République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

SLATNIA Randa

Titre :

Sur la Stabilité des Systèmes Différentiels d'Ordre Fractionnaire

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**REZKI Ibrahim**	UMKB	Président
Dr.	**ADOUANE Saida**	UMKB	Encadreur
Dr.	**SOLTANI Siham**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Merci Allah <<**MON DIEU** >> de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller
jusqu'au bout de rêve et le bonheur de lever mes mains vers le ciel et dire
<< **YA KAYOUM** >>.

▶Le prephète de la miséricorde et de la lumière du monde << **MOHAMMED** >> que dieu le bénisse et la salue.

Je dédie ce modeste travail

▶ À mes grandes-mères

▶ À mes très chers parents

▶ À mes très chers frères et sœurs

▶ À tous les frères de ma mère

▶ À tous mes proches

▶ À tous mes amis

▶ À tous les gens que j'aime

▶ Je vous remercie énormément.

REMERCIEMENTS

-Mes remerciements vont premièrement à << **DIEU**>> tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a données durant toutes ces années d'études.

-Nous voudrions présenter nos sincères remerciements et notre gratitude à notre encadreur<< ADOUANE SAIDA >> d'avoir accepté de nous encadrer et nous guider et pour sa patience, ses précieux afin de mener notre travail à bon chemin.

-Nous remercions aussi notre Président et examinateur << REZKI IBRAHIM >> et << SOLTANI SIHAM >> pour nous
donner une partie de son temps.

-Nous remercions également notre Chef de Département de Mathématiques << HEFAYED.M.>>,

Et tous les enseignants qui nous avons apporté leur aide au bon acheminement de parcours éducatif
et qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Le calcul fractionnaire est une généralisation de la notion de dérivée d'ordre entier α d'une fonction $f(x)$ par rapport à la variable x à des valeurs non entières de α. Si α est négatif, il s'agit d'une intégration non entière et si α est positif, on parle d'une dérivation non entière.

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17-^{ième} siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral.

Leibniz a introduit le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la dérivée n-^{ième} d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à L'Hospital en 1695, l'Hospital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?

Cette lettre de l'Hôpital, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que L'Hospital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction, a en fait donné lieu au nom de ce domaine des mathématiques.

Les dérivées non entières possèdent un effet de mémoire qu'elles partagent avec plusieurs matériaux tels que les matériaux viscoélastiques ou polymères. Ce fait est également une des raisons pour lesquelles le calcul fractionnaire a connu récemment un grand intérêt.

Maintenant, nous citons une liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20-^{ième} siècle :

P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-1867), A.K. Grunwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912), S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl(1917), P. Levy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945), E.R. Amour (1938-1996), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz(1949).

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi. De nombreuses définitions ont été alors données sur la dérivation et l'intégration fractionnaire.

Ce mémoire se décompose de deux chapitres partagés de la manière suivante :

Premier chapitre : Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et définitions des fonctions spécifiques utiles tout au long de ce mémoire ainsi que des approches des dérivées et intégrales fractionnaires (approche de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo) et leurs propriétés.

Deuxième chapitre : Ce chapitre est consacré pour l'étude de stabilité des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire, on va introduire dans la première partie de ce chapitre les concepts de base de la notion de stabilité. La seconde partie du chapitre est consacrée à la présentation des techniques qui donnent une information sur la stabilité d'un système en ordre entier vers l'ordre fractionnaire ainsi que méthodes de Lyapunov. Enfin, on termine par l'étude du critère très important pour l'analyse de la stabilité Routh-Hurwitz.

Chapitre 1

Généralité sur les systèmes différentiels d'ordre fractionnaire

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au calcul intégral fractionnaire et dérivation fractionnaire, on va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Riemann Liouville. Nous définissons d'abord certaines fonctions utiles telles que la fonction Gamma, la fonction Béta et la fonction de Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul différentiel d'ordre fractionnaire. De telles fonctions sont dites fonctions spéciales.

1.1 Fonctions mathématiques utiles[7]

Dans cette section, nous présentons certaines théories qui concernent des fonctions spéciales.

1.1.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction **Gamma Euler** $\Gamma(z)$. La fonction de Gamma $\Gamma(z)$ est , en mathématiques, une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes (exceptés en certains points).

Définition 1.1.1 *La fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \mathrm{Re}(z) > 0,\ z \in \mathbb{C} \tag{1.1}$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe.

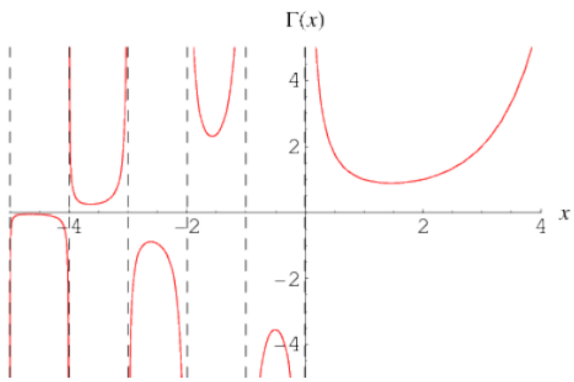

FIG. 1.1 – La fonction Gamma

Propriété 1.1.1 *1. Une propriété importante de $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \mathrm{Re}(z) > 0. \tag{1.2}$$

2. En particulier

$$\Gamma(z) = (z-1)!, \quad \forall z \in \mathbb{N}^*. \tag{1.3}$$

3. Comme conséquence de cette propriété, on a :

$$\Gamma(z+1) = z!, \quad \forall z \in \mathbb{N}^*, \tag{1.4}$$

ce qui permet de dire que la fonction Gamma généralise la notion de factoriel.

4. $\forall z \in \mathbb{R} \backslash \{0, -1, -2, ...\}, \forall m \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(z+m) = z(z+1)...(z+m-1)\Gamma(z).$$

Cas particulier :

⊛ $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t}|_0^{+\infty} = 1.$

⊛ $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$;

Pour $x = \frac{1}{2}$, on a par définition :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt,$$

posons $t = u^2$ donc $dt = 2u\ du$, il s'ensuit :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} e^{-u^2} 2u du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

L'intégrale de Gauss est donnée par :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

d'où :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Preuve.

1.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(z+1)-1} dt, \tag{1.5}$$

par intégration par parties

$$\begin{cases} u = t^z \Longrightarrow u' = zt^{z-1} \\ v' = e^{-t} \Longrightarrow v = -e^{-t} \end{cases}$$

$$(1.5) = -e^{-t}t^z \mid_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = z\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = z\Gamma(z).$$

2. Nous allons montrer la formule $\Gamma(n+1) = n!$ par récurrence sur n.

   * Si $n = 0$, alors $\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1 = 0!$.

   * Supposons la formule vérifiée pour $(n-1)$ et considérons le cas n,

   c'est à dire que nous supposons que $\Gamma((n-1)+1) = \Gamma(n) = (n-1)!$ est vérifié,

   alors $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$. Donc (2) est démontré.

■

Exemple 1.1.1 *On a vu que :* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ *et on a :* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,

alors

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Lemme 1.1.1 *La fonction* Γ *est une fonction de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^+$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^\infty (\ln(t))^k t^{z-1}e^{-t}dt.$$

1.1.2 Fonction Bêta

La fonction Bêta est aussi définie par une intégrale impropre.

Définition 1.1.2 *La fonction Bêta est définie par :*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad \operatorname{Re} x > 0, \quad \operatorname{Re} y > 0. \tag{1.6}$$

Propriété 1.1.2 *1. Le changement de variable $u = 1 - t$ permet de montrer que la fonction Bêta est symétrique c'est-à-dire que :*

$$B(x, y) = B(y, x).$$

2. Elle peut prendre aussi les formes intégrales suivants :

$$B(x, y) = \frac{1}{a^{x+y-1}} \int_0^a t^{x-1}(a-t)^{y-1} dt,$$
$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt,$$
$$B(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta) \cos^{2y-1}(\theta) d\theta.$$

Proposition 1.1.1 *La fonction Bêta est reliée à la fonction Gamma par la relation suivante :*

$\forall x, y > 0,$ on a :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1.7}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t_1^{x-1} t_2^{y-1} e^{-t_1} e^{-t_2} dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1} \left(\int_0^{+\infty} t_2^{y-1} e^{-|t_1+t_2|} dt_2 \right) dt_1. \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable :

$$t_2^{'} = t_1 + t_2,$$

on trouve :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1}dt_1 \int_0^{+\infty} (t_2^{'} - t_1)^{y-1}e^{-t_2^{'}}dt_2^{'} \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2^{'}}dt_2^{'} \int_0^{t_1} (t_2^{'} - t_1)^{y-1}t_1^{x-1}dt_1,\end{aligned}$$

si on pose : $t_1^{'} = \dfrac{t_1}{t_2^{'}}$, on arrive à :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2^{'}}dt_2^{'} \left(\int_0^1 (t_1^{'}t_2^{'})^{x-1}(t_2^{'} - t_1^{'}t_2^{'})^{y-1}t_2^{'}dt_1^{'}\right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2^{'}}dt_2^{'}((t_2^{'})^{x+y-1}B(x,y)) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2^{'}}(t_2^{'})^{x+y-1}dt_2^{'}B(x,y) = \Gamma(x+y)B(x,y).\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat désiré. ■

1.1.3 Fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle, e^z, joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler et désignée par la fonction suivante :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \tag{1.8}$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette dernière a été introduite par Agarwal et elle est définie par le développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \tag{1.9}$$

