République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER en MATHÉMATIQES

Option : **Analyse**

Par

Soufiane Elhadi

Thème

Etude d'un modèle d'epidémie SIR **avec retard**

Membres du Comité d'Examen

Dr.	**DAKHIA HASSIBA**	UMKB	Président
Dr.	**HAOUAS OMRANE**	UMKB	Encadreur
Dr.	**TABERHA WARDA**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

À ma mère bien-aimée,

À l'ésprit de mon Père bien-aimée,

À mes soeurs et mes frères,

À mes familles et mes amis

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant , qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

*En second lieu, je tiens à remercier mon encadreur Dr.**HAOUAS OMRANE**, pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail. .je tiens également a remercier madame Dr.**DAKHIA HASSIBA**, et Dr.**TABERHA WARDA** pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.*

Mes remerciements s'étendent également à tous mes enseignants durant les années d'études.

Ma famille et mes amis qui par leurs prières et leurs encouragements, j'ai pu surmonter tous les obstacles. Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Depuis certaines années, la modélisation mathématique est devenue un outil incontournable dans l'analyse de la dynamique des maladies infectieuses.

En 1927, W.O. Kermack et A.G. McKendrick ont étudier la dynamique de la transmission des maladies infectieuses humaines. Plus précisément, Kermack et Mckendrick ont appliqué les idées de Ross pour les maladies dont la dynamique de transmission dépend de la fréquence et de l'intensité des interactions entre individus susceptibles (sains) et individus infectés et infectieux. Leur résultat fondamental publié en 1927 continue à jouer, un rôle central dans la théorie mathématique des maladies infectieuses.

Les modèles de maladies infectieuses ont d'abord été utilisés pour comprendre la dynamique temporelle d'une épidémie, puis pour appliquer une stratégie thérapeutique ou de lutte contre les maladies infectieuses. Les modèles mathématiques sont utilisés en médecine, et même en biologie dans des domaines d'application de plus en plus variés.

Ce memoire est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous commençons par rappeler brièvement quelques notions générales des equations et systèmes differentiels qui nous seront utiles dans les chapitres ultérieures. Le deuxième chapitre est consacré à la l'étude de l'existence du solution, le bornage et la stabilité la du système pour un modèle d'epidémie SIR avec retard.

CHAPITRE 1

Généralités

1.1 Solution Maximale et Globale

1.1.1 Solution globale

Théorème 1.1.1

On suppose $D = E$ et $f \in C^0(I \times E)$ globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Pour toute condition initiale y_0, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y'(t) = f(t, y(t)) \\ Y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

possède une unique solution globale sur E.

De plus, toute solution locale est une restriction d'icelle.

Preuve.

On va utiliser le théorème du point fixe.

Dans le cas où I est fermé borné $[a, b]$, $(C^0(I, E), \|.\|_\infty)$ est de Banach, on utilise la norme équivalente $\|y\| = \max\limits_{t \in I} \left(e^{-2L|t-t_0|} \|y(t)\|_E \right)$.

On pose :

$$T : \begin{cases} C^0(I,E) \to C^0(I,E) \\ y \longmapsto y_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s,y(s))ds, \end{cases}$$

T est bien définie, continue. Soit $t > t_0$. Pour $y_1, y_2 \in C^0(I,E)$,

$$\begin{aligned} \|Ty_1(t) - Ty_2(t)\|_E &= \left\| \int_{t_0}^t f(s,y_1(s)) - f(s,y_2(s))ds \right\|_E \\ &\leq \int_{t_0}^t L \|y_1(s) - y_2(s)\|_E \, ds \\ &\leq L \|y_1 - y_2\|_E \int_{t_0}^t e^{2L|s-t_0|}ds \\ &\leq \frac{e^{2L|t-t_0|}}{2} \|y_1 - y_2\|_E \, . \end{aligned}$$

On a la même chose pour $t \leq t_0$. On obtient :

$$\|Ty_1 - Ty_2\| \leq \frac{\|y_1 - y_2\|}{2}.$$

Donc T est contractante. Elle a donc un point fixe.

Cas où I n'est pas fermé borné. On écrit

$$]a,b[= \bigcup_{n=0}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n+1}, b - \frac{1}{n+1}\right].$$

Si $a = -\infty$, alors

$$]-\infty, b[= \bigcup_{n=0}^{\infty} \left[-n, b - \frac{1}{n+1}\right],$$

Si $b = +\infty$, c'est pareil. Soit y_n la solution sur I_n par unicité,

$$y_{n+1}|_{In} = y_n.$$

On définit y comme l'application qui $t \in I_n$ associe $y_n(t)$. D'où le résultat .

Soit de plus $(\widetilde{y}, \widetilde{I})$ une autre solution. On a

$$\widetilde{I} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\widetilde{I} \cap I_n \ ) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \widetilde{I}.$$

Pour tout n, $\widetilde{y}$ et y coïncident sur $\widetilde{I}_n$ donc sur $\widetilde{I}$. ■

Proposition 1.1.1

Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, soient y_1 et y_2 deux solutions de

$$y\prime(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in I,$$

alors

$$\|y_1(t) - y_2(t)\|_E \leq e^{L|t_0 - t|} \|y_1(t_0) - y_2(t_0)\|_E, \quad \forall t \in I.$$

Preuve.

$$y_1(t) = y_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s))ds, \qquad y_2(t) = y_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y_2(s))ds.$$

En soustrayant,

$$y_1(t) - y_2(t) = y_1(t_0) - y_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)))ds.$$

Donc :

$$\|y_1(t) - y_2(t)\|_E \leq \|y_1(t_0) - y_2(t_0)\|_E + \left| \int_{t_0}^{t} L \|y_1(s) - y_2(s)\|_E \, ds \right|,$$

et on applique le lemme de Gronwall. ■

Remarque 1.1.1

On retrouve donc l'unicité de Cauchy-Lipschitz : si (y, I) est une solution globale et $(\widetilde{y}, \widetilde{I})$

une solution locale, la proposition précédent implique que

$$\|y_1(t) - y_2(t)\|_E \leq 0, \qquad \forall t \in \widetilde{I}.$$

1.1.2 Solutions Maximales

Corollaire 1.1.1 (Existence d'une unique solution maximale)
Soit $f \in C^0(I \times D, E)$ localement lipschitzienne par rapport à x. Il existe une unique solution maximale (y, J) au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y\prime(t) = f(t, y(t)), \\ \quad y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (P)$$

De plus, I est ouvert dans I et toute solution locale de P est une restriction de (y, J).

