République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

ZEMIT Anouar

Titre :

Fonctions à variation bornée

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	BOUZIANE Nadjette	UMKB	Président
Dr.	BERBICHE Mohamed	UMKB	Encadreur
Dr.	HAMDI Soumia	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dedicace

Tous les mots ne sauraient exprimer la

reconnaissance, la gratitude, le respect...

Aussi, c'est tout simplement que je dédie

ce mémoire à mes chers parents,

qui ont sacrifié leur vie pour mon bien être.

Je dédie aussi cette mémoire à mes chers frères

et mes sœurs,

toute ma famille,

mes amis, tous mes professeurs qui m'ont

enseignée et à tous ceux qui me sont chers.

À la fin,

Je souhaite la bonne santé, la longue vie et le bonheur

à toute ma famille.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon encadreur **BERBICHE Mohamed**, maître de conférences à

l'université de Biskra, pour ma voir proposé ce sujet qui m'a permis de m'initier à la recherche scientifique. Son suivi régulier de l'évolution de mon travail, ses conseils et ses encouragements m'ont permis de réaliser ce mémoire dans d'excellentes conditions de travail.

Mes précieux remerciements vont au président et membres de jury : " **BOUZIANE Nadjette** " et " **HAMDI Soumia**" pour l'honneur qu'il m'ont fait en acceptant de juger mon travail.

Table des matières

Remerciements **ii**

Table des matières **iii**

Introduction **1**

1 Fonctions à variation bornée **4**

1.1 Subdivisions d'un intervalle 4

1.2 Fonctions à variation bornée 5

1.2.1 Propriétés de fonctions à variation bornée 5

2 Théorème de dérivation de Lebesgue **11**

2.1 Points de discontinuité d'une fonction à variation bornée 11

2.2 Théorème de Helly 14

2.3 Théorème de Lebesgue pour la différentiabilité des fonctions monotones 15

2.4 Intégrale de Lebesgue du dérivé d'une fonction croissante 18

2.5 Primitives de fonctions Lebesgue intégrables 20

3 Fonction à variation bornée dans un domaine **23**

3.1 Espace $BV(\Omega)$ des fonctions à variation bornée 23

3.1.1 Définitions et propriétés 23

3.1.2 Modèle de Rudin-Osher-Fatemi (ROF) 25

3.1.3 Discrétisation 26

3.1.4 Algorithme de projection de Chambolle 27

Bibliographie **30**

Introduction

Le développement de la théorie des fonctions à variation bornée s'est fait dans un sens complètement inattendu et que l'inventeur de ces fonctions ne pouvait certainement pas prévoir, car ce développement n'est devenu possible qu'après les travaux de H. Lebesgue sur les intégrales définies.

Ce type de fonctions est apparait la première fois dans les travaux de Jordan en 1881 pour l'étude de Séries de Fourier. Il pose déjà les premiers fondements de l'étude intrinsèque des fonctions à variation bornée. Il donne, exactement comme nous le ferions aujourd'hui, le moyen de reconnaître si une fonction donnée $f(x)$ est à variation bornée dans un intervalle (a, b) et il définit sa variation positive, sa variation négative et sa variation totale dans cet intervalle.

Il montre que les fonctions à variation bornée sont intégrables au sens de Riemann et que les intégrales indéfinies de fonctions bornées sont des fonctions à variation bornée.

En Séries de Fourier tout le monde connaît le théorème de Dirichlet sur la convergence des Séries de Fourier. La démonstration s'applique aux fonctions bornées qui n'ont qu'un nombre fini d'extrêmes et de discontinuités

Une autre importance des ces fonctions est l'explication la dérivation faible ou (aux sens de distributions). En effet au siècle dernier s'est posé la question de savoir si les fonctions appartenant à telle ou telle catégorie, comme les fonctions continues ou monotones, admettent nécessairement des dérivées (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble de mesure nulle). C'est Weierstrass qui a fourni le premier résultat en construisant une fonction continue sans dérivée. En voici un exemple dû à Van der Waerden, fondé sur le fait qu'une suite de nombres entiers ne peut être convergente que

si ses termes restent constants à partir d'un certain rang. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n}$$

où $\{x\}$ désigne la distance de x à l'entier le plus proche. f est continue sur $\mathbb{R}$, mais dérivable nulle part.

D'autre part l'extension du concept aux fonctions de plusieurs variables n'est pas aussi simple. La théorie abstraite de la mesure et la géométrie ont permet d'élargir cette classe aux fonctions de plusieurs variables qui est aujourd'hui un outil très puissant pour modéliser de nombreux phénomènes et affronter quantité de problèmes mathématiques. C'est surtout à partir des années 50, avec les travaux de De Giorgi, qu'elles ont pris une place centrale dans le calcul des variations.

Notamment, le problème des surfaces minimales, les fonctions à variation bornée ont permis d'étudier de nombreux phénomènes tels que les transitions de phases, les fractures, la segmentation ou d'autres applications en traitement d'images, des problèmes de discontinuités libres tels que certaines questions de plasticité ou de la théorie des cristaux liquides. C'est également un bon cadre pour étudier des questions de nature géométrique telles que les diverses variantes du problème isopérimétrique.

Le présent mémoire contient trois principaux chapitres :

le premier chapitre est consacré aux études des fonctions monotones et leur lien avec la dérivabilité. Dans la deuxième section on introduit le concept des fonctions à variation bornée. On va caractériser ce type de fonctions et.

Dans le deuxième chapitre, on va étudier sa liaison avec d'autres classes telles que les fonctions monotones et les fonctions lipchitziennes. Notamment va citer des résultats concernant la différentiabilite des fonctions monotones sur l'espace $\mathbb{R}$ sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle, puis on démontre le théorème célèbre de Lebesgue. On se termine ce chapitre par la structure de l'espace de Banach des fonctions à variation bornée et démontrer le théorème de densité dû à Helly.