Pour $\beta = 1$, on retrouve la relation (1.8)

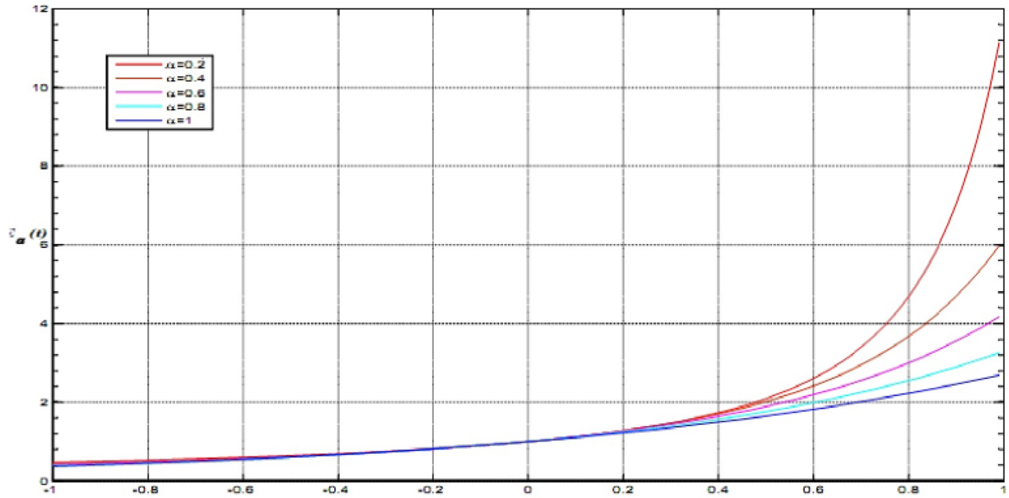

FIG. 1.2 – La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre

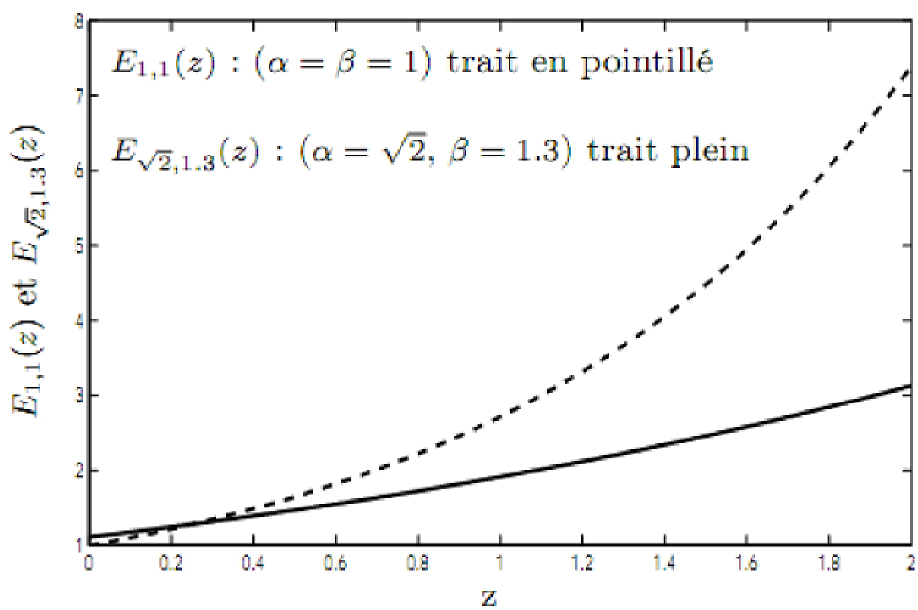

FIG. 1.3 – La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

De la définition (1.9), il en résulte que :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z).$$

En effet, par définition on a :

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} = \sum_{k=-1}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+\beta)} = \sum_{k=-1}^{\infty}\frac{zz^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z).
\end{aligned}$$

Exemple 1.1.2 *La fonction Mittag-Leffler se réduit à des fonctions simple. Par exemple :*

$$\begin{aligned}
E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = e^z, \\
E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z-1}{z}, \\
E_{2,1}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z).
\end{aligned}$$

Remarque 1.1.1 *Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle.*

1.2 Formule de Dirichlet

Soient $h(x,y)$ une fonction continue et α, β deux réels positifs. L'expression suivante est dite formule de Dirichlet

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}dx\int_0^x (x-y)^{\beta-1}h(x,y)dy = \int_0^t dy\int_y^t (t-x)^{\alpha-1}(x-y)^{\beta-1}h(x,y)dx$$

Certains cas particuliers de la formule de Dirichlet sont d'un intérêt particulier.

Par exemple, si on prend

$$h(x,y) = g(x)f(y)$$

et

$$g(x) \equiv 1.$$

Alors :

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1} f(y)dy = B(\alpha,\beta) \int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1} f(y)dy, \tag{1.10}$$

où B est la fonction Bêta.

1.3 Intégration fractionnaire[7]

Dans cette section, on va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

1.3.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a,b]$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. On considère l'intégrale :

$$\begin{aligned}
I^1 f(x) &= \int_a^x f(t)dt, \\
I^2 f(x) &= \int_a^x I^1 f(u)du = \int_a^x (\int_a^u f(t)dt)du \\
&= \int_a^x (\int_t^x du) f(t)dt = \int_a^x (x-t)f(t)dt.
\end{aligned}$$

Plus généralement la n-ième itération de l'opérateur I peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
I^n f(x) &= \int_a^{x_1} dx_1 \int_a^{x_2} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t)dt.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Pour tout entier n.

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $\Gamma(n) = (n-1)!$, Riemann rendu compte que le second membre de (1.11) paurait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il définit l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

1.3.2 L'intégrale de Riemann-Liouville

Définition 1.3.1 *Soient α un réel positif et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α de f l'intégrale suivante :*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt. \tag{1.12}$$

Définition 1.3.2 *Si $f \in [a,b]$; $\alpha \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale :*

$$I_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt \text{ telle que } a \in]-\infty;+\infty[$$

est appelée intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α, et l'intégrale :

$$I_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt \text{ telle que } b \in]-\infty;+\infty[$$

est appelée intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α.

Remarque 1.3.1 *Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale (à gauche).*

Proposition 1.3.1 *Soient α et β deux nombres complexes et $f \in C^0([a,b))$.*

i) $I_a^\alpha(I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f, \quad (\mathrm{Re}(\alpha) > 0, \mathrm{Re}(\beta) > 0)$.

ii) $\frac{d}{dt}(I_a^\alpha f)(t) = (I_a^{\alpha-1} f)(t), \ \mathrm{Re}(\alpha) > 1$.

iii) $\lim_{\alpha \to 0^+}(I_a^\alpha f)(t) = f(t), \ \mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

Preuve.

i) Pour la démonstration on utilise la fonction Bêta d'Euler. En effet :

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha(I_a^\beta f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}(I_a^\beta f(s))ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^s (s-t)^{\beta-1}f(t)dt\right)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}ds\int_a^s (s-t)^{\beta-1}f(t)dt.
\end{aligned}$$

D'après la formule de Dirichlet (1.10), on a :

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha(I_a^\beta f(x)) &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1}f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1}f(t)dt = I_a^{(\alpha+\beta)}f(x).
\end{aligned}$$

D'où la première égalité.

ii) On montre maintenant la deuxième égalité

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(I_a^\alpha f(x)) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dx}\left(\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt\right).
\end{aligned}$$

Puisque $f(t)$ et $(x-t)^{\alpha-1}$ sont continues donc l'application : $t \longmapsto (x-t)^{\alpha-1}f(t)$ est continue, et on a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(I_a^\alpha f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{d}{dx}((x-t)^{\alpha-1}f(t))dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2}f(t)dt \\
&= \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2}f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2}f(t)dt = I_a^{\alpha-1}f(x).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

iii) Pour la dernière identité, on considère la fonction $f \in C^0([a,b))$. *On a*

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

De la relation (1.12), on peut écrire :

$$(I_a^\alpha 1)(t) = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \to 1 \text{ quand } \alpha \to 0^+.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\left|(I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(t) d\tau\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left|f(\tau) - f(t)\right| d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau. \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

D'une part, on a f *est continue sur* $[a,b)$ *qui nous permet d'écrire :*

$$\forall t, \tau \in [a,b), \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |\tau - t| < \delta \Longrightarrow |f(\tau) - f(t)| < \varepsilon,$$

ce qui entraine :

$$\int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \leq \varepsilon \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \frac{\varepsilon \delta^\alpha}{\alpha}. \qquad (1.14)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau)-f(t)|d\tau &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}\left(|f(\tau)+f(t)|\right)d\tau\\ &\leq 2\sup_{\zeta\in[a,t]}|f(\zeta)|\int_a^{t-\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau,\ \forall t\in[a,b)\\ &= 2M\left(\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}-\frac{\delta^\alpha}{\alpha}\right),\ \text{où } M=\sup_{\zeta\in[a,t]}|f(\zeta)|.\end{aligned} \tag{1.15}$$

