

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :



**MASTER en Mathématiques**

Option : **analyse**

Par

**Houria Kessai**

Titre :

**Etude de l'équation du transport**

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Chemcham Madani	UMKB	Président
Dr. KHELIL Naceur	UMKB	Encadreur
Dr. Dakhia Ghania	UMKB	Examineur

Juin 2019

## REMERCIEMENT

Je tiens tout d'abord à remercier Dr KHELIL Naceur, maître de conférences à l'Université de Biskra, qui m'a donné ce sujet et m'a encadré pendant mon Master. Il a toujours été à mon écoute et son point de vue complémentaire est souvent été très utile.

Je suis très reconnaissante envers Dr. Chemcham Madani, et Dr.Dakhia Ghania d'avoir manifesté de l'intérêt pour mon travail en acceptant de participer à ce jury. Leurs remarques et commentaires constructifs m'ont permis d'en améliorer le manuscrit.

Enfin, que toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail trouvent ici l'expression de mes sincères remerciements.

Mes derniers remerciements vont à mes parents, mes frères et soeurs et tous les amis.

## DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail

A mes très chers parents

pour leurs sacrifices et pour leurs soutiens au long de mes études

A mes frères : Abid Alhamed, Taher, Ismail

A mes soeurs : Habiba, Rabia, Rachida

A mes chères amies : Raouea, Wahiba

A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour ce travail soit réalisé, à tous je  
vous dis merci.

# Table des matières

Dédicace	i
Table des matières	ii
Liste des figures	v
<b>1 Justification et résolution analytique de l'équation de transport :</b>	<b>3</b>
1.1 Justification physique de l'équation de transport : . . . . .	3
1.2 Equation de transport : . . . . .	6
1.3 Résolution analytique de l'équation de transport : . . . . .	9
1.3.1 Equation homogène : . . . . .	9
1.3.2 Cas d'une équation avec un terme source : . . . . .	11
<b>2 Résolution numérique de l'équation de transport</b>	<b>15</b>
2.1 Résolution numérique de l'équation de transport : . . . . .	15
2.1.1 Méthode des différences finies : . . . . .	16
2.1.2 Schéma explicite : . . . . .	22
2.1.3 Schéma implicite : . . . . .	23
2.1.4 Comparaison entre deux modèles : . . . . .	25
2.2 Comparaison entre deux solutions . . . . .	27
<b>3 Application</b>	<b>29</b>

3.1	La solution analytique dans matlab : . . . . .	29
3.2	La solution numérique de l'équation de transport : . . . . .	31
3.3	Comparaison entre deux solutions : . . . . .	32
	<b>Conclusion</b>	<b>35</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>35</b>
	<b>Annexe B : Abréviations et Notations</b>	<b>37</b>

# Table des figures

3.1	la solution analytique de l'équation transport . . . . .	30
3.2	la solution numérique de l'équation transport . . . . .	32
3.3	Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique . . . . .	34

# Introduction générale

Dans ce mémoire nous allons voir les techniques des résolutions analytique et numérique de l'équation d'advection (Transport).

L'équation d'advection est une équation qui décrit comment une quantité est transportée dans un courant (par exemple un polluant dans de l'eau) :  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = f(x; t)$ ,  $c$  étant la vitesse du milieu qui est souvent une constante.

## Organisation du mémoire

La partie principale de ce mémoire est composée de trois chapitres, Le mémoire comporte également, un résumé, une introduction (page 1) et une annexe ; dans la quelle A (page 37) on liste les abréviations utilisées le long de ce mémoire.

Le chapitre Chapitre 1 : dans la première section on parle de la justification et la définition de l'équation de transport (E.T sans terme et avec un terme), et la deuxième section on donner la solution analytique de cette équation, elle commence par l'équation homogène et l'équation avec un terme source.

Dans le chapitre 2 on donner la solution numérique de cette équation, elle commence par méthode des différences finies (les schémas des différences finies, la consistance, l'ordre de consistance, erreur de consistance, la stabilité, la convergence, la discrétisation et Le schéma numérique), schéma explicite et schéma implicite (donner la comparition entre deux schéma), dans drenier chapitre en prend quelque point de défférent par résolution analytique et la résolution numérique.

Enfin le chapitre 3 : donner la résolution analytique et numérique de cette équation dans matlab et à la fin on comparis entre les resolutions en matlab.

Et on termine par une conclusion (page 35).



# Chapitre 1

## Justification et résolution analytique de l'équation de transport :

Dans cette chapitre on donner la justification de l'équation de transport et la définition de cette équation elle commence par de deux types (par un terme et sans terme), et à la fin on donner la résolution analytique de E.T (elle commence par équation homogène et l'équation avec un terme source) elle donne la solution exacte de (E.T).

### 1.1 Justification physique de l'équation de transport :

On se donne un fluide en mouvement le long de l'axe des réels. On note  $u(x, t)$  son profil densité et  $v(x, t)$  son profil vitesse.

On suit un domaine  $]a(t), b(t)[$  d'extrémités régulières, dans son mouvement. Si l'on suppose qu'il n'y a pas de création de masse dans l'intervalle, on a

$$M(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} u(x, t) dx = \text{constante}$$

Ainsi, quelque soit  $t \in \mathbb{R}^+$ , on a  $M'(t) = 0$ .