Preuve.
Posons

$$t^+ = sup\{t\prime,\ \text{il existe une solution sur } [t_0, t\prime]\}$$
$$t^- = inf\{t\prime,\ \text{il existe une solution sur } [t\prime, t_0]\}.$$

On définit une solution y sur $]t^-, t^+[$ en recollant les morceaux, ce qui est possible par le théorème d'unicité locale. Il reste à montrer que y est maximale.
Supposons que t^+ soit dans l'intérieur de I et que y se prolonge en t^+ alors on peut résoudre le problème de Cauchy

$$z\prime(t) = f(t, z(t)) \text{ avec } z(t^+) = y(t^+).$$

Il existe alors une solution sur $[t_0, t^+ + \varepsilon]$ en recollant y et z. D'où une contradiction. De même en t^-. Donc c'est fini. ■

1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 1.2.1

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ une application continue et localement lipschitzienne en la seconde variable.

Alors, si $t_0 \in I$ et $y_0 \in \Omega$ sont donnés, le problème de Cauchy suivant admet une unique solution

$$(P) \begin{cases} Y'(t) = f(t, y(t)) \\ Y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

Comme I et Ω sont ouverts, il existe $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ un cylindre inclus dans $I \times \Omega$.

Comme f est localement lipschitzienne en la seconde variable, on peut choisir r_0 assez petit pour que f soit k-lipschitzienne sur C_0.

De plus, sur C_0, f est bornée par une constante M.

Soit $T \leq T_0$, et y une solution du problème de Cauchy définie au moins sur $I_0 \subset [t_0 - T, t_0 + T]$.Supposons qu'elle sorte du cylindre $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ ua temps $\tau \in [t_0 - T, t_0 + T]$ alors, par continuité,

$$r_0 = \|y(\tau) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^{\tau} y'(u)du \right\| \leq TM.$$

Donc si $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$, alors toute solution définie sur $I_0 \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste dans la boule $\overline{B}(y_0, r_0)$.

On nommera cylindre de sécurité l'ensemble $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$.

- **Existence locale de la solution**

  On note $F = C([t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0))$ et pour $y \in F$; on appelle $\phi(y)$ la fonction définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ comme suit

$$\phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du.$$

Comme F muni de la norme uniforme est une partie complète, et comme $\phi : F \to F$, on va appliquer un théorème de point fixe.

$$\begin{aligned}
\left|\phi(y_1) - \phi(y_1)\right|(t) &= \left|\int_{t_0}^{t} (f(u, y_1(u)) - f(u, y_2(u)))du\right| \\
&\leq k \int_{t_0}^{t} \left|y_1(u) - y_2(u)\right| du \\
&\leq kT \left\|y_1 - y_2\right\|.
\end{aligned}$$

Donc $\|\phi(y_1) - \phi(y_1)\| \leq kT \|y_1 - y_2\|$. Et en particulier, si on choisit $T \leq \frac{1}{k}$, alors ϕ est contractante.

On a donc existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

- **Unicité locale**

Soient y_1 et y_2 deux solutions définies sur des intervalles ouverts I_1 et I_2 contenan $[t_0 - T, t_0 + T]$.

soit $J = \{t \in I_1 \cap I_2, y_1(t) = y_2(t)\}$, on va montrer que $J = I_1 \cap I_2$ par connexité.

On sait déjà que $[t_0 - T, t_0 + T] \subset J$ par l'unicité vue précédemment, donc J est non vide.

Comme $J = (\widetilde{y_1} - \widetilde{y_2})^{-1}(0)$ (en notant $\widetilde{y_i}$ la restriction de y_i à $I_1 \cap I_2$), J est fermé.

Soit $t_1 \in J$, alors y_1 et y_2 sont solutions du nouveau problème de Cauchy

$$(P') \begin{cases} Y'(t) = f(t, y(t)) \\ Y(t_1) = y_1, \end{cases}$$

En adaptant le début de la preuve, on voit qu'on a égalité de y_1 et y_2 sur un voisinage $[t_1 - T', t_1 + T']$ de t_1.

Donc J est ouvert.

comme $I_1 \cap I_2$ est connexe, on a $J = I_1 \cap I_2$,ce qui donne l'unicité locale.

- **Construction de la solution maximale**

On considère $J = \underset{(\widetilde{I},y)\in S}{\cup} \widetilde{I}$ avec S l'ensemble des $(\widetilde{I}, y)$ solution du problème de Cauchy. On définit alors y^* sur J par $y^*(x) = y(x)$ si $(\widetilde{I}, y)$ est solution et $x \in I$.On peut faire ça par unicité locale.

La solution y est ainsi maximale.

Remarque 1.2.1

– Si la condition local-lipschitz n'est pas vérifiée, on n'a plus l'unicité.

$$\begin{cases} y'(t) = (y(t))^{\frac{1}{2}} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

On trouve à ce problème une infinité de solutions de la forme

$$y(t) = \frac{(t - t_0)^2}{4} \mathbf{1}_{[t_0, +\infty[}(t).$$

– Si f est seulement continue, le théorème de Cauchy-Arzela-Peano donne l'existence d'une solution.

1.3 Equations et Systèmes Différentiels Linéaires

1.3.1 Le cas Scalaire

On considère l'équation différentielle (dite "d'ordre 1") suivante

$$y'(t) = ay(t) + b(t), t \in [0, T]. \tag{1.1}$$

On notera **S** l'ensemble des solution de (1.1).

L'équation différentielle "homogène" correspondante est celle où le "second membre" $b(t)$ est nul, soit.

$$y'(t) = ay(t), t \in [0, T]. \tag{1.2}$$

On notera H l'ensemble des solution de (1.2)

Calcul fondamental, pour toute fonction y dérivable on a

$$\frac{d}{dt}(y(t)e^{-at}) = (y'(t) - ay(t))e^{-at}.$$

En particulier, si y est solution de (1.2), alors on voit que $\frac{d}{dt}(y(t)e^{-at}) = 0$, donc $y(t)e^{-at}$ est constante pour $t \in [0.T]$. La valeur en $t = 0$ vaut $y(0)$ donc pour tout $t \in [0.T]$ on a $y(t)e^{-at} = y(0)$, la solution vérifie $y(t) = y(0)e^{-at}$.On a retrouvé que toute solution du système homogène (1.2) s'écrit sous la forme $y(t) = ce^{at}$ où c est une constante. Donc $H = Vect(t \to e^{at})$

On revient au problème général (1.1). Si y est solution alors par un calcul analogue

$$\frac{d}{dt}(y(t)e^{-at}) = e^{-at}(y'(t) - ay(t)) = e^{-at}b(t)$$

On intégre alors entre 0 et t

$$e^{-at}y(t) - y(0) = \int_0^t e^{-as}b(s)ds,$$

et donc la formule

$$y(t) = e^{at}y(0) + \int_0^t e^{-a(t-s)}b(s)ds. \tag{1.3}$$

Réciproquement on vérifie que toute fonction y de la forme

$$y(t) = e^{at}y_0 + \int_0^t e^{-a(t-s)}b(s)ds, \text{ ou } y_0 \text{ constante}$$

est bien solution de (1.1).

