) = 1, \\ P_1^*(u) = (2u-1), \\ P_2^*(u) = (6u^2 - 6u + 1), \\ P_3^*(u) = (20u^3 - 30u^2 + 12u - 1). \end{cases}$

b / Sous forme de covariance :

Comme indique par hosking & wallis (1997) en utilisant l'orthogonalité des fonctions P_r^* [4], nous obtenons facilement :

$$\lambda_r = \begin{cases} E(X), r = 1. \\ cov(X, P_{r-1}^*(F(X)), r \geq 2. \end{cases}$$

Les premiers L-moments sont données comme suit :

$$\lambda_1 = E(X),$$

$$\lambda_2 = 2Cov(X, F(X)) = Cov(X, 2F(X) - 1),$$

$$\lambda_3 = -6Cov(X, F(X)(1 - F(X)) = Cov(X, 6F(X)^2 - 6F(X) + 1),$$

$$\lambda_4 = Cov(X, 20F(X)^3 - 30F(X)^2 + 12F(X) - 1).$$

c / Sous forme de moment de probabilité pondéré :

Les moments pondérés en fonction des probabilités (Probability-weighted moment, noté : PWM) est une généralisation des moments habituels d'une distribution de probabilité, ont été introduits par Greenwood et al (1979) [8].

Les moments de probabilité pondérés sont définis par :

$$M_{i,j,k} = E\left[X^i F^J (1-F)^k\right], \ i, j, k \in \mathbb{R}.$$

Nous pouvons réécrire en fonction de qantile, alors :

$$M_{i,j,k} = \int_0^1 Q(u)^i u^j (1-u)^k du.$$

Les deux formes suivants de PWM sont particuliérement simples et utiles :

$$\begin{cases} \alpha_k = M_{1,0,k} = E[X(1-F(X))^k], \ k \text{ est entier positif.} \\ \beta j = M_{1,j,0} = E[X(F(X))^j], \ j \text{ est entier positif.} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} \alpha_k = \int\limits_0^1 Q(u)(1-u)^k du, \\ \beta_j = \int\limits_0^1 Q(u)u^j du. \end{cases} \tag{2.2}$$

Les α_k et β_j ont été utilisées comme base de méthode de L-moment pour l'estimation des paramètres de distribution de probabilité car : il existe des relations simples entre les moments de probabilité pondérés α_k , β_j et les paramètres de distribution de probabilité [11]. Donc : il est possible d'exprimer les paramètres de loi de probabilité comme des fonction PWM. D'autre part, pour calculer les L-moments.

On écrit: L-moment comme des combinaisons linéaires de PWM :

$$\lambda_r = (-1)^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} P^*_{r,k} \alpha_k = \sum_{j=0}^{r-1} P^*_{r,j} \beta_j. \tag{2.3}$$

Donc :

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \alpha_0 = \beta_0, \\ &\lambda_2 = \alpha_0 - 2\alpha_1 = 2\beta_1 - \beta_0, \\ &\lambda_3 = \alpha_0 - 6\alpha_1 + 6\alpha_2 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0, \\ &\lambda_4 = \alpha_0 - 12\alpha_1 + 30\alpha_2 - 20\alpha_3 = 20\beta_3 - 30\beta_2 + 12\beta_1 - \beta_0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Remarque 2.2

1. Pour $j = k = 0$ et i entier positif on a : $M_{i,0,0} = E\left[X^i\right] = \int\limits_0^1 Q_X(u)^i du$,qui sont les moments classiques d'ordre i.

2. On peut écrire aussi d'autre représentation de L-moment qui est sous forme de L-

statistique (plus détaille voir [4]) :

$$\lambda_r = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} w_{i:n}^{(k)} E(X_{i:n}),$$

où :

$$w_{i:n}^{(k)} = \sum_{j=0}^{\min\{r-1,k-1\}} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} \binom{k-1+j}{j} \binom{n-1}{j}^{-1} \binom{r-1}{j}.$$

Exemple 2.1 *1/* ***Loi de valeur extrême généralisé (GEV) :***

soit X v.a suit la loi GEV des paramétres μ, σ, κ .G :est fonction de répartition et de quantile Q. tq :

$$\begin{cases} G(x;\mu,\sigma,\kappa) = \exp\left[-(1+\kappa(\frac{x-\mu}{\sigma}))\right]^{\frac{-1}{\kappa}}, \kappa \neq 0, 1+\kappa(\frac{x-\mu}{\sigma}) > 0. \\ Q(u) = \mu + \frac{\sigma}{\kappa}(1-(-\lg u)^{\kappa}), \kappa \neq 0. \end{cases}$$

Pour trouver les L-moments ,on calcule d'abord PWM β_j d'aprés la forme(2.2) .On a :

$\beta_j = \int_0^1 Q(u) u^j du = \int_0^1 u^j [\mu + \frac{\sigma}{\kappa}(1-(-\lg u)^{\kappa})] du$

$= \frac{\mu}{j+1} + \frac{\sigma}{\kappa}\left[\frac{1}{j+1} - \int_0^1 u^j (-\lg u)^{\kappa} du\right]$

On utilise les deux changement variable $v = -\lg u$ et $w = (j+1)v$,alors :

$\beta_j = \frac{\mu}{j+1} + \frac{\sigma}{\kappa}\left[\frac{1}{j+1} + \int_0^{\infty} e^{-(j+1)v} v^{\kappa} dv\right]$

$= \frac{\mu}{j+1} + \frac{\sigma}{\kappa}\left[\frac{1}{j+1} + \frac{1}{(j+1)^{\kappa+1}} \int_0^{\infty} e^{-w} w^{\kappa} dw\right]$

Donc :

$$\beta_j = \frac{1}{j+1}\left[\mu + \frac{\sigma}{\kappa}\left(1 + \frac{1}{(j+1)^{\kappa}}\Gamma(\kappa+1)\right)\right], \kappa > -1.$$

pour $\kappa < -1$: β_0(la moyene de distribution) et le reste β_j n'existe pas.