D'après la propriété :

$$\left( \int_{a(t)}^{b(t)} u(x, t) dx \right)' = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx + b'(t) u(b(t), t) - a'(t) u(a(t), t)$$

Comme

$$]a(t), b(t)[ \subset \mathbb{R}$$

Donc

$$M'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx + b'(t) u(b(t), t) - a'(t) u(a(t), t)$$

Le domaine est mouvement avec le fluide, on peut donc relier  $a'(t)$ ,  $b'(t)$  et  $v(x, t)$  de la manière suivant :

$$a'(t) = v(a(t), t)$$

Et

$$b'(t) = v(b(t), t).$$

Donc

$$\begin{aligned} M'(t) &= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx + v(b(t), t) u(b(t), t) - v(a(t), t) u(a(t), t) \\ &= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t) v(x, t)) dx \\ &= \int_{a(t)}^{b(t)} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t) v(x, t)) \right) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme,

Tous fonction dérivable sur intervalle  $\mathbb{R}$  elle est continue sur  $\mathbb{R}$ .

1.  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$  est continue sur  $]a(t), b(t)[ \subset \mathbb{R}$  car elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
2.  $\frac{\partial}{\partial x}(u(x, t)v(x, t))$  est continue sur  $]a(t), b(t)[ \subset \mathbb{R}$  car elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Donc  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(u(x, t)v(x, t))$  est continue sur  $]a(t), b(t)[ \subset \mathbb{R}$  ( elle commence par la somme de deux équations continues ).

Alors d'après la proposition de l'intégrale de fonction :

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(u(x, t)v(x, t)) \right) dx = 0 \implies \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(u(x, t)v(x, t)) = 0$$

Dans le cas

$$v(x, t) = c$$

On obtient l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0. \tag{1.1}$$

Dans le cas de l'équation avec un terme source, il suffit de remarquer que :

$$M'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

Alors

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx + b'(t)u(b(t), t) - a'(t)u(a(t), t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx + v(b(t), t)u(b(t), t) - v(a(t), t)u(a(t), t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

Et

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t) v(x, t)) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

Et d'après la propriété de l'intégrale :

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t) v(x, t)) \right) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

⇕

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t) v(x, t)) \right) = f(x, t)$$

Comme

$$v(x, t) = c$$

Donc

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = f(x, t). \tag{1.2}$$

Voir [9]

## 1.2 Equation de transport :

**Définition 1.2.1** *L'équation du transport est une équation aux dérivées partielles (EDP) de type hyperbolique qui s'écrit :*

1. L'équation sans terme de source :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 \\ u(x, t) = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

2. L'équation avec un terme de source :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = f(x, t) \\ u(x, t) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

avec :

- $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$  : dérivée partielle par rapport au temps,
- $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$  : dérivée partielle par rapport à l'espace,
- $c$  : une constante. [8]

**Proposition 1.2.1** *Si  $u_0 \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ ,  $c \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  et a vérifie une condition de Lipschitz globale par rapport à  $x$ , alors l'équation de transport admet une unique solution  $u \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ .*

Dans le cas particulier où la fonction  $c$  est constante, la solution est donnée par la formule

$$u(x, t) = u_0(x - ct)$$

**Preuve.** Il suffit dans un premier temps de vérifier que la formule donnée est bien solution de l'équation. Pour démontrer l'unicité il y a deux façons complémentaires de voir la chose : ■

1. Méthode1 : on vérifie que si  $u$  est une solution alors, pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ , la fonction est constante, on obtient donc le résultat.

$$t \rightarrow \varphi(t) = u(t, x_0 + ct)$$

2. Méthode2 : par estimation d'énergie  $L^2$ . On regarde l'équation vérifiée par  $u^2$  (c'est formellement la même) et on intègre l'équation sur un domaine de dépendance trapézoïdal.

$$\int_{a+ct}^{b+ct} u^2(t, x) dx = \int_a^b u^2(0, x) dx$$

On obtient l'estimation valable pour tous  $a < b, t > 0$ . En particulier : si  $u(0, \cdot)$  est nulle sur

$$[a + ct, b + ct]$$

Ceci fournit l'unicité et aussi la notion de vitesse finie de propagation. [3]

**Proposition 1.2.2** *Cauchy-Lipschitz global*

Soit  $n \geq 1$  et soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$ , soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$

$$f \in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

Globalment lipschitzienne :

$$\forall K \subset I, k > 0, \forall t \in I, \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq k \|y - z\|$$

Soient  $x \in \mathbb{R}^n, t_0 \in I$  Considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = f(\cdot, y) \\ y(t_0) = x \end{cases} \quad (1.5)$$

Et

$$y \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$$

Alors le problème de (1.5) admet une unique solution globale. [1]

### 1.3 Résolution analytique de l'équation de transport :

On cherche à résoudre l'équation : (1.4)

Avec les conditions :

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) & \text{si } x \geq ct \\ u(x, 0) = \psi(t) & \text{si } x < ct \end{cases}$$

On a  $x \in [0, 1]$  et  $t \in \mathbb{R}^+$ ; on cherche des solutions  $u$  de classe  $\mathbb{C}^1$ .