Une combinaison de (1.13), (1.14) et (1.15) nous donne :

$$\begin{aligned}\left|(I_a^\alpha f)(t)-\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(t)\right| &\leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left[\varepsilon\delta^\alpha+2M((t-a)^\alpha-\delta^\alpha)\right]\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\varepsilon\delta^\alpha+2M((t-a)^\alpha-\delta^\alpha)\right],\end{aligned}$$

en faisant tendre α vers 0^+, on obtient :

$$\lim_{\alpha\to0^+}\left|(I_a^\alpha f)(t)-\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(t)\right|\leq\varepsilon,$$

autrement dit :

$$\left|\lim_{\alpha\to0^+}(I_a^\alpha f)(t)-f(t)\right|\leq\varepsilon,\forall\varepsilon>0,$$

c'est-à-dire que :

$$\lim_{\alpha\to0^+}(I_a^\alpha f)(t)=f(t).$$

■

1.3.3 Exemples d'intégrales d'ordre fractionnaire

Exemple 1.3.1 *Considérons la fonction $f(x)=x^\beta$.*

En remplaçant dans la définition de l'intégrale de Riemann-Liouville, on obtient :

$$I^\alpha x^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\beta dt.$$

En faisant le changement de variable : $t = ux \Longrightarrow u = \dfrac{t}{x}$, *on obtient :*

$$\begin{aligned} I^\alpha x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} x^{\alpha-1} (xu)^\beta x du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+\beta} \int_0^1 u^\beta (1-u)^{\alpha-1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1,\alpha) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

D'où :

$$I^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}$$

La formule précédente est une généralisation du cas $\alpha = 1$

En effet, pour $\alpha = 1$ *on obtient :*

$$\begin{aligned} I^1 x^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} x^{\beta+1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\beta+1)\Gamma(\beta+1)} x^{\beta+1} = \frac{1}{(\beta+1)} x^{\beta+1}. \end{aligned}$$

En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$ *et pour* $\beta = 0, 1, 2$ *on a :*

$$\begin{aligned} I^{\frac{1}{2}} x^0 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \\ I^{\frac{1}{2}} x^1 &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}} \\ I^{\frac{1}{2}} x^2 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}. \end{aligned}$$

De ce qui précède, on déduit que l'intégrale fractionnaire d'ordre α *d'une constante* k *est* *donnée par :*

$$I^\alpha k = \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha.$$

Exemple 1.3.2 *Soient $\alpha > 0$, $\beta > -1$ et $f(x) = (x-a)^\beta$ alors :*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt. \tag{1.16}$$

En effectuant le changement de variable

$$t = a + (x-a)y,\ (0 \le y \le 1),$$

alors (1.16) devient :

$$\begin{aligned}
(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt. \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-(x-a)y)^{\alpha-1} \left[x+(x-a)y-x\right]^\beta (x-a)dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x-a)(1-y)]^{\alpha-1}(x-a)^{\beta+1} y^\beta dy \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^\beta dy \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{(\beta+1)-1} dy.
\end{aligned}$$

En tenant compte de la fonction Bêta (1.6) puis de la relation (1.7), on arrive à :

$$\begin{aligned}
(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha, \beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

ainsi on obtient :

$$(I_a^\alpha (t-a)^\beta) = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}. \tag{1.17}$$

1.4 Dérivation fractionnaire

Il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire malheureusement elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette partie les approches de Grünwald-Letnikov, de Riemann-Liouville et de Caputo qui sont les plus utilisées.

1.4.1 Approche de Grünwald-Letnikov[2]

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraire. Ce qui permet d'exprimer la dérivée d'ordre entier p (si p est positif) et l'intégrale répétée $(-p)$ fois (si p est négatif), d'une fonction f comme ceci : Pour une fonction f donnée, d'après la définition classique de la dérivation en un point t on a :

$$f\,'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(t) - f(t-h)). \tag{1.18}$$

On utilise le même concept pour la dérivée seconde pour trouver

$$\begin{aligned} f\,''(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{f\,'(t) - f\,'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(t) - f(t-h)}{h} - \dfrac{f(t-h) - f(t-2h)}{h}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left(f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)\right). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Moyennant (1.18) et (1.19), on obtient

$$f^{(3)}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3}\left(f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)\right).$$

Par itération on trouve la formule générale

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(t-kh),$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} = \frac{n(n-1)(n-2)......(n-k+1)}{k!}.$$

Pour un entier p arbitraire on a

$$f^{(p)}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{p}{k} f(t-kh).$$

Remarquons que si $p \leq n$ on a

$$\begin{aligned} f^{(p)}(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{p}{k} f(t-kh) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f(t-kh) + \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=p+1}^{n} (-1)^k \binom{p}{k} f(t-kh) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f(t-kh), \end{aligned}$$

en tenant compte du fait que $\binom{p}{p+j} = 0$ pour tout $j = 1, ..., n$.

Définition 1.4.1 *La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de **Grünwald-Letnikov** est donnée par :*

$${}^{GL}D^{\alpha} f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t-kh)$$

où $0 \leq n-1 < \alpha < n$.

Remarque 1.4.1 *Remarquons que*

$$
\begin{aligned}
(-1)^k \binom{\alpha}{k} &= (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} \\
&= (-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1).....(\alpha-k+1)(\alpha-k)!}{k!(\alpha-k)!} \\
&= \frac{-\alpha(-\alpha+1).....(-\alpha-k+1)}{k!} \\
&= \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
{}^{GL}D^{\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-kh).
$$

L'intégrale fractionnaire se traduit par l'expression suivante :

$$
{}^{GL}I^{\alpha} f(t) = {}^{GL}D^{-\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0} h^{\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} f(t-kh).
$$

Cas particuliers :

Cas $\alpha = 1$:

$$
\begin{aligned}
{}^{GL}I^{1} f(t) &= \lim_{h\to 0} h \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1)} f(t-kh) = \lim_{h\to 0} h \sum_{k=0}^{+\infty} f(t-kh) \\
&= \int_0^{t-a} f(t-y)dy = \int_0^t f(\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

Cas $\alpha = 2$:

$$
\begin{aligned}
{}^{GL}I^{2} f(t) &= \lim_{h\to 0} h \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2)} f(t-kh) \\
&= \lim_{h\to 0} h \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) f(t-kh).
\end{aligned}
$$

En faisant le changement de variable $t+h=z$, on déduit que

$$^{GL}I^2 f(t) = \lim_{h\to 0} h\sum_{k=1}^{+\infty} k f(z-kh).$$

Si f est de classe C^n, alors en utilisant une intégration par parties on obtient :

$$I^\alpha f(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)(x-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(m+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n+\alpha-1} f^{(n)}(t)dt,$$

et

$$D^\alpha f(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)(x-a)^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt. \tag{1.20}$$

Pour $a=0$, on obtient :

$$D^\alpha f(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(0)(x)^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt.$$

Proposition 1.4.1 (Propriétés de composition avec les dérivées d'ordre entier) *Pour m entier positif et p non entier on a :*

$$\frac{d^m}{dt^m}\left({}^{GL}D_t^p f(t)\right) = {}^{GL}D_t^{m+p} f(t)$$

$$\text{et } {}^{GL}D_t^p\left(\frac{d^m}{dt^m} f(t)\right) = {}^{GL}D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)} \neq \frac{d^m}{dt^m}\left({}^{GL}D_t^p f(t)\right).$$

On déduit alors que la dérivation fractionnaire et la dérivation classique ne commutent que si $f^{(k)}(a)=0$ pour tout $k=0,1,2,...,m-1$.

Exemple 1.4.1 ***La dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov*** *En général la dérivée d'une fonction constante au sens de* ***Grünwald-Letnikov*** *n'est pas nulle ni constante.*

Si $f(t) = c$ *et* p *non entier on a :* $f^{(k)} = 0$ *pour* $k = 1, 2, ..., n$.

$$
{}^{GL}D_t^p\ f(t) = \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}}_{\overset{\Downarrow}{0}}
$$

$$
+ \underbrace{\frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau}_{\overset{\Downarrow}{0}}
$$

Donc

$$
{}^{GL}D_t^p\ f(t) = \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}
$$

Exemple 1.4.2 ***Fonction puissance :***

Considérons la fonction

$$
f(x) = x^{\beta}
$$

de la définition (1.20) on a :

$$
D^p x^{\beta} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0) x^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^x (x-t)^{n-p-1} D^n t^{\beta} dt.
$$

On a :

$$
f^{(k)}(0) = 0,\ \ k = 0, 1, ..., n-1
$$

et

$$
f^{(n)}(t) = D^n t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} t^{\beta-n},
$$

d'où

$$
D^p x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^x (x-t)^{n-p-1} t^{\beta-n} dt.
$$

En faisant le changement de variable $t = sx$, on obtient :

$$\begin{aligned}
D^p x^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\beta-n+1)} x^{\beta-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} s^{\beta-n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)B(n-p,\beta-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\beta-n+1)} x^{\beta-p} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-p+1)} x^{\beta-p} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-p+1)} x^{\beta-p}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$D^p x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-p+1)} x^{\beta-p}.$$

En particulier, pour $\beta = 0$ on a :

$$D^p x^0 = D^p 1 = \frac{1}{1-p} x^{-p},$$

*c'est-à-dire que la dérivée au sens de **Grünwald-Letnikov** d'une constante n'est pas forcément nulle.*

1.4.2 Approche de Riemann-Liouville[4]

Définition 1.4.2 *Soit $f \in L^1([a,b])$ une fonction intégrable sur $[a,b]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$ notée ${}^{RL}D_a^\alpha f$ est définie par :*

$$({}^{RL}D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt,$$

où $n-1 < [\mathrm{Re}(\alpha)] < n$ et $x > a$.

En particulier, pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$, on a :

$$({}^{RL}D_a^0 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d}{dx}\right)\int_a^x f(t)dt = f(x),$$
$$({}^{RL}D_a^m f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\right)\int_0^x f(t)dt = \frac{d^m}{dx^m}f(x),$$

par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique par $\alpha \in \mathbb{N}$.