Dans le troisième chapitre, on étend la notion de fonctions à variation bornée aux fonctions définies

sur $\mathbb{R}^n$. On va définir l'espace de Banach des fonctions à variations bornée sur un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Afin avoir illustré l'importance de cette classe de fonctions dans les applications, on a introduit un model variationnel proposé par de Rudin-Osher-Fatemi lors de l'étude de la restauration des images dégradées. Ce modèle consiste essentiellement à minimiser la variation totale de certaines fonctionnelles.

Chapitre 1

Fonctions à variation bornée

1.1 Subdivisions d'un intervalle

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle subdivision de $[a,b]$ tout $n+1$ -upplet $P=(t_0,t_1,\cdots,t_n)$ satisfaisant

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b.$$

La norme de P est définie par $\|P\|=\max\{t_i-t_{i-1}:1\leq i\leq n\}$. Notons qu'une telle quantité est toujours strictement positive.

L'ensemble des subdivisions de $[a,b]$ est noté par $S([a,b])$.

Définition 1.1.1 *Soient $P=(t_0,t_1,\cdots,t_n)$ et $Q=(s_0,s_1,\cdots,s_m)$ deux subdivisions de $[a,b]$.*

(i). On dira que P est inclus dans Q si $\{t_0,t_1,\cdots,t_n\}\subseteq\{s_0,s_1,\cdots,s_m\}$, et dans ce cas on note $P\subseteq Q$.

(ii). On dira qu'une subdivision $R=(r_0,r_1,\cdots,r_k)$ est la réunion de P et Q si $\{r_0,r_1,\cdots,r_k\}=\{t_0,t_1,\cdots,t_n\}\cup\{s_0,s_1,\cdots,s_m\}$, et dans ce cas on note $R=P\cup Q$.

Proposition 1.1.1 *Soient P et Q deux partitions de $[a,b]$.*

(i). Si $P\subseteq Q$ alors $\|Q\|\leq\|P\|$.

(ii). $\|P \cup Q\| \leq \min\{\|P\|, \|Q\|\}$.

Preuve. Posons $P = (t_0, t_1, \cdots, t_n)$ et $Q = (s_0, s_1, \cdots, s_m)$.

(i). Soit $i \in \{1, \cdots, m\}$. Alors il exist $0 \leq j \leq n$ tel que $t_{i-1} < s_i < t_j$. Comme $P \subseteq Q$, on obtient que $t_{i-1} < s_{i-1}$. Par conséquent

$$s_i - s_{i-1} \leq t_j - t_{j-1} \leq \|P\|.$$

D'ou $\|Q\| \leq \|P\|$.

(ii). Comme $P \subseteq P \cup Q$ alors $\|P \cup Q\| \leq \|P\|$. De même on obtient que $\|P \cup Q\| \leq \|Q\|$. D'ou $\|P \cup Q\| \leq \min\{\|P\|, \|Q\|\}$, ce qui termine la preuve.

■

1.2 Fonctions à variation bornée

Pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ et toute subdivision $P = (t_0, t_1, \cdots, t_n)$ de $[a, b]$, on pose

$$\nu(f, P) = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|.$$

Cette quantité représente la longueur de la ligne polygonale passant par les points $f(t_i)$, $0 \leq i \leq n$.

1.2.1 Propriétés de fonctions à variation bornée

Proposition 1.2.1 *Soient $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction et P,$Q \in S([a, b])$. Si $P \subseteq Q$ alors $\nu(f, P) \leq \nu(f, Q)$.*

Preuve. Posons $P = (t_0, t_1, \cdots, t_n)$ et $Q = (s_0, s_1, \cdots, s_m)$. Comme $P \subseteq Q$, il existe une application strictement croissante

$$\phi : \{0, 1, \cdots, n\} \to \{0, 1, \cdots, m\},$$

vérifiant $t_i = s_{\phi(i)}$. En effet pour tout $t_i \in P \subseteq Q$ il existe un unique $\phi(i)$ tel que $t_i = s_{\phi(i)}$. En plus, on

$$t_{i+1} = s_{\phi(i+1)} > t_i = s_{\phi(i)} \Rightarrow \phi(i+1) > \phi(i).$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
\nu(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left|f(s_{\phi(i)}) - f(s_{\phi(i-1)})\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left|f(s_{\phi(i)}) - f(s_{\phi(i)-1}) + f\left(s_{\phi(i)-1}\right) - f\left(s_{\phi(i)-2}\right) + \ \cdots + f\left(s_{\phi(i-1)+1}\right) + f\left(s_{\phi(i-1)}\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=\phi(i-1)+1}^{\phi(i)} |f(s_k) - f(s_{k-1})| \\
&= \sum_{j=1}^{\phi(n)=m} |f(s_j) - f(s_{j-1})| = \nu(f,Q),
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

Définition 1.2.1 (Variation totale) *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est dite à variation bornée s'il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\nu(f,P) \leq M \text{ pour tout } P \in S([a,b]).$$

Dans ce cas, $L(f) = \sup\{\nu(f,P) : P \in S([a,b])\}$ est appelée la variation totale, ou la longueur de f.

Proposition 1.2.2 *Soient f,$g : [a,b] \to \mathbb{C}$ deux fonction à variation bornée et α,$\beta \in \mathbb{C}$. Alors $\alpha f + \beta g$ est aussi une fonction à variation bornée. En plus, on a*

$$L(\alpha f + \beta g) \leq |\alpha| L(f) + |\beta| L(\sigma).$$

Preuve. Soit $P = (t_0, t_1, \cdots, t_n)$ une subdivision de $[a, b]$. On a

$$\begin{aligned}\nu(\alpha f + \beta g, P) &= \sum_{i=1}^{n} |(\alpha f + \beta g)(t_i) - (\alpha f + \beta g)(t_{i-1})| \\ &\leq |a| \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| + |\beta| \sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| \\ &\leq |\alpha| L(f) + |\beta| L(g).\end{aligned}$$

Par conséquent, $L(\alpha f + \beta g) \leq |\alpha| L(f) + |\beta| L(g)$. ■

Comme conséquence directe de la proposition précédente, on signale que $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est à variation bornée si, et seulement si, $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont.