#### 1.3.1 Equation homogène :

Si

$$x \geq ct$$

On pose

$$\mathbb{C}_\xi = \left\{ (x(t), t), t \in \mathbb{R}^+ \left( x'(t) = c \text{ et } x(0) = \xi \right) \right\} \quad (1.6)$$

Et on pose

$$f(t) = u(x(t), t)$$

On a donc

$$f'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) + x'(t) \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t)$$

$$f'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t)$$

$$f'(t) = 0$$

Donc

$$u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(\xi)$$

On calcule  $\xi$

On a

$$x'(t) = c$$

D'où

$$x(t) = \int x'(t) dt = ct + x(0) = ct + \xi$$

Donc

$$(x(t), t) \in \mathbb{C}_\xi \iff x = ct + \xi \iff \xi = x - ct$$

Alors

$$u(x(t), t) = u_0(\xi) = u_0(x - ct) \tag{1.7}$$

Si

$$x < ct$$

On pose

$$\mathbb{C}_\xi = \left\{ (x(t), t), t \in \mathbb{R}^+ \left( x'(t) = c \text{ et } x(0) = -c\xi \right) \right\} \tag{1.8}$$

Et on pose

$$f(t) = u(x(t), t)$$

On a donc

$$f'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) + x'(t) \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t)$$

$$f'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t)$$

$$f'(t) = 0$$

Donc

$$u(x(t), t) = u(x(0), 0) = \psi(-c\xi)$$

On calcule  $\xi$

$$x'(t) = c$$

D'où

$$x(t) = \int x'(t) dt = ct + x(0) = ct - c\xi$$



Donc

$$(x(t), t) \in \mathbb{C}_\xi \iff x = ct - c\xi \iff \xi = \frac{ct - x}{c}$$

Alors

$$u(x(t), t) = \psi\left(\frac{ct - x}{c}\right) \tag{1.9}$$

### 1.3.2 Cas d'une équation avec un terme source :

Dans ce cas, la méthode des caractéristiques est toujours valable.

Si

$$x \geq ct$$

On a (1.6)

Et on pose

$$f(t) = u(x(t), t)$$

On a donc

$$f'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) + x'(t) \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t) = g(x, t)$$

On peut alors intégrer d'où

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t g(x(\tau), \tau) d\tau$$

$$u(x(t), t) = u(x(0), 0) + \int_0^t g(x(\tau), \tau) d\tau$$

Calculons  $f(0)$  :

On a

$$f(0) = u(x(0), 0) = u_0(\xi)$$

Et

$$x(t) = ct + \xi \implies \xi = x - ct$$

Donc

$$f(0) = u_0(x - ct)$$

Calculons  $g(x(\tau), \tau)$

On a :

$$x(\tau) = c\tau + \xi = x - c(t - \tau)$$

D'où

$$g(x(\tau), \tau) = g(x - c(t - \tau), \tau)$$

Donc

$$u(x(t), t) = u_0(x - ct) + \int_0^t g(x - c(t - \tau), \tau) d\tau \quad (1.10)$$

Si

$$x < ct$$

On a (1.8)

Et on pose :

$$f(t) = u(x(t), t)$$

Donc

$$f'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) + x'(t) \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t) = g(x, t)$$

On peut alors intégrer d'où

$$\int_0^x f(e) de = \int_0^x g(x(e), e) de$$

$$u(x(t), t) = u(x(0), 0) + \int_0^x g(x(e), e) de$$

Calculons  $f(0)$  :

On a

$$f(0) = u(x(0), 0) = \psi(-c\xi)$$

Et

$$x(t) = ct - c\xi \implies \xi = \frac{ct - x}{c}$$

Donc

$$f(0) = \psi\left(\frac{ct - x}{c}\right)$$

Calculons  $g(x(e), e)$

On a

$$x(e) = ce - c\xi = ce - c\left(\frac{ct - x}{c}\right)$$

$$x(e) = ce - ct + x$$

D'où

$$g(x(e), e) = g(ce - ct + x, e)$$

Donc

$$u(x(t), t) = \psi\left(\frac{ct - x}{c}\right) + \int_0^x g\left(ce + \frac{ct - x}{c}, e\right) de \quad (1.11)$$

Voir [9]

**Définition 1.3.1** *Les équations homogènes ce sont des équations de la forme :*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

On pose

$$t = \frac{y}{x}$$

On trouve

$$\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}$$

**Preuve.** On pose

$$t = \frac{y}{x} \implies y = tx \implies y' = t'x + t$$

On a

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \implies t'x + t = f(t) \implies t'x = f(t) - t$$

Alors

$$\frac{dt}{dx}x = (f(t) - t)$$

■

Donc

$$\frac{dt}{(f(t) - t)} = \frac{dx}{x}.$$

# Chapitre 2

## Résolution numérique de l'équation de transport

Dans cette chapitre on donner la résolution numérique de l'équation de transport, elle comonce par ( déffirence finie, shéma implicité et shéma explicité ), et elle donne la solution approche de cette équation, et à la fan on présenter la comparaison entre deux types de résolutions ( RAET, RNET ).