Remarque 1.4.2

$$({}^{RL}D_a^\alpha\ f\ )(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_a^{n-\alpha} f)(x),$$

tel que : $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1, x > a$.

Exemple 1.4.3

1. *Soit $f(x) = (x-\alpha)^\beta$ avec $\beta > -1$.*

   pour $\alpha \geq 0$ tel que $n-1 \leq \alpha \leq n$, on a d'après la définition (1.4.2) puis la remarque (1.4.2)

$$^{RL}D_a^\alpha\ f\ (x) = \ ^{RL}D^n I^{n-\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}\ D^n(x-a)^{n-\alpha+\beta}.$$

   Alors, pour $(\alpha-\beta) \in \{1,2,3,...n\}$ on a :

$$^{RL}D_a^\alpha\ f\ (x) = \ ^{RL}D_a^\alpha(x-a)^{\alpha-j} = 0, j \in \{1,2,3,...,n\},$$

   par ailleurs si $(\alpha-\beta) \notin \{1,2,3,...n\}$ on trouve :

$$^{RL}D_a^\alpha\ f\ (x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.$$

2. *En particulier, si $\beta = 0$ et $\alpha > 0$, la dérivée fractionnaire d'une fonction constante $f(x) = c$ au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle, ni constante, mais on a :*

$$^{RL}D_a^\alpha \ c = \frac{c(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

La proposition suivante établie une condition suffisante d'existence de la dérivée fractionnaire.

Proposition 1.4.2 *Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si : $f \in C^n([a,b])$, alors la dérivée fractionnaire $^{RL}D_a^\alpha \ f$ existe presque partout sur $[a,b]$ et de plus, elle est donnée par :*

$$^{RL}D_a^\alpha \ f \ (x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}(x-a)^{j-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt.$$

Lemme 1.4.1 *Soit $\alpha \in \,]n-1, n[$ et f une fonction vérifiant $^{RL}D_a^\alpha f = 0$ (c-à-d : f une fonction appartenant au noyau de l'opérateur $^{RL}D_a^\alpha$) alors*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)}(x-a)^{j+\alpha-n}.$$

Preuve. Soit $^{RL}D_a^\alpha \ f \ (x) = 0$.

En tenant compte de la remarque (1.4.2) on a :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m [I_a^{m-\alpha} f](x) = 0,$$

et par suite

$$[I_a^{m-\alpha} f](x) = \sum_{j=0}^{m-1} C_j (x-a)^j.$$

Maintenant l'opérateur I_a^α à l'équation précédente donne

$$(I_a^m f)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} C_j I_a^\alpha((x-a)^j).$$

En utilisant la relation (1.17), on obtient ainsi

$$(I_a^m f)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} C_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)}(x-a)^{j+\alpha}.$$

Enfin, la dérivation classique et l'utilisation de la formule

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m+1)}(x-a)^{\alpha-m},$$

établit le résultat désiré. ■

L'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville possède les propriétés résumées dans la proposition suivante :

Proposition 1.4.3 *Soient* $\alpha, \beta > 0$ *tels que* $n-1 \leq \alpha \leq n, \;\; m-1 \leq \beta \leq m.$

1. *Pour* $f \in L^1([a,b])$, *l'égalité :*

$${}^{RL}D_a^\alpha (I_a^\alpha f(t)) = f(t)$$

   est vrai pour presque tout $x \in [a,b]$.

2. *Si* $\alpha > \beta > 0$, *alors pour* $f \in L^1([a,b])$, *la relation :*

$${}^{RL}D_a^\beta ({}^{RL}D_a^\alpha f)(x) = (I^{\alpha-\beta} f)(x)$$

   est vrai presque partout sur $[a,b]$.

3. *Si* $\beta \geq \alpha > 0$ *et la dérivée fractionnaire* ${}^{RL}D_a^{\beta-\alpha} f$ *existe, alors on a :*

$${}^{RL}D_a^\beta (I^\alpha f)(x) = ({}^{RL}D_a^{\beta-\alpha} f)(x).$$

4. Si $f \in L^1([a,b])$ *et* $I^{n-\alpha} f \in C^n([a,b])$ *avec* $n = [\mathrm{Re}(\alpha)+1]$ *alors :*

$$[I_a^\alpha ({}^{RL}D_a^\alpha f)](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-n+\alpha}}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \lim_{x \to a^+} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^j I_a^{n-\alpha} f \right](x).$$

1.4.3 Approche de Caputo[4]

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, à cause de ses applications dans les Mathématiques pures et appliquées. Cependant, étant donnée que la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une constant n'est pas nulle et que les conditions initiales du problème de Cauchy sont exprimées par des dérivées d'ordre fractionnaire, Caputo propose une autre approche où la dérivée de la constante est nulle et que les conditions initiales sont exprimées comme dans le cas classique par des dérivées d'ordre entier.

Définition 1.4.3 *Soient* $0 < n-1 < \alpha < n$ *et* f *une fonction de classe* $C^n([a,b])$*. La dérivée fractionnaire d'ordre* α *au sens de Caputo de la fonction* f *est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha f(x) &= I^{n-\alpha}(D^n f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-\alpha-1} dt. \end{aligned}$$

Exemple 1.4.4 *Considérons la fonction :*

$$f(x) = x^\beta,$$

pour $0 < n-1 < \alpha < n$*, on a :*

$${}^C D^\alpha f(x) = I^{n-\alpha}(D^n x^\beta),$$

où

$$D^n x^\beta = \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} x^{\beta-n} \right).$$

Par suite :

$$I^{n-\alpha} \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} x^{\beta-n} \right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^{\beta-n} dt,$$

on fait le changement de variable : $t = yx$ *qui implique :* $dt = xdy$ *on obtient alors :*

$$\begin{aligned}
\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^{\beta-n} dt &= \int_0^1 (x-xy)^{n-\alpha-1} (xy)^{\beta-n} x dy \\
&= \int_0^1 x^{n-\alpha-1} (1-y)^{n-\alpha-1} y^{\beta-n} x^{\beta-n+1} dy \\
&= \int_0^1 x^{\beta-\alpha} (1-y)^{n-\alpha-1} y^{\beta-n} dy \\
&= x^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-y)^{n-\alpha-1} y^{\beta-n} dy \\
&= x^{\beta-\alpha} B(n-\alpha, \beta-n+1) \\
&= x^{\beta-\alpha} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$I^{n-\alpha} \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} x^{\beta-\alpha} \right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha},$$

et finalement, on obtient

$${}^C D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} x^{\beta-\alpha}.$$

En particulier, pour $\beta = 0$*, on a :*

$${}^C D^\alpha x^0 = D^\alpha 1 = 0.$$

Contrairement à la dérivation de Riemann-Liouville la dérivée d'ordre fractionnaire au *sens de Caputo d'une constante est nulle.*

1.4.4 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo[4]

Le théorème suivante établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

On noté par ${}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha}$ la dérivée au sens de Riemann-Liouville et par ${}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}$ la dérivée fractionnaire au sens Caputo.

Théorème 1.4.1 *Soit $n-1<\alpha<n$, $(n\in\mathbb{N}^{*})$. Supposons que f est une fonction telle que :*

$$ {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}= {}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha}-\sum_{m=0}^{n-1}\frac{f^{(m)}(a)(x-a)^{m-\alpha}}{\sum(m-\alpha-1)}. \tag{1.21}$$

De la relation (1.21), on déduit que si

$$f^{(m)}=0, m=1,2,...,n-1$$

on aura :

$${}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}= {}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha},$$

et les deux définitions sont alors équivalentes.

Si $a=0$, la formule ii) de la proposition (1.3.1) se réduit à :

$${}^{C}D_{x}^{\alpha}= {}^{RL}D_{x}^{\alpha}-\sum_{m=0}^{n-1}\frac{f^{(m)}(x-a)^{m-\alpha}}{\sum(m-\alpha+1)}.$$

1.4.5 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

1. **Linéarité** :

   La dérivation fractionnaire est une opération linéaire

   $$D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^{\alpha} f(t) + \mu D^{\alpha} g(t).$$

2. **La règle de Leibniz** :

   Pour n entier on a :

   $$\frac{d^n(f.g)}{dt^n} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t).$$

   La généralisation de cette formule nous donne :

   $$D^{\alpha}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(t) D^{(\alpha-k)} g(t) + R_n^{\alpha}(t),$$

   où $n \geq \alpha + 1$ et

   $$R_n^{\alpha}(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha-1} g(\tau) d\tau \int_{\tau}^{t} f^{(n+1)}(\zeta)(\tau - \zeta)^n d\zeta,$$

   avec $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n^{\alpha}(t) = 0.$

   Si f et g sont continues dans $[a, t]$ ainsi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

   $$D^{\alpha}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(t) D^{(\alpha-k)} g(t).$$

   D^{α} est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

1.5 Equations et systèmes d'équations différentielles fractionnaires

Avant de commencer laisser nous introduire une définition d'une équation différentielle fractionnaire (EDF).

⊛ L'équation différentielle fractionnaire est une équation qui contient une ou des dérivées fractionnaires.

