République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

BEZZIOU ABDELAZIZ

Titre :

Equations Intégrales de Fredholm de Seconde Espace et Méthode Galerkine

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**CHEMCHAM MADANI**	UMKB	Encadreur
Dr.	**HOUAS OMRANE**	UMKB	Examinateur
Dr.	**KABOUL HANANE**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à : Ma très chère et douce mère, Mon très cher père à qui m'adresse au ciel les vœux les plus ardents pour la conservation de leur santé et de leur vie.

Pour mon encadreur.

Pour mon cher frère et mes chères sœur.

Pour mes très chers amis.

REMERCMMENT

Tout d'abord, je remercie Allah pour la volonté, la force, la santé et la patience qu'il m'a donné an de réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance au Dr. " **CHEMCHAM MADANI** ", pour la qualité

exceptionnelle de sa encadrement, il m'a en effet guidé pendant tout l'année.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du Jury ; Dr. " " et Dr. " ", qui ont accepté d'évaluer et de juger mon travail.

Je remercie à touts les enseignants du département de Mathématiques, en particulier chef de département Dr. " ".

Merci enfin à ma famille, notamment à mes parents dont l'affection et les encouragements m'ont rendue la vie vraiment plus agréable et tous mes amis chacun avec son nom.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

Equation intégrale est une équation fonctionnelle ou le fonction inconnue intervient sous le signe d'intégration, elle provient des problèmes physiques directement .D'autres fois, elle résulte d'une équation différentielle ordinaire. Ainsi, un problème aux limites peut être transforme à une équation intégrale via la méthode des équations intégrale. La solution exacte des équations intégrales est connue dans des cas rares, cependant ces dernières sont a priori simples à résoudre numériquement car on se ramène généralement au problème de la recherche de solutions d'un système linéaire .Dans ce mémoire ou s'intéresse particulièrement à l'équation intégrale de Fredholm.

Notre travail est reparti en deux chapitres :

Dans le premier chapitre, nous commençons par classifier les équations intégrales linéaires en les illustrant par des exemples, ainsi que la relation entre les équations différentielles et les Equation intégrale, on étudie l'existence et l'unicité de la solution d'une équation de Fredholm de seconde espèce et les méthodes de résolution analytique des Equation intégrales parmi ces méthodes : Méthode de Fredholm, Méthode de Noyaux itérés, Méthode de noyaux dégénérés.

Dans le deuxième chapitre, on présente les méthode de résolution numérique de l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce, et nous avons utilisés les méthodes de Boubnov-Galerkin, et quelques exemples numériques que confirme les résultats théoriques obtenues.

Chapitre 1

Equations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espéce

1.1 Equations Intégrales Linéaires :

Définition 1.1.1 *On appelle équation intégrale linéaire une équation, á une inconnue $\varphi(x)$ de la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda. \int_a^b k(x,t).\varphi(t)dt \tag{1.1}$$

Où, K sont des fonctions connues et λ Um paramètre numérique non nul, réel ou complexe avec l'opérateur A est une opérateur intégral linéaire de l'équation (1.1) i.e. l'équation est de la forme :

$$\varphi(I - \lambda A)(x) = f(x)$$

Notion de linéairité

Si l'exposant de la fonction inconnue $\varphi(x)$ dans le signe de l'intégrale est l'un, l'équation intégrale est appelé linéaire. Si la fonction inconnue $\varphi(x)$ est d'exposant autre qu un, ou si l'équation contient des fonctions non linéaires de $\varphi(x)$, comme $e^{\varphi}, \cos\varphi$,et $\ln(1+\varphi)$, l'équation intégrale est appelé non linéaire . Pour expliquer ce concept, nous considérons les équations suivantes :

$$\varphi(x) = 1 - \int_0^1 (x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^{\pi} \left(x^2+t\right)\cos t\varphi(t)\,dt,$$

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^1 (1+x-t)\,\varphi(t)^4\,dt.$$

Les deux premiers exmples sont des équation intégrale linéaire, le dernier exmple est une équation intégrale non linéaire.

1.1.1 Opérateur intégral linéaire :

Définition 1.1.2 *Soit E un espace de Banach. L'opérateur Adéfini par*

$$A : E \to E$$

$$\varphi \to A\varphi$$

oú

$$\begin{aligned} A\varphi :\ & [a.b] \to \mathbb{C} \\ x \to & (A\varphi)(x) = \int_{\Omega} k(x,t)\,\varphi(t)\,dt \end{aligned}$$

et oú Ω est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ $(\Omega = [a,b]$ ou $\Omega = [a,x])$,
est appelé opérateur intégral linéaire á noyau K .

Remarque 1.1.1 *L'opérateur A linéaire veut dire*

$$\forall\varphi_1, \varphi_2 \epsilon E, \forall\alpha, \beta\epsilon\mathbb{C}, \qquad A\left(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\right) = \alpha A\left(\varphi_1\right) + \beta A\left(\varphi_2\right).$$

Le noyau K est une fonction de $[a,b] \times [a,b]$ dans $\mathbb{C}$.

Exemple 1.1.1 *L'opérateur S défini par*

$$\begin{aligned} S\varphi &: [0,1] \to \mathbb{C} \\ x &\to (S\varphi)(x) = \int_0^1 e^{tx^2}\varphi(t)\,dt \end{aligned}$$

est un opérateur integral lineaire á noyau $k(x,t) = e^{tx^2}$

1.2 Equations Intégrales Linéaires types

Définition 1.2.1 *(Equation intégrale de volterra)* *Une équation , á une inconnue $\varphi(x)$, de la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda.\int_a^x k(x,t).\varphi(t)dt, \tag{1.2}$$

oú $f(x)$, $k(x,t)$ sont des fonctions connues et λ est une paramétre numérique, est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce. la fonction $k(x.t)$ est le noyau de l'équation de vol-terra. Si $f(x) \equiv 0$, l'équation (1,2) s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^x k(x,t).\varphi(t)dt\ , \tag{1.3}$$

et s appelle équation homogéne de volterra de seconde espéce.

Une équation , á une inconnue $\varphi(x)$, de la forme

$$\int_a^x k(x,t).\varphi(t)dt\ = f(x) \tag{1.4}$$

est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de premiére espèce. Nous supposerons dans la suite que la limite inférieure a est égale á zéro, ce qui ne réduira nullement la généralité des résultats.

On appelle solution de l'équation intégrale (1,2), (1,3) ou (1,4) une fonction $\varphi(x)$ qui, dés qu'elle est portée dans cette équation, la chan-ge en identité (en x).

Exemple 1.2.1 *On considère l'équation de Volterra de seconde espèce*

$$\varphi(x) = 1 - \int_0^x \varphi(t)dt \tag{1.5}$$

ou le noyau $k(x,t) = 1$ le terme libre $f(x) = 1$ et $\lambda = -1$.

Définition 1.2.2 *(Equation intégrale de Fredholm) Une équation , á une inconnue $\varphi(x)$, de la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda. \int_a^b k(x,t).\varphi(t)dt \tag{1.6}$$

oú $f(x)$, $k(x,t)$ sont des fonctions connues et λ est une paramétre numérique, est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce.

Si $f(x) \equiv 0$, l'équation (1,6) s'écrit

$$\varphi(x) = \int_a^b k(x,t).\varphi(t)dt$$

et s appelle équation homogéne de Fredholm de seconde espéce.

Une équation , á une inconnue $\varphi(x)$, de la forme

$$\int_a^b k(x,t).\varphi(t)dt = f(x)$$

Est dite équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce .

Exemple 1.2.2 *Soit l'équation*

$$\varphi(x) = e^x - x + \int_0^1 x(e^{xt} - 1).\varphi(t)dt$$

Montre que $\varphi(x) = 1$ *est solution de cette equation*

$\varphi(x) = xe^{-x}$ *est solution de l'équation*

$$\varphi(x) = (x-1).e^{-x} + 4.\int_0^{\infty} e^{-(x+t)}.\varphi(t)dt$$

1.3 Equation intégrale de Fredholm :

Notions fondamentales

On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda.\int_a^b k(x,t).\varphi(t)dt \tag{1.7}$$

oú $\varphi(x)$est la fonction inconnue, $k(x,t)$ et $f(x)$ des fonctions données, x et t deux variables réelles parcourant l'intervalle (a,b) et λ Un paramètre numérique.

La fonction, $k(x,t)$ est le noyau de l'équation intégrale (1.7), on suppose que le noyau $k(x,t)$ est défini dans le carré $\Omega\{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ du plan (x,t) et continu dans Ω, ou bien présente des discontinuités telles que l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dxdt$$

soit finie.