### 2.1 Résolution numérique de l'équation de transport :

Dans cette méthode donnée la solution approche la l'équation, on applique la méthode de Tayler pour donner la solution par différence finie de cette équation ; elle compose par :

$$y' = f$$

$$y^{(2)} = f_x + f_y f$$

Alors

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{dy}{dx} \left( i + \frac{h^2}{2} \frac{d^2y}{d^2x} \right) i + \dots + \left( \frac{h^n}{n!} \frac{dy^n}{dx^n} \right) i$$

Donc la série de Taylor définie par :

$$y_{i+1} - y_i = hf(x, y) + \frac{h^2}{2}f' + \dots + \frac{h^p}{p!}f^{p+1} + 0(h^{p+1})$$

Et

$$\Delta(x, y, h) = f(x, y) + \frac{h}{2}f' + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!}f^{p-1} + 0(h^p)$$

Donc la méthode de Taylor d'ordre "p" :

$$\Psi(x, y, h) = f(x, y) + \frac{h}{2}f' + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!}f^{p-1}$$

Voir [5]

### 2.1.1 Méthode des différences finies :

Le but est d'approximer les dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(x, t+h) - u(x, t)}{h} \tag{2.1}$$

Avec  $h$  petit et fixé.

Soit  $[0, L]$  espace bornée,  $c$  un vitesse constante non nulle, les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ pour } (x, t) \in [0, L] \times [0, T] \\ u(x+l, t) = u(x, t) \text{ pour } (x, t) \in [0, L] \times [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ pour } x \in [0, L] \end{array} \right. \tag{2.2}$$

On calcule la solution  $u$ , on fixe un pas de l'espace  $\Delta x = \frac{L}{N} > 0$  (entier positif) et un pas de temps  $\Delta t > 0$  on calcule la solution approchée de  $u_j^n \simeq u(j\Delta x, n\Delta t)$

au point  $(x_j, t^n)$  et la solution exacte  $u(x, 0) = u(x - ct)$ .

- $N$  : les nombres des points d'espaces,
- $h$  : le pas d'espace.

**Les schémas des différences finies :**

Soit

$$\alpha = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

**Le schéma décentré à gauche**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

**Le schéma décentré à droite**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0, \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha (u_{j+1}^n - u_j^n)$$

**Le schéma centré**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2}$$

**Le schéma upwind (décentré amont)**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{c + |c|}{2\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{c - |c|}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) = 0$$

Ie

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_j^n - \alpha (u_j^n - u_{j-1}^n) & \text{si } \alpha > 0 \\ u_j^n - \alpha (u_{j+1}^n - u_j^n) & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

### Le schéma diamant

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta t} = 0, \quad u_j^{n+1} = u_{j+1/2}^{n+1/2} + u_{j-1/2}^{n+1/2} - u_j^n$$

1. Le schéma diamant est inconditionnellement stable en norme  $\mathcal{L}^\infty$ .
2. Le schéma diamant est consistant avec l'équation de transport précis à l'ordre 2 en espace et en temps.
3. Le schéma diamant est convergent en norme  $\mathcal{L}^2$ .

### Le schéma de Lax-Friedrichs

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad u_j^{n+1} = \frac{1 - \alpha}{2} u_{j+1}^n + \frac{1 + \alpha}{2} u_{j-1}^n$$

Le schéma de Lax-Friedrichs est stable en norme  $L^\infty$  sous la condition Lax-Friedrichs

$$|c| \Delta t \leq \Delta x$$

Si  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  est constante lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$  et  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Il est consistant avec l'équation de transport, alors il est conditionnelement convergent.

### Le schéma de Lax-Wendroff

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{c^2 \Delta t}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

Ie

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} + \alpha^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2}$$



**Le schéma de Beam-Warming (pour  $c > 0$ )**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{g(u_{j-1}^n, u_j^n) - g(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n)}{\Delta x} = 0$$

Avec

$$g(A, B) = \frac{c \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} - 1 \right)}{2} A + \frac{c \left( 3 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)}{2} B$$

Ie

$$u_j^{n+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u_{j-2}^n + \alpha(2-\alpha) u_{j-1}^n + \frac{(\alpha-1)(\alpha-1)}{2} u_j^n$$

**Le schéma de Fromm (pour  $c > 0$ )**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{g(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n)}{\Delta x} = 0$$

Avec

$$g(A, B, C) = \frac{c \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} - 1 \right)}{4} A + cB + \frac{c \left( 1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)}{4} C$$

Ie

$$u_j^{n+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{4} u_{j-2}^n + \frac{\alpha(5-\alpha)}{4} u_{j-1}^n + \frac{(\alpha-1)(\alpha+4)}{4} u_j^n + \frac{\alpha(\alpha-1)}{4} u_{j+1}^n$$

**Le schéma anti-diffusif de Després-Lagoutière (pour  $c > 0$ )**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{g(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n)}{\Delta x} = 0$$

Ie

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \left( g(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n) \right)$$

Avec

$$g(L, C, R) = \begin{cases} A & \text{si } R \leq A \\ B & \text{si } R \geq B \\ C & \text{sinon} \end{cases}$$

Et

$$A = \max(L, C) + \frac{C - \max(L, C)}{\alpha}$$

$$B = \min(L, C) + \frac{C - \min(L, C)}{\alpha}$$

### La consistance

On dit un schéma est consistant si l'erreur de consistance  $e_n$  tend vers 0 lorsque tout les pas de discrétisation tendent vers 0.