Proposition 1.2.3 *Soient $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction à variation bornée et $c \in]a, b[$.*

Alors $f_1 := f_{|[a,c]}$ et $f_2 := f_{|[c,b]}$ sont à variation bornée. En plus, on a

$$L(f) = L(f_1) + L(f_2).$$

Preuve. Soient $P_1 \in S([a, c])$ et $P_2 \in S([c, b])$ Notons par P la subdivision de $[a, b]$ formée par les points de P_1 et P_2. Il vient alors que

$$\nu(f_1, P_1) + \nu(f_2, P_2) = \nu(f, P) \leq L(f).$$

Ce qui montre que f_1 et f_2 sont à variation bornée et

$$L(f_1) + L(f_2) \leq L(f).$$

Pour démontrer l'autre inégalité, considérons une subdivision arbitraire Q de $[a, b]$ Soit $P = (x_0, \cdots, x_n)$ la subdivision de $[a, b]$ obtenue en rajoutant à Q le point c s'il n'y est pas. On a $Q \subseteq P$. On pose

$$c = x_1, P_1 = (x_0, x_1, \cdots, x_p) \in S([a, b]) \text{ et } P_2 = (c, x_{p+1}, \cdots, b) \in S([a, b]).$$

D'après la proposition (1.2.1), on a : $Q \subseteq P$ alors $L(f,Q) \leq L(f,P)$. D'autre part

$$\nu(f,Q) \leq \nu(f,P) = \nu(f_1,P_1) + \nu(f_2,P_2) \leq L(f_1) + L(f_2).$$

Par conséquent,

$$L(f) \leq L(f_1) + L(f_2).$$

■

Proposition 1.2.4 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction.*

(i). Si f est lipschitzienne, alors f est à variation bornée.

(ii). Si f est monotone, alors f est à variation bornée et $L(f) = |f(a) - f(b)|$.

Preuve.

(i). Comme f est lipschitzienne, il existe un réel α positive tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|.$$

Soit $P = (x_0, \cdots, x_n) \in S([a,b])$. On a

$$\nu(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \alpha \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \alpha(b-a),$$

donc f est à variation bornée et $L(f) \leq \alpha(b-a)$.

(ii). Supposons que f est croissante et soit $P = (x_0, \cdots, x_n) \in S([a,b])$. Alors :

$$\nu(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(b) - f(a).$$

Ainsi f est à variation bornée et $L(f) = f(b) - f(a)$.

Si f est décroissante, alors

$$\begin{aligned} \tilde{f} \ &: [-b,-a] \to \mathbb{R} \\ &t \mapsto f(-t), \end{aligned}$$

est une fonction croissante, et donc

$$L(f) = L\left(\tilde{f}\right) = \tilde{f}(-a) - \tilde{f}(-b) = f(a) - f(b).$$

D'où f est à variation bornée. ■

Proposition 1.2.5 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(i). f est à variation bornée,

(ii). $f = f_1 - f_2$ où $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions croissantes.

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$. On considère la fonction

$$f_1(x) = \begin{cases} L(f_{|[a,x]}) & si \quad x \in]a,b] \\ 0 & si \quad x = a. \end{cases}$$

Alors f_1 est croissante. En effet, pour $a \leq x < y \leq b$, on a

$$L(f_{|[a,x]}) \leq L(f_{|[a,x]}) + L(f_{|[x,y]}) = L(f_{|[a,y]}).$$

On pose : $f_2 = f_1 - f$. Pour tout $x, y \in [a,b]$ tels que $x < y$, on a

$$\begin{aligned} f_2(y) - f_1(x) &= \left(L(f_{|[a,y]}) - L(f_{|[a,x]})\right) - (f(y) - f(x)) \\ &= L(f, | [x,y]) - (f(y) - f(x)) \geq 0. \end{aligned}$$

Ce qui montre que f_2 est croissante.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Découle immédiatement de Proposition (1.2.4) et du fait que les fonctions monotones sont à variations bornées. ■

Proposition 1.2.6 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction à variation bornée. Alors :*

(i). f est intégrable au sens de Riemann.

(*ii*). *f est bornée.*

Preuve.

(*i*). Quitte à considérer les parties réelle et imaginaire de f, on peut supposer que f est à valeurs réelles. D'aprés Proposition (1.2.5), $f = f_1 - f_2$ où f_1 et f_2 sont des fonctions croissantes. Comme toute fonction monotone sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann**,** on obtient que f est intégrable au sens de Riemann**.**

(*ii*). Soit $x \in]a,b[$ et considérons $P = (a,x,b) \in S([a,b])$. Alors il vient :

$$|f(x)| - |f(a)| \leq |f(x) - f(a)| \leq \nu(f,P) \leq L(f),$$

par conséquent, $|f(x)| \leq L(f) + |f(a)|$ pour tout $x \in [a,b]$.

■

Exemple 1.2.1 *La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x\cos\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ est continue mais n'est pas à variation bornée.*

Preuve. On considère la subdivision suivante de $[0,1]$:

$$P_n = 0 < \frac{1}{n\pi} < \frac{1}{(n-1)}\pi < \cdots < \frac{1}{2\pi} < \frac{1}{\pi} < 1,$$

alors

$$\nu(f,P_n) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \left| f\left(\frac{1}{(k+1)\pi}\right) - f\left(\frac{1}{k\pi}\right) \right| = \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{\cos(k+1)\pi}{(k+1)\pi} - \frac{\cos k\pi}{k\pi} \right|,$$

donc

$$\nu(f,P_n) \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k+1},$$

or la série $\sum \frac{1}{k+1}$ diverge donc f n'est pas à variation bornée. ■

Chapitre 2

Théorème de dérivation de Lebesgue

2.1 Points de discontinuité d'une fonction à variation bornée

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Les limites à gauche et à droite, lorsqu'elle existent, seront notées respectivement par :

$$f\left(x_0^+\right) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ et } f\left(x_0^-\right) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ où } x_0 \in [a,b].$$

Théorème 2.1.1 *Toute fonction à variation bornée $f :\in [a,b] \to \mathbb{C}$, admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point de $[a.b]$. En plus, l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.*

Avant de démontrer ce théorème, on a besoin d'établir certains résultats.