Si $f(x) \neq 0$, léquation (1.7) est dite non homogéne, dans le cas contraire l'équation intégrale (1.7) s'écrit

$$\varphi(x) - \lambda.\int_a^b k(x,t).\varphi(t)dt = 0 \tag{1.8}$$

.et on dit qu'elle est homogéne

Une équation intégrale de la forme

$$\int_a^b k(x,t).\varphi(t)dt = f(x) \tag{1.9}$$

Où la fonction inconnue $\varphi(x)$ n'intervient que sous le signe d'intégration, s'appelle équation intégrale de Fredholm de premiére espéce.

Les bornes a et b dans les 'équation (1.7), (1.8) et (1.9) peuvent être aussi bien finies qu'infinies.

On appelle solution des équation intégrales (1.7), (1.8) et (1.9) toute fonction $\varphi(x)$ telle qu'après sa substitution dans l'équation, celle-ci devient une identité en $x\epsilon(a,b)$.

Théorème 1.3.1 *(d'existence et d'unicité)*

Si $f\epsilon L_2\left([a,b]\right)$,si le noyau K vérifie la condition

$$M = \int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dxdt < \infty$$

et si $|\lambda|\sqrt{M} < 1$. Alors léquation

$$\varphi\left(x\right) = f\left(x\right) + \lambda \int_a^b k(x,t).\varphi(t)dt$$

admet une solution unique dans $L_2\left([a,b]\right)$.

Proof. Considérons l'opérateur

$$\left(T\varphi\right)\left(x\right) = f\left(x\right) + \lambda \int_a^b k(x,t).\varphi(t)dt.$$

Comme $f\epsilon L_2\left([a,b]\right), T\varphi\epsilon L_2\left([a,b]\right)$ si

$$\int_a^b k(x,t).\varphi(t)dt\epsilon L_2\left([a,b]\right).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous trouvons

$$\left|\int_a^b k(x,t).\varphi(t)\right| \leq \left(\int_a^b |k(x,t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par suite,

$$\left|\int_a^b k(x,t).\varphi(t)\right|^2 \leq \left(\int_a^b |k(x,t)|^2 dt\right) \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2 \, dt\right)$$

et

$$\int_a^b \left|\int_a^b k(x,t).\varphi(t)\right|^2 dx \leq \int_a^b \left(\int_a^b |k(x,t)|^2 dt \int_a^b |\varphi(t)|^2 \, dt\right) dx \leq \left(\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dx dt\right) \int_a^b |\varphi(t)|^2 \, dt \tag{1.10}$$

puisque

$$\left(\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dt dx\right) < \infty et \int_a^b |\varphi(t)|^2 \, dt < \infty,$$

(1.10) est satisfaite et donc, T applique $L_2\left([a,b]\right)$ sur lui méme.

Notons aussi qu'on a montré que l'opérateur défini par

$$\left(A\varphi\right)(x) = \int_a^b k(x,t).\varphi(t)dt$$

est borné. Par suite, par le théoréme (1.3.1), l'équation $T\varphi = \varphi$ admet une unique solution dans $L_2\left([a,b]\right)$ lorsque $|\lambda| \, M < 1$. ■

Exemple 1.3.1 *Considérons l'équation intégrale*

$$\varphi\left(x\right) = f(x) + \lambda \int_{-1}^{1} xt\varphi(t)dt$$

on a

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (xt)^2 dt dx = \frac{4}{9} < \infty$$

d'oú l'équation admet une solution unique si $|\lambda| < \frac{3}{2}$.

Théorème 1.3.2 *(du point fixe de Banach)* *soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui-méme, avec $\|A\| < 1$ et soit I l'opérateur identité sur X . Alors, l'opérateur $(I - A)$ admet un unique point fixe. En d'autres termes l'équation*

$$(I - A)\,\varphi = \varphi$$

admet une unique solution.

Définition 1.3.1 *On dit qu'un opérateur linéaire A d'un espace de Hilbert H est compact s'il transforme tout sous-ensemble borné B de H en un ensemble relativement compact (l'adhé-rence $\overline{T\,(B)}$ est compacte).*

Théorème 1.3.3 *(Alternative de Fredholm)*
Soit A un opérateur comapct d'un espace de Hilbert H et λ un nombre complexe. Alors, on a deux possibilitités pour l'équation

$$\varphi - \lambda A\varphi = f.$$

Ou bien, quei que que soit le seconde membre f , elle posséde une unique solution φ.
Ou bien, l'équation homogéne

$$\varphi - \lambda A\varphi = 0.$$

admet une solution non nulle.

Proof. Si $\lambda = 0$, on a la premiére possibilité.
Soit donc $\lambda \neq 0$ et posons $\mu = \lambda^{-1}$. L'équation

$$\varphi - \lambda A\varphi = f$$

est alors équivalente á l'équation

$$(A - \mu I)\,\varphi = -\mu f.$$

Si μ n'est pas valeur propre de A, alors $(A - \mu I)$ est inversible, et c'est le premiere cas qui a lieu ;

si μ est une valeur propre de A, alors $(A - \mu I)$ c'est le second cas qui a lieu. ■

Exemple 1.3.2 *Considerons l'équation intégrale*

$$\varphi(x) = e^x + \lambda \int_0^1 (3x-2)\, t\varphi(t)\, dt$$

on a l'équation homogéne

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (3x-2)\, t\varphi(t)\, dt = 0.$$

n'admet que la solution nulle, et donc l'équation non homogéne admet une solution unique.

1.3.1 Théoréme d'existence et d'unicité de la solution de léquation intégrale linéaire de Fredholm

Contraction de l'opérateur :

Soit l'opérateur

$$\varphi - A\varphi = f.$$

L'unicité et l'existence de la solution peut étre donnée par la série de 'Neumann' pourvu que l'opérateur Asoit une contraction $\|A\| < 1$.

Série de Neumann

Théorème 1.3.4 *Soit A un opérateur linéaire borné d'un espèce de Banach X dans lui-même, avec $\|A\| < 1$ et soit I l'opérateur identique sur X . Alors $I - A$ admet un opérateur inverse borné donné par la série de Neumann*

$$(I - A)^{-1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

de plus

$$||(I-A)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||A||}$$

Proof. comme $\|A\| < 1$, on a la convergence absolue :

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||A^k|| \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||A||^k = \frac{1}{1-||A||}$$

dans l'espace de Banach $L(X)$, par consequent la série de Neumann converge en norme et définit un opérateur borné

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

Avec $||S|| \leq (1-||A||)^{-1}$ de plus S est l'inverse de $I-A$, En effet ,en utilisant les notations $A^0 = i, A^K = AA^{K-1}$ on peut voir que :

$$(I-A)S = (I-A)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} A^k = \lim_{n\to\infty}(I-A^{n+1}) = I$$

aussi

$$S(I-A) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} A^k(I-A) = \lim_{n\to\infty}(I-A^{n+1}) = I$$

puisque $||A^{n+1}|| \leq ||A||^{n+1} \to 0, lorsquen \to \infty$ ■

Théorème 1.3.5 *Sous les hypothèses du théorème 2 la méthode des approximations successives :*

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + f = 0, 1, 2 \ldots\ldots.$$

Ou φ_0 est arbitraire dans X converge vers l'unique solution φ de l'équation $\varphi - A\varphi = f$. pour toute$f \ \epsilon\ X$.

Proof. Il est aisé de voi que :

$$\varphi_n = A^n\varphi_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^k f \qquad\qquad n = 1, 2.....$$

d'ou

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\sum_{k=0}^{\infty}A^kf=\ (I-A)^{-1}f$$

■

Corollaire 1.3.1 *Soit K un noyau continu vérifiant :*

$$\max_{x\epsilon[a,b]}\int_a^b|k(x,t)|dt<1$$

alors, l'équation intégrale de seconde espése :

$$\varphi(x)-.\int_a^b k(x,t).\varphi(t)dt=f(x),x\ \epsilon[a,b]$$

admet une unique solution $\varphi\ \epsilon\ C([a,b])$ pour toute $f\ \ \epsilon\ C([a,b])$. De plus, la méthode des approximations successives

$$\varphi_{n+1}(x)=\int_a^b k(x,t).\varphi_n(t)dt+f(x),n=1,2....$$

converge uniformément vers cette solution pour tout φ_0 arbitraire dans $C([a,b])$

Corollaire 1.3.2 *Soit $A:X\to X$ un opérateur linéaire compact sur un espace normé X.Si l'équation homogéne*

$$\varphi-A\varphi=0 \tag{1.11}$$

admet uniquement la solution triviale $\varphi=0$, alors pour toute $f\ \epsilon\ X$, l'équation inhomogéne

$$\varphi-A\varphi=f$$

Admet une solution unique $\varphi\ \epsilon\ X$, dépendante de f

Alternative de Fredholm

Pour les équation intégrales de Fredholm on a les théorémes suivants :

Théorème 1.3.6 *L'équation linéaire non homogéne de seconde espéce*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda. \int_a^b k(x,t).\varphi(t)dt \tag{1.12}$$

admet une solution unique quelle que soit $f(x)$ (apparatenant á une classe suffisamment vaste), ou bien l'équation homogéne correspondante

$$\varphi(x) - \lambda. \int_a^b k(x,t).\varphi(t)dt = 0 \tag{1.13}$$

a ou moins une solution non triviale, i.e. non identiquement nulle.