Nous calculons β_j,$j = 0, .., 3$ et remlacent dans (2.4) pour trouver :

$\lambda_1 = \mu + \frac{\sigma}{\kappa}(1 + \Gamma(\kappa+1)).$

$\lambda_2 = \frac{\sigma}{\kappa}(1 - 2^{-\kappa})\Gamma(\kappa+1).$

$\lambda_3 = \frac{\sigma}{\kappa}(3 * 2^{-\kappa} - 2 * 3^{-\kappa} - 1)\Gamma(\kappa+1).$

$\lambda_4 = \frac{\sigma}{\kappa}(1 - 6 * 2^{-\kappa} + 10 * 3^{-\kappa} - 5 * 4^{-\kappa})\Gamma(\kappa+1).$

Alors :

L-skwenes est :

$$\tau_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{3 * 2^{-\kappa} - 2 * 3^{-\kappa} - 1}{1 - 2^{-\kappa}}.$$

L-kurtosis est :

$$\tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} = \frac{1 - 6 * 2^{-\kappa} + 10 * 3^{-\kappa} - 5 * 4^{-\kappa}}{1 - 2^{-\kappa}}.$$

*2/ **Loi uniforme :*** *Soit X v.a suit la loi uniforme sur $[a,b]$ de fonction de répertition F et quantile Q, tq :*

$$\begin{cases} F(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a,b] \\ Q(u) = a + (b-a)u. \end{cases}$$

Pour trouver les L-moments, on calcule d'abord le β_j (PWM) :

$\beta_j = \int_0^1 Q(u)u^j du = \int_0^1 [a + (b-a)u]u^j du = a \int_0^1 u^j du + (a+b) \int_0^1 u^{j+1} du$.

donc :

$$\beta_j = \frac{a}{j+1} + \frac{b-a}{j+2}.$$

Calculant les premier L-moments par (2.4) :

$$\lambda_1 = \frac{a+b}{2},$$
$$\lambda_2 = \frac{b-a}{6},$$
$$\lambda_3 = 0,$$
$$\lambda_4 = 0.$$

On déduit les rapports de L-moments :

$$\begin{cases} \tau_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = 0, \\ \tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} = 0. \end{cases}$$

Exemple 2.2 *Le tableau (2.1) suivant présente quelque distributions , ses fonctions de quantiles $Q(u)$, ses L-moment λ_r tq : r=1,2 , et ses rapports des L-moment τ_r pour r=3,4.[7]*

[14]

Lois	Quantile	L-moments	Rapport des L-moments
UNI	$a+(b-a)u$	$\lambda_1 = \frac{a+b}{2}$ $\lambda_2 = \frac{b-a}{6}$.	$\tau_3 = 0$ $\tau_4 = 0.$
NOR	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{(\frac{x-\mu}{\sigma})^2\right\}$	$\lambda_1 = \mu$ $\lambda_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$	$\tau_3 = 0$ $\tau_4 = 0.0725$
LOG	$\mu - \sigma \log(\frac{u}{1-u})$	$\lambda_1 = \mu$ $\lambda_2 = \sigma$	$\tau_3 = 0$ $\tau_4 = \frac{1}{6}$.
GPA	$\mu + \frac{\sigma}{\kappa}(1-(1-u)^{\kappa})$ avec : $\kappa \neq 0$.	$\lambda_1 = \mu + \frac{\sigma}{1+\kappa}$ $\lambda_2 = \frac{\sigma}{(1+\kappa)(2+\kappa)}$	$\tau_3 = \frac{1-\kappa}{3+\kappa}$ $\tau_4 = \frac{(1-\kappa)(2-\kappa)}{(3+\kappa)(4+\kappa)}$.
GLO	$\mu + \frac{\sigma}{\kappa}(1-(\frac{1-u}{u})^{\kappa})$ avec : $\kappa \neq 0$.	$\lambda_1 = \mu + \frac{\sigma}{\kappa}(1-\Gamma(1+\kappa)\Gamma(1-\kappa))$ $\lambda_2 = \sigma\Gamma(1+\kappa)\Gamma(1-\kappa)$	$\tau_3 = -\kappa$ $\tau_4 = \frac{1+5\kappa^2}{6}$.
GEV	$\mu + \frac{\sigma}{\kappa}(1-(-\lg u)^{\kappa})$ avec : $\kappa \neq 0$	$\lambda_1 = \mu + \frac{\sigma}{\kappa}(1+\Gamma(\kappa+1))$ $\lambda_2 = \frac{\sigma}{\kappa}(1-2^{-\kappa})\Gamma(\kappa+1)$	$\tau_3 = \frac{3*2^{-\kappa}-2*3^{-\kappa}-1}{1-2^{-\kappa}}$ $\tau_4 = \frac{1-6*2^{-\kappa}+10*3^{-\kappa}-5*4^{-\kappa}}{1-2^{-\kappa}}$

TAB. 2.1 – L-moment de quelques distribution de probabilités

2.3 Propriétés de L-moment

On vois quelques propriétés sur les L-moments [9], alors on a :

1. **Existence :** Si la moyenne de la distribution existe alors : tous les L-moments existent.
2. **Unicité :** Si la moyenne de la distribution existe, alors les L-moment unique qui défini la distribution c-a-d : il n'existe pas deux distribution distinct sont les mêmes L-moments.
3. **Transformation linéaire :** Soit X, Y deux v.a avec L-moment λ_r et λ_r^* (resp) et $Y = aX + b$. Alors :

i) $\lambda_1^* = a\lambda_1 + b$.

ii) $\lambda_2^* = |a|\,\lambda_2$.

iii) $\tau_r^* = \tau_r$.