Notons que si f est croissante, alors

$$f\left(x_0^-\right) = \sup\{f(x) : x < x_0\}, \text{ et } f\left(x_0^+\right) = \inf\{f(x) : x > x_0\}.$$

De même si f est décroissante, alors

$$f\left(x_0^-\right) = \inf\{f(x) : x > x_0\}, \text{ et } f\left(x_0^+\right) = \sup\{f(x) : x > x_0\}.$$

Lemme 2.1.1 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Alors :*

(i). $f(x^+)$ et $f(x^-)$ existent pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii). $f(a^+) \leq f\left(x_0^-\right) \leq f(x_0) \leq f\left(x_0^+\right) \leq f(b^-)$. Si $a < x_0 < b$

Lemme 2.1.2 *Soint $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et $x_1, x_2, \cdots, x_n \in]a,b[$. Alors*

$$0 \leq \left(f\left(a^+\right) - f(a)\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(x_k^+\right) - f\left(x_k^-\right)\right) + \left(f(b) - f\left(b^-\right)\right) \leq f(b) - f(a).$$

Lemme 2.1.3 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Alors $Disc(f)$ est un ensemble dénombrable.*

Proposition 2.1.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.*

Alors $\varphi = f - S_f$ est une fonction croissante et continue sur $[a,b]$.

Théorème 2.1.2 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction à variation bornée. Alors $f = \varphi + S_f$ où φ est continue et à variation bornée, et S_f à variation bornée.*

Définition 2.1.1 *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est dite de classe C^1 par morceaux, s'il existe une subdivision $(t_0, t_1, \cdots, t_n)$ de $[a,b]$ telle que f soit de classe C^1 sur chaque intervalle $]t_{k-1}, t_k[$, $1 \leq k \leq n$.*

Proposition 2.1.2 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe C^1 par morceaux, alors f est à variation bornée et*

$$L\left(f_{|[a,b]}\right) = \int_a^b |f'(t)|\, dt.$$

Preuve. Par la proposition (1.2.3), on peut supposer, sans perte de généralité, que f est de classe C^1. Soit $P = (t_0, t_1, \cdots, t_n)$ une subdivision de $[a,b]$ .On a

$$\begin{aligned} \nu(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t)\, dt \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t)|\, dt = \int_a^b |f'(t)|\, dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, f est à variation bornée et $L(f) \leq \int_a^b |f'(t)|\, dt$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f' continue, elle est uniformément continue sur $[a,b]$, et donc il existe $\delta > 0$ pour lequel $|f'(t) - f'(s)| \leq \varepsilon$ pour tout $t, s \in [a,b]$ vérifiant $|t-s| \leq \delta$. Choisissons un entier positif n tel que $(b-a)/n \leq \delta$, et considérons la subdivision $P = (t_0, t_1, \cdots, t_n)$ où $t_i = a + i(b-a)/n$ pour $0 \leq i \leq n$. Le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un certain $c_i \in]t_{i-1}, t_i[$ satisfaisant $f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i)(t_i - t_{i-1})$, $1 \leq i \leq n$. Il en résulte

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f'(t)|\, dt - \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t)|\, dt - \sum_{i=1}^n |f'(c_i)|\,(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (|f'(t)| - |f'(c_i)|)\, dt \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t) - f'(c_i)|\, dt.
\end{aligned}$$

Or, pour $1 \leq i \leq n$ et $t \in]t_{i-1}, t_i[$, on a $|t - c_i| \leq (b-a)/n \leq \delta$, et donc $|f'(t) - f'(c_i)| \leq \varepsilon$.

Par suite

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f'(t)|\, dt &\leq \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \\
&\leq L(f) + \varepsilon (b-a).
\end{aligned}$$

Finalement, comme ε est arbitraire, on obtient $\int_a^b |f'(t)|\, dt \leq L(f)$. ■

Proposition 2.1.3 *L'ensemble des fonctions continues dans $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, noté par $C([a,b], \mathbb{C})$, est dense dans l'ensemble des fonctions intégrable au sens de Riemann, i.e : $L^1([a,b]) = \overline{C([a,b], \mathbb{C})}$.*

Théorème 2.1.3 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable au sens de Riemann.*

Alors la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ pour tout } x \in [a,b],$$

est à variation bornée et $L(F) = \int_a^b |f(t)|\, dt$.

Preuve. Soit $P = (t_0, t_1, \cdots, t_n) \in S([a,b])$. On a :

$$\begin{aligned}\nu(F,P) &= \sum_{i=1}^{n} |F(t_i) - F(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f(t))\, dt \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(t)|\, dt = \|f\|_1 .\end{aligned}$$

D'où F est à variation bornée et

$$L\left(F_{|[a,b]}\right) \leq \|f\|_1 . \tag{2.1}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f \in L^1([a,b]) = \overline{C([a,b],\mathbb{C})}$, il existe $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue telle que $\|f-g\|_1 \leq \varepsilon$, on pose

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt \text{ pour tout } x \in [a,b] .$$

Par la proposition (2.1.2), On a $L(G) = \|g\|_1$. D'autre part, l'inégalité (2.1) appliquée à $f-g$ donne $L(F-G) \leq \|f-g\|_1 \leq \varepsilon$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\|f\|_1 &\leq \|f-g\|_1 + \|g\|_1 \leq \|g\|_1 + \varepsilon = L\left(G_{|[a,b]}\right) + \varepsilon \\ &\leq L(G-F) + L(F) + \varepsilon \leq L(F) + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Comme ε est arbitraire, on obtient $\|f\|_1 \leq L(F)$. ■