Théorème 1.3.7 *les premier cas de l'alternative a également lieu pour l'équation adjointe de (1.12)*

$$\Psi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\Psi(t)dt = g(x) \tag{1.14}$$

et le nombre de solutions linéairement indépendantes de l'équation intégrales homogéne (1.13) et de l'équation adjointe

$$\Psi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\Psi(t)dt = 0 \tag{1.15}$$

est fini et le méme pour les deux équations.

Remarque 1.3.1 *Si les fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots..,$ $\varphi_n(x)$ sont solu-tions de l'équation homogéne (1.12), il en également de leur combi-naison linéaire :*

$$\varphi(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots.. + C_n\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k\varphi_k(x),$$

oú C_K $(k = 1, 2, \ldots., n)$ sont des constantes arbitraires.

Théorème 1.3.8 *Dans le second cas de l'alternative, une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation non homogéne (1.12) admette une solution $\varphi(x)$ est que le second* *membre de cette équation, i.e. la fonction $f(x)$ soit orthogonal á toute solution $\Psi(x)$ de l'équation homo-géne (1.15) adjointe de (1.13) :*

$$\int_a^b f(x)\Psi(x)\,dx = 0.$$

1.4 Quelques méthodes analytiques de résolution des équations Intégrales linéaires de Fredholm de seconde espéce

Méthode de Fredholm

La solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce :

$$\varphi(x) - \lambda.\int_a^b k(x,t).\varphi(t)dt = f(x). \tag{1.16}$$

est donnée par la formule :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda.\int_a^b R(x,t,\lambda).f(t)dt \tag{1.17}$$

ou la fonction $R(x,t.,\lambda)$ est dite résolvent de Fredholm de l' équation (1.16) est définie par l'égalité :

$$R(x,t,\lambda) = \frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)} \tag{1.18}$$

sous la condition $D(\lambda) \neq 0$. Ici $D(x,t,\lambda)$ *et* $D(\lambda)$ sont des séries de puissances de λ :

$$D(x,t,\lambda) = k(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} B_n(x,t)\lambda^n \tag{1.19}$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} C_n\lambda^n \tag{1.20}$$

avec les coefficients ainsi définies :

$$B_n(x,t) = \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} k(x,t) & k(x,t_1) & ... & k(x,t_n) \\ k(t_1,t) & k(t_1,t_1) & ... & k(t_1,t_n) \\ k(t_2,t) & k(t_2,t_1) & ... & k(t_2,t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k(t_n,t) & k(t_n,t_1) & ... & k(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \cdots dt_n \tag{1.21}$$

et

$$B_0(x,t) = k(x,t),$$

$$C_n(x,t) = \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} k(t_1,t_1) & k(t_1,t_2) & ... & k(t_1,t_n) \\ k(t_2,t_1) & k(t_2,t_2) & ... & k(t_2,t_n) \\ k(t_3,t_1) & k(t_3,t_2) & ... & k(t_3,t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k(t_n,t_1) & k(t_n,t_2) & ... & k(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \cdots dt_n \tag{1.22}$$

Les fonction $D(\lambda)$ *et* $D(x,t,\lambda)$ sont respectivement le déterminant de Fredholm et le mineur du déterminant de Fredholm.

Si le noyau $K(x,t)$ est borné ou si l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b k^2(x,t)\, dxdt$$

est finie, les séries (1.19) et (1.20) convergent quelque soit λ et sont donc des fonctions analytiques entières de λ,

La résolvante

$$R(x,t,\lambda) = \frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)}$$

est une fonctions analytiques de λ, sauf les λ qui sont zéros de $D(\lambda)$ ces derniers sont pôles de la résolvante $R(x,t,\lambda)$

Exemple 1.4.1 *A l'aide des déterminants de Fredholm trouver la réslvante du noyau* $K(x,t) = x\exp(t)$, $\alpha = 0, b = 1$.

on a $B_0(x,t) = x\exp(t)$. *Ensuite,*

$$B_1(x,t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} \end{vmatrix} dt_1 = 0,$$

$$B_2(x,t) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^t & t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1dt_2 = 0,$$

puis les déterminants sous $\int$ *sont nuls. IL est évident que tous les* $B_n(x,t)$ *suivants sont nuls eux aussi. trouvons les coefficients* C_n :

$$C_1 = \int_0^1 k(t_1,t_1)dt_1 = \int_0^1 t_1e^{t_1}\ dt_1 = 1,$$

$$C_2 = \int_0^1 \begin{vmatrix} t_1e^t & t_1e^{t_2} \\ t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1dt_2 = 0,$$

Evidement, tous les C_n *suivants sont nuls.*

Dans notre cas, nous avons conformément aux formules (1.19) et (1.20) :

$$D(x,t,\lambda) = k(x,t) = x\exp(t), \qquad D(\lambda) = 1-\lambda$$

donc

$$R(x,t,\lambda) = \frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{x\exp(t)}{1-\lambda}.$$

appliquons le résultat obtenu á l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda.\int_0^1 x\exp(t).\varphi(t)dt = f(x), \quad (\lambda \neq 1)$$

d'ápres la formule (1.17),

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{x \exp(t)}{1-\lambda} f(t)dt$$

en particulier, nous obtenons pour $f(x) = x \exp(-x)$

$$\varphi(x) = \exp(-x) + \frac{\lambda}{1-\lambda} x.$$

Le calcul des coefficients $B_n(x,t)$ *et* C_n *des séries (1.19) et (1.20) par les formules (1.21) et (1.22) n'est possible que dans des cas rares,*

mais ces formules entrainent les relations de récurrence suivantes :

$$B_n(x,t) = C_n K(x,t) - n \int_a^b K(x,s) B_{n-1}(s,t)\, ds \tag{1.23}$$

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(s,s)\, ds \tag{1.24}$$

Sachant que $C_0 = 1$ *et* $B_0(x,t) = k(x,t)$, *les formules (1.24) et (1.23) permettent de trouver de proche en proche* C_1, $B_1(x,t)$, $B_2(x,t)$, C_3, *et ainsi de suite.*

Méthode des Noyaux itérés
(Construction de la résolvante á l'aide des noyaux itérés)

Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) - \lambda. \int_a^b k(x,t,).\varphi(t)dt = f(x) \tag{1.25}$$

on pose

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x) \lambda^n \tag{1.26}$$

avec $\Psi_n(x)$ définis par les formules

$$\Psi_1(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)dt$$

$$\Psi_2(x) = \int_a^b K(x,t)\Psi_1(t)dt = \int_a^b K_2(x,t)f(t)dt$$

$$\Psi_3(x) = \int_a^b K(x,t)\Psi_2(t)dt = \int_a^b K_3(x,t)f(t)dt, \text{ et ainsi de suite.}$$

Ici

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,z)k_1\,(z,t)\,dz,$$
$$K_3(x,t) = \int_a^b K(x,z)k_2\,(z,t)\,dz,$$

et en général

$$K_n(x,t) = \int_a^b K(x,z)k_{n-1}\,(z,t)\,dz, \tag{1.27}$$

$n = 2, 3, ...$,et $K_1\,(x,t) \equiv K\,(x,t)$. Les fonctions $K_n(x,t)$ défi-nies par les formules (1.27) s'appellent noyaux itérés. Elles vérifient la relation

$$K_n(x,t) = \int_a^b K_m(x,s)k_{n-m}\,(s,t)\,ds, \tag{1.28}$$

oú m est un entier naturel quelconque inférieur á n.

La résolvante de l'équation intégrale (1.25) est définie en fonction des noyaux itérés de la facon suivante :

$$R\,(x,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,t)\lambda^{n-1} \tag{1.29}$$

le seconde membre est la série de Neumann du noyau $K(x,t)$. Cette série converge pour

$$|\lambda| < \frac{1}{B} \tag{1.30}$$

avec

$$B = \left(\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)\, dxdt \right)^{\frac{1}{2}}$$

la solution de l'équation de fredholm de seconde espéce (1.25) s'exprime par

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda. \int_a^b R(x,t,\lambda).f(t)dt \tag{1.31}$$

La borne (1.30) est essentielle pour la convergence de la série (1.29).