1.4 Systèmes Différentiels

1.4.1 Transformation d'un Problème d'Ordre n en un Système de n Equations d'Ordre 1, et Inversement

Supposons que y soit solution d'un problème d'ordre n Pour simplifier

on va supposer ici que $n = 2$

$$y^{(2)} = a_0 y + a_1 y' + b(t).$$

Notons $Y(t)$ le vecteur de $\mathbb{k}^2$ t.q.

$$Y(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

On remarque alors que

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$$

vérifie

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ a_0 y(t) + a_1 y'(t) + b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Il s'agit donc d'un systeme de deux équations différentielles d'ordre 1, couplées, de la forme suivante (en posant $y_1 = y$, $y_2 = y$, $b_1 = 0$, $b_2 = b$, $a_{11} = 0$.. etc.)

$$\begin{aligned} y(t) &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + b_1(t), \\ y'(t) &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + b_2(t), \end{aligned} \tag{1.5}$$

Inversement, si on suppose que (y_1, y_2) est solution du système (1.5) alors en remplacant

$a_{12}y_2 = y' - a_{11}y_1 - b_1$ dans la deuxième équation on obtient

$$y_1'(t) - (a_{11} + a_{22})y_1' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y_1 = b_1' - a_{22}b_1.$$

qui est une équation différentielle d'ordre deux pour y_1. De même on montre que y_2 vérifie l'équation différentielle suivante :

$$y_2''(t) - (a_{11} + a_{22})y_2' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y_2 = b_2' - a_{22}b_2.$$

1.5 Théorème de Cauchy-Lipschitz pour un Système d'Equations Différentielles

Nous présentons ici la version la plus simple d'un théorème général d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle. Toute équation différentielle peut se ramener à une équation d'ordre 1, homogène en temps, quitte à accepter une augmentation de la dimension. De plus pour une telle équation, on peut toujours ramener l'origine du temps en 0. Il est donc naturel de considérer le problème différentiel avec condition initiale suivante, dit «problème de Cauchy » :

$$\begin{cases} Y'(t) = G(Y(t)) \\ Y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Dans ce problème, la fonction G est une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, la condition initiale y_0 est un point de $\mathbb{R}^d$. Une solution au problème est une fonction dérivable Y de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^d$, vérifiant pour $t > 0$.

Théorème 1.5.1

Supposons que la fonction G soit continûment différentiable, et que ses dérivées partielles soient bornées par une constante M.

$$\forall i, j = 1, , , , , , , d, \forall y \in \mathbb{R}^d, \left| \frac{\partial G_i}{\partial y_j}(y) \right| \leq M.$$

Alors il existe une solution unique au problème de Cauchy, définie sur $[0, +\infty[$.

Preuve.

Pour montrer que le problème de Cauchy admet une solution unique définie sur tout $\mathbb{R}^+$, il suffit de montrer que pour tout $T > 0$, il admet une solution unique définie sur $[0, T]$ .Considérons l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^d, C([0, T])$. C'est un espace vectoriel normé complet (espace de Banach). Définissons dans cet espace l'opérateur ϕ qui à une fonction continue z associe la fonction $\phi(z)$ définie par :

$$\forall t \in [0, T], \phi(z)(t) = y_0 + \int_0^t G(z(s))ds.$$

Observons que Y est solution du problème de Cauchy sur $[0, T]$ si et seulement si $\phi(Y) = Y$. Nous cherchons donc un point fixe de l'opérateur ϕ dans $C([0, T])$. La démonstration consiste à prouver que si Y_0 est une fonction quelconque, alors la suite des itérés successifs

$$Y_0, \phi(Y_0), \phi(\phi(Y_0)), , , , , , , , , \phi^{\circ n}(Y_0),$$

converge vers la solution désirée. On utilise pour cela le théorème du point fixe. On pourrait penser au vu de ce qui précède que calculer la suite des itérés $\phi^{\circ n}(Y_0)$ constitue une méthode de calcul approché de la solution Y . Malheureusement, le calcul de $\phi^{\circ n}(Y_0)$ implique le calcul de n intégrales successives, entraînant des erreurs d'approximations qui se cumulent. Cette méthode n'est donc pas utilisée en pratique. ∎

Exemple 1.5.1

Explicitons le calcul des itérés $\phi^{\circ n}(Y_0)$ *dans un cas particulier*

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

L'opérateur ϕ *s'écrit :*

$$\phi(z)(t) = y_0 + \int_0^t az(s)ds,$$

pour $z(t) = y_0$, *on obtient* $\phi(z)(t) = y_0 + tay_0$, *et par récurrence :*

$$\phi^{\circ n}(z)(t) = (1 + ta + \frac{t^2}{2}a^2 + \cdots\cdots + \frac{t^n}{n}a^n)y_0,$$

qui converge bien vers la solution $e^{at}y_0$.

1.6 Modèle d'épidémie SIR

Le modèle SIR est un modèle simple, dû à Kermack et McKendrick, d'une épidémie de maladies infectieuses. maladie dans une grande population. Nous supposons que la population est composée de trois types d'individus, ce qui les chiffres sont désignés par les lettres S, I et R (qui est pourquoi on appelle cela un modèle SIR). Ce sont toutes des fonctions du temps t, et elles changent selon un système d'équations différentielles.

- S est le nombre de substances sensibles, qui ne sont pas infectées mais qui pourraient l'être.
- I est le nombre d'infectifs. Ces personnes ont la maladie et peuvent la transmettre à la susceptibles.
- R est le nombre d'individus supprimés. Ceux-ci peuvent ou non avoir la maladie, mais ils ne peuvent pas être infectés et ils ne peuvent pas transmettre la maladie à d'autres. Ils peuvent avoir une immunité naturelle, ou ils peuvent avoir récupéré de la maladie et sont à l'abri de la recevoir à nouveau, ou ils peuvent avoir la maladie, mais sont incapables de la transmettre (p. ex. parce qu'elles ont pu être placées en isolement), ou ils peuvent être morts. Le modèle mathématique ne distingue pas entre ces possibilités. Voici le modèle :

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta S\dfrac{I}{N}, \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta S\dfrac{I}{N} - \gamma I, \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

la population totale étant $N = S + I + R$.