**L'ordre de consistance** Un schéma numérique est dit consistant à l'ordre  $p$  en temps et  $q$  en espace si l'erreur de consistance vérifie :

$$e_h = O(\Delta t^p) + O(\Delta x^q)$$

**Erreur de consistance :** On appelle erreur de consistance est la différence entre la valeur exacte et la valeur discrétisée :

$$e_h = L_h u - Lu = u_{ij} - u(x_i, t_j)$$

**La stabilité :**

Soit  $H$  un espace vectoriel normé,  $A$  un opérateur de  $H$ . On note le schéma numérique

$$u_{n+1} = Au_n$$

On dit que ce schéma est stable si  $\exists k$  indépendante de  $n$  tq :

$$\|A^n\| \leq k$$

Le schéma est dit universellement stable si le schéma est toujours stable, c'est-à-dire si  $k$  est bornée quelque soient les pas de discrétisation .

Le schéma est dit conditionnellement stable si  $k$  est bornée pour certaines valeurs des pas de discrétisation.

**La convergence :**

Un schéma de discrétisation est convergent si la solution numérique  $u_{ij}$  tend vers la solution exacte  $u(x_i, t_j)$  lorsque les pas de discrétisation tendent vers 0.

Le schéma est conditionnellement convergent s'il converge pour une condition donnée.

**La discrétisation** Pour résoudre numériquement un problème mathématique, il faut utiliser des méthodes qui permettent de remplacer le problème "continu" par un problème "discret". m-d-f consiste à remplacer approximativement chaque dérivée continue dans l'équation différentielle par le rapport des différences.

**Le schéma numérique** Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^n$ , on considère l'opérateur différentielle  $L$  et l'équation

$$Lu(x, t) = f \quad \text{sur } \Omega$$

$L_h$  est appelée schéma de discretisation (schéma numérique).

L'équation  $L(x, t)$  discrétisée :

$$A_l u_{j+l} + A_{l-1} u_{j+l-1} + \dots + A_0 u_j = 0$$

est appelée le schéma de discrétisation à  $l$  niveaux en temps .Si  $A_l$  est la matrice identité, le schéma est dit explicite. Sinon, il est implicite.

Pour un problème linéaire aux valeurs initiales bien posé, et une approximation linéaire par différences finies qui vérifie la condition de consistence, la stabilité est la condition nécessaire et suffisante pour la convergence. [4]

### 2.1.2 Schéma explicite :

#### Approximation des dérivées partielles :

On utilise les développements de Taylor suivants :

$$u(x_n, t_{p+1}) = u(x_n, t_p) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_n, t_p) + 0(\tau) \quad (2.3)$$

$$u(x_{n-1}, t_p) = u(x_n, t_p) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_n, t_p) + 0(h) \quad (2.4)$$

On obtient donc :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_n^{p+1} - u_n^p}{\tau} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_n^p - u_{n-1}^p}{h} \quad (2.5)$$

Les conditions initiales nous donnent les valeurs des

$$u_0^p = u_0^p(t_p) = u(p\tau)$$

Et les conditions aux limites nous donnent

$$u_n^0 = \psi(x_n) = \psi(nh).$$

### Détermination de l'équation :

On veut résoudre :

$$\frac{u_n^{p+1} - u_n^p}{\tau} + c \frac{u_n^p - u_{n-1}^p}{h} = f_n^p \Leftrightarrow u_n^{p+1} = \tau f_n^p + u_n^p \left(1 - \frac{c\tau}{h}\right) + \frac{c\tau}{h} u_{n-1}^p$$

On pose

$$\gamma = \frac{c\tau}{h}$$

D'où :

$$u_n^{p+1} = \tau f_n^p + u_n^p (1 - \gamma) + \gamma u_{n-1}^p \quad (2.6)$$

Dans le cas de l'équation sans terme source, on a  $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$f_n^p = 0$$

D'où :

$$u_n^{p+1} = u_n^p (1 - \gamma) + \gamma u_{n-1}^p. \quad (2.7)$$

Il n'est pas toujours stable, il ne converge donc pas toujours vers la solution.

La convergence est acquise quand

$$\gamma < 1.$$

Voir [2]

### 2.1.3 Schéma implicite :

Nous allons maintenant étudier le schéma implicite. Il présente l'avantage d'être toujours stable et donc de toujours converger vers la solution.

**Approximation des dérivées partielles :**

Ce schéma est très similaire au schéma explicite. La seule différence réside dans l'approximation de la dérivée en espace. On a ici :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_n^{p+1} - u_{n-1}^{p+1}}{h} \quad (2.8)$$

**Détermination de l'équation :**

L'équation du schéma implicite est :

$$\frac{u_n^{p+1} - u_n^p}{\tau} + c \frac{u_n^{p+1} - u_{n-1}^{p+1}}{h} = f_n^p$$

Avec

$$\gamma = \frac{c\tau}{h}$$

$$u_n^{p+1} (1 + \gamma) - \gamma u_{n-1}^{p+1} = \tau f_n^p + u_n^p$$

On pose

$$v_n = u_n^{p+1} \text{ et } w_n = \tau f_n^p + u_n^p$$

Dans le cas de l'équation sans terme source, on a :

$$w_n = u_n^p$$

Alors

$$v_n (1 + \gamma) - \gamma v_{n-1} = w_n$$

Si on connaît  $u_n^p$ , alors on peut en déduire les valeurs de  $u_n^{p+1}$  grâce au système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -\gamma & \gamma + 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -\gamma & \gamma + 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & -\gamma & \gamma + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_N \end{pmatrix}$$

Donc on connaît  $v_0$ , on peut déduire  $v_1$  :

$$-\gamma v_0 + (1 + \gamma) v_1 = w_1 \Leftrightarrow v_1 = \frac{w_1 + \gamma v_0}{(1 + \gamma)} \quad (2.9)$$

De même  $v_i$  donne  $v_{i+1}$ . On obtient ainsi tous les  $u_n^{p+1}$ .