Définition 1.5.1 *Soit* $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha] + 1$ *et* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *alors*

$$^{RL}D^{\alpha}y(x) = f(x, y(x)), \tag{1.22}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville. Comme conditions initiales pour ce type d'EDF on utilise :

$$^{RL}D^{\alpha-k}y(0) = b_k; \ (k = 1, 2, ..., n-1), \ \lim_{z \to 0+} I^{n-\alpha}y(z) = b_n.$$

De la même manière

$$^{C}D^{\alpha}y(x) = f(x, y(x)), \tag{1.23}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo et dans ce cas on utilise comme conditions initiales :

$$y^k(0) = b_k; (k = 0, 2, ..., n-1).$$

Remarque 1.5.1 *L'utilisation de conditions initiales de différents types pour les EDFs (1.22) et (1.23) nous assure l'unicité des solutions de l'EDF correspondante.*

⊛ Le système fractionnaire est un système qui est décrit par des équations différentielles fractionnaires.

Chapitre 2

Stabilité des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire

L'étude de stabilité permet de voir le comportement et la qualité des solutions sans avoir à résoudre le système différentiel. Dans ce cas, le but de ce chapitre est de développer des techniques qui donnent une information sur la stabilité d'un système en ordre entier vers l'ordre fractionnaire (non entier), on va étudier quelques méthodes de teste : les méthodes de Lyapunov et le critère de Routh-Hurwitz.

2.1 Stabilité des systèmes d'ordre entier

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)),\ x \in U \subset \mathbb{R}^n. \\ x(t_0) = x_{0,}\ t_0 \in I \subset \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.1}$$

où : $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n > 2$.

2.1.1 Notions sur la stabilité

Dans cette section, on va présenter les notions de stabilité, on ordre entier au sens de Lyapunov.

Définition 2.1.1 (Systèmes non autonomes) *Les systèmes non autonomes sont les systèmes qui dépendant du temps et d'état.*
La principale difficulté dans l'étude de tel système est que les solutions dépend de l'instant initial t_0.

Définition 2.1.2 (Systèmes autonomes) *Un système est dit autonome ou système invariant si f ne dépend pas explicitement du temps.*

Remarque 2.1.1 *On peut toujours transformer un système non autonome dans $\mathbb{R}^n$ en système autonome dans $\mathbb{R}^{n+1}$ (où t n'apparaît pas explicitement) on pose :*

$$F : J \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1} \text{ par } F(t,x) = (1, f(t,x))$$

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t,x) \end{pmatrix} = F(t,x).$$

Définition 2.1.3 (Point d'équilibre x_e) *Nous appelons point d'équilibre x_e (ou point critique ou point singulier) du (2.1) le point x_e qui vérifie $f(x_e) = 0$.*

Remarque 2.1.2 *On peut toujours ramener au cas d'étude où $x_e = 0$ (le point à l'origine(O)) en posant $y = x - x_e$.*
Dans la plupart, nous supposerons que $x_e = 0$ pour simplifier les notations.

Quelques types de stabilité

Définition 2.1.4 (Stabilité au sens de Lyapunov) *Le système est dit stable au sens de Lyapunov par rapport au point d'équilibre x_e si pour des conditions initiales $x(t_0)$ suf-*

fisamment proches du point d'équilibre soit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : ||x(t_0) - x_e|| \leq \delta \Longrightarrow ||x(t, x(t_0)) - x_e|| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Remarque 2.1.3 *On dit que x_e est instable s'il n'est pas stable.*

Définition 2.1.5 (Stabilité asymptotique) *Un point d'équilibre x_e est asymptotiquement stable s'il est stable et si :*

$$\exists \delta > 0 : ||x(t_0) - x_e|| < \delta \Longrightarrow \lim_{t \to +\infty} x(t) = x_e.$$

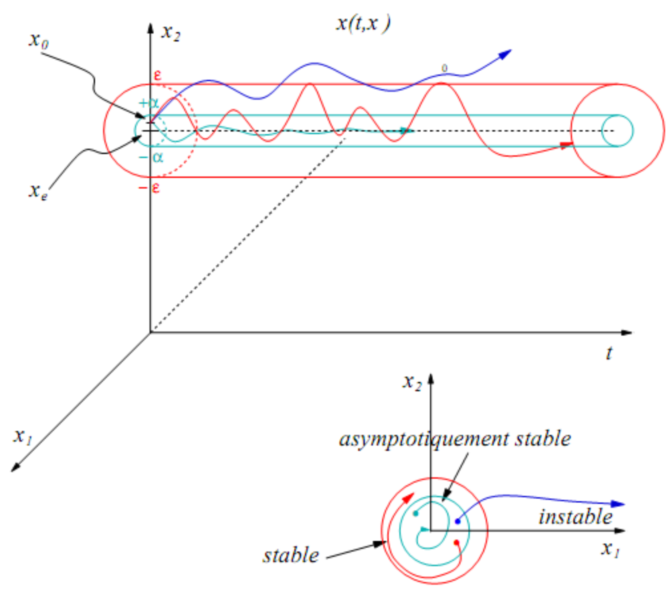

FIG. 2.1 – Quelques types de stabilité de Lyapunov

Définition 2.1.6 (Stabilité asymptotique globale) *Si le système est asymptotiquement stable quelque soit la condition initiale $x(t_0)$, alors le point d'équilibre est globalement asymptotiquement stable.*

Remarque 2.1.4

1. *x_e est asymptotiquement stable $\Longrightarrow$ x_e est stable.*
2. *Une solution est dite stable si les solutions associées à des valeurs voisines de la condition initiale restant proches de la solution considéré jusqu'à l'infini.*

Définition 2.1.7 (Stabilité uniforme) *Soit K un compact non vide de U, on considère le système (2.1).*
On dit que K est uniformément stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tel que pour tout $t_0 \in I$:

$$(x_0 \in B_{\delta(\varepsilon)}(K)) \Longrightarrow \begin{cases} x(t,t_0,x_0) \text{ est définie } \forall t \geq t_0. \\ x(t,t_0,x_0) \in B_{\delta(\varepsilon)}(K) \ \forall t \geq t_0. \end{cases}$$

$x(t,t_0,x_0)$ *désigne une solution du système* $\dot{x} = f(x)$ *ou du système* $\dot{x} = f(t,x)$ *tq :* $x(t_0) = x_0$.

Remarque 2.1.5 *La stabilité uniforme entraîne la stabilité, mais la réciproque est fausse.*

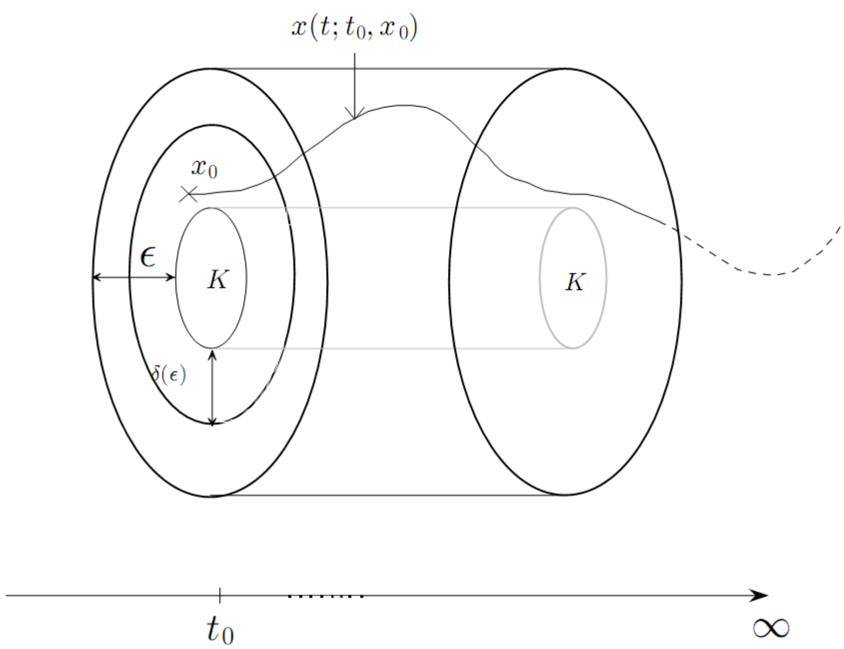

FIG. 2.2 – La stabilité uniforme

Définition 2.1.8 (Stabilité asymptotique uniforme) *Soit K un compact non vide de U, on dit que K est uniformément asymptotiquement stable pour le système (2.1) si :*

1. *K est uniformément stable pour le système (2.1).*
2. $\exists \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists T(x) > 0 : x_0 \in B_\varepsilon(K) \Longrightarrow x(t,t_0,x_0) \in B_\varepsilon(K) \ \ \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon)$.

où $B_\varepsilon(K) = \underset{x \in K}{\cup} B(x,\varepsilon)$ *et* $B(x,\varepsilon) = \{y \in U \subset \mathbb{R}^n; ||y-x|| < \varepsilon\}$.

Définition 2.1.9 (Stabilité exponentielle) *La position d'équilibre* $x_e = 0$ *est exponentiellement stable si :*

1. x_e *est stable au sens de Lyapunov.*
2. $\exists K > 0$ *et* $\gamma > 0$ *tel que :* $||x(t)|| \leq K \exp(-\gamma t)$, $\forall t \geq t_0$.

Remarque 2.1.6 *Si* x_e *est exponentiellement stable implique que* x_e *est asymptotiquement stable et ça implique que* x_e *est stable.*

Définition 2.1.10 (Stabilité absolue) *La position d'équilibre* $x_e = 0$ *est absolument stable si elle est asymptotiquement stable pour tout* x_0.