C'est donc Kermack et Mckendrick qui ont donné toute son importance à la notion de seuil introduite ultérieurement par Ross.

CHAPITRE 2

Etude d'un Modèle d'épidémie SIR avec Retard

2.1 Existence et Unicité des Solutions $S(t)$ et $I(t)$

Soit le système

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \lambda - \mu S(t) - f(S(t).I(t))I(t) \\ \frac{dI}{dt} = f(S(t-\tau).I(t-\tau))I(t-\tau)e^{-\mu\tau} - (\mu + d + r)I(t) \\ \frac{dR}{dt} = rI(t) - \mu R(t), \end{cases} \tag{2.1}$$

où

- λ est le taux de recrutement de la population,
- μ est le taux de mortalité naturelle de la population,
- d est le taux de mortalité du à la maladie,
- r est le taux de récupération du individus infectieux,
- $f(S, I)$ est le taux de transmission
- τ est l'incubation période.

- Le terme $e^{-\mu\tau}$ est la probabilité de survie du temps $t-\tau$ au temps t.

La fonction d'incidence $f(S, I)$ est supposée être continuellement différentiable à l'intérieur de $\mathbb{R}_+^2$ et vérifie les hypothèses suivantes

$$f(0, I) = 0,\ \forall (I \geq 0), \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial f(S.I)}{\partial S} > 0, \forall (S > 0 \text{ et } I \geq 0), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial f(S.I)}{\partial I} \leq 0, \forall (S \geq 0 \text{ et } I \geq 0), \tag{2.4}$$

Les deux premières équations du système (2.1) ne dépendent pas de la troisième équation, et par conséquent, cette équation peut être omise sans perte de généralité. Le système (2.1) peut être réécrit comme suit

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \lambda - \mu S(t) - f(S(t).I(t))I(t) \\ \frac{dI}{dt} = f(S(t-\tau).I(t-\tau))I(t-\tau)e^{-\mu\tau} - (\mu + d + r)I(t). \end{cases} \tag{2.5}$$

Soit $C = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^2)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur intervalle $[-\tau, 0]$ dans $\mathbb{R}^2$ avec la topologie de convergence uniforme. Par la théorie fondamentale des équations différentielles fonctionnelles, nous montrons l'existence d'une solution unique $(S(t), I(t))$ du système (2.5) avec les données initiales $(S_0, I_0) \in C$. Pour des raisons écologiques, nous supposons que les conditions initiales du système (2.5) satisfont :

$$S_0(\theta) \geq 0, I_0(\theta) \geq 0, \quad \forall \theta \in [-\tau, 0]\,. \tag{2.6}$$

Alors d'aprés le théorème de Cauchy-Lipschitz, il suffit de transformer le probléme (2.5) au un probléme de Cauchy.

donc on pose :

$$X = \begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} F_1(S.I) \\ F_2(S.I) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \mu S(t) - f(S(t).I(t))I(t) \\ f(S(t-\tau).I(t-\tau))I(t-\tau)e^{-\mu\tau} - (\mu + d + r)I(t) \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\begin{cases} F_1(S.I) = \lambda - \mu S(t) - f(S(t).I(t))I(t) \\ F_2(S.I) = (S(t-\tau).I(t-\tau))I(t-\tau)e^{-\mu\tau} - (\mu + d + r)I(t). \end{cases}$$

pour montrer que les solutions $S(t)$ et $I(t)$ existes et uniques il suffit que montrer les dérivées partielles sont bornées (en utilisons théorème de Cauchy-Lipschitz),

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial F_1}{\partial S}(S.I)\right| \leq M_1 \\ \left|\frac{\partial F_1}{\partial I}(S.I)\right| \leq M_2 \\ \left|\frac{\partial F_2}{\partial S}(S.I)\right| \leq M_3 \\ \left|\frac{\partial F_2}{\partial I}(S.I)\right| \leq M_4 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial S}(S.I) = -\mu - \frac{\partial f(S(t).I(t))}{\partial S} I(t) \\ \frac{\partial F_1}{\partial I}(S.I) = -\frac{\partial f(S(t).I(t))}{\partial I} I(t) - f(S(t).I(t)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial S}(S.I) = \frac{\partial f(S(t-\tau).I(t-\tau))}{\partial S} I(t-\tau)e^{-\mu\tau} \\ \frac{\partial F_2}{\partial I}(S.I) = \frac{\partial f(S(t-\tau).I(t-\tau))}{\partial I} I(t-\tau)e^{-\mu\tau} + e^{-\mu\tau} f(S(t-\tau).I(t-\tau)) - (\mu + d + r) \end{cases}$$

et comme $f(S(t).I(t))$ continument différentiable sur l'interieur de $\mathbb{R}^2$ alors $f(S(t).I(t))$ et $\partial f(S(t).I(t))$ est localement bornée dans l'interieur de $\mathbb{R}^2_+$ alors, on a

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial f(S(t).I(t))}{\partial S}\right| \leq c_1 \\ |f(S(t).I(t))| \leq c_2, \end{cases}$$

ou c_1, c_2 des constantes positive.

et comme S, I continues sur $B_f(0.\mathbb{R})$ donc elle sont bornées alors $\exists K_1, K_2$ tel que : $|S| \leq K_1, |I| \leq K_2$sur $B_f(0.\mathbb{R})$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial F_1}{\partial S}(S.I)\right| &= \left|-\mu - \frac{\partial f(S(t).I(t))}{\partial S} I(t)\right| \leq |\mu| + \left|\frac{\partial f(S(t).I(t))}{\partial S}\right| |I(t)| \\
&\leq \mu + c_1 K_1 = M_1, \\
\left|\frac{\partial F_1}{\partial I}(S.I)\right| &= \left|-\frac{\partial f(S(t).I(t))}{\partial I} I(t) - f(S(t).I(t))\right| \leq \left|\frac{\partial f(S(t).I(t))}{\partial I}\right| |I(t)| + |f(S(t).I(t))| \\
&\leq c_1 K_1 + c_2 = M_2, \\
\left|\frac{\partial F_2}{\partial S}(S.I)\right| &= \left|\frac{\partial f(S(t-\tau).I(t-\tau))}{\partial S} I(t-\tau) e^{-\mu\tau}\right| = \left|\frac{\partial f(S(t-\tau).I(t-\tau))}{\partial S}\right| |I(t-\tau)| \, e^{-\mu\tau} \\
&\leq c_1 K_1 e^{-\mu\tau} = M_{3,} \\
\left|\frac{\partial F_2}{\partial I}(S.I)\right| &= \left|\frac{\partial f(S(t-\tau).I(t-\tau))}{\partial I} I(t-\tau) e^{-\mu\tau} + e^{-\mu\tau} f(S(t-\tau).I(t-\tau)) - (\mu + d + r)\right| \\
&\leq \left|\frac{\partial f(S(t-\tau).I(t-\tau))}{\partial I}\right| |I(t-\tau)| \, e^{-\mu\tau} + e^{-\mu\tau} \left|f(S(t-\tau).I(t-\tau))\right| + |(\mu + d + r)| \\
&\leq (c_1 K_1 + c_2) \, e^{-\mu\tau} + \mu + d + r = M_4.
\end{aligned}
$$