Mais l'équation (1.25) également admettre une solution pour $|\lambda| > \frac{1}{B}$

Exemple 1.4.2 *Trouver les itérés du noyau* $K(x,t) = x - t$ *si* $a = 0,\ b = 1.$

Utilisant les formules (1.27) on obtient de proche en proche

$K_1(x,t) = x - t,$

$K_2(x,t) = \int_0^1 (x-s)(s-t)\, ds = \frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3},$

$K_3(x,t) = -\frac{1}{12} \int_0^1 (x-s) \left(\frac{s+t}{2} - st - \frac{1}{3}\right) ds = -\frac{x-t}{12}$

$K_4(x,t) = \frac{1}{12} \int_0^1 (x-s)(s-t)\, ds = -\frac{1}{12} K_2(x,t) = -\frac{1}{12} \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3}\right),$

$K_5(x,t) = -\frac{1}{12} \int_0^1 (x-s) \left(\frac{s+t}{2} - st - \frac{1}{3}\right) ds = -\frac{1}{12} K_3(x,t) = \frac{x-t}{12^2},$

$K_6(x,t) = \frac{1}{12^2} \int_0^1 (x-s)(s-t)\, ds = \frac{K_2(x,t)}{12^2} = -\frac{1}{12^2} \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3}\right).$

Il en résulte que les noyaux itérés sont de la forme :

1) pour $n = 2k - 1$:

$$K_{2k-1}(x,t) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}} (x-t);$$

2) pour $n = 2k$

$$K_{2k}(x,t) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}} \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right),$$

ou $K = 1, 2, 3.....$

Méthode des noyaux dégénérés

Le noyaux $K(x,t)$ d'une équation intégrale de Fredholm de secon-de espéce est dit dégénéré s'il est la somme d'un nombre fini de produits de fonctions de x seul par des fonctions de$t$ seul, i.e il est de la forme

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\, b_k(t)\,; \tag{1.32}$$

les fonctions $\alpha_k(x)$ et $b_k(t)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ seront supposées con-tinues dans le carrés fondamental $\alpha \leq x, t \leq b$ et linéairement indépendantes. L'équation intégrale á noyau dégénéré (1.32)

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\, b_k(t)\right] \varphi(t)\, dt = f(x) \tag{1.33}$$

se résout comme suit :

Récrivons (1.33) :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) \int_a^b b_k(t)\, \varphi(t)\, dt \tag{1.34}$$

et introduisons les notations

$$\int_a^b b_k(t)\, \varphi(t)\, dt \ = C_k \qquad (k = 1, 2, ..., n)\,. \tag{1.35}$$

L'égalité (1.34) devient alors

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \alpha_k(x)\,, \tag{1.36}$$

avec C_k des constantes inconnues (puisque la fonction $\varphi(x)$ est inconnue).

Ainsi, la résolution d'une éuation intégrale á noyau dégénéré se raméne á la recherche des constantes C_K $(K = 1, 2, ..., n)$. Aprés avoir porté (1.36) dans l'équation intégrale (1.33) et edffectué des calculs simples nous obtenons :

$$\sum_{m=1}^{n}\left\{C_m-\int_a^b b_m\left(t\right)\left[f\left(t\right)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k\alpha_k\left(t\right)\right]dt\right\}\alpha_m\left(x\right)=0.$$

Les fonctions $\alpha_m\left(x\right)$ $(m=1,2,...,n)$ étant linéairement indé-pendantes, il en résulte que

$$C_m-\int_a^b b_m\left(t\right)\left[f\left(t\right)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k\alpha_k\left(t\right)\right]dt=0$$

ou

$$C_m-\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k\int_a^b\alpha_k\left(t\right)b_m\left(t\right)dt=\int_a^b b_m\left(t\right)f\left(t\right)dt\qquad(m=1,2,...,n)$$

Afin d'alléger l'écriture, introduisons les notations

$$\alpha_{k\ m}=\int_a^b\alpha_k\left(t\right)b_m\left(t\right)dt,\qquad f_m=\int_a^b b_m\left(t\right)f\left(t\right)dt.$$

Nous obtenons

$$C_m-\lambda\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k\ m}C_k=f_m\qquad(m=1,2,...,n)$$

ou, sous forme dévelopée,

$$\left.\begin{array}{c}(1-\lambda C_{11})\alpha_1-\lambda C_{12}\alpha_2-...-\lambda C_{1n}\alpha_n=f_1\\ -\lambda C_{21}\alpha_1+\ (1-\lambda C_{22})\alpha_2-...-\lambda C_{2n}\alpha_n=f_2\\ ....\\ -\lambda C_{n1}\alpha_1-\lambda C_{n2}\alpha_2\ -...(1-\lambda C_{nn})\alpha_n=f_n\end{array}\right\}\tag{1.37}$$

pour trouver les α_k, nous avons donc un systéme de n équations linéaires á inconnues, dont le détrminant est

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & \cdots & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1-\lambda\alpha_{22} & \cdots & -\lambda\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & \cdots & 1-\lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.38}$$

si $\Delta(\lambda)\neq 0$, le systéme (1.37) admet une solution unique $\alpha_1,\alpha_{2,......,}\alpha_n$ obtenue moyennant les formules de Cramer

$$C_k=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix} 1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{1k-1}f_1-\lambda\alpha_{1k+1} & -\lambda\alpha_{21} \\ -\lambda\alpha_{21} & -\lambda\alpha_{2k-1}f_2-\lambda\alpha_{2k+1} & -\lambda\alpha_{21} \\ & & \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{nk-1}f_n-\lambda\alpha_{nk+1} & 1-\lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.39}$$

$(k=1,2,...,n)$.

L'équation intégrale (1.33) a pour solution une fonction $\varphi(x)$ définie par l'égalité

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k\alpha_k(x).$$

Avec les coefficients C_k $(k=1,2,...,n)$ donnés par les formules (1.39)

Exemple 1.4.3 *Résoudre l'l'équation intégrale*

$$\varphi(x)-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\left(x\cos t+t^2\sin x+\cos x\sin t\right)\varphi(t)\,dt=x. \tag{1.40}$$

Mettons cette équation sous la forme

$$\varphi(x)=\lambda x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos t dt+\lambda\sin x\int_{-\pi}^{\pi}t^2\varphi(t)\,dt+\lambda\cos x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin t dt+x$$

et introduisons les notations

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos t dt, \qquad C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \varphi(t)\, dt, \qquad C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin t dt \tag{1.41}$$

oú C_1, C_2 , C_3 *sont les constantes inconnues. L'équation (1.40) a alors la forme*

$$\varphi(x) = C_1 \lambda x + C_2 \lambda \sin x + C_3 \lambda \cos x + x. \tag{1.42}$$

Portons (1.42) dans les égalités (1.41), il vient

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t + t) \cos t dt$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t + t) t^2 dt$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t + t) \sin t dt$$

ou

$$\begin{gathered}
C_1 \left(1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t \cos t dt\right) - C_2 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t dt - C_3 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = \int_{-\pi}^{\pi} t \cos t dt, \\
-C_1 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt + C_2 \left(1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin t dt\right) - C_3 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cot t dt = \int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt \ , \\
-C_1 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt - C_2 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt \ + C_3 \left(1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cot t \sin t dt\right) = \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt.
\end{gathered}$$

En calculant les intégrales, nous obtenons le systéme d'équations algébriques en C_1, C_2, C_3 :

$$\begin{cases} C_1 - \lambda \pi C_3 = 0 \\ C_1 + \lambda \pi C_3 = 0 \\ -2\lambda \pi C_1 - \lambda \pi C_2 + C_3 = 2\pi \end{cases} \tag{1.43}$$

Le déterminant du système est

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 1 & 4\pi\lambda \\ -2\pi\lambda & -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\lambda^2\pi^2 \neq 0.$$

le systéme (1.43) admet solution unique

$$C_1 = \frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}, \qquad C_2 = \frac{8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}, \qquad C_3 = \frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}.$$

En portant dans (1.42) les valeurs obtenues de C_1, C_2, C_3 nous aboutis-sons á la solution de l'équation intégrale donnée :

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}\left(\lambda\pi x - 4\lambda\pi\sin x + \cos x\right) + x.$$

Chapitre 2

Méthode de BUBNOV-GALERKIN et résolution numérique des équations intégrales linéaire de Fredholm

2.1 Définition et propriétés des l'espace de Hilbert $L^2[a, b]$

Espace $L^2[a, b]$. On dit qu'une fonction $f(x)$ est de carré intégrable sur $[a, b]$si l'intégrale

$$\int_a^b f^2(x)\, dx$$

existe (est finie). L'ensemble de toutes les fonctions de carré inté-grable sur $[a, b]$ sera noté $L^2[a, b]$ ou L^2 tout court.

Propriétés fondamentales des fonctions de L^2

1- Le produit de deux fonction de carré intégrable est une fonc-tion intégrable.

2- La somme de deux fonctions deL^2 est une fonction de L^2.