2.1.2 Méthodes de Lyapunov

A.M.Lyapunov a proposé deux méthodes pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaire. La première méthode consiste à calculer les points d'équilibre afin de linéariser autour de ces points pour évaluer la stabilité ou bien l'instabilité, cette méthode consiste à examiner les valeurs propres de la matrice Jacobienne. La deuxième méthode est une généralisation de l'idée de l'énergie du système, le but est de trouver une fonction qui décroît le long des trajectoires du système, cette fonction est appelée "**fonction Lyapunov**".

1) Méthode indirecte de Lyapunov (Linéarisation)

La majorité des systèmes associés à des phénomènes naturels ne sont pas linéaires, à cet effet on est obligé de les lineariser.

La méthode indirecte de Lyapunov consiste à étudier la stabilité du système non linéaire en utilisant son linéarisé, ce système linéarisé transforme le problème de stabilité global à un problème de stabilité local au voisinage du point d'équilibre.

Par un changement de coordonnées, le point d'équilibre du (2.1) se ramène à l'origine ($f(0) = 0$) et le développement de f en série de Taylor autour de $x_e = 0$ donne

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2 f(0)(x,x) + \frac{1}{3!}D^3 f(0)(x,x,x) + ...$$

La méthode indirecte de Lyapunov, pour étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre x_e, consiste à étudier le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \tag{2.2}$$

avec

$$A = Df(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x_e=0}$$

la matrice Jacobienne de f en 0 ($J(f(0))$ qui s'appelle le linéarisé du système (2.1) au point d'équilibre $x_e = 0$.

Si A possède n valeurs propres distinctes λ_i, $i = 1, 2, 3, ..., n$ (les valeurs propres de A sont appelées exposants caractéristiques de l'équilibre 0) alors la solution du (2.2) est

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} v_i, \ v_i \text{ le vecteur propre associé à } \lambda_i.$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 *[1]Pour $\dot{x}(t) = Ax(t)$ avec r valeurs propres distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_r$ et $x_e = 0$ point d'équilibre.*

1. *Si $\mathrm{Re}(\lambda_j) > 0$, pour $j \in \{1, ..., r\}$, alors 0 est instable.*
2. *Si $\mathrm{Re}(\lambda_j) \leq 0$, pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, alors :*

   ✓ *si $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$, pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, alors 0 est **asymptotiquement stable**.*

✓ *si un pôle est tel que* $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$, *pour tout* $j \in \{1, ..., r\}$, *et la multiplicité est* 1 *alors* 0 *est* ***stable.***

✓ *si un pôle est tel que* $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$, *pour tout* $j \in \{1, ..., r\}$, *et la multiplicité est* > 1 *alors :*

(a) *si* J_i^j *associés à* λ_j *sont scalaires alors* 0 *est* ***stable.***

(b) *si* $\exists J_i^j$ *associé à* λ_j *non scalaire alors* 0 *est* ***instable.***

Définition 2.1.11 *Deux flots* ϕ_t *et* ψ_t *sont dits topologiquement équivalents dans un voisinage du point d'équilibre, s'il existe un homéomorphisme* h *qui envoie le point d'équilibre du premier flot en le point d'équilibre du deuxième flot et qui conjugue les flots c'est à dire* $h \circ \phi_t = \psi_t \circ h$.

Le théorème suivant va nous permettre de lier le système non linéaire (2.1) au système linéairisé (2.2) pour juger la stabilité du (2.1).

Théorème 2.1.2 (Hartman-Grobman) *[1]*
Considérons le système (2.1), de flot ϕ_t. *Si* x_e *est un point d'équilibre hyperbolique, alors il existe un voisinage* V *de* x_e *sur lequel le flot* ϕ_t *est topologiquement équivalent au flot du linéairisé du système en* x_e.

Par conséquence, on a le théorème suivant :

Théorème 2.1.3 *Soit* x_e *un point d'équilibre de (2.1).*

* *Si les valeurs propres de* $Df(x_e)$ *sont toutes à partie réelle strictement négative, alors* x_e *est un équilibre asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.*

* *Si l'une des valeurs propres de* $Df(x_e)$ *possède une partie réelle strictement positive, alors* x_e *n'est pas un équilibre stable au sens de Lyapunov.*

Remarque 2.1.7 *Le point d'équilibre* x_e *est dit hyperbolique si tous ses exposants caractéristiques ont des parties réelles non nulles.*

2) Méthode directe de Lyapunov

La stabilité de Lyapunov constitue un outil important pour l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires. En fait, les problèmes de stabilité ont été largement couvertes par Lyapunov et il y a plusieurs testes associés à ce nom. Nous considérons d'abord ce que l'on appelle souvent, méthode directe de Lyapunov qui consiste à trouver une fonction appropriée de Lyapunov pour un système non linéaire donné. Si une telle fonction existe, le système est stable. Notons que la méthode directe de Lyapunov est une condition suffisante qui signifie que si on ne peut pas trouver une fonction appropriée de Lyapunov pour conclure la stabilité du système, le système peut encore être stable et on ne peut pas revendiquer le système n'est pas stable.

La méthode directe est difficile à mettre en œuvre, mais elle est d'une portée beaucoup plus générale, cette méthode consiste à étudier directement la stabilité de la position d'équilibre du système (2.1) à l'aide d'une fonction convenablement choisie $L(x)$ que l'on appelle **fonction de Lyapunov**.

Le théorème suivant va résumer cette méthode :

Théorème 2.1.4 (Fonction de Lyapunov et stabilité globale) $\circledast$ *Si x_e est un point d'équilibre du système (2.1) et si la fonction L de classe C^1 $L : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ est telle que :*

- *$L(x_e) = 0$ et $L(x) > 0$, pour $x \neq x_e$.*
- *L décroît long de toutes trajectoires*

$$\left(\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial L(t,x)}{\partial x} f(t,x) \leq 0 \right).$$

*Alors x_e est **stable** au sens de Lyapunov.*

$\circledast$ *Si de plus pour $x \neq x_e$: $\dfrac{dL}{dt} < 0$ alors x_e est **asymptotiquement stable** au sens de Lyapunov.*

⊛ *Si on suppose encore que L tend vers l'infini lorsque $x \in \mathbb{R}^n$ tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de x_e, tendent vers x_e (on dit que x_e est* ***globalement asymptotiquement stable****).*

⊛ *Mais si $\dfrac{dL}{dt} > 0$ pour $x \neq x_e$ alors x_e est* ***instable***

L est appelée fonction de Lyapunov du système.

Remarque 2.1.8 *Il n'y a aucune méthode pour trouver une fonction de Lyapunov. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.*

Exemple 2.1.1 *Soit le système de Lorenz*

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x). \\ \dot{y} = cx - y - xz. \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases}$$

Pour $0 < c < 1$, on vérifie que l'origine $(x_e, y_e, z_e) = (0,0,0)$ est un point d'équilibre globalement stable.

Sa stabilité globale est étudiée à l'aide d'une fonction de Lyapunov qu'il faut déterminer intuitivement !

On choisi convenablement $L(x,y,z) = \dfrac{x^2 + a(y^2+z^2)}{2}$ qui vérifie les conditions du stabilité globale :

1. *$L(0,0,0) = 0$ et $L(x,y,z) > 0$ pour $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.*
2. *$\dfrac{dL}{dt} = a(y-x)x + ay(cx-y-xz) + az(-bz+xy) = -a(x^2+y^2-(c+1)xy+bz^2)$, comme*

$$z^2 > 0 \text{ et } x^2+y^2-(c+1)xy > 0 \text{ pour } 0 < c < 1,$$

alors on a :

$$\frac{dL}{dt} < 0 \text{ pour } (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

Par suite le point $(x_e, y_e, z_e) = (0,0,0)$ *est globalement asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.*

2.2 Stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire

Dans la théorie de la stabilité des systèmes linéaires à temps invariant et à dérivées d'ordre entier, nous savons bien qu'un système est stable si les racines du polynôme caractéristique sont à parties réelles strictement négatives, donc situées sur la moitié gauche du plan complexe. Par ailleurs, dans le cas des systèmes fractionnaires linéaires à temps invariant, la définition de la stabilité est différente des systèmes d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires ou d'ordre non entier peuvent avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stables.

Le critère de stabilité le plus connu pour les systèmes non entiers est celui de Matignon. Il concerne, en particulier, sur les systèmes non entiers commensurables d'ordre α compris entre 0 et 2. Ce critère repose sur l'étude des pôles.

Soit le système différentiel suivant :

$$^{C}D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)), \tag{2.3}$$

où $0 < \alpha < 1, x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et $^{C}D^{\alpha}$ désigne la dérivée de Caputo.

2.2.1 Point d'équilibre

Prenons le système (2.3), avec condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Pour évaluer les points d'équilibre du système (2.3), il suffit de résoudre l'équation :

$$^{C}D^{\alpha}x(t) = 0.$$

Si x_e est une solution de l'équation, alors :

$$f(x_e) = 0.$$

2.2.2 Stabilité des systèmes linéaires autonomes[5]

Dans cette section, on étudie la stabilité d'un système différentiel fractionnaire linéaire autonome. D.Matignon a donné dans son article en 1996 le théorème suivant, on commence par donner un résultat de stabilité dans le cas très simple d'un système différentiel fractionnaire linéaire autonome commensurable.

Théorème 2.2.1 *Le système linéaire autonome d'ordre fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) & = Ax(t) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

telle que : $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$ et $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

est localement asymptotiquement stable si et seulement si

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha\frac{\pi}{2}, \text{ pour tout } i = 1, 2, ..., n.$$

Ce système est stable si et seulement si

$$|\arg(\lambda_i)| \geq \alpha\frac{\pi}{2}, \text{ pour tout } i = 1, 2, ..., n$$

et les valeurs propres critiques qui satisfaisant $|\arg(\lambda_i)| = \alpha\frac{\pi}{2}$ ont la multiplicité géométrique 1, où λ_i, $i = 1, 2, ..., n$ sont les valeurs propres de la matrice A.