alors d'après Cauchy-Lipschitz on a le résultat

$$
\begin{cases}
\left|\frac{\partial F_i}{\partial S}(S.I)\right| \leq \max\limits_{1 \leq j \leq 4} M_j \\
\left|\frac{\partial F_i}{\partial I}(S.I)\right| \leq \max\limits_{1 \leq j \leq 4} M_j
\end{cases}
$$

ou $i = 1.2$

donc les solutions $(S(t).I(t))$ existent et uniques.

2.2 Positivité des Solutions

comme le modèle (2.5) représente la population, il est important de prouver que toutes les solutions contenant des données initiales non négatives resteront non négatives.

Proposition 2.2.1

chaque composant de la solution de système (2.5),sous la condition (2.6), reste non négative *et borné pour tous* $t > 0$.

Preuve.

la solution $S(t)$ est positive $\forall t \geq 0$. en fait, en supposant le contraire, et si t_1 est l'instant ou la 1^{er} fois que $S(t_1) \leq 0$, et par la 1^{er} équation du système (2.5) nous avons $S'(t_1) = \lambda > 0$, et donc $S(t) < 0 \forall t \in]t_1 - \varepsilon, t_1[$,ou $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, ceci contradiction, alors $S(t) > 0 \forall t \in [0, t_1[$. donc $S(t) > 0$ $\forall t > 0$.

maintenant nous prouvons la positivité da la solution $I(t)$, de (2.5), on a la $2^{éme}$ équaion du système (2.5) admet une solution de la forme suivante $I(t) = ce^{at}$, alors si $I(t)$ est solution alors par un calcul analogue

$$\frac{d(I(t)e^{-at})}{dt} = e^{-at}(I'(t) - aI(t)) = e^{-\mu\tau} f(S(t-\tau).I(t-\tau))I(t-\tau)e^{-at},$$

on intégre entre 0 et t

$$e^{-at}I(t) - I(0) = \int_0^t e^{-\mu\tau} f(S(\theta-\tau).I(\theta-\tau))I(\theta-\tau)e^{-a\theta}d\theta,$$

et donc la formule

telle que $a = (\mu + d + r)$

$$I(t) = I(0)e^{at} + e^{-\mu\tau} \int_0^t f(S(\theta-\tau).I(\theta-\tau))I(\theta-\tau)e^{a(t-\theta)}d\theta,$$

$I(0)$ est bien solution de la $2^{éme}$ équaion du système (2.5), et comme $I(0) > 0$ d'après la condition initiale (2.6)

donc la solution $I(t)$ est toujour positve car

$$I(t) = I(0)e^{at} > 0.$$

Soit $t \in [0, \tau]$, nous avons $\theta - \tau \in [-\tau, 0]$ $\forall \theta \in [0, \tau]$. en utilisons (2.6) et (2.5), nous déduisons que $S(t) \geq 0$ $\forall t \in [0, \tau]$, cette méthode etre réprétée la non négativité de S sur $[\tau, 2\tau]$, puis par intervalles successifs $[n\tau, (n+1)\tau]\,, n \geq 2$, inclure tous les moments positifs. cela prouve la positivité de la solution.

pour la bornage de la solution, nous définissons :

$$T(t) = S(t) + e^{\mu\tau} I(t+\tau),$$

par non négativité de la solution, il s'ensuit que :

$$\frac{dT(t)}{dt} = \lambda - \mu S(t) - ae^{\mu\tau} I(t+\tau) \leq \lambda\mu T(t).$$

Alors $T(t)$ est bornée, de meme que $S(t)$ et $I(t)$, ceci complète la preuve de cette proposition.

■

2.3 Nombre de reproduction et analyse de la stabilité

Le système (2.5) a toujours un état stable sans maladie de la forme

$$E_f(\frac{\lambda}{\mu}, 0).$$

Par conséquent, nous définissons le nombre de reproduction de base $R_0(\tau)$ de notre modèle par :

$$R_0 = \frac{f(\frac{\lambda}{\mu}, 0)e^{-\mu\tau}}{\mu + d + r}, \tag{2.7}$$

ou $\dfrac{1}{\mu + d + r}$ représente l'espérance de vie moyenne des individus infectieux, $\dfrac{\lambda}{\mu}$ représente le nombre d'individus susceptibles au début de l'infectieuse processus et $f(\frac{\lambda}{\mu}, 0)$ représente la valeur de la fonction f tous les individus sont sensible. Par conséquent, notre R_0 est biologiquement bien défini.

Il est facile de voir que si $R_0 \leq 1$ l'état stable sans maladie $E_f(\frac{\lambda}{\mu}, 0)$ est l'unique état d'équilibre, correspondant à l'extinction de la maladie. Le théorème suivant présente l'existence et l'unicité de l'équilibre endémique si $R_0 > 1$.

Théorème 2.3.1

(i) *Le point d'équilibre sans maladie du système (2.5) est donné par* $E_f(\frac{\lambda}{\mu}, 0)$*, qui existe pour toutes les valeurs de paramètre.*

(ii) *Si* $R_0 > 1$*, le système (2.5) présente un équilibre endémique unique de la forme* $E^*(S^*, I^*)$ *avec* $S^* \in]0, \frac{\lambda}{\mu}[$ *et* $I^* > 0$.

Preuve.

L'état d'équilibre du système (2.5) vérifie le système d'équations suivant

$$\lambda - \mu S - f(S, I)I = 0, \tag{2.8}$$

$$f(S, I)Ie^{-\mu\tau} - (\mu + d + r)I = 0. \tag{2.9}$$

En (2.9) on obtient $I = 0$ ou $f(S, I) = (\mu + d + r)e^{\mu\tau}$.