Pour justification des propriétés (1) et (2) précédents qui sont les plus importances dans L-moments, on va donné par le proposition suivent :

Proposition 2.1 *1. Les L-moments λ_r de v.a X existe si seulement si : la moyenne est finie $[E(X) < \infty]$.*

2. Une distribution dont la moyenne existe est caractérisé par son L-moment $\lambda_r, r = 1, 2, ...$ [7]

Remarque 2.3 *La loi de cauchy ne contient pas les L-moments car : $E(X) = \infty$.*

2.4 Estimation de L-moment

Définition 2.3 *Soit $X_1, ..., X_n$ n- échantillon et $X_{1:n}, ..., X_{n:n}$ les statistiques d'ordres associées. L'estimation de L-moment de l'échantillon, [7] noté : l_r est donné par :*

$$l_r = \binom{n}{r}^{-1} \sum\sum_{1\leq i1<i2<...<ir\leq n} ... \sum \frac{1}{r} . \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} X_{ir-k:n} \ , \ r = 1, 2, ... \ .$$

En particulier :

$$\begin{aligned}
l_1 &= \frac{1}{n} \sum_{1\leq i\leq n} X_{i:n}, \\
l_2 &= \frac{1}{n(n-1)} \sum\sum_{1\leq i<j\leq n} (X_{j:n} - X_{i:n}), \\
l_3 &= \frac{2}{n(n-1)(n-2)} \sum\sum\sum_{1\leq i<j<k\leq n} (X_{k:n} - 2X_{j:n} + X_{i:n}), \\
l_4 &= \frac{6}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \sum\sum\sum\sum_{1\leq i<j<k<l\leq n} (X_{l:n} - 3X_{k:n} + 3X_{j:n} - X_{i:n}).
\end{aligned}$$

Et comme les l-moments sont des combinaisons linéaires de PWM , on peut estimé les PWM β_j , α_k par $\hat{\beta}_j$et $\hat{\alpha}_k$ qui sont donnés par la forme suivente :

$$\hat{\beta}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)(i-2)...(i-j)}{(n-1)(n-2)...(n-j)} X_{i:n} \ .$$

et

$$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-i)(n-i-1)...(n-i-k+1)}{(n-1)(n-2)...(n-k)} X_{i:n} \ .$$

Òu :

$$\begin{cases} \hat{\beta}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i:n}, \\ \hat{\beta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)}{(n-1)} X_{i:n}, \\ \hat{\beta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)(i-2)}{(n-1)(n-2)} X_{i:n}, \\ \hat{\beta}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)} X_{i:n}. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i:n} \ , \\ \hat{\alpha}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-i)}{(n-1)} X_{i:n} \ , \\ \hat{\alpha}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-i)(n-i-1)}{(n-1)(n-2)} X_{i:n} \ , \\ \hat{\alpha}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}{(n-1)(n-2)(n-3)} X_{i:n}. \end{cases}$$

On remplaçemant les PWM β_j , α_k par $\hat{\beta}_j$, $\hat{\alpha}_k$ (resp) dans (2.3) pour trouver l'estimateur de L-moment l_r :

$$l_r = (-1)^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1} P^*_{r,k}\hat{\alpha}_k = \sum_{j=0}^{r-1} P^*_{r,j}\hat{\beta}_j.$$

Exemple 2.3 *On donne les estimateurs de premier L-moment sous forme $\hat{\beta}_j$ comme suit :*

$$\begin{aligned} l_1 &= \hat{\beta}_0, \\ l_2 &= 2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0, \\ l_3 &= 6\hat{\beta}_2 - 6\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_0, \\ l_4 &= 20\hat{\beta}_3 - 30\hat{\beta}_2 + 12\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Alors :

$$l_1 = \frac{1}{n}\sum_{1\leq i\leq n} X_{i:n},$$

$$l_2 = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(2i-1-n)X_{i:n},$$

$$l_3 = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} [6(i-1)(i-2) - 6(n-2)(i-1) + (n-1)(n-2)] X_{i:n},$$

$$l_4 = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^{n} [20(i-1)(i-2)(i-3) - 30(n-3)(i-1)(i-2)$$
$$+ 12(n-2)(n-3)(i-1) - (n-1)(n-2)(n-3)] X_{i:n}.$$

Remarque 2.4

– L'estimateur de PWM est un estimateur sans biais .

– Le l_r est un estimateur sans biais de λ_r , $(c - \grave{a} - d : E(l_r) = \lambda_r)$.

Définition 2.4 (Estimation de rapport des L-moments) *On définis l'estimateur de rapport des L-moments (ratio L-moment) par :*

$$t_r = \frac{l_r}{l_2} \ , \ r \geq 3.$$

Òu :

t_3, t_4 *: sont L-sekwness et L-kurtosis empiriques (resp).*

$t = \frac{l_2}{l_1}$ *: estimateur de L-CV.*

2.5 Méthode d'estimation basé sur les L-moments

Le rôle de la méthode de L-moment est même que de la méthode de maximal de vraisemblance et la méthode des moments qui sont utilisées pour l'estimation des paramètres d'une distribution, donc l'estimation par la méthode de L-moment basée sur le même idée. c.-à-d. : les L-moments théoriques seront supposés égaux aux L-moments empiriques.

Soit X v.a de taille n avec F fonction de distribution de k paramètres inconnues . les paramètres inconnus sont estimés par résoudre le système d'équation résultants des k premier L-moments théoriques avec k premier L-moments empiriques ,c-à-d : $\lambda_r = \mathbf{l}_r, \mathbf{r} = \mathbf{1}, .., \mathbf{k}$.