3- Si $f(x)\epsilon L^2$ et si λ est un nombre réel quelconque, alors

$$\lambda f(x)\epsilon L^2.$$

4- Si $f(x)\epsilon L^2$ et $g(x)\epsilon L^2$, on a l'inégalité de Bouniakovski-Schwarz

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

Le produit scalaire de deux fonctions $f(x)\epsilon L^2$, $g(x)\epsilon L^2$ est le nombre

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

On appelle norme d'une fonction $f(x)$ de L^2 le nombre non négatif

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx.}$$

5-Pour $f(x)\epsilon$ et $g(x)$ de L^2 on a l'inégalité triangulaire

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

6-Soient $f(x),\ f_1(x),\ f_2(x), ..., f_n(x), ...$des fonctions de carré intégrable sur(a,b). Si

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2dx = 0,$$

on dit que la suite de fonctions $f_1(x),\ f_2(x), ...$converge en moyenne ou, plus précisément, en moynne quadratique vers $f(x)$.

Si une suite $\{f_n(x)\}$ de fonction de L^2 converge uniformément vers $f(x)$, alors $f(x)\epsilon L^2$ et $\{f_n(x)\}$ converge en moyenne vers $f(x)$.

L'espace L^2 est complet, i.e. toute suite de cauchy de L^2 converge vers une fonction de L^2.

Deux fonction $f(x)\epsilon$ et $g(x)$ appartenant á $L^2[a,b]$ sont équiva-lentes sur (a,b) si $f(x) \neq g(x)$ seulement sur un ensemble de mesure nulle. Dans ce cas, on dit que $f(x) = g(x)$ presque partout (p.p) sur $[a,b]$.

2.2 Définition et propriétés des polynômes orthogonaux

Les polynômes constituent une famile des fonctions tout á fait remaquable en mathématiques, ils sonts aussi un outil essentiel du calcul dans l'analyse numérique, notamment dans l'évaluation au l'approximation des fonctions, dans les problémes d'interpolation , dans la résolution des équation intégrales ou équation différentielle, ...etc

Définition 2.2.1 *soit I un intervalle fermé ou non, borné ou non et poids $\omega : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement positive ($\omega(x) > 0$ pour tout $x\epsilon I$) est dite fonction de poids telle que l'application*

$$\forall \left(P,Q\right) \epsilon R_n \left[X\right]^2 \qquad \langle P,Q\rangle = \int P\left(x\right) Q\left(x\right) \omega\left(x\right) dx$$

défini un produit scalaire sur $R_n\left[X\right]^2$

Définition 2.2.2 *On appelle polynômes orthogonaux associés a la fonction poids ω sur l'intervalle I, la suite des polynômes $p_n = a_n x^n + b_n x^{n-1} + ...$, obtenus par orthogonalisation de Gram-Schmidt de la suite des monômes x^n , $n \geq 0$.*

Définition 2.2.3 *On dit que la famille de polynômes $(p_i)_{i\geq 0}$ est une famille de pôlynomes orthogonaux si :*

(a) Le dégré de p_i est i pour tout entier i.

(b) $\forall \left(i,j\right) \epsilon \mathbb{N}^2 i \neq j \Rightarrow \langle p_i, p_j\rangle = 0.$ce produit scalaire est au sens des fonctions sommables.

Propriété 2.2.1 *Toute suite de polynômes* $p_0(x), p_1(x)...$*,oú chaque* p_k *est de degré* k *est une base de l'espace vectoriel* $R[X]$ *(de dimension infinie) de tous les polynômes, « adaptée au drapeau* $()_{n\epsilon\mathbb{N}}$*». Une suite de polynômes orthogonaux est une telle base qui est, de plus, orthogonale pour un certain produit scalaire. Ce produit scalaire étant fixé, une telle suite est presque unique (*$R_n[X]$*unique à produit près de ses vecteurs par des scalaires non nuls), et peut s'obtenir à partir de la base canonique* $(1, x, x^2...)$ *(non orthogonale en général), par le procédé de Gram-Schmidt.Quand on construit une base orthogonale, on peut être tenté de la rendre orthonormale, c'est-à-dire telle que* $\langle p_n, p_n\rangle = 1$ *pour tout* n*, en divisant chaque* p_n *par sa norme. Dans le cas des polynômes, Toute suite de polynômes* $p_0(x), p_1(x)...$*,oú chaque* p_k *est de degré* k*, est une base de l'espace vectoriel* $R[X]$ *(de dimension infinie) de tous les polynômes, « adaptée au drapeau* $(R_n[X])_{n\epsilon N}$*» . Une suite de polynômes orthogonaux est une telle base qui est, de plus, orthogonale pour un certain produit scalaire. Ce produit scalaire étant fixé, une telle suite est presque unique (unique à pron préfère ne pas imposer cette condition supplémentaire car il en résulterait souvent des coefficients contenant des racines carrées. On préfère souvent choisir un multiplicateur tel que les coefficients restent rationnels, et donnent des formules aussi simples que possible. C'est la standardisation. Les polynômes « classiques » énumérés ci-dessous ont été ainsi standardisés ; typiquement, le coefficient de leur terme de plus haut degré ou leur valeur en un point ont été mis à une quantité donnée (pour les polynômes de Legendre,* $P_n(1) = 1$.*Cette standardisation est une convention qui pourrait aussi parfois être obtenue par une mise à l'échelle de la fonction poids correspondante. Notons* $h_n = \langle p_n, p_n\rangle$ *la norme de* p_n *est la racine carre de* h_n*. Les valeurs de* h_n *pour les polynômes standardisés sont énumérées dans le tableau ci-dessous. Nous avons* $\langle p_m, p_n\rangle = \delta_{mn}h_n$ *ou* δ_{mn} *est le delta de Kronecker*

2.3 Méthode de Boubnov-Galerkin

Soit à chercher une solution approchée de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda. \int_a^b k(x,t).\varphi(t)dt \tag{2.1}$$

par la méthode de boubnov-galerkin

On travaille dans l'espace $X = L^2([a,b])$ muni d'un produit scallaire $\langle .,. \rangle$. on choisit un syténe de fonctions $\{u_n(x)\}$ complet dans $L^2([a,b])$ et tel que, quel que soit n, les fonctions

$u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ soient linéairement indépendantes, et on cherche une solution approchee de la forme

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k(x). \tag{2.2}$$

Les coefficients α_k $(k = 1, 2, ..., n)$ se définissent á partir du systéme linéaire

$$\langle \varphi_n(x), u_k(x) \rangle = \left\langle f(x), u_k(x) + \lambda \left(\int_a^b k(x,t)\varphi_n(t)\,dt, u_k(x) \right) \right\rangle \tag{2.3}$$

oú (f,g) désigne $\int_a^b f(x)g(x)dx$ et oú on remplace $\varphi_n(x)$ par $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k(x)$. Si la valeur de λ dans n'est pas un nombre caracté-ristique, alors, pour n suffisamment grands, le système admet une solutions unique, et, lorsque $n \to +\infty$, la solution approchée $\varphi_n(x)$ de tend, dans la métrique de $L^2(a,b)$, vers la solution exact $\varphi(x)$ de l'équation

Remarque 2.3.1 *S'agissant de noyaux dégénérés la méthode que nous étudions fournit la solution exact et, dans le cas général, cette tech-nique équivaut á remplacer le noyau* $k(x,t)$ *par celui dégénéré* $L(x,t)$.

2.4 Exemples d' application de la méthode de BUBNOV-GALERKIN à la résolution numérique de quelques équations intégrales linéaires de FREDHOLM de seconde espèce.

I.polynômes de Legendre

Les polynômes orthogonaux les plus simples sont les polynômes de Legendre pour lesquels l'intervalle d'orthogonalité est $]-1,1[$et la fonction poids est la fonction constante de valeur 1 :

$p_0(x) = 1$

$p_1(x) = x$

$p_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$

$p_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}$

$p_4(x) = \frac{35x^4-30x^2+3}{8}$

......

ils sonts tous orthognaux sur $]-1,1[$:

$\int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x) = 0 \qquad \text{pour} m \neq n$

Exemple 2.4.1 *Résoudre par le procédé de Boubnov-Galerkin l'équation suivante :*

$$\varphi(x) = x + \int_{-1}^{1} xt\varphi(t)\,dt. \tag{2.4}$$

Choisissons pour systéme complet sur $[-1,1]$ un systéme de polynome de legendre $P_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ et cherchons une solution approchée $\varphi_n(x)$ de de la forme :

$$\varphi_3(x) = \alpha_1.1 + \alpha_2 x + \alpha_3 \frac{3x^2-1}{2}.$$

Portons dans $\varphi_3(x)$ á la place de $\varphi(x)$, il vient

$$\alpha_1.1 + \alpha_2 x + \alpha_3 \frac{3x^2-1}{2} = x + \int_{-1}^{1} xt \left(\alpha_1.1 + \alpha_2 t + \alpha_3 \frac{3t^2-1}{2} \right) dt$$

ou

$$\alpha_1.1 + \alpha_2 x + \alpha_3 \frac{3x^2-1}{2} = x + x\frac{2}{3}\alpha_2.$$

En multipliant successivement les deux membres de la derniére équation par $1, x$, $\frac{3x^2-1}{2}$ et en intégrant par rapport á x de -1 á 1, nous obtenons

$$\left.\begin{array}{c} 2\alpha_1 = 0 \\ \frac{2}{3}\alpha_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\alpha_2 \\ \frac{2}{5}\alpha_3 = 0 \end{array}\right\}$$

d'oú $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 0$ et donc $\varphi_3(x) = 3x$. On vérifie de suite que c'est la solution exact de (2.4)

Abstract :

L'objectif de cet article est de résoudre numériquement les équations intégrales à l'aide de polynômes de Bernoulli par morceaux. Les polynômes de Bernoulli sont dérivés explicitement sur l'intervalle unitaire. Une formulation matricielle pour une équation intégrale linéaire de Fredholm non singulière du second type est dérivée par la technique de la méthode de Galerkin. Dans la méthode de Galerkin, les polynômes de Bernoulli sont exploités comme combinaison linéaire dans l'approximation en tant que fonctions de base. Des exemples numériques sont considérés pour vérifier l'efficacité des dérivations proposées.