2.2 Théorème de Helly

Théorème 2.2.1 *L'image dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ de tout ensemble borné de $VB(\mathbb{R})$ est relativement compacte, c'est-à-dire que : pour toute suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$bornée dans $VB(\mathbb{R})$, il éxiste une sous-suite $(u_{\varepsilon'})$ et $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tels que*

$$\lim_{\varepsilon' \overset{>}{\to} 0} \|u_{\varepsilon'} - u\|_{L^1(I)} = 0, \text{ pour tout intervalle borné } I.$$

Corollaire 2.2.1 *Soit $F = \{f : [a,b] \to \mathbb{C}\}$ une famille de fonction de classa C^1 par morceaux telle que $\|f\|_\infty \leq k$ et $\|f\|_1 \leq k$ pour tout $f \in F$. Alors il existe une suite $(f_n) \subseteq F$ qui converge*

simplement sur $[a, b]$.

2.3 Théorème de Lebesgue pour la différentiabilité des fonctions monotones

On définit les dérivés supérieurs et inférieurs d'une fonction réelle f définie sur un intervalle ouvert I par :

$$\bar{D}f(x) = \limsup_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{et} \quad \underline{D}f(x) = \liminf_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

On dit que f est une fonction différentiable en $x \in I$ si les dérivés supérieure et inférieure de f à x sont finis et égaux.

On a ensuite prouvé un résultat important. Si f est une fonction croissante sur $[a, b]$, puis pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$ nous avons que :

$$m^*(\{x \in (a, b) : \bar{D}f(x) \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} [f(b) - f(a)] .$$

$$m^*(\{x \in (a, b) : \bar{D}f(x) = \infty\}) = 0.$$

On utilise ces résultats pour prouver un théorème extrêmement important appelé théorème de Lebesgue pour la différentiabilité des fonctions monotones. Ce résultat nous dit que chaque fonction monotone f (croissante ou décroissante) définie sur un intervalle ouvert (a, b) est différentiable presque partout (a, b).

Théorème 2.3.1 *Soit f une fonction monotone sur (a, b) (bornée ou non bornée). Alors f est différentiable presque partout (a, b).*

$$f \text{ est montone} \longrightarrow f \text{ est différentiable presque partout.}$$

Preuve. Soit f une fonction croissante sur l'intervalle (a, b).

– Il suffit de prouver le résultat pour quand (a, b) est un intervalle ouvert borné. Si (a, b) est un

sans limite, On peut écrire $(a,b) = \cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ où $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ est une séquence d'intervalles ouverts bornés de telle sorte que $(a_n, b_n) \subseteq (a_{n+1}, b_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Donc, si f est différentiables presque partout sur chaque intervalle ouvert borné (a_n, b_n) il existe un ensemble $E_n \subseteq (a_n, b_n)$ tel que $m(E_n) = 0$ et f est différentiable sur tout $(a_n, b_n) \setminus E_n$. Donc f est différentiable sur tout de $\cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) \setminus E_n = (a,b) \setminus \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Mais une union dénombrable d'ensembles de mesure Lebesgue 0 a Lebesgue mesure 0, alors f est différentiable presque partout (a,b).
- Rappelons maintenant que f est dit différentiable en $x \in (a,b)$ si les dérivées supérieure et inférieure de f sont finies et égales. Donc, l'ensemble des points pour lesquels f n'est pas différentiables sur (a,b) est :

$$\left\{x \in (a,b) : \bar{D}f(x) = \infty\right\} \cup \left\{x \in (a,b) : \infty > \bar{D}f(x) > \underline{D}f(x)\right\}.$$

- Nous avons déjà prouvé que si f est une fonction croissante alors $m^*(\{x \in (a,b) = \bar{D}f(x) = \infty\}) = 0$. Il faut donc montrer que $m^*(\{x \in (a,b) : \infty > \bar{D}f(x) > \underline{D}f(x)\}) = 0$.
- Pour chaque $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, soit $E_{\alpha,\beta} = \left\{x \in (a,b) : \underline{D}f(x) < \beta < \alpha < \bar{D}f(x) < \infty\right\}$, on peut écrire l'ensemble ci-dessus comme l'union suivante :

$$\begin{aligned}\left\{x \in (a,b) : \infty > \bar{D}f(x) > \underline{D}f(x)\right\} &= \cup_{\alpha,\beta\in\mathbb{Q}} \left\{x \in (a,b) : \underline{D}f(x) < \beta < \alpha < \bar{D}f(x) < \infty\right\} \\ &= \cup_{\alpha,\beta\in\mathbb{Q}} E_{\alpha,\beta}.\end{aligned}$$

- Donc on a besoin de montrer que $m^*(E_{\alpha,\beta}) = 0$ pour chaque $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.
- Soit $\epsilon > 0$ donné. Pour un fixe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\beta < \alpha$ soit $E = E_{\alpha,\beta}$. Il existe alors un ensemble ouvert O' avec $E \subseteq O'$ tel que $m^*(O') \leq m^*(E) + \varepsilon$. Soit $O = O' \cap (a,b)$. Alors O est aussi un ensemble ouvert, et est tel que $E \subseteq O \subseteq (a,b)$ et tel que :

$$m^*(O) \leq m^*(O') < m^*(E) + \epsilon.$$

– Définir la collection d'intervalles fermés I par :

$$\mathcal{I} = \{[c,d] \subseteq O : f(d) - f(c) < \beta(d-c)\}.$$

– Alors $\mathcal{I}$ est une couverture Vitali de E. (Cela peut être prouvé de manière similaire à une partie de la preuve mentionnée en haut de cette page). Puisque$E \subseteq (a,b)$ et que nous supposons que (a,b) est un intervalle ouvert borné, nous avons $m(E) < \infty$. Donc, par le théorème de couverture de Vitali, puisque $m(E) < \infty$ et $\mathcal{I}$ est une couverture Vitali de E, il existe une collection finie d'intervalles fermés mutuellement disjoints $\{[c_1,d_1],[c_2,d_2],\cdots,[c_n,d_n]\}$ dans $\mathcal{I}$ tel que :

$$m^*(E \setminus \cup_{k=1}^n [c_k,d_k]) < \epsilon. \tag{2.2}$$

– Maintenant :

$$\sum_{k=1}^n [f(d_k) - f(c_k)] < \sum_{k=1}^n \beta [d_k - c_k] < \beta m^*(O) < \beta [m^*(E) + \epsilon]. \tag{2.3}$$