Elle est plus robuste par rapport un autre methodes et elle fournisse des résultats plus sûrs dans les cas de petits échantillons.

Exemple 2.4 *D'aprés exemple (2.1) de loi uniforme,on a :*

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{a+b}{2} \\ \lambda_2 = \frac{b-a}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 = a+b \\ 6\lambda_2 = b-a \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} a = \lambda_1 - 3\lambda_2 \\ b = \lambda_1 + 3\lambda_2 \end{cases}$$

En remplacent λ_1 et λ_2 par leurs estimateurs l_1 et l_2 pour trouver les estimateurs de a et b . Donc :

$$\hat{a} = l_1 - 3l_2$$

$$\hat{b} = l_1 + 3l_2$$

2.6 Diagramme de rapports de L-moment

Le diagramme de rapport de L-moments est une représentation graphique de L-Kurtosis τ_4 (axe vertical) en fonction de L-Skweness τ_3 (axe horizontal) qui est illustrent la relation entre τ_4 et τ_3.

Le diagramme de rapport de L-moments est simple à utiliser pour évaluer la forme de distribution c-à-d : pour savoir quelle distribution est adéquate pour un échantillon donné.Grâce à l'utilisation des diagrammes de rapport consiste à tracer les rapports de L-moment d'échantillon sous forme de diagramme et à les compares avec courbes théoriques des rapports L-moments des distribution candidat (sélectionné).

La figure (2.1) présente le diagramme de rapport de L-moment théorique τ_3 et τ_4 pour quelques distributions de probabilité.Pour savoir quelle distribution est adéquate à un échantillon de données, on ajoute les L-moments calculé de cet échantillon dans le même graphe. La figure (2.2) indique un exemple des échantillons simulé de loi normale.

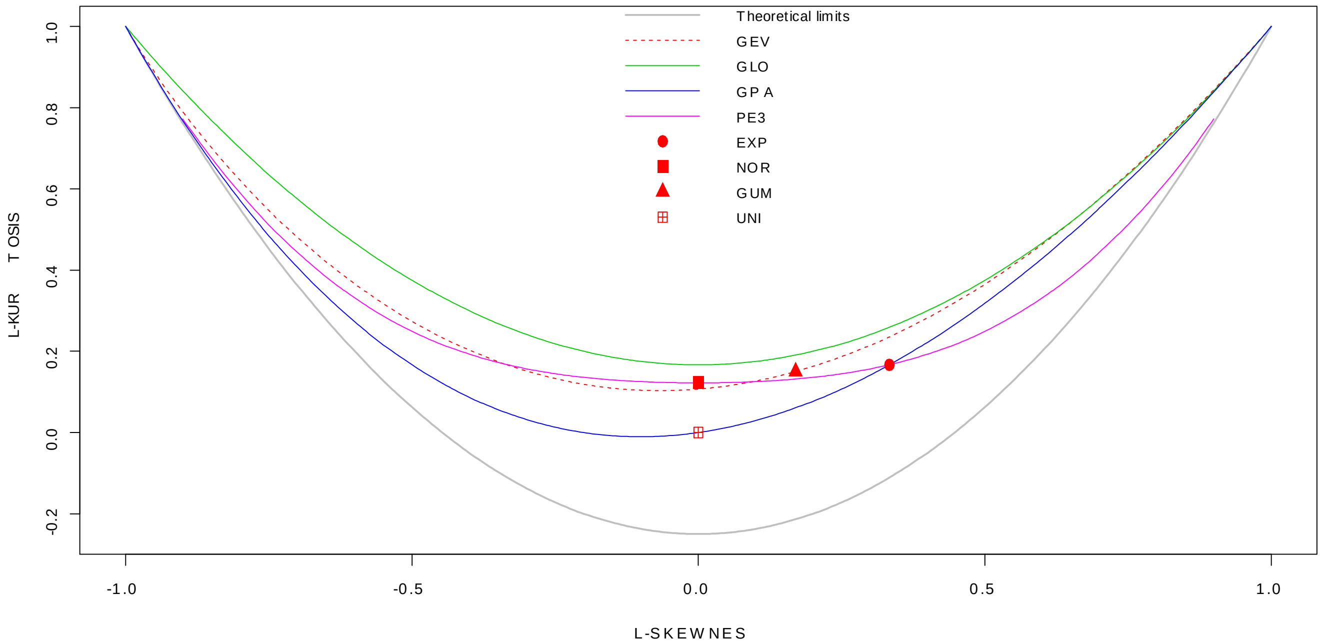

FIG. 2.1 – Diagramme de rapport des L-moments théoriques (τ_4 et τ_3) des lois GEV,GLO,GPA, PE3, EXP, NOR, GUM et UNI