- si $I = 0$, on obtient le point d'équilibre sans maladie $E_f(\frac{\lambda}{\mu}, 0)$.
- si $I \neq 0$, puis en utilisant (2.8) et (2.9), alors on a d'après (2.8)

$$f(S, I)I = \lambda - \mu S,$$

et d'après (2.9) on a

$$f(S, I)I = (\mu + d + r)e^{\mu\tau}I,$$

alors

$$(\mu + d + r)e^{\mu\tau}I = \lambda - \mu S,$$

donc

$$I = \frac{\lambda - \mu S}{(\mu + d + r)e^{\mu\tau}}.$$

d'où

$$f(S, \frac{\lambda - \mu S}{(\mu + d + r)e^{\mu\tau}}) = (\mu + d + r)e^{\mu\tau}. \tag{2.10}$$

On a

$$I = \frac{\lambda - \mu S}{(\mu + d + r)e^{\mu\tau}} \geq 0,$$

ce qui implique que

$$S \leq \frac{\lambda}{\mu}.$$

par conséquent il n' y a pas de point d'équilibres positif si $S > \frac{\lambda}{\mu}$

Considérons maintenant la fonction suivante g définie sur l'intervalle $[0, \frac{\lambda}{\mu}]$

$$g(S) = f(S, \frac{\lambda - \mu S}{(\mu + d + r)e^{\mu\tau}}) - (\mu + d + r)e^{\mu\tau}.$$

Puisque,

$$g(0) = -(\mu + d + r)e^{\mu\tau} < 0$$

et,

$$g(\frac{\lambda}{\mu}) = (\mu + d + r)e^{\mu\tau}(R_0 - 1) > 0 \text{ si } R_0 > 1.$$

Plus loin,

$$g'(S) = \frac{\partial f}{\partial S} - \frac{\mu}{(\mu + d + r)e^{\mu\tau}}\frac{\partial f}{\partial I} > 0.$$

Par conséquent, il existe une endémique équilibre unique $E^*(S^*, I^*)$ avec $S^* \in]0, \frac{\lambda}{\mu}[$ et $I^* > 0$.

■

2.4 Stabilité globale de l'équilibre sans maladie

Le théorème suivant traité de la stabilité globale de l'équilibre sans maladie.

Théorème 2.4.1

L'équilibre E_f sans maladie du système (2.5) est globalement asymptotiquement stable lorsque $R_0 \leq 1$, sinon est instable

Preuve.

Considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V(t) = S(t) - S_0 - \int_{S_0}^{S(t)} \frac{f(S_0,0)}{f(X,0)} dX + e^{\mu\tau} I(t) + \int_{t-\tau}^{t} f(S(\theta), I(\theta)) I(\theta) d\theta,$$

où $S_0 = \frac{\lambda}{\mu}$. Pour simplifier la présentation, nous utiliserons la notation suivante
$X = X(t)$ et $X_\tau = X(t-\tau)$ pour tout $X \in \{S, I\}$ et on a $a = \mu + r + d$. On calcule de la dérivée temporelle de V le long de la solution positive du système (2.5), on obtient

$$\begin{aligned}
V'(t)|_{(1.2)} &= S' - S' \frac{f(S_0,0)}{f(S,0)} + S_0' \frac{f(S_0,0)}{f(S_0,0)} + e^{\mu\tau} I' + f(S,I)I - f(S_\tau, I_\tau) I_\tau \\
&= (1 - \frac{f(S_0,0)}{f(S,0)}) S' + e^{\mu\tau} f(S(t-\tau), I(t-\tau)) I(t-\tau) e^{-\mu\tau} - e^{\mu\tau} aI + f(S,I)I - f(S_\tau, I_\tau) I_\tau \\
&= (1 - \frac{f(S_0,0)}{f(S,0)}) (\lambda - \mu S - f(S,I)I) + f(S_\tau, I_\tau) I_\tau - e^{\mu\tau} aI + f(S,I)I - f(S_\tau, I_\tau) I_\tau \\
&= (1 - \frac{f(S_0,0)}{f(S,0)}) (\lambda - \mu S) + \frac{f(S_0,0)}{f(S,0)} f(S,I)I - e^{\mu\tau} aI,
\end{aligned}$$

et on a

$$\mu = \frac{\lambda}{S_0} \text{ et } \lambda = \mu S_0$$

et on a d'après (2.7) :

$$R_0 = \frac{f(\frac{\lambda}{\mu}, 0) e^{-\mu\tau}}{a}$$

alors

$$f(\frac{\lambda}{\mu}, 0) = R_0 a e^{\mu\tau}$$

donc

$$\begin{aligned}
V'(t)|_{(1.2)} &= \mu S_0 (1 - \frac{S}{S_0})(1 - \frac{f(S_0,0)}{f(S,0)}) + R_0 a e^{\mu\tau} I \frac{f(S,I)}{f(S,0)} - a e^{\mu\tau} I \\
&= \mu S_0 (1 - \frac{S}{S_0})(1 - \frac{f(S_0,0)}{f(S,0)}) + a e^{\mu\tau} I (\frac{f(S,I)}{f(S,0)} R_0 - 1) \\
&\leq \mu S_0 (1 - \frac{S}{S_0})(1 - \frac{f(S_0,0)}{f(S,0)}) + a e^{\mu\tau} I (R_0 - 1).
\end{aligned}$$

Utilisation des inégalités triviales suivantes :

$$1 - \frac{f(S_0, 0)}{f(S, 0)} \geq 0 \text{ si } S \geq S_0,$$
$$1 - \frac{f(S_0, 0)}{f(S, 0)} \leq 0 \text{ si } S \leq S_0.$$

Ainsi, nous avons

$$(1 - \frac{S}{S_0})(1 - \frac{f(S_0, 0)}{f(S, 0)}) \leq 0.$$

Puisque $R_0 \leq 1$,on a $V'(t)|_{(1.2)} \leq 0$. Ainsi, l'équilibre sans maladie E_f est stable, et $V'(t)|_{(1.2)} = 0$ si et seulement si $S = S_0$ et $I(R_0 - 1) = 0$ Nous discutons de deux cas :

(i) si $R_0 < 1$, puis $I = 0$.

(ii) si $R_0 = 1$ de $S = S_0$ et la 1^{re} équation de (2.5), nous avons

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_0}{dt} = \lambda - \mu S_0 - f(S_0, I) I = 0.$$

puis, $f(S_0, I) I = 0$ puisque $S_0 > 0$, puis $f(S_0, I) > f(0, I) = 0$ $((H_1)$ et $(H_2))$.Par conséquent $I = 0$.