– On note maintenant que pour chaque $k \in \{1,2,...,n\}$ on a que $E \cap [c_k,d_k] \subseteq \left\{x \in [c_k,d_k] : \bar{D}f(x) > |\alpha|\right\}$. Donc, pour chaque k on a

$$m^*(E \cap [c_k,d_k]) \leq m^*\left(\left\{x \in [c_k,d_k] : \bar{D}f(x) > |\alpha|\right\}\right) \leq \frac{1}{|\alpha|}[f(d_k) - f(c_k)]. \tag{2.4}$$

– On écrit $E = (E \setminus \cup_{k=1}^n [c_k,d_k]) \cup (\cup_{k=1}^n [c_k,d_k] \cap E)$ pour que alors :

$$\begin{aligned}
m^*(E) &= m^*(E \setminus \cup_{k=1}^n [c_k,d_k]) + m^*(\cup_{k=1}^n [c_k,d_k] \cap E) \\
&\overset{(2.2)}{<} \epsilon + \sum_{k=1}^n m^*([c_k,d_k] \cap E) \quad \text{(puisque les } [c_k,d_k] \text{ sont mutuellement disjoints)} \\
&\overset{(2.4)}{<} \epsilon + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha}[f(d_k) - f(c_k)] \\
&\overset{(2.3)}{<} \epsilon + \frac{\beta}{|\alpha|}(m^*(E) + \epsilon).
\end{aligned}$$

– Puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire, on obtient que $m^*(E) \leq \frac{\beta}{|\alpha|} m^*(E)$. On note que si $m^*(E) > 0$,

cette inégalité implique que $1 \leq \frac{\beta}{|\alpha|}$ et donc $|\alpha| \leq \beta$ alors $\alpha \leq \beta$ qui est en contradiction puisque $\beta < \alpha$. Il faut donc que $m^*(E) = 0$.

– Donc f est différentiable presque partout (a, b).

■

2.4 Intégrale de Lebesgue du dérivé d'une fonction croissante

Théorème 2.4.1 *Soit f une fonction croissante sur $[a, b]$. Alors $f'(x) \geq 0$ (où il est défini) et $\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$.*

Preuve. Soit f une fonction croissante sur $[a, b]$ (et donc augmentant sur (a, b)). Puis par le théorème de Lebesgue sur la différenciabilité des fonctions monotones, f est différentiable presque partout sur (a, b) et donc $f'(x)$ existe presque partout sur (a, b). Pour chaque $x \in (a, b)$ pour lequel $f'(x)$ est défini, on a que la limite suivante existe et est finie En :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

– Soient $h = \frac{1}{n}$ et en $n \to \infty$ nous avons que $h \to 0$ et donc pour chaque $x \in (a, b)$ pour lequel $f'(x)$ est défini, nous avons que :

$$f'(x) = \lim_{n \to 0} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}. \tag{2.5}$$

– (Il faut faire attention quant à certains n suffisamment grands, f peut ne pas être défini comme $x + \frac{1}{n}$. on considére n suffisamment grand pour que $f(x + \frac{1}{n})$ soit défini).

– Puisque f est une fonction croissante, $f(x + \frac{1}{n}) - f(x) \geq 0$ et clairement $\frac{1}{n} \geq 0$. On note également que $f'(x)$ est une limite ponctuelle des fonctions mesurables de Lebesgue, alors $f'(x)$ est une fonction mesurable de Lebesgue.

– Maintenant, les fonctions dans la limite en (2.5) sont toutes mesurables et non négatives de

Lebesgue, et comme $n \to \infty$ ces fonctions convergent ponctuellement vers $f'(x)$ presque partout sur $[a, b]$. Donc, par le lemme de Fatou pour Fonctions mesurables de Lebesgue non négatives, nous avons cela :

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)dx &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} dx \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \left[n\int_a^b f(x+\frac{1}{n})dx - n\int_a^b f(x)dx \right].\end{aligned}$$

– Maintenant on a ça :

$$\begin{aligned}n\int_a^b f(x+\frac{1}{n})dx + n\int_a^b f(x)dx &= n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right] \\ &= n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b} f(x)dx + \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx + \int_{a+\frac{1}{n}}^{b} f(x)dx\right] \\ &= n\left[\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx\right]. \qquad (2.6)\end{aligned}$$

– Puisque f est croissante sur $[a, b]$ on a $f(a) \leq f(x)$ pour tous $x \in [a, b]$ et ainsi :

$$\frac{1}{n}f(a) = \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)dx \leq \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx.$$

– Donc :

$$-\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)dx \leq -\frac{1}{n}f(a). \qquad (2.7)$$

– De même, on a que $f(x) \leq f(b)$ pour tout $x \in [a, b]$ et ainsi :

$$\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx \leq \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(b)dx \leq \frac{1}{n}f(b). \qquad (2.8)$$

– Donc de (2.7) et (2.8) et (2.6) on obtient :

$$n\int_a^b f(x+\frac{1}{n})dx - n\int_a^b f(x)dx \leq n\left[\frac{1}{n}f(b) - \frac{1}{n}f(a)\right] = f(b) - f(a).$$

– Puisque cela est vrai pour tout n suffisant, nous avons que :

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a).$$

■

2.5 Primitives de fonctions Lebesgue intégrables

On rappelle, à partir des critères d'intégrabilité pour que les fonctions soient nulles presque partout, les résultats suivants :

1. Si f est une fonction Lebesgue intégrable non négative définie sur un ensemble Lebesgue mesurable E et $\int_E f = 0$ alors $f(x) = 0$ p. p. sur E.
2. Si f est une fonction Lebesgue intégrable sur $[a, b]$ et $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Si $F(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$ alors $f(x) = 0$ p.p. sur E.