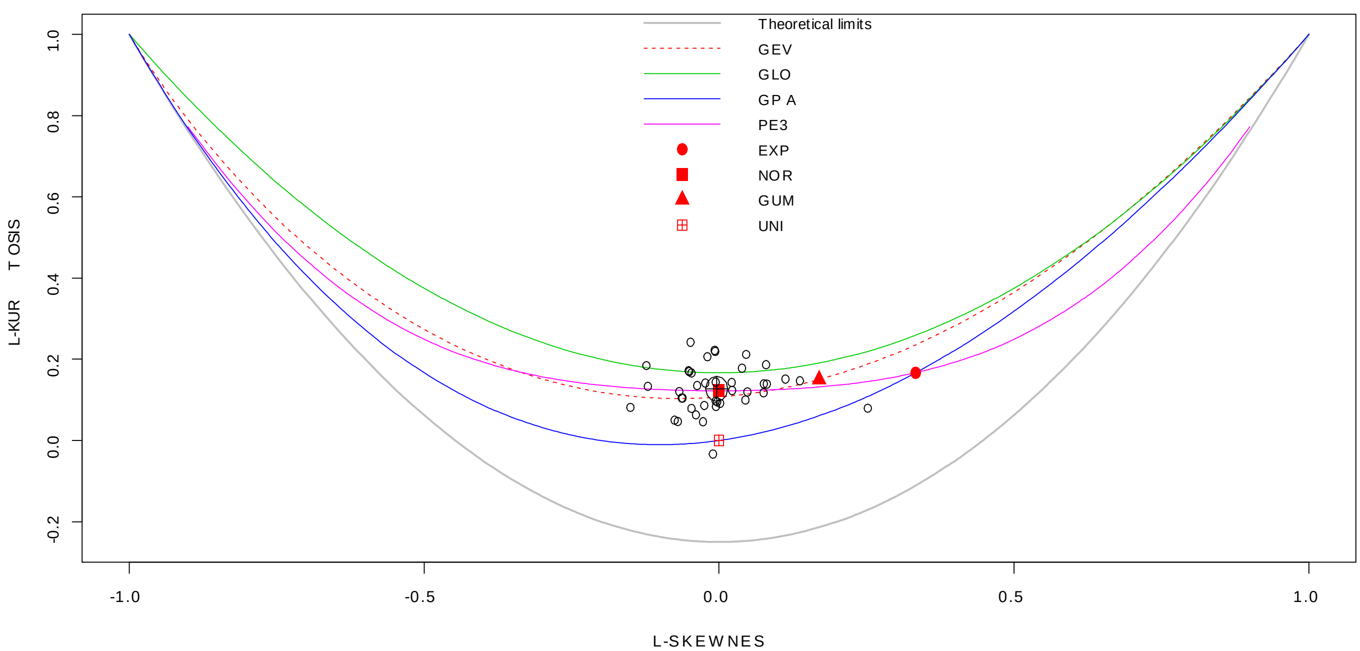

FIG. 2.2 – Diagramme de rapport des L-moments théoriques (τ_4 et τ_3) des lois GEV,GLO,GPA, PE3, EXP, NOR, GUM et UNI . avec les rapports des L-moments empiriques (t_4 et t_3) de loi normal(1,2) de taille n=30 et simuler 40 fois.

Chapitre 3

Estimation par méthode de L-moment des quelques distributions

Dans cette partie, nous donnons une petite rappelle sur la méthode de moment, ensuite on définis quelque lois et comment calculer ses L-moments et aussi ses estimateur des paramètres, ses biais et ses erreurs quadratique moyennes par deux méthodes : la méthode de moment et la méthode de L-moment.

3.1 Rappels

La méthode des moments est un outil d'estimation intuitif qui date du début des statistiques. elle est généralement utilisée parce qu'elle est très simple à appliquer.

Définition 3.1 (Méthode de moments) *Soit $X_1, ..., X_n$ échantillion de taille n tiré d'une loi $F(x, \alpha_1, ..., \alpha_k)$ à k paramètres. Le moment théorique non-centré d'ordre r.définie comme suit :*

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x, \alpha_1, ..., \alpha_k) dx, r = 1, 2, 3...$$

où : $f(x, \alpha_1, ..., \alpha_k)$ est la fonction de densité de probabilité de la loi $F(x, \alpha_1, ..., \alpha_k)$
Le moment d'ordre r de l'échantillon, qui est un estimateur de $E(X^r)$ est : $m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^r$.
Les estimateurs obtenus par la méthode des moments sont les valeurs $\hat{\alpha}_1, ..., \hat{\alpha}_k$ sont des

solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} E(X) = m_1 \\ E(X^2) = m_2 \\ \quad . \\ \quad . \\ E(X^k) = m_k. \end{cases}$$

[12]

Remarque 3.1 *La moyenne emprique est :* $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

La variance emprique est : $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2$.

Définition 3.2 (Biais) *Soit $\hat{\alpha}$ un estimateur de α.Le biais de $\hat{\alpha}$ est définis comme :*

$$biais(\hat{\alpha}) = E(\hat{\alpha} - \alpha).$$

Définition 3.3 (Erreur quadratique moyenne) *Soit $\hat{\alpha}$ un estimateur de α. L'erreur quadratique moyenne de $\hat{\alpha}$, noté :MSE (en englais : mean square errors) est définis par :*

$$MSE(\hat{\alpha}) = E(\hat{\alpha} - \alpha)^2 = var(\hat{\alpha}) + biais^2(\hat{\alpha}).$$

3.2 Distribution de gumbel

Définition 3.4 *On dit que X suit la loi de Gumbel des paramètres μ et σ si sa fonction de répartition vaut :*

$$F(x) = \exp\left[-\exp(-\frac{x-\mu}{\sigma})\right], x \in \mathbb{R}.$$

et la densité de probabilité, obtenue par dérivation, est :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{\sigma}\exp(-\frac{x-\mu}{\sigma})\exp\left[-\exp(-\frac{x-\mu}{\sigma})\right].$$

Òu : $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_{+}^{*}$.

Définition 3.5 *La quantile de loi gumble est :*

$$Q(u) = \mu - \sigma \log(-\log u).$$

3.2.1 L-moment de loi gumbel

On utilise la répresentation de moment de probabilité pondéré (PWM) pour calculer les L-moments de cette loi.

$$\begin{aligned}
\beta_j &= \int_0^1 Q(u) u^j du = \int_0^1 u^j [\mu + \sigma \log(-\log u)] du, \\
&= \mu \int_0^1 u^j du + \sigma \int_0^1 u^j \log(-\log u)] du, \\
&= \frac{\mu}{j+1} + \sigma \int_0^1 u^j \log(-\log u)] du.
\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $v = -\log u$ et $w = (j+1)v$,pour obtenir le résultat :

$$\beta_j = \frac{1}{j+1} \left[\mu + \sigma(\gamma + \ln(j+1)) \right],$$

tq :$\gamma = 0.5772$ erreur constant.