Une extension de ce théorème au cas $1 < \alpha < 2$ a été donnée comme suit :

Théorème 2.2.2 *Le système (2.4) est localement asymptotiquement stable si et seulement* *si :*

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha\frac{\pi}{2}, \ pour\ tout\ i = 1, 2, ..., n\ \ et\ 1 < \alpha < 2.$$

Les figures (2.3),(2.4) montrent les régions stables et les régions instables.

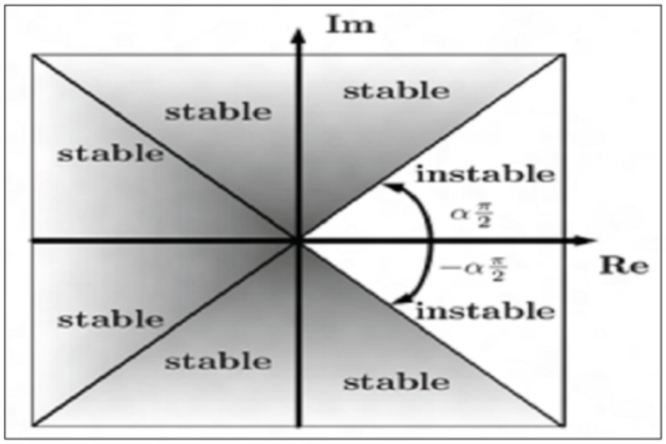

FIG. 2.3 – Région de stabilité d'un système d'équations différentielles fractionnaires linéaire d'ordre $\alpha \in (0, 1)$

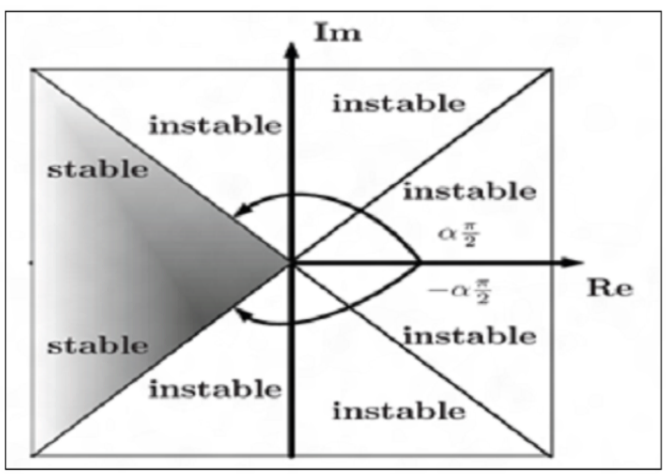

FIG. 2.4 – Région de stabilité d'un système d'équations différentielles fractionnaires linéaire d'ordre $\alpha \in (1, 2)$

Corollaire 2.2.1 *Supposons que $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq ... \neq \alpha_n$ et tous les α_i sont des nombres rationnels entre 0 et 1.*

Soit m le plus petit commun multiple des dénominateurs u_i de α_i $(i = 1, 2, ..., n)$

où $\alpha_i = \dfrac{v_i}{u_i}$, v_i *et* $u_i \in \mathbb{Z}^+$ *avec* $i = 1, 2, ..., n$ *et en posant* $\rho = \dfrac{1}{m}$, *donc le système (2.4) est asymptotiquement stable si*

$$|\arg(\lambda)| > \rho\frac{\pi}{2},$$

pour toutes les racines λ *de l'équation caractéristique suivante :*

$$\det(diag([\lambda^{m\alpha_1}, ..., \lambda^{m\alpha_n}]) - A) = 0.$$

Ce corollaire dit que dans le cas des ordres rationnels l'équation caractéristique peut être transformée en une équation polynomiale d'ordre entier.

2.2.3 Stabilité des systèmes linéaires non autonomes[5]

Dans cette section, on étudie la stabilité d'un système différentiel fractionnaire linéaire non autonome avec la dérivée de Caputo, de la forme :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) & = Ax(t) + B(t)x(t) \qquad t > t_0 \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < 1$ et $B(t) : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est une matrice continument différentiable.

Théorème 2.2.3 *Si* $\forall \lambda_l \in spec(A) \neq 0, |Arg(\lambda_l)| \geq \dfrac{\alpha\pi}{2}$, *telles que les valeurs propres critiques qui satisfont* $|Arg(\lambda_t)| = \dfrac{\alpha\pi}{2}$ *possèdent la même multiplicité algébrique et géométrique et* $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty} ||B(t)||\, dt$ *est borné.*
Alors : la solution du système (2.5) est stable.

Remarque 2.2.1 *On obtient la solution du système (2.5) en utilisant la transformation* *de Laplace et la transformée inverse de Laplace.*

$$x(t) = E_\alpha(A(t-t_0)^\alpha)x_0 + \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-t_0)^\alpha)B(\tau)x(\tau)d\tau. \tag{2.6}$$

Théorème 2.2.4 *Si la matrice A satisfait $\forall \lambda_l \in spec(A) \neq 0, |Arg(\lambda_l)| \geq \dfrac{\alpha\pi}{2}$ et $||B(t)|| = O(t-t_0)^\gamma \quad (-1 < \gamma < 1-\alpha, t_0 > 0)$ pour $t \geq 0$.*
Alors : la solution du système (2.5) est asymptotiquement stable.

2.2.4 Stabilité des systèmes non linéaires (linéarisation)

Dans le cas des systèmes non linéaires

$$D^\alpha x(t) = f(x(t)), \text{ où } 0 < \alpha < 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.7}$$

On linéarise le système (autour du point d'équilibre), supposons que x_e est un point d'équilibre du système (2.7) c'est-à-dire

$$f(x_e) = 0.$$

Pour analyser la stabilité de ce point on définie $\epsilon = x - x_e$. Alors

$$^cD^\alpha x(t) = f(x_e + \epsilon(t)). \tag{2.8}$$

Par développement en séries de Taylor de la fonction f au voisinage du point x_e on trouve :

$$f(x_e + \epsilon(t)) \approx f(x_e) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_e} \epsilon(t).$$

où $\epsilon = [\epsilon_1, ..., \epsilon_n]$ on sait que $f(x_e) = 0$, Alors :

$$f(x_e + \epsilon(t)) \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_e} \epsilon(t).$$

Et (2.8) devient

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha x(t) &= {}^c D^\alpha (x_e + \epsilon(t)) = {}^c D^\alpha x_e + {}^c D^\alpha \epsilon(t) \\ &= {}^c D^\alpha \epsilon(t) \quad (\text{car } {}^cD^\alpha x_e = 0). \end{aligned}$$

On obtient donc

$${}^cD^\alpha \epsilon(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_e} \epsilon(t).$$

Alors

$${}^cD^\alpha \epsilon(t) = J_f(x_e)\epsilon(t),$$

où $J_f(x_e)$ est la matrice Jacobienne associée à f au tour de point x_e.

On peut maintenant appliquer les théorèmes précédents pour étudier la stabilité locale des solutions du système fractionnaire autonomes non-linéaires (2.7).

2.2.5 Extension de la méthode directe de Lyapunov à l'ordre fractionnaire[8]

Dans cette section, nous étendons la méthode directe de Lyapunov au cas d'ordre fractionnaire. Définissons d'abord la stabilité dans le sens de **Mittag-Leffler**.

Définition 2.2.1 (Stabilité au sens de Mittag-Leffler) *La solution de (2.3) est dite* *stable au sens de **Mittag-Leffler** si*

$$||x(t)|| \leq \{m[x(t_0)]E_\alpha(-\lambda(t-t_0)^\alpha)\}^b,$$

où t_0 est le temps initial, $\alpha \in (0,1)$, $\lambda \geq 0$, $b > 0$, $m(0) = 0$, $m(x) \geq 0$, et $m(x)$ est localement lipschitzienne par rapport à $x \in B \subset \mathbb{R}^n$ avec la constante de lipschitz m_0.

Définition 2.2.2 (Stabilité généralisée au sens de Mittag-Leffler) *La solution de (2.3) est dite **stable généralisée** au sens de **Mittag-Leffler** si*

$$||x(t)|| \leq \left\{m[x(t_0)](t-t_0)^{-\gamma}E_{\alpha,1-\gamma}(-\lambda(t-t_0)^\alpha)\right\}^b, \tag{2.9}$$

où t_0 est le temps initial, $\alpha \in (0,1)$, $-\alpha < \gamma \leq 1-\alpha$, $\lambda \geq 0$, $b > 0$, $m(0) = 0$, $m(x) \geq 0$, et $m(x)$ est localement lipschitzienne par rapport à $x \in B \subset \mathbb{R}^n$ avec la constante de lipschitz m_0.