On prouve maintenant un résultat très important.

Théorème 2.5.1 *Soit f une fonction Lebesgue intégrable bornée sur $[a, b]$ et soit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Alors $F^{'}(x) = f(x)$ presque partout sur $[a, b]$.*

Preuve. Du théorème énoncé ci-dessus, comme f est Lebesgue intégrable sur $[a, b]$, on a d'apres le lemme F est à variation bornée sur $[a, b]$. Cela signifie que F peut être exprimé comme différence de deux fonctions croissantes sur $[a, b]$, c'est-à-dire que $F = F_1 - F_2$ où F_1 et F_2 croissantes sur $[a, b]$. Du Théorème de Lebesgue sur la différenciabilité des fonctions monotones, puisque F_1 et F_2 sont des fonctions monotones, F_1 et F_2 sont différenciables presque partout sur $[a, b]$ et donc $F = F_1 - F_2$ est différentiable presque partout sur $[a, b]$.

– Maintenant, puisque f est borné sur $[a, b]$, il existe un $M \in R$, $M > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ on a cela :

$$|f(x)| \leq M.$$

– Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit une suite de fonctions sur $[a, b]$ par :

$$F_n(x) = \frac{F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)}{\frac{1}{n}}. \tag{2.9}$$

– Par convention, soit $F(x) = F(b)$ pour tout $x \geq b$. Comme on a déjà établit que F est continu sur $[a, b]$, on a chaque F_n est une fonction Lebesgue mesurable sur $[a, b]$. Donc $(F_n(x))_{n=1}^{\infty}$ est une suite de fonctions Lebesgue mesurables de.

– En outre, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on a que :

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \left| \frac{F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)}{\frac{1}{n}} \right| \\
&= n \left| \int_a^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| \\
&= n \left| \int_a^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt \right| \\
&\leq n \left| \int_{\left[x, x+\frac{1}{n}\right]} f(t)dt \right| \\
&\leq n \int_{\left[x, x+\frac{1}{n}\right]} f(t)dt \\
&\leq nl\left(\left[x, x + \frac{1}{n}\right]\right) M \\
&\leq n \cdot \frac{1}{n} M \\
&\leq M.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

– Donc $(F_n(x))_{n=1}^{\infty}$ est une séquence de fonctions mesurables de Lebesgue définies sur $[a, b]$ ($m([a, b]) < \infty$) telles que $(F_n(x))_{n=1}^{\infty}$ uniformément bornée et que $(F_n(x))_{n=1}^{\infty}$ converge ponctuellement presque partout sur $[a, b]$ vers $F'(x)$. Nous avons donc le théorème de convergence uniforme pour les suites de fonctions convergentes point par point :

$$\int_a^b F'(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b F_n(x)dx.$$

– Et pareillement, pour chaque $c \in [a,b]$ on a cela :

$$\begin{aligned}
\int_a^c F'(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \int_a^c F_n(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^c \frac{F\left(x+\frac{1}{n}\right) - F(x)}{\frac{1}{n}} dx \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[\int_a^c F\left(x+\frac{1}{n}\right)dx - \int_a^c F(x)dx\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} F(x)\,dx - \int_a^c F(x)dx\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[\int_c^{c+\frac{1}{n}} F(x)\,dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)dx\right] \\
&= F(c) - F(a) \\
&= F(c) \\
&= \int_a^c f(x)dx.
\end{aligned}$$

– Alors, pour tout $c \in [a,b]$ nous avons cela :

$$\int_a^c F'(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^c f(x)dx.$$

– Donc, pour tout $c \in [a,b]$ nous avons cela :

$$\int_a^c [F'(x) - f(x)]\,dx = 0.$$

– Par le résultat (2.9) mentionné en haut de la page, nous avons que $F'(x) - f(x) = 0$ presque partout sur $[a,b]$, donc $F'(x) = f(x)$ presque partout sur $[a,b]$.

■

Chapitre 3

Fonction à variation bornée dans un domaine

On va définir dans ce chapitre l'espace de fonctions à variation bornée dans un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^n$, $BV(\Omega)$. On va voir à travers d'un exemple concret le problème de la restauration des images où s'intervient cet espace. Notamment, on va présenter un modèle variationnel proposé par Rudin-Osher-Fatemi. Ce modèle consiste essentiellement à minimiser la variation totale de certains fonctionnel.

3.1 Espace $BV(\Omega)$ des fonctions à variation bornée

3.1.1 Définitions et propriétés

On rappelle ici la définition de l'espace $BV(\Omega)$ (on suppose que Ω, le domaine de l'image, est un ouvert borné Lipschitz de $\mathbb{R}^2$) :

Définition 3.1.1 *$BV(\Omega)$ est le sous-espace des fonctions $u \in L^1(\Omega)$ telle que la quantité suivante soit finie :*

$$J(u) = \sup \left\{ \int_\Omega u(x) \operatorname{div}(\xi(x))\, dx / \xi \in C_c^1\left(\Omega; \mathbb{R}^2\right), \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\}. \tag{3.1}$$

$BV(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + J(u),$$

est un espace de Banach.

Si $u \in BV(\Omega)$, la dérivée au sens des distributions Du est une mesure de Radon bornée et (3.1) correspond à la variation totale $|Du|(\Omega)$.