Nous calculons β_j,$j = 0, .., 3$ et le remlacer dans (2.4) d'òu on trouve :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \mu + \sigma\gamma, \\
\lambda_2 &= \sigma \ln 2, \\
\lambda_3 &= \sigma(2\ln 3 - 3\ln 2) = 0.1177\sigma, \\
\lambda_4 &= \sigma(5\ln 4 - 10\ln 3 + 6\ln 2) = 0.10425\sigma.
\end{aligned}$$

et les rapports de L-moments sont présentés comme suit :

L-CV est :

$$\tau = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\sigma \ln 2}{\mu + \sigma\gamma}$$

L-skweness est **:**

$$\tau_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{0.1177\sigma}{\sigma \ln 2}$$

$$\Rightarrow \tau_3 = 0.1698.$$

L-kurtosis est **:**

$$\tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} = \frac{0.10425\sigma}{\sigma \ln 2}$$

$$\Rightarrow \tau_4 = 0.1503.$$

Pour $\mu = 1$ et $\sigma = 2$ alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2.\,154\,4 \\ \lambda_2 = 1.3862 \\ \lambda_3 = 0.235\,4 \\ \lambda_4 = 0.208\,5 \end{cases} : \text{et } \tau = 0.643\,4.$$

3.2.2 Estimation par méthode de L-moment

On a deux parametres pour la loi de gumble et d'aprés la méthode de L-moment, on résourdre un systeme de deux équations alors :

On a :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu + \sigma\gamma \\ \lambda_2 = \sigma \ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \lambda_1 - \sigma\gamma, \\ \sigma = \frac{\lambda_2}{\ln 2}. \end{cases}$$

D'aprés l'égalité suivente : L-moments empiriques = L-moments théoriques,en remplaçant

λ_1, λ_2 par leurs estimateurs l_1, l_2 où nous obtenons l'estimation des paramètres μ et σ :

$$\hat{\mu} = l_1 - \hat{\sigma}\gamma,$$
$$\hat{\sigma} = \frac{l_2}{\ln 2}.$$

3.2.3 Application sous R

On va estimer la deuxième paramètres σ de loi gumbel et calculer le biais et l'erreur quadratique par deux méthodes : méthode de moment (mm) et méthode de L-moment (lm) pour voir quelles est la meuilleur méthode ?

On a $\mu = 1$, on estime σchaque fois à partir de $m = 100$ (répétition) et l'échentition de 5 taille : $n = 20, n = 70, n = 200, n = 1000, n = 4000$.tq : les estimateurs des paramétres de loi gumbel par méthode de moment sont :

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X} - \gamma\hat{\sigma}, \\ \hat{\sigma} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} S_n. \end{cases}$$

Donc :

		n=20	n=70	n=200	n=1000	n=4000
$\sigma = 2$						
estimateur	mm	1.886274	1.468599	1.8835339	1.989021	2.012193
	lm	1.901193	2.318669	1.921876	2.0975291	1.956382
Biais	mm	-0.10172273	-0.074121343	-0.023093484	-0.0026753970	-0.0018841043
	lm	-0.02988829	0.013084343	0.001735263	-0.003603599	-0.001117058
MSE	mm	0.2236310	0.05695839	0.02383481	0.005192396	0.001166292
	lm	0.1959268	0.05025600	0.01266450	0.004033478	0.0008957851
$\sigma = 4$						
estimateur	mm	2.4192130	3.650542	4.049183	4.073982	3.970213
	lm	3.7100542	3.7978420	4.134422	3.932258	3.969143
Biais	mm	-0.1258123	-0.02626655	-0.002096775	-0.001255389	0.002330697
	lm	0.1142886	-0.009496116	-0.02076477	0.0054879166	0.002409505
MSE	mm	0.90528441	0.1954406	0.07236894	0.02255126	0.005385408
	lm	0.6187649	0.1909673	0.07106796	0.01072471	0.004098333
$\sigma = 5.2$						
estimateur	mm	4.938273	5.511510	5.334039	5.541205	5.3341925
	lm	5.246654	6.196043	5.2585346	5.275964	5.1590690
Biais	mm	-0.2356010	-0.007027504	-0.058661927	-0.012063425	-0.009957508
	lm	0.25787688	-0.004082424	0.01552199	-0.0376088	-0.007937190
MSE	mm	1.423045	0.3638157	0.1336098	0.02576002	0.006019797
	lm	1.055175	0.3007063	0.08336671	0.02363952	0.004709492

TAB. 3.1 – l'estimateur , le biais et MSE pour le paramétre segma de loi gumbel

D'après les résultats de tableau (3.1), nous constatons que :

– Les estimations du paramètre σ obtenus par la méthode des L-moments sont nettement meilleur et plus proche de la vraie valeur du paramètre que ceux obtenus par la méthode des moments classiques.

– La robustesse et l'efficacité est clairement établis grâce aux résultats sur le biais et l'erreur quadratique moyenne (MSE) qui sont plus proche de la valeur zéro que ceux de la méthode classique.

– On voit nettement une amélioration de l'estimation basée sur la méthode des L-moments comparablement à la méthode des moments classique.