Par la discussion ci-dessus, nous en déduisons que le plus grand ensemble invariant compact de $\Gamma = \{(S, I)|V' = 0\}$ est juste le singleton E_f du principe d'invariance ,nous conclurons que E_f est globalement asymptotiquement stable.

D'autre part, l'équation caractéristique à l'équilibre sans maladie E_f est donné par :

$$(\zeta + \mu)[\zeta + a(1 - R_0 e^{-\zeta\tau})] = 0. \tag{2.11}$$

évidemment $\zeta = -\mu$ est une valeur propre pour (2.11), et par conséquent, la stabilité de E_f est déterminée par la distribution des racines de l'équation

$$\zeta + a(1 - R_0 e^{-\zeta\tau}) = 0. \tag{2.12}$$

Il est facile de montrer que (2.12) a une vraie racine positive quand $R_0 > 1$. En effet,

$$\varphi(\zeta) = \zeta + a(1 - R_0 e^{-\zeta\tau}).$$

Nous avons cela $\varphi(0) = a(1 - R_0) < 0$, $\lim_{\zeta\to+\infty} \varphi(\zeta) = +\infty$ et la fonction φ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Par conséquent, φ à une racine réelle positive et l'équilibre sans maladie est instable lorsque $R_0 > 1$. Cela prouve le théorème. ■

2.5 Stabilité Globale de l'Equilibre Endémique

Notons que l'équilibre sans maladie E_f est instable lorsque $R_0 > 1$. Maintenant, nous établirons un ensemble de conditions suffisantes pour la stabilité globale de l'équilibre endémique E^*.

Pour la stabilité globale de E^*, on suppose que $R_0 > 1$ et que la fonction f satisfait la condition suivante :

$$\left(1 - \frac{f(S, I)}{f(S, I^*)}\right)\left(\frac{f(S, I^*)}{f(S, I)} - \frac{I}{I^*}\right) \leq 0, \text{ pour tous } S, I > 0. \tag{2.13}$$

Théorème 2.5.1

Supposons que $R_0 > 1$ et par (2.13) Ensuite, l'équilibre endémique E^* du système (2.5) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve.

Considérons la fonction de Lyapunove suivante

$$\begin{aligned} W(t) = S(t) - S^* - \int_{S^*}^{S(t)} \frac{f(S^*, I^*)}{f(X, I^*)} dX + e^{\mu\tau} I^* \phi(\frac{I(t)}{I^*}) \\ + f(S^*, I^*) I^* \int_{t-\tau}^{t} \phi(\frac{f(S(\theta), I(\theta)) I(\theta)}{f(S^*, I^*) I^*}) d\theta, \end{aligned}$$

où $\phi(x) = x - 1 - \ln x, x \in \mathbb{R}^+$, évidemment, $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ atteint son global minimum à

$x = 1$ et $\phi(1) = 0$. La fonction $\psi : x \mapsto x - x^* - \int_{x^*}^{x} \frac{f(S^*,I^*)}{f(X,I^*)} dX$ a le minimum global à $x = x^*$ et $\psi(x^*) = 0$, puis $\psi(x) \geq 0$ pour tous $x > 0$. Par conséquent $W(t) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\frac{S(t)}{S^*} = \frac{I(t)}{I^*} = 1$ pour tous $t > 0$. En recherche la dérivée temporelle de $W(t)$ le long de la solution positive du système (2.5) donné par

$$\begin{aligned} W'(t)|_{(1.2)} &= S' - S'\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)} + e^{\mu\tau}(1 - \frac{I^*}{I})I' + f(S^*,I^*)I^*\phi(\frac{f(S,I)I}{f(S^*,I^*)I^*}) \\ &- f(S^*,I^*)I^*\phi(\frac{f(S_\tau,I_\tau)I_\tau}{f(S^*,I^*)I^*}) \\ &= (1 - \frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)})S' + e^{\mu\tau}(1 - \frac{I^*}{I})I' \\ &+ f(S^*,I^*)I^*(\phi(\frac{f(S,I)I}{f(S^*,I^*)I^*}) - \phi(\frac{f(S_\tau,I_\tau)I_\tau}{f(S^*,I^*)I^*})). \end{aligned}$$

Notons que $\lambda = \mu S^* + aI^* e^{\mu\tau}$ et $f(S^*,I^*) = ae^{\mu\tau}I^*$, alors

$$\begin{aligned} S' &= \mu S^* + aI^* e^{\mu\tau} - \mu S - f(S,I)I \\ &= \mu S^* \left(1 - \frac{S}{S^*}\right) + aI^* e^{\mu\tau} - f(S,I)I. \end{aligned}$$

et

$$I' = f(S_\tau,I_\tau)I_\tau e^{-\mu\tau} - aI,$$

alors

$$\begin{aligned} W'(t)|_{(1.2)} = \mu S^* \left(1 - \frac{S}{S^*}\right)(1 - \frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)}) + aI^* e^{\mu\tau}(1 - \frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)} + \frac{I}{I^*}\frac{f(S,I)}{f(S,I^*)}) \\ + aI^* e^{\mu\tau}(1 - \frac{I}{I^*} - \frac{f(S_\tau,I_\tau)I_\tau}{f(S^*,I^*)I} + f(S^*,I^*)I^* \ln(\frac{f(S_\tau,I_\tau)I_\tau}{f(S,I)I}) \end{aligned}$$