Mots clés :

équation intégrale de Fredholm, méthode de Galerkin, polynômes de Bernoulli, solutions numériques.

Introduction

Des méthodes approchées sont disponibles pour résoudre numériquement diverses classes d'équations intégrales [1, 2, 7, 8]. Comme les polynômes par morceaux sont différentiables et intégrables, les polynômes de Bernstein [5 - 8] ont été utilisés pour résoudre numériquement des équations différentielles et intégrales. Récemment, des équations intégrales ont été résolues par la méthode bien connue d'itération variationnelle [9]. Dans la littérature [7], Mandal et Bhattacharya ont tenté de résoudre numériquement des équations intégrales à l'aide de polynômes de Bernstein, mais ils ont obtenu les résultats en termes de solutions en séries finies. En revanche, nous résolvons l'équation intégrale de Fredholm linéaire du second type en exploitant La méthode de Galerkin très connue et les polynômes de Bernoulli [4] sont utilisés comme fonctions d'essai. Pour cela, nous donnons d'abord une brève introduction aux polynômes de Bernoulli. Ensuite, nous obtenons une formulation de matrice par la technique de la méthode de Galerkin. Pour vérifier notre formulation, considérons trois exemples dans lesquels nous obtenons des solutions exactes pour deux exemples, même en utilisant quelques polynômes d'ordre inférieur. En revanche, le dernier exemple montre un excellent accord de précision par rapport à la solution exacte, ce qui confirme la convergence. Tous les calculs sont effectués avec MATHEMATICA.

II. Polynômes de Bernoulli :

Les polynômes de Bernoulli [Atkinson, 4] jusqu'au degré n peuvent être définis implicitement sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} b_k x^{n-k}$$

où b_k sont les nombres de Bernoulli donnés par

$$b_0 = 1 \quad et \quad b_k = -\int_0^1 B_k(x)\, dx \quad k \geq 1.$$

Ces polynômes de Bernoulli peuvent être définis explicitement comme

$$B_0(x) = 1 \tag{2.5}$$
$$B_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (x+k)^m - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} k^m, \quad m \geq 1.$$

Les 6 premiers polynômes de Bernoulli ($n = 5$) sont donnés ci-dessous pour être utilisés dans cet article :

$$\begin{array}{lll} B_0(x) = 1 & B_2(x) = -x + x^2 & B_4(x) = x^2 - 2x^3 + x^4 \\ B_1(x) = x & B_3(x) = \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{2} + x^3 & B_5(x) = -\frac{x}{6} + \frac{5x^3}{3} - \frac{5x^4}{2} + x^5 \end{array}$$

Remarquez que les polynômes de Bernoulli ont une propriété particulière chez $x = 0$ et $x = 1$, respectivement,

$$Br_n(0) = 0, \quad n \geq 1 \quad et \quad B_n(1) = 0, \quad n \geq 2.$$

III. Formulation de l'équation intégrale sous forme de matrice

Considérons une équation intégrale linéaire de Fredholm (FIE) du second type $[1, 2]$ donnée par

$$\alpha(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^b k(t,x)\varphi(t)\,dt = f(x), \qquad \alpha \leq x \leq b \tag{2.6}$$

oú $\alpha(x)$ et $f(x)$ ont des fonctions données, $k(t,x)$ est le noyau, et $\varphi(x)$ est l'inconnu fonction ou solution exacte de (2.5), à déterminer. Maintenant nous utilisons la technique de Galerkin [Lewis, 3] pour trouver une solution approximative $\widetilde{\varphi}(x)$ De (2.6). Pour cela, nous supposons que

$$\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i B_i(x) \tag{2.7}$$

oú $B_i(x)$ sont des polynômes de Bernoulli (base) de degré i définis dans éqn. (2.5), et α_i sont des paramètres inconnus, à déterminer. En substituant (2.7) en (2.6), on obtient

$$\alpha(x) \sum_{i=0}^{n} \alpha_i B_i(x) + \lambda \int_a^b \left[k(t,x) \sum_{i=0}^{n} \alpha_i B_i(t) \right] dt = f(x)$$

$$\text{or,} \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \alpha(x) B_i(x) + \sum_{i=0}^{n} \left[\alpha_i \int_a^b \lambda k(t,x) B_i(t) \right] dt = f(x)$$

$$\text{or,} \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \left[\alpha(x) B_i(x) + \lambda \int_a^b k(t,x) B_i(t)\, dt \right] = f(x) \tag{2.8}$$

Alors les équations de Galerkin [Lewis, 3] sont obtenues en multipliant les deux côtés de (2.7) par $B_j(x)$ puis en intégrant par rapport à x de a àb, on a

$$\int_a^b \left[\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \left[\alpha(x) B_i(x) + \lambda \int_a^b k(t,x) B_i(t)\, dt \right] \right] B_j(x)\, dx = \int_a^b B_j(x) f(x) dx$$

or,

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \left[\int_a^b \left[\alpha(x) B_i(x) + \lambda \int_a^b k(t,x) B_i(t)\, dt \right] B_j(x)\, dx \right] = \int_a^b B_j(x) f(x) dx, \;\; j = 0, 1, ..., n \tag{5a}$$

Dans chaque équation, il y a trois intégrales. L'intégrale interne du côté gauche est fonction de x et t et est intégrée par rapport à$t$de$a$ à b. En conséquence, l'intégrale externe devient une fonction de x uniquement et l'intégration par rapport à x donne une constante. Donc pour chaque j $(j = 0, 1, ..., n)$ avons une équation linéaire avec $n + 1$ inconnues $\alpha_i\,(i = 0, 1, ...n)$ Enfin (5.a) représente le système $n + 1$ d'équations linéaires en $n + 1$ inconnues.

De manière équivalente

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i C_{i,j} = F_j, \qquad j = 0, 1, 2, ..., n, \tag{5b}$$

oú

$$C_{i,j} = \int_a^b \left[\alpha(x) B_i(x) + \lambda \int_a^b k(t,x) B_i(t)\, dt \right] B_j(x)\, dx \qquad i, j = 0, 1, 2, ..., n. \tag{5c}$$

$$F_j = \int_a^b B_i(x) f(x) dx, \qquad j = 0, 1, 2, ..., n \tag{5d}$$

Maintenant, les paramètres inconnus α_i sont déterminés en résolvant le système d'équations (5), et

en substituant ces valeurs de paramètres dans (2.7), on obtient la solution approximative $\widetilde{\varphi}(x)$ du équation intégrale (2.6). L'erreur absolue E pour cette formulation est définie par

$$E = \frac{|\varphi(x) - \widetilde{\varphi}(x)|}{\varphi(x)}.$$

IV. Exemples numériques

Dans cette section, nous expliquons trois équations intégrales disponibles dans les littératures existantes [2, 7]. Pour chaque exemple, nous trouvons les solutions approximatives en utilisant les polynômes de Bernoulli.