Remarque 2.2.2 *La stabilité au sens de **Mittag-Leffler** et la stabilité généralisée au sens de **Mittag-Leffler** implique la stabilité asymptotique.*

Remarque 2.2.3 *Pour $\lambda = 0$, il résulte de (2.9) que*

$$||x(t)|| \leq \left[\frac{m(x(t_0))}{\Gamma(1-\gamma)}\right]^b (t-t_0)^{-\gamma b},$$

*ce qui implique que la stabilité asymptotique est un cas particulier de la stabilité au sens de **Mittag-Leffler**.*

Théorème 2.2.5 *Soit $x_e = 0$ un point d'équilibre du système (2.3) et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant l'origine.*

Soit $V(t, x(t)) : [0,\infty) \times D \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable et localement *lipschitzienne par rapport à x telle que :*

$$\alpha_1 \|x\|^a \leq V(t, x(t)) \leq \alpha_2 \|x\|^{ab}$$
$${}^cD^\beta V(t, x(t)) \leq -\alpha_3 \|x\|^{ab},$$

*où $t \geq 0$, $x \in D$, $\beta \in (0,1)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a$ et b sont des constantes positives quelconques. Alors $x_e = 0$ stable au sens de **Mittag-Leffler**.*
*Si les hypothèses sont globalement sur $\mathbb{R}^n$, alors $x_e = 0$ est **globalement** stable au sens de **Mittag-Leffler**.*

2.2.6 Critère de Routh-Hurwitz pour un système fractionnaire[7]

Le Critère de **Routh-Hurwitz** est un critère qui permet d'étudier la stabilité d'un système sans avoir les pôles, une généralisation est faite pour le cas des systèmes d'ordre fractionnaire.
Soit le système fractionnaire :

$$D^\alpha x(t) = f(x, t), \tag{2.10}$$

où $0 < \alpha \leq 1$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Nous avons vu dans les précédentes sections la condition nécessaire et suffisante pour que le système soit asymptotiquement stable (locale) :

$$|\arg(\lambda_i)|_{i=1,n} > \alpha.\frac{\pi}{2}, \tag{2.11}$$

pour toutes les valeurs propres λ_i de la matrice Jacobiènne de f.
La condition (2.11) pose une question intéressante à savoir quelles sont les conditions pour les quelles toutes les racines du polynôme (avec les coefficients sont tous réels) :

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_n, \tag{2.12}$$

vérifient :

$$|\arg(\lambda_i)|_{i=1,n} > \alpha.\frac{\pi}{2}.$$

· Si $\alpha = 1$ la condition (2.11) signifie que toutes les valeurs propres ont des parties réelles négatives et ça équivaut à la condition de **Routh-Hurwitz** :

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, ... \tag{2.13}$$

· Si $\alpha \in]0, 1[$ les conditions de **Routh-Hurwitz** classiques sont suffisantes mais pas nécessaires, donc nous avons besoin d'une nouvelle version de ce critère qui sera adoptée dans le dernier cas.

Définition 2.2.3 *le discriminant $D(P)$ du polynôme*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1^{n-1}\lambda + a_2^{n-2}\lambda + ... + a_n, \tag{2.14}$$

est définie par :

$$D(P) = (-1)^{n(n-1)/2} R(P, P'), \tag{2.15}$$

où P' est la dérivée de P et $R(P, P')$ est le résultat de $(2n - l) \times (2n - l)$ de $P(\lambda)$ et son dérivée $P'(\lambda)$

donnée par :

$$R(P,P') = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & ... & a_n & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & ... & a_n & 0... & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & 1 & a_1 & ... & a_n \\ n & (n-1)a_1 & ... & a_{n-1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & n & (n-1)a_1 & ... & a_{n-1} & 0... & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & n & (n-1)a_1 & ... & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Pour $n = 3$ on a :

$$D(P) = 18a_1a_2a_3 + (a_1a_2)^2 - 4a_3(a_1)^3 - 4(a_2)^3 - 27(a_3)^2. \tag{2.16}$$

Notant que si $D(P) > 0$ (< 0), il y a un nombre pair (impair) de racines complexes de l'équation $P(\lambda) = 0$.

Pour $n = 3$, $D(P) > 0$ implique que toutes les racines sont réelles et $D(P) < 0$ implique qu'il n'y a qu'une seule racine réelle et une paire de racines complexes conjuguées.

Proposition 2.2.1 *[4]*

(i) Pour $n = 1$, la condition pour (2.11) sera $a_1 > 0$.

(ii) Pour $n = 2$, la condition pour (2.11) soit la condition de **Routh-Hurwitz** ou la condition :

$$a_1 < 0,\ 4a_2 > (a_1)^2, \left|\tan^{-1}\left(\sqrt{4a_2 - (a_1)^2}\right)/a_1\right| > \alpha.\pi/2.$$

(iii) Pour $n = 3$, si $D(P) > 0$ les conditions de **Routh-Hurwitz** sont les conditions nécessaires et suffisantes pour (2.11), i.e,

$$a_1 > 0,\ a_3 > 0,\ a_1 a_2 > a_3. \tag{2.17}$$

(iv) Si $D(P) < 0$, $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_3 > 0$, $\alpha < (\frac{2}{3})$ alors la condition (2.11) est satisfaite.

Aussi, si $D(P) < 0$, $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, $\alpha > (\frac{2}{3})$ alors toutes les racines du $P(\lambda) = 0$ vérifient

$$|\arg(\lambda_i)|_{i=1,n} < \alpha\frac{\pi}{2}. \tag{2.18}$$

(v) Si $D(P) < 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_1 a_2 = a_3$ alors (2.11) est satisfaite pour toutes $\alpha \in [0, 1[$.

(vi) Pour tout n, $a_n > 0$ est une condition nécessaire pour (2.11).

(vii) Si $\forall\lambda$, $P(\lambda) = P(-\lambda)$ puis définir $x = \lambda^2$ et les conditions du **Routh-Hurwitz** pour le polynôme résultant en x sont des conditions nécessaires pour (2.11) pour tout $\alpha \in [0, 1[$.

(viii) Pour $n > 1$, la condition nécessaire et suffisante pour (2.11) est :

$$\int_0^\infty dz/P(z)|_{C_2} + \int_{-\infty}^0 dz/P(z)|_{C_1} = 0, \tag{2.19}$$

où, C_1 est la courbe $z = x(1 - i\ \tan\alpha\pi/2)$ et C_2 est la courbe $z = x(1 + i\ \tan\alpha\pi/2)$.

Conclusion

Ce mémoire a pour but l'étude de la stabilité des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire.

Tout d'abord nous avons rassemblé quelques outils de base utiles pour notre travail (les fonctions Gamma, Béta, Mettag-Leffler,...) et nous avons présenté trois approches des dérivées et intégrales fractionnaires (approche de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo).

La majorité des systèmes associés à des phénomènes naturels ne sont pas linéaires, à cet effet A.M.Lyapunov a proposé deux méthodes pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaire. La première méthode (méthode indirecte de Lyapunov) consiste à calculer les points d'équilibre afin de linéariser autour de ces points pour évaluer la stabilité ou bien l'instabilité, cette méthode consiste à examiner les valeurs propres de la matrice Jacobienne. La deuxième méthode (méthode directe de Lyapunov) consiste à trouver une fonction appropriée de Lyapunov pour un système non linéaire donné. Si une telle fonction existe, le système est stable. Notons que cette méthode est une condition suffisante qui signifie que si on ne peut pas trouver une fonction appropriée de Lyapunov pour conclure la stabilité du système, le système peut encore être stable et on ne peut pas revendiquer le système n'est pas stable.

Enfin, nous avons étudiée le critère de **Routh-Hurwitz** qui permet d'étudier la stabilité d'un système sans avoir les pôles, une généralisation est faite pour le cas des systèmes d'ordre fractionnaire.

Bibliographie

[1] A.E.M. Salah. *Les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaire.* Mémoire Magistère d'Université Mentouri-Constantine 2009.

[2] Ali Benlabbes. *Sur des problèmes aux conditions aux limites et à dérivées fractionnaires.* Thèse de Doctorat. Université Djillali Liabès Sidi Bel Abbès. 2016

[3] B.Bijnan, K.Shyam. *Stabilization and control of fractional Order systems : A Sliding Mode Approach.* Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London 2015.

[4] E. Ahmed, A.M.A. El-Sayed, Hala A.A. El-Saka. *On some Routh–Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems.* Article in Physics Letters A. October 2006.

[5] Fayçal Bouchelaghem. *Etude de la stabilité pour certaines équations différentielles fractionnaires.* Mémoire Magistère d'Université Badji Mokhtar-Annaba.

[6] F.Z.Zhag. *Matrix theory.* Universitext, Springer, New York, NY.USA.1999.

[7] T. Menacer. *Synchronisation des Systèmes Dynamiques Chaotiques à Dérivées Fractionnaires.* Mémoire Magistère d'Université Mentouri-Constantine.

[8] Yan Li, YangQuan Chen, Igor Podlubny. *Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems : Lyapunov direct method and generalized Mittag–Leffler stability.* Computers and Mathematics with Applications 59 (2010) 1810–1821.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\Gamma(z)$	La fonction Gamma de la variable z
$B(x, y)$	La fonction Bêta de variable x et y
$E_\alpha(z)$	La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre
$E_{\alpha,\beta}(z)$	La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres
I_a^α	Intégration d'ordre α
$L(X)$	Fonction de Lyapunov
$E\left[x\right]$	Partie entière d'un nombre
${}^{RL}D_a^\alpha f$	La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de la fonction f
${}^{C}D^\alpha f$	La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f
${}^{GL}D^\alpha f$	La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Grünwald-Letnikov
$spec(A)$	Spectre de la matrice A
e^A	Exponentielle de A
$R(P, P')$	Le résultat de $P(\lambda)$ et son dérivée $P'(\lambda)$
$B(x, \varepsilon)$	La boule de centre x et de rayon ε
$D(P)$	Le discriminant du polynôme $P\left(\lambda\right)$