Il est important de rappeler dans le modèle explicite nécessite des condition de stabilité pour appliquer, mais dans modèle implicite peut s'appliquer dans tous les cas. [7]

### 2.1.4 Comparaison entre deux modèles :

Le modèle implicite bien que le modèle explicite, et sh.ex bien la solution théorique.

Donc la comparaison de deux modèles :

- Le sh.ex approxime très bien les solutions théorique
- Le sh.ex nécessite le respect de la condition de stabilité
- Le sh.im bien que le m.e
- Le sh.im stabilité toujours mais sh.ex n'est pas toujours stable.

**Remarque 2.1.1** *Il n'est donc pas nécessaire de mettre en place un algorithme pour résoudre ce système linéaire.*

**Remarque 2.1.2** *Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  et  $\alpha \in A$*

1. Le plus grand élément de  $A$ , note  $\max A$  est unique, s'il existe un réel  $\alpha$  tel que :

$$\alpha \in A \text{ et } \forall x \in A : x \leq \alpha$$

2. Le plus petit élément de  $A$  note  $\min A$  si'l existe un réel  $\alpha$  tel que :

$$\alpha \in A \text{ et } \forall x \in A : x \leq \alpha$$

3. Espace  $\mathcal{L}^P$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) : soit  $(X, A, \mu)$  espace mesuré et soit

$$f : (X, A) \rightarrow (\mathbb{k}, B(\mathbb{k}))$$

et soit  $\mathbb{k} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$  mesurable

$$f \in \mathcal{L}^P(X, A, \mu) \Leftrightarrow \begin{cases} f : X \rightarrow \mathbb{k} \text{ mesurable} \\ \int_X |f|^p d\mu < \infty \end{cases}$$

4. Application mesurable : soit  $(X, A)$  et  $(Y, B)$  deux espace mesurables ,alors une application  $f : X \rightarrow Y$  est mesurable si

$$\forall b \in B : f^{-1}(b) \in A$$

5. Espace mesurable :  $(X, A)$  espace mesurable si l'ensemble  $X$  muni d'un tribu  $A \subset P(X)$ .

6. Tribu : on appelle tribu de parties de  $X$  tout sous ensemble  $A \subset P(X)$  tel que

- $X \in A$
- $a \in A \implies a^c \in A$  (stabilité par passage au complimantaire),
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} a_n \in A$  (stabilité par renion demombrable).

7. Espace mesuré :  $(X, A, \mu)$  e.m tel que



- $(X, A)$  espace mesurable,
- $\mu$  est un mesure.

8. Mesure : soit  $(X, A)$  e.m

$$\mu : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$$

$\mu$  est un mesure tel que :

- $\mu(\emptyset) = 0$  Pour tout  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  une suite d'éléments deux à deux disjoints Pour tout  $(a_i \cap a_j = \emptyset \forall i \neq j)$
- $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} a_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(a_n)$

9. Image réciproque : soit

$$f: X \rightarrow Y$$

$$A \subset X \text{ et } B \subset Y$$

On définit l'image direct de  $A$  par :

$$f(A) = \{y \in Y / \exists x \in A : y = f(x)\}$$

Et l'image réciproque de  $B$  :

$$f^{-1}(B) = \{x \in X / f(x) \in B\}$$

## 2.2 Comparaison entre deux solutions

En prend quelque point de défférent par s.num et la s.ana

La méthode analytique

- Donner la solution exacte de l'équation
- Méthode précise
- Méthode très bien des m.n parcequ'elle donner toujours la solution vérité

La méthode numérique

- Donner la solution approchée
- Méthode fort impécises
- Obtenir des valeur numériques discrètes qui approchent la solution exact
- Méthode mal parceque des fois la resultat total faux
- Ne donne pas la solution vérité mais estimer la solution.

# Chapitre 3

## Application

Dans cette chapitre présenter la solution analytique et la solution numérique de equation de transport et commeparer entre les deux type de solution dans matlab.