Exemple 2.4.2 *Nous considérons la FIE de 2e type donnée par [7]*

$$\varphi(x) - \int_{-1}^{1} \left(xt + x^2t^2\right) \varphi(t)\, dt = 1, \qquad -1 \leq x \leq 1, \tag{2.9}$$

avoir la solution exacte

$$\varphi(x) = 1 + \frac{10}{9} x^2.$$

En utilisant la formulation décrite dans la section précédente, les équations (5) nous *conduisent, respectivement*

$$C_{i,j} = \int_{-1}^{1} B_i(x) Bj(x) \, dx - \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} \left(xt + x^2 t^2 \right) B_i(t) \, dt \right] Bj(x) \, dx, i, j = 0, 1, 2, ..., n \quad \textit{(7a)}$$

$$F_j = \int_{-1}^{1} Bj(x) \, dx, \qquad j = 0, 1, 2, ..., n \qquad \textit{(7b)}$$

En résolvant le système (7) pour $n = 3$ les valeurs des paramètres sont :

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{10}{9}, \quad \alpha_2 = \frac{10}{9}, \quad \alpha_3 = 0$$

et la solution approximative est

$$\widetilde{\varphi}(x) = 1 + \frac{10}{9} x^2$$

qui est la solution exacte

Exemple 2.4.3 *Maintenant, considérons une autre FIE du 2e type donnée par [Mandal, 7]*

$$\varphi(x) - \int_{-1}^{1} \left(x^4 - t^4 \right) \varphi(t) \, dt = x, \qquad -1 \leq x \leq 1 \tag{2.10}$$

ayant la solution exacte $\varphi(x) = x$

En reprenant l'exemple (2.4.1), le système d'équations devient celui où,

$$C_{i,j} = \int_{-1}^{1} B_i(x) Bj(x) \, dx - \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} \left(x^4 - t^4 \right) B_i(t) \, dt \right] Bj(x) \, dx \quad i, j = 0, 1, 2, ..., n \quad \textit{(9a)}$$

$$F_j = \int_{-1}^{1} x Bj(x) \, dx, \qquad j = 0, 1, 2, ..., n, \quad \textit{(9b)}$$

Pour $n = 3$, résolvant le système (9), les valeurs des paramètres (α_i) sont :

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0,$$

et la solution approximative est $\widetilde{\varphi}(x) = x$ quelle est la solution exacte.

Exemple 2.4.4 *Considérons une autre FIE du 2e type donnée par [p. 213 (1), avec* $\lambda = 1$, *Jerry, 1]*

$$\varphi(x) - \int_0^1 \left(tx^2 + xt^2\right) \varphi(t)\, dt = x, \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{2.11}$$

avoir la solution exacte $\varphi(x) = \frac{180}{119}x + \frac{80}{119}x^2$

En reprenant les exemples précédents, le système d'équations devient le

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i C_{i,j} = F_j, \qquad j = 0, 1, 2, ..., n, \qquad \textit{(11a)}$$

oú

$$C_{i,j} = \int_{-1}^{1} B_i(x)\, Bj(x)\, dx - \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} \left(tx^2 + xt^2\right) B_i(t)\, dt\right] Bj(x)\, dx \qquad i, j = 0, 1, 2, ..., n, \quad \textit{(11.b)}$$

$$F_j = \int_{-1}^{1} xBj(x)\, dx, \qquad j = 0, 1, 2, ..., n, \qquad \textit{(11c)}$$

pour $n = 3$, *système de résolution (11), les valeurs des paramètres* (α_i) *sont :*

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = \frac{260}{119}, \alpha_2 = \frac{80}{119}, \alpha_3 = 0,$$

et la solution approximative est

$$\widetilde{\varphi}(x) = \frac{180}{119}x + \frac{80}{119}x^2$$

quelle est la solution exacte.

Exemple 2.4.5 *Considérons une autre FIE du 2e type donnée par [p. 124 (iv), avec* $\lambda = 1$, *Shanti, 2]*

$$\varphi(x) - \int_0^1 -2e^x e^t \varphi(t)\, dt = e^x, \qquad 0 \leq x \leq 1, \tag{2.12}$$

avoir la solution exacte $\varphi(x) = \frac{e^x}{2-e^x}$.

Puisque les équations (5b) et (5c) sont de la forme

$$C_{i,j} = \int_{-1}^{1} B_i(x)\, Bj(x)\, dx - \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} 2e^x e^t B_i(t)\, dt\right] Bj(x)\, dx, \qquad i,j = 0,1,2,.....,n, \qquad (13a)$$

$$F_j = \int_{-1}^{1} e^x Bj(x)\, dx, \qquad\qquad j = 0,1,2,....,n, \quad (13b)$$

En résolvant le système (5a) en utilisant (13a) et (13b) au lieu de (5b) et (5c) respectivement, nous obtenons les résultats suivants :

pour $n = 3$,*la solution approximative est*

$$\widetilde{\varphi}(x) = -0,185387 - 0,188957x - 0,078167x^2 - 0,051702x^3$$

pour $n = 4$,*la solution approximative est*

$$\widetilde{\varphi}(x) = -0.185571 - 0,185273x - 0,0947437x^2 - 0.025916x^3 - 0.012893x^4$$

pour $n = 5$, *la solution approximative est*

$$\widetilde{\varphi}(x) = -0.185561 - 0.18558x - 0.0925986x^2 - 0.0316362x^3 - 0.00645779x^4 - 0.00257408x^5$$

pour $n = 6$, *la solution approximative est*

$$\widetilde{\varphi}(x) = -0.185561 - 0.18556x - 0.0925932x^2 - 0.0308581x^3 - 0.00791665x^4 - 0.0012903x^5 - 0.000427923x^6$$

Le graphique d'erreur relative, E est représenté à la Fig. Pour diverses valeurs de n. Maintenant, les solutions approximatives, les solutions exactes et l'erreur relative E en différents points du domaine sont affichées dans le tableau 1. La précision est évidente

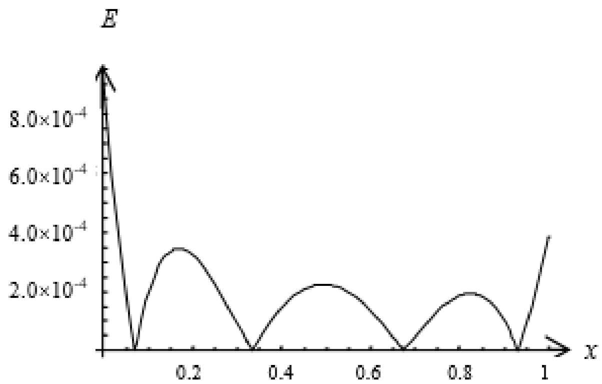


Fig.2a. Relative error E using 4 polynomials

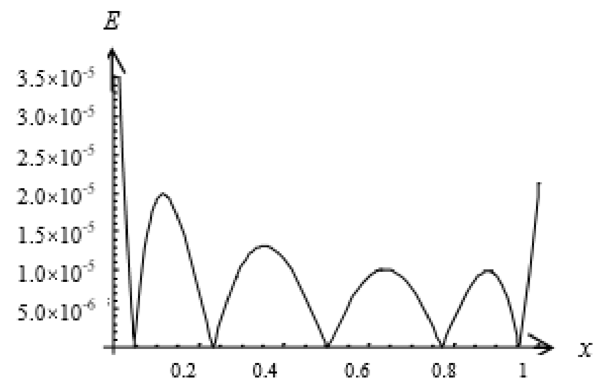


Fig.2b. Relative error E using 5 polynomials

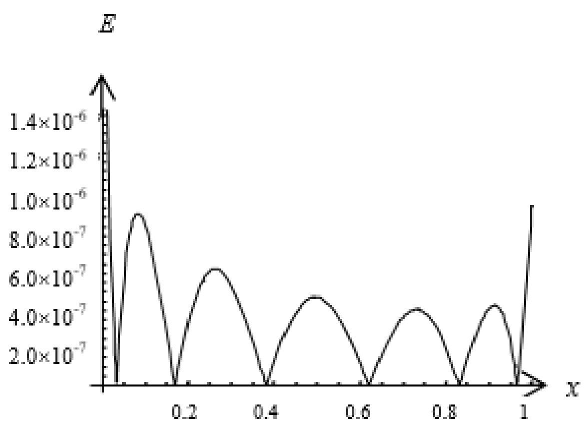


Fig.2c. Relative error E using 6 polynomials

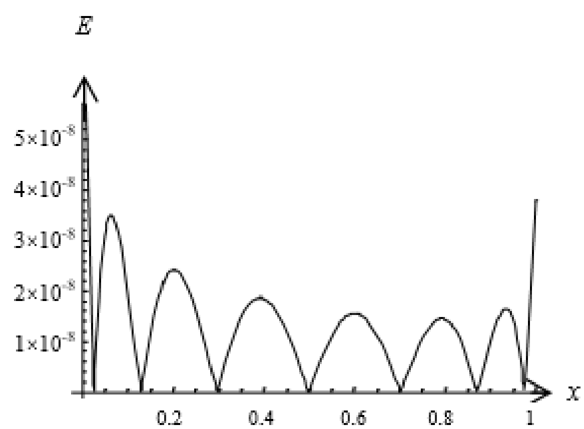
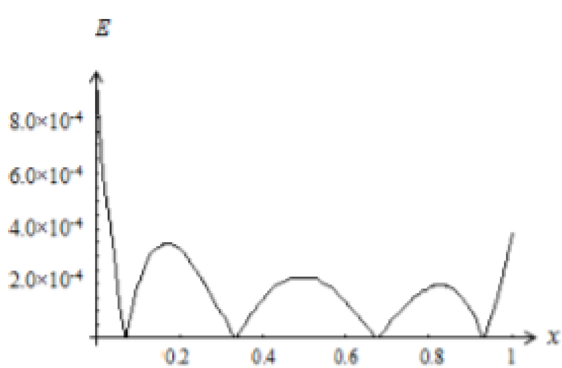