3.3 Distribution exponentielle

Définition 3.6 *La loi exponentielle est une loi de probabilité pour les variables aléatoires continues de paramètre θ.On définit la fonction de répartition par :*

$$F(x) = 1 - \exp(-\theta x), x > 0.$$

et sa densité par :

$$f(x) = \theta \exp(-\theta x), x > 0.$$

Définition 3.7 *Le quantile de distribution exponentielle est donné par :*

$$Q(u) = \frac{-1}{\theta} \ln(1-u).$$

3.3.1 L-moment de loi exponentielle

On a : $\beta_j = \int\limits_0^1 Q(u)u^j du = \frac{-1}{\theta} \int\limits_0^1 u^j \ln(1-u)du$ en utilisant changement de variable $v = 1 - u$, alors :

$$\beta_j = \frac{-1}{\theta} \int\limits_0^1 (1-v)^j \ln(v)dv.$$

et on a $(1-v)^j = \sum\limits_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} v^k$.[1]

donc :

$\beta_j = \frac{-1}{\theta} \sum\limits_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} \int\limits_0^1 v^k \ln(v)dv$, (en integrent par partie)

$\quad = \frac{-1}{\theta} \sum\limits_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} \left[\frac{v^{k+1}}{k+1} \ln(v)\Big|_0^1 - \frac{1}{k+1} \int\limits_0^1 v^k dv \right],$

$$\Rightarrow \beta_j = \frac{1}{\theta} \sum_{k=0}^{j} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \binom{j}{k}.$$

[1] On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{N} : (1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k$

Donc :$(1-x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\alpha} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x^k$

Enfin, il est facile de trouvé les L-moments de loi exponentielle d'après résultats précédent de PWM

Où : $\begin{cases} \beta_0 = \frac{1}{\theta}, \beta_1 = \frac{3}{4\theta}, \\ \beta_2 = \frac{11}{18\theta}, \beta_3 = \frac{25}{48\theta}. \end{cases}$

Alors :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{\theta}, \\
\lambda_2 &= 2(\frac{3}{4\theta}) - \frac{1}{\theta} = \frac{1}{2\theta}, \\
\lambda_3 &= 6(\frac{11}{18\theta}) - 6(\frac{3}{4\theta}) + \frac{1}{\theta} = \frac{1}{6\theta}, \\
\lambda_4 &= 20(\frac{25}{48\theta}) - 30(\frac{11}{18\theta}) + 12(\frac{3}{4\theta}) - \frac{1}{\theta} = \frac{1}{12\theta}.
\end{aligned}$$

Pour $\theta = 3$ on a :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0.3333 \\ \lambda_2 = 0.1666 \\ \lambda_3 = 0.0833 \\ \lambda_4 = 0.0277 \end{cases}$$

Et on déduit :

L-CV est **:**

$$\tau = (\frac{1}{2\theta})/\frac{1}{\theta} = \frac{1}{2}.$$

L-skwenes est **:**

$$\tau_3 = (\frac{1}{6\theta})/(\frac{1}{2\theta}) = \frac{1}{3}.$$

L-kurtosis est **:**

$$\tau_4 = (\frac{1}{12\theta})/(\frac{1}{2\theta}) = \frac{1}{6}.$$

3.3.2 Estimation par L-moment

Pour estimer le paramètre θ par la méthode de L-moment on a :

$\lambda_1 = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \theta = \frac{1}{\lambda_1}$

En remplaçant λ_1 par l_1, nous trouvons :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{l_1}.$$

3.3.3 Application sous R

Toujours on a un problème d'estimation pour l'échantillons des petites tailles pour cela on va estimer le paramètre θ à partir de $n = 10, n = 15, n = 20, n = 25, n = 50$..par les deux méthode : méthode de moment (mm) et méthode de L-moment (lm) qui a été répété 300 fois (répétition) et voir la différence entre ces dernière.

alors : l'estimation de θ par méthode de moment est : $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$. On a :

		n=10	n=15	n=20	n=25	n=50
$\theta = 1/2$						
Estimateur	mm	0.540082	0.5764219	0.6864529	0.4844404	0.5913824
	ml	0.40670882	0.7184864	0.569536523	0.59532783	0.40197181
Biais	mm	0.04624325	0.0471638	0.0332002	0.0337251	0.01496697
	lm	-0.0235652	0.006366006	-0.00512583	0.0055017	-0.003244281
MSE	mm	0.04635119	0.0300489	0.01692024	0.01400108	0.006970836
	lm	0.03867058	0.0221039	0.01488686	0.01263682	0.006042471
$\theta = 1$						
Estimateur	mm	0.6626725	1.030784	0.5481875	1.040644	0.8159429
	lm	1.17918323	0.9247655	1.10992642	0.8006890	0.93094274
Biais	mm	0.1383039	0.06690155	0.05035533	0.03813976	0.021318512
	lm	-0.01295157	0.01105166	-0.0002545049	-0.006565901	0.003318512
MSE	mm	0.1405041	0.1018621	0.06685462	0.04981037	0.02455914
	lm	0.1303965	0.08421693	0.06212246	0.04709817	0.02262408
$\theta = 3$						
Estimateur	mm	2.716294	2.631986	2.837426	2.53717	2.751466
	lm	1.6844217	4.2129511	2.58905951	2.85861750	3.517195
Biais	mm	0.2201361	0.2013032	0.1418794	0.1334195	0.05027629
	lm	0.0687377	0.01347414	-0.03055439	-0.0377133	0.04429614
MSE	mm	1.26754	1.027331	0.6786769	0.4328787	0.214199
	lm	1.132707	0.9668767	0.6025816	0.4377615	0.1963391

TAB. 3.2 – les estimateurs ,les biais , les MSE de paramétre de loi exponentiellel

D'après les résultats de tableau (3.2) on remarque que : l'efficacité de la méthode d'estimation basée sur les L-moments est encore établie d'une façon plus importante pour le cas des petits échantillons relativement au biais et à l'erreur quadratique moyenne.