### 3.1 La solution analytique dans matlab :

```
clc
clear all
xmin=0;
xmax=1; N=21;
tmax=1;
t=0;
dx=(xmax-xmin)/N;
x=xmin :dx :xmax; c=1;
dt=(xmax-xmin)/(abs(c)*N);
r = dt/(dx);
u0=sin(2*pi*x);
u=u0;
unpun=u0;
```

```

netaps=tmax/dt ;
for n=0 :netaps
u(1)=0;
u(N+1)=0;
exacte = sin(2*pi*(x-t));
plot(x,exacte,'r-');
end

```

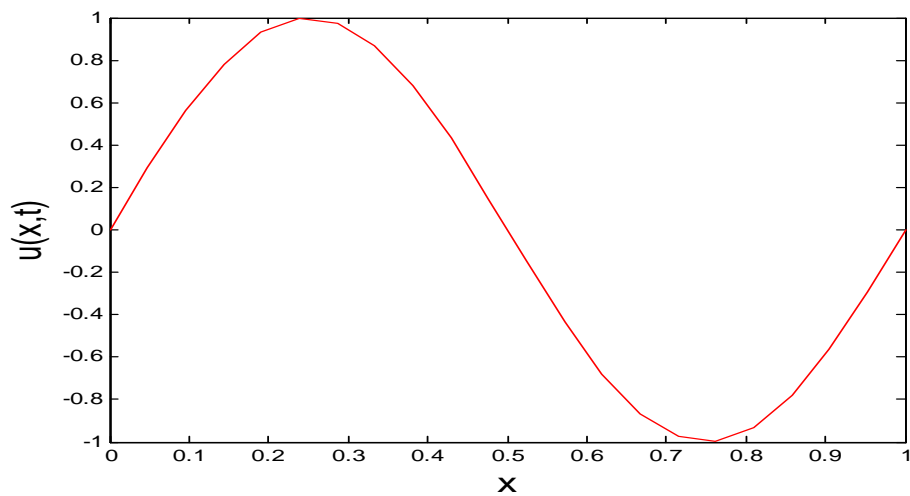


FIG. 3.1 – la solution analytique de l'équation transport

On remarque cette figure (la solution analytique de l'équation transport par la solution initiale  $\sin(2\pi x)$  et la solution exacte  $\sin(2\pi(x - t))$ ) :

Dans l'intervalle  $[0, 0.25[$  l'équation de transport est croissante, on  $x = 0.25$  l'équation  $u(x, t) = 1$ , et dans l'intervalle  $]0.25, 0.75[$  l'équation est décroissante, on  $x = 0.75$  l'équation  $u(x, t) = -1$ , on détermine l'intervalle  $]0.75, 1[$  l'équation est croissante et on  $x = 1$  l'équation  $u(x, t) = 0$ .

## 3.2 La solution numérique de l'équation de transport :

```
clc
clear all
xmin=0;
xmax=1;
N=21;
tmax=1;
t=0;
dx=(xmax-xmin)/N;
x=xmin :dx :xmax;
c=1;
dt=(xmax-xmin)/(abs(c)*N);
r = dt/(dx);
u0=sin(2*pi*x);
u=u0;
unpun=u0;
netaps=tmax/dt;
for n=0 :netaps
u(1)=0;
u(N+1)=0;
end
for i=2 :N
unpun(i)=r*u(i)+(1-r)*u(i-1);
u=unpun; t=t+dt;
plot(x,u,'bo-');
```

end

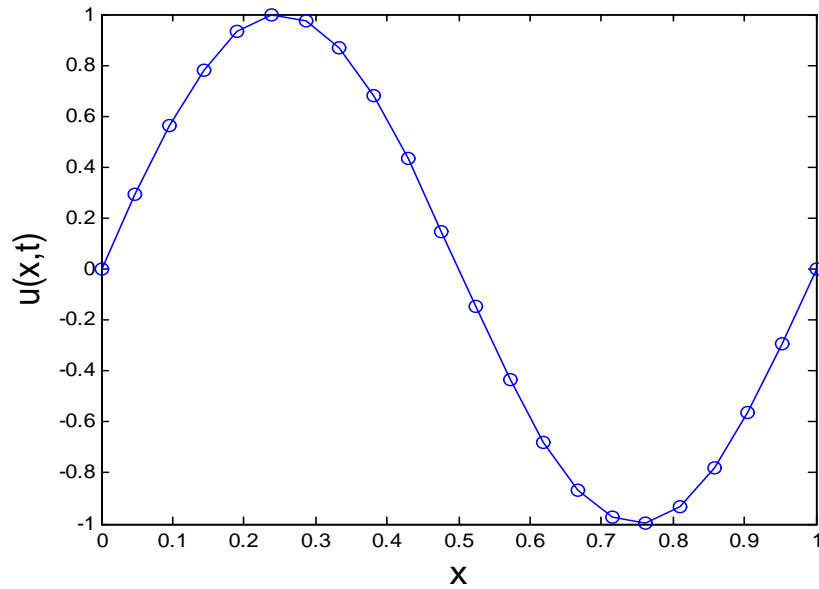


FIG. 3.2 – la solution numérique de l'équation transport

On remarque cette figure (la solution numérique de l'équation transport par la solution initiale  $\sin(2\pi x)$  et la solution approche  $u(i) = r * u(i) + (1 - r) * u(i - 1)$ ) :

Dans l'intervalle  $[0, 0.25[$  l'équation de transport est croissante, on  $x = 0.25$  l'équation  $u(x, t) = 1$ , et dans l'intervalle  $]0.25, 0.75[$  l'équation est décroissante, on  $x = 0.75$  l'équation  $u(x, t) = -1$ , on dernier intervalle  $]0.75, 1[$  l'équation est croissante et on  $x = 1$  l'équation  $u(x, t) = 0$ .