d'où

$$
\begin{aligned}
W'(t)|_{(1.2)} &= \mu S^* \left(1-\frac{S}{S^*}\right)(1-\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)}) + aI^* e^{\mu\tau}(1-\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)} - \frac{f(S,I)}{f(S^*,I^*)} + \frac{f(S,I)}{f(S^*,I^*)} \\
&+ \frac{f(S,I^*)}{f(S,I)} - \frac{f(S,I^*)}{f(S,I)} + 1 - \frac{I}{I^*} - 1 + 1 + \frac{I}{I^*}\frac{f(S,I)}{f(S,I^*)} - \frac{f(S_\tau,I_\tau)I_\tau}{f(S^*,I^*)I} + \ln(\frac{f(S_\tau,I_\tau)I_\tau}{f(S,I)I})) \\
&= \mu S^* \left(1-\frac{S}{S^*}\right)(1-\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)}) + aI^* e^{\mu\tau}(3-\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)} - \frac{f(S,I)}{f(S^*,I^*)} - \frac{f(S,I^*)}{f(S,I)}) \\
&+ aI^* e^{\mu\tau}(-1-\frac{I}{I^*} + \frac{f(S,I^*)}{f(S,I)} + \frac{I}{I^*}\frac{f(S,I)}{f(S,I^*)}) + aI^* e^{\mu\tau}(\frac{f(S,I)}{f(S^*,I^*)} - \frac{f(S_\tau,I_\tau)I_\tau}{f(S^*,I^*)I} + \ln(\frac{f(S_\tau,I_\tau)I_\tau}{f(S,I)I})) \\
&= \mu S^* \left(1-\frac{S}{S^*}\right)(1-\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)}) + aI^* e^{\mu\tau}(-1-\frac{I}{I^*} + \frac{f(S,I^*)}{f(S,I)} + \frac{I}{I^*}\frac{f(S,I)}{f(S,I^*)}) \\
&- aI^* e^{\mu\tau}(\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)} + \frac{f(S,I)}{f(S^*,I^*)} + \frac{f(S,I^*)}{f(S,I)} - 3 - \frac{f(S,I)}{f(S^*,I^*)} + \frac{f(S_\tau,I_\tau)I_\tau}{f(S^*,I^*)I} - \ln(\frac{f(S_\tau,I_\tau)I_\tau}{f(S,I)I}) \\
&+ \ln(\frac{f(S^*,I^*)I}{f(S,I)I}) - \ln(\frac{f(S^*,I^*)I}{f(S,I)I}) + \ln(\frac{f(S,I^*)}{f(S,I)}) - \ln(\frac{f(S,I^*)}{f(S,I)}) + \ln(\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)}) - \ln(\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)})) \\
&= \mu S^* \left(1-\frac{S}{S^*}\right)(1-\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)}) + aI^* e^{\mu\tau}(-1-\frac{I}{I^*} + \frac{f(S,I^*)}{f(S,I)} + \frac{I}{I^*}\frac{f(S,I)}{f(S,I^*)}) \\
&- aI^* e^{\mu\tau}(\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)} - 1 - \ln(\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)}) + \frac{f(S,I^*)}{f(S,I)} - 1 - \ln(\frac{f(S,I^*)}{f(S,I)}) + \frac{f(S_\tau,I_\tau)I_\tau}{f(S^*,I^*)I} - 1 \\
&- \ln(\frac{f(S_\tau,I_\tau)I_\tau}{f(S^*,I^*)I}) - \ln(\frac{f(S^*,I^*)I}{f(S,I)I}) + \ln(\frac{f(S,I^*)}{f(S,I)}) + \ln(\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)})) \\
&= \mu S^* \left(1-\frac{S}{S^*}\right)(1-\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)}) + aI^* e^{\mu\tau}(-1-\frac{I}{I^*} + \frac{f(S,I^*)}{f(S,I)} + \frac{I}{I^*}\frac{f(S,I)}{f(S,I^*)}) \\
&- aI^* e^{\mu\tau}\left[\phi(\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)}) + \phi(\frac{f(S,I^*)}{f(S,I)}) + \phi(\frac{f(S_\tau,I_\tau)I_\tau}{f(S^*,I^*)I})\right].
\end{aligned}
$$

ou

$$
-\ln(\frac{f(S_\tau,I_\tau)I_\tau}{f(S,I)I}) + \ln(\frac{f(S^*,I^*)I}{f(S,I)I}) = -\ln(\frac{f(S_\tau,I_\tau)I_\tau}{f(S^*,I^*)I}),
$$

et

$$
-(\ln(\frac{f(S^*,I^*)I}{f(S,I)I}) - \ln(\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)})) = -\ln(\frac{f(S,I^*)}{f(S,I)}).
$$

Par l'utilisation des inégalités triviales suivantes

$$1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)} \geq 0 \text{ si } S \geq S^*,$$
$$1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)} \prec 0 \text{ si } S \prec S^*.$$

On obtient

$$\left(1 - \frac{S}{S^*}\right)(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}) \leq 0.$$

de la condition (2.13) on a

$$-1 - \frac{I}{I^*} + \frac{f(S, I^*)}{f(S, I)} + \frac{I}{I^*}\frac{f(S, I)}{f(S, I^*)} = (1 - \frac{f(S, I)}{f(S, I^*)})(\frac{f(S, I^*)}{f(S, I)} - \frac{I}{I^*}) \leq 0.$$

Puisque $\phi(x) \geq 0$ pour $x \succ 0$, on a $W'(t)|_{(1.2)} \leq 0$. Ainsi, E^* est stable, et $W'(t)|_{(1.2)} = 0$ si et seulement si $S = S^*$ et $I = I^*$. Ainsi, le plus grand invariant compact mis en $\Gamma = \{(S, I)\,|W' = 0\}$ est le singleton E^*, on conclure que E^* est globalement asymptotiquement stable. ■

Conclusion

Nous avon détailler l'étude d'un modèle d'épidémie SIR retardé avec un taux d'incidence généralisé, ou le délai représente à la période d'incubation. Le paramètre de seuil R_0 est obtenu et déterminé si la maladie est éteinte ou non. La technique de fonctionnelle de Lyapunov etait utiliser pour établir la stabilité globale de l'équilibre sans maladie et de l'équilibre endémique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] O. Bokanowski, Equations et systèmes differntiels linéaires, Notes de cours, Paris 7, Novembre 2015.

[2] G. Huang, W. Ma and Y. Takeuchi, Global analysis for delay virus dynamics model with Beddington-De Angelis functional response, Applied Mathematics Letters. 24(7) (2011), 1199-1203.

[3] N. Yousfi, K. Hattaf, M. Rachik, Analysis of a HCV model with CTL and antibody responses, Applied Mathematical Sciences, Vol. 3, no. 57, (2009), 2835–2845.

[4] C.C. McCluskey, Complete global stability for an SIR epidemic model with delay-distributed or discrete, Nonlinear Anal. Real World Appl. 11 (1) (2010) 55-59.

[5] K. Hattaf, N.Yousfi, A. Tridane, Mathematical analysis of a virus dynamics model with general incidence rate and cure rate, Nonlinear Analysis : Real World Applications, 13 (2012),1866–1872

[6] J. Hale and S. M. Verduyn Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, SpringerVerlag, New York, 1993.

[7] J.P. LaSalle, The stability of dynamical systems, Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1976.

[8] BENTOUT, Soufiane. Mathématiques Appliquées à Quelques modèles épidémiologiques. Thèse de doctorat. Université de Tlemcen