Conclusion

Parmi les différents formes utilisées pour décrire les L-moments, nous avons choisis celle qui consiste a utilisé les moments de probabilité pondérés (PWM) et les statistique d'ordre (s.o) c'est-à-dire comme combinaison linéaire des PWM et aussi s.o.

En conclusion, on peut confirmer que l'estimation basée sur la méthode des L-moments comparativement a celle basée sur les moments classiques présente les avantages suivent :

– Pour utiliser les L-moments associés à une distribution donnée seul l'existence du premier moment est exige.

– Leurs estimateurs sont moins biaisés, sont proches de leurs approximations et sont asymptotiquement gaussienne (Normalité asymptotique).

– Les estimateurs obtenus par la méthode des L-moments sont plus robustes et plus efficace que ceux des moments.

– Celle efficacité est plus importante pour les échantillons de petite taille.

Bibliographie

[1] Arnold.B.c.,Balakrishen.N.,Nagaraja.H.N.,(1992). A First Cours in OrdreStatistics. John Wiley & Sons,New York.

[2] Bateka.S.,(2010).Determination du nombre de statistiques d'ordre extrêmes.Magister en mathématique.Univ-biskra.

[3] Benatia.F.,(2018/2019).Cours 2-éme master en matématique (statistique) .Univ-biskra.

[4] Benelmir.I.,(2010). Les L-moments : Application en hydrologie.magister en mathématique.Univ-biskra.

[5] Chine.A.,(2018). Sur la statistique de copules.Doctorat en science.Univ-biskra.

[6] David.H.A.,Nagaraja.H.N., (2003). Ordre Statistics,Third Edition.John Wiley & Sons.

[7] Hosking.J.R.M.,(1990).L-moments : analysis and estimation of distributions using linear combinations of statistics,Journal of the Royal Statistical Society.$105 - 124$.

[8] Hosking.J.R.M., Wallis.J.R.,(1995).A comparison of unbiased and plotting-position estimators of L-moments.T.J.watson research centre .New York.$2019 - 2025$.

[9] Hosking.J.R.M., Wallis.J.R.,(1997).Régional Frequency Analysise :Anapproach Based on L-moments.combridge university press united kindom.

[10] Hosking.J.R.M.,(2003) On the characterization of distribution by their L-moment.T. J. Watson Research Center,Yorktown Heights.

[11] Jean-marie.,(1991).Méthode des moments de probabilité pondérés : application à la loi jenkinson.University Montpellier.$67 - 84$

[12] Luc Perreault , Bernard Bobée.,(1992).Loi Weibull à deux paramètresPropriétés mathématiques et statistiques Estimation des paramètres et des quantiles X_T de période de retour T,Rapport Scientifique No 351.p :$27 - 28$

[13] Robert serfling .,Peng Xiao., (2006).A contribution to multivariate L-moments :L-comoment matrices.University of texas at dallas.

[14] Tereza Šimková ,Statistical Inference Based on L-Moments Technical University of Liberec, Liberec, Czech Republic

[15] Waliyam.H.Asquith.,Distribution analysis with L-moment statistics using the R environment for statistical coputing.

[16] Wang.Q.J.,(1996). Direct sample estimators of L-moments.University of melboura,Austeralia.

Annexe A : Logiciel *R*

Le logiciel R est un language de programmation et un environnement mathématique utilisé pour le traitement de données et l'analyse statistique. Le téléchargement de ce logiciel est trés facile est disponible par le site web : www.r-project.org, ainsi pour obtenir des informations sur l'installation, les calcules et la programmation.

Il a été initialement créé, en 1996, par *Robert Gentleman* et *Ross Ihaka* du département de statistique de l'Université d'Auckland en Nouvelle Zélande. Depuis 1997, il s'est formé une équipe "*R Core Team*" qui développe *R*. Il est conçu pour pouvoir être utilisé avec les systèmes d'exploitation *Unix*, *Linux*, *Windows* et *MacOS*.

Packages utilisés : Les packages utilisés dans ce travail sont : **evd** ,**lmom** et **lmomco**, avec la version **R.3.5.2.**

plotlmrdia : on trouve dans package **lmomco** pour le diagramme de rapport de L-moment.

pelgum :on trouve dans package **lmom,**pour estimer les paramètre de loi gumbel par méthode de L-moment.

pelexp :pour estimer le paramètre de loi expontielle par méthode de L-moment.

rweibull :on trouve dans package **evd**

Annexe B : Abréviations et Notations

$v.a$	:	variable aleatoire
$i.i.d$	:	indépendante identiquement distribué
F	:	fonction de répartition.
f	:	fonction de densité
$s\ o$	:	statistique d'ordre
C_n^k , $\binom{n}{k}$	:	combinaisons de k éléments parmi n
$E(X)$	:	espérence de v.a X.
$var(X)$	:	variance de v.a X.
$\beta(s,t)$	:	Loi beta de parametre s,t.
$\Gamma(s)$	:	Loi gamma de parametre s.
$U_{[a,b]}$	:	Loi uniforme dans intervel $[a,b]$
$cov(X,Y)$	:	Covariance de X et Y
$L-CV$	:	L-variation
PWM	:	Moments de probabilité pondérés
NOR	:	Loi normale
EXP	:	Loi exponentielle
GUM	:	Loi gumble
GEV	:	Loi de valeurs extrême généralisée

GPA	:	Loi de pareto généralisé
GLO	:	Loi logistique généralisé
$PE3$	:	Loi de Pearson Type III
$\|x\|$	:	valeur absolue de x
$X_{i,n}$	:	$i^{éme}$ statistique d'ordre
MSE	:	erreur quadratique moyene
mm	:	méthode de moment
lm	:	méthode de L-moment
$resp$	:	respectivement
$c - à - d$	:	c'est à dire