### 3.3 Comparaison entre deux solutions :

```
clc
```

```
clear all
```

```
xmin=0;
```

```
xmax=1;c=1;
```

```
N=21;
```

```
t=0;
```

```

tmax=1;
dx=(xmax-xmin)/abs(N);
dt=(xmax-xmin)/(abs(c)*N);
x=xmin :dx :xmax;
r = dt/(dx);
u0=sin(2*pi*x);
u=u0;
unpun=u0;
netaps=tmax/dt;
for n=0 :netaps
u(1)=0;
u(N+1)=0;
for i=2 :N
unpun(i)=r*u(i)-(r-1)*u(i-1);
end
u=unpun;t=t+dt;
exacte = sin(2*pi*(x-t));
plot(x,exacte,'r-');
hold on
plot(x,u,'bo-','markerfacecolor','b')
hold off
xlabel('x','fontsize',16)
ylabel('u(x,t)','fontsize',16)
end

```

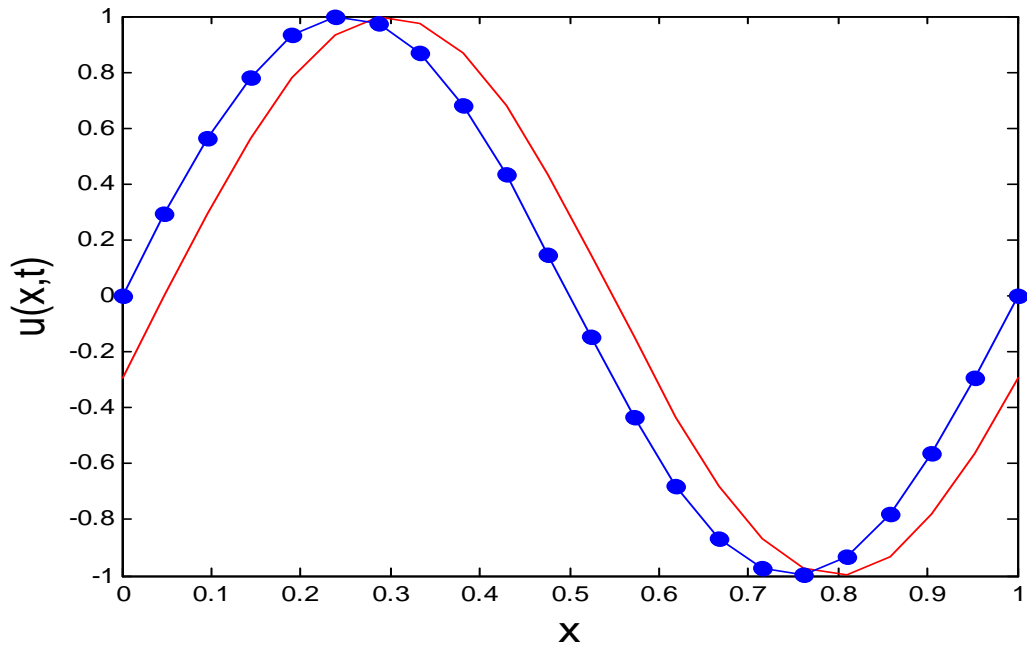


FIG. 3.3 – Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique



# Conclusion

On peut diviser les apports de ce mémoire et de l'étude des techniques des résolutions analytique et numérique de l'équation d'advection (Transport), en trois domaines :

- Sur le plan mathématique, il nous a permis de découvrir une méthode de résolution analytique et numérique de cette équation.
- Sur le plan informatique, il nous a permis de mettre en pratique les connaissances de nos cours d'informatique.
- Sur le plan physique, il nous a permis de comprendre comment établir un modèle physique associé à un phénomène simple.

# Bibliographie

- [1] Arnaud Girand (2012) [Rou09], p. 180–184.
- [2] Ensta-Paristech Construction du Schéma explicite, P 14.
- [3] Franck Boyer (2014), Université de Provence - Université Paul Cézanne.
- [4] Gloria Faccanoni (2012), Imath Bâtiment U-318 Université du Sud Toulon France.
- [5] Gloria Faccanoni (2016), Imath Bâtiment M-117 Université du Sud Toulon France
- [6] Khelil Naceur (2012), cours Master 1, Approximation numérique des équations différentielles ordinaires et partielles, Université Mohamed Khider, Biskra P 3-4.
- [7] Laurent Risser (2006), Schéma implicite de Crank Nicolson, P14-15.
- [8] Marie-Ève Cavel, Eliass El Alami, Josph lefevre, Xavier Lemahieu, Nathan Rouxelin, Mathilde Tavernier (2015), Transport d'une espèce chimique dans un fluide,P 8-12.
- [9] Sébastien Charnoz et Adrian Daerr Université Paris 7 Denis Diderot CEA Saclay.

# Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

*RAET* : résolution analytique de l'équation transport.

*RNET* : résolution numérique de l'équation transport.

*ET* : l'équation de transport.

*sh.ex* : schéma explicité.

*sh.im* : schéma implicite.

*Comp* : Comparaison entre les deux solutions

*EDP* : équation équation dérivée partielle

$C^1$  : l'équation dérivable d'ordre 1 est continue.

$\|\cdot\|$  : la normé .