Fig.2d. Relative error E using 7 polynomials



Fir.2a. Absolute relative error. E using $n = 3$

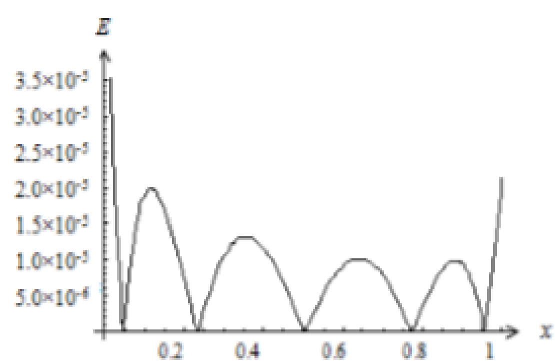


Fig.2b. Absolute relative error, E using $n = 4$

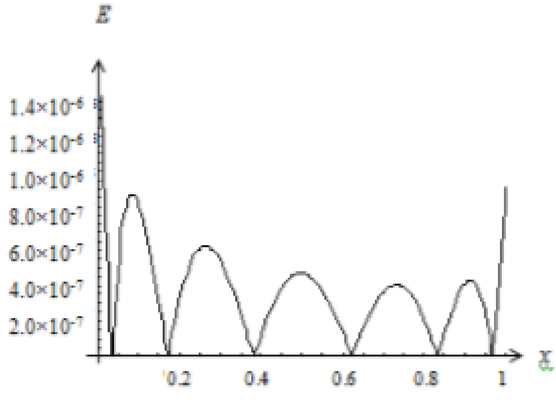


Fig.2c. Absolute relative error, E using $n = 5$

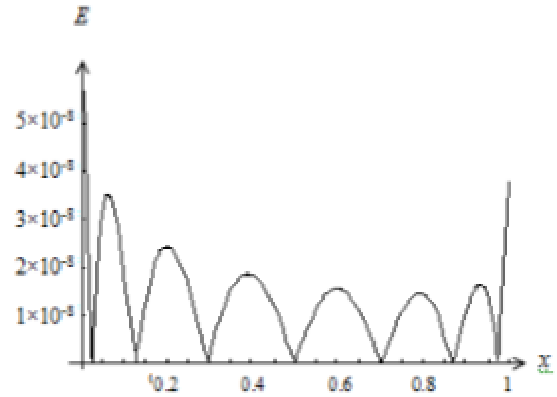


Fig.2d. Absolute relative error, E using $n = 6$

Table-1 : Solutions numériques en divers points et erreurs absolues correspondantes de l'exemple 4.

x	Exact Solutions	Approximate Solutions	Absolute Relative Error, E	Approximate Solutions	Absolute Relative Error, E
		Polynomials used 3		Polynomials used 4	
0.0	-0.1855612526	-0.1853868426	0.000940	-0.1855710208	5.264169×10^{-5}
0.1	-0.2050768999	-0.2051159200	0.000190	-0.2050729963	1.903450×10^{-5}
0.2	-0.2266450257	-0.2267185494	0.000324	-0.2266433924	7.206563×10^{-6}
0.3	-0.2504814912	-0.2505049431	0.000094	-0.2504841199	1.049471×10^{-5}
0.4	-0.2768248595	-0.2767853131	0.000143	-0.2768280330	1.146363×10^{-5}
0.5	-0.3059387842	-0.3058698717	0.000225	-0.3059389289	4.732287×10^{-7}
0.6	-0.3381146470	-0.3380688310	0.000136	-0.3381115484	9.164287×10^{-6}
0.7	-0.3736744748	-0.3736924032	0.000048	-0.3736715751	7.760090×10^{-6}
0.8	-0.4129741624	-0.4130508005	0.000186	-0.4129756359	3.568115×10^{-6}
0.9	-0.4564070342	-0.4564542350	0.000103	-0.4564113012	9.349075×10^{-6}
1.0	-0.5044077810	-0.5042129189	0.000386	-0.5043970842	2.120664×10^{-5}
		Polynomials used 5		Polynomials used 6	
0.0	-0.1855612526	-0.1855610006	2.405587×10^{-6}	-0.1855612694	9.049198×10^{-8}
0.1	-0.2050768999	-0.2050770088	8.649860×10^{-7}	-0.2050768958	1.990287×10^{-8}
0.2	-0.2266450257	-0.2266449063	3.273606×10^{-7}	-0.2266450312	2.425409×10^{-8}
0.3	-0.2504814912	-0.2504813833	5.420754×10^{-7}	-0.2504814909	9.600473×10^{-10}
0.4	-0.2768248595	-0.2768249425	1.162778×10^{-7}	-0.2768248544	1.846251×10^{-8}
0.5	-0.3059387842	-0.3059389458	4.731259×10^{-7}	-0.3059387842	7.752014×10^{-11}
0.6	-0.3381146470	-0.3381146594	1.259522×10^{-7}	-0.3381146522	1.554022×10^{-8}
0.7	-0.3736744748	-0.3736743009	3.620806×10^{-7}	-0.3736744750	5.635104×10^{-10}
0.8	-0.4129741624	-0.4129740843	2.074285×10^{-7}	-0.4129741564	1.441928×10^{-8}
0.9	-0.4564070342	-0.4564072670	4.075118×10^{-7}	-0.4564070387	9.997793×10^{-9}
1.0	-0.5044077810	-0.5044071950	9.560245×10^{-7}	-0.5044077618	3.797784×10^{-8}

V. Conclusion

Nous avons résolu numériquement les équations intégrales de Fredholm du second type. Nous avons obtenu la solution approximative de la fonction inconnue par la méthode bien connue de Galerkin en utilisant des polynômes de Bernoulli comme fonctions d'essai. La conclusion des auteurs est que les solutions numériques coïncident avec les solutions exactes, même quelques-uns des polynômes sont utilisés dans l'approximation.

Bibliographie

[1] M. KRASNOV, A. KISSÉLEV,G.MAKARENKO, Équations Intégrales . Edition Mir Mos-cou. Traduction Francaise Editions Mir 1977

[2] Jean Dieudonné, « Fractions continuées et polynômes orthogonaux », dans E.N. Laguerre, Polynômes orthogonaux et applications, Springer, 1985 (lire en ligne [archive]), p. 1-15

[3] Jean-Louis Ovaert, Polynômes orthogonaux, dans Dictionnaire des mathématiques, algèbre, analyse, géométrie, Albin Michel et Encyclopædia Universalis, Paris, 1995V.

[4] Abdul J. Jerri, 1999 - Introduction aux équations intégrales avec applications, John Wiley & Sons Inc.

[5] Shanti Swarup, 2007 - Equations intégrales, Krishna Prakashan Media (P) Ltd, quinzième édition.

[6] Lewis, P. E.,J P.Ward, 1991 - La méthode des éléments finis, principes et applications, Addison-Wesley

[7] Kendal E. Atkinson, 1989 - Introduction à l'analyse numérique, John Wiley et Sons, 2e édition, (1989), pp- 284.

[8] Reinkenhof, J., 1977 - Différenciation et intégration à l'aide des polynômes de Bernstein, Int. J. Numer. Methods Engrg, 11, 1627-1630.

[9] Kreyszig, E., 1979 - Polynômes de Bernstein et intégration numérique, Int. J. Numer. Methods Engrg, 14, 292 - 295.

[10] Mandal, B.N., S. Bhattacharya, 2007 - Résolution numérique de certaines classes d'équations intégrales à l'aide de polynômes de Bernstein, Mathématiques appliquées et calcul, 190, 1707-1716

[11] Bhatti, M.I., P. Bracken, 2007 - Solutions des équations différentielles dans une base polynomiale de Bernstein, J. Mathématiques computationnelles et appliquées, 205, 272– 280

[12] Wang, S.Q., J.H. He, 2007 - Méthode variationnelle de résolution d'équations intégro-différentielles, Physics Letters A, 367, 188 - 191.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

φ : La fonction inconnue dans l'équation intégrale.(solution exact).

$\widetilde{\varphi}$: Solution approchée.

$K(x,t)$: Noyau de l'équation intégrale.

$f(x)$: Fonction donnée.

λ :Constant

$\mathbb{R}$:Ensemble des réel.

$\mathbb{C}$:Ensemble des nombres complexe.

A :Opérateur intégrale linéaire.

I :La matrice identitie.

$\omega(x)$:Fonctions de poids.

P_n :Polynôme orthogonaux.

$R_n[X]$:L'éspace des polynômes.

E :L'erreur.