Propriétés :

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ étant un ouvert borné Lipschitz, alors :

1. Si u appartient à $BV(\Omega)$, on a la décomposition suivante de Du :

$$Du = \nabla u dx + D^s u,$$

où $\nabla u dx$ est la partie absolument continue de Du par rapport à la mesure de le besgue $\mathcal{L}^2$, et $D^s u$ la partie singulière. De plus, on peut redécomposer $D^s u$ sous la forme : $D^s u = D^j u + D^c u$ avec $D^j u$ qui correspond aux sauts de u et $D^c u$ à sa partie cantorienne.

2. Si Ω est connexe et si $Du = 0$, alors $u = cste$.
3. L'application $u \longmapsto J(u)$ de $BV(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$ est semi-continue inférieurement (sci) pour la topologie de $L^1(\Omega)$.
4. $$BV(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$
5. $$BV(\Omega) \subset L^1(\Omega),$$

avec injection compacte.

Pour plus de détails sur $BV(\Omega)$, on renvoie le lecteur à [6].

L'intérêt de l'espace BV en traitement d'image vient essentiellement du fait qui'il autorise les discontinuités le long de courbes (plus généralement, en dimension N, le long de surfaces de codimen-

sion $N-1$). En particulier, il autorise la présence de bords, C'est un espace qui est particulièrement bien adapté pour les images géométriques (même si par-contre on sait que BV ne convient pas pour modéliser certaines images naturelles). Le succès de BV en traitement d'image est étroitement lié à celui du modèle de Rudin-Osher-Fatemi [7] que nous présentons dans la sous-section suivante.

3.1.2 Modèle de Rudin-Osher-Fatemi (ROF)

Le débruitage est l'un des objectifs majeurs du traitement d'images. Etant donnée une image dégradée f, on cherche à reconstruire l'image originale non bruitée u. L'approche variationnelle de ce genre de problème consiste à s'intéresser à la minimisation d'une fonctionnelle du type :

$$\inf_u \|f-u\|_2^2 + L(u),$$

où $L(u)$ est un terme de régularisation (on est amené à introduire un tel terme, car le problème de restauration est mal posé). Une régularisation classique dite de Tychonov, qui consiste à prendre $L(u) = \int_\Omega |Du|^2$ ne s'avère pas un bon choix en traitement d'images. En effet, une telle régularisation est trop forte, en particulier, les bords de l'images sont érodés.

Pour contourner cet inconvénient, les auteurs de [7] ont proposé d'utilisier une régularisation basée sur la variation totale, i.e. de prendre $L(u) = J(u) = \int |Du|$. L'intérêt d'un tel choix pour la fonction de régularisation provient du fait que la variation totale en dimension deux autorise les discontinuités sur des courbes, et donc en particulier la présence des bords dans l'image restaurée. Ainsi, même si numériquement l'approche s'avère plus délicate, la régularisation par la variation totale s'est imposée comme une bonne approche en traitement d'images.

Dans [7], les auteurs décomposent une image f en une composante u appartenant à $BV(\Omega)$ et une composante v dans $L^2(\Omega)$. Dans ce modèle, v es supposée être le bruit. Dans une telle approche, l'énergie minimisée est la suivante :

$$\inf_{(u,v)\in BV(\Omega)\times L^2(\Omega)/f=u+v} \left(\int_\Omega |Du| + \frac{1}{2\lambda} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right). \tag{3.2}$$

En pratique dans [7], la solution numérique est calculée à partir de l'équation d'Euler-Lagrange associée à (3.2) (aprés avoir remplacé le terme $\int |Du|$ par $\int |\nabla u|$). L'étude mathématique de (3.2) a été faite dans [2] . Pour améliorer les résultats de restauration d'images par variation totale, il est possible de rajouter d'autres contraintes dans le processus de minimisation.

Nous allons décrire maintenant une méthode originale pour résoudre numériquement le problème (3.2).

3.1.3 Discrétisation

Dans ce paragraphe, nous fixons les notations relatives aux images discrètes, que nous utiliserons dans la suite de ce travail. Une image numérique, ou discrète, est un vecteur à deux dimensions de taille $N \times N$. On note X l'espace euclidien $\mathbb{R}^{N\times N}$, et $Y = X \times X$. On munit l'espace X du produit scalaire :

$$(u, v)_X = \sum_{1\leq i,j\leq N} u_{i,j} v_{i,j},$$

et de la norme :

$$\|u\|_X = \sqrt{(u, u)_X}.$$

Pour définir une variation totale discrète, on introduit d'abord une version discrète de l'opérateur gradient. Si $u \in X$, le gradient ∇u est un vecteur de Y donné par :

$$(\nabla u)_{i,j} = \left((\nabla u)^1_{i,j}, (\nabla u)^2_{i,j} \right),$$

avec

$$(\nabla u)^1_{i,j} = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & \text{si} \quad i < N \\ 0 & \text{si} \quad i = N \end{cases} \quad \text{et} \quad (\nabla u)^2_{i,j} = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & \text{si} \quad j < N \\ 0 & \text{si} \quad j = N. \end{cases}$$

La variation totale discrète de u est alors donnée par :

$$J(u) = \sum_{1 \leq i,j \leq N} \left| (\nabla u)_{i,j} \right|.$$

On introduit également une version discrète de l'opérateur divergence. On le définit par analogie avec le cadre continu en posant :

$$\operatorname{div} = -\nabla^*,$$

où ∇^* est l'opérateur adjoint de ∇ : i.e., pour tout $p \in Y$ et $u \in X$, $(-\operatorname{div} p, u)_X = (p, \nabla u)_Y$.

Il est aisé de vérifier que :

$$(\operatorname{div}(p))_{i,j} = \begin{cases} p^1_{i,j} - p^1_{i-1,j} & \text{si} \quad 1 < i < N \\ p^1_{i,j} & \text{si} \quad i = 1 \\ -p^1_{i-1,j} & \text{si} \quad i = N \end{cases} + \begin{cases} p^2_{i,j} - p^2_{i,j-1} & \text{si} \quad 1 < j < N \\ p^2_{i,j} & \text{si} \quad j = 1 \\ -p^2_{i,j-1} & \text{si} \quad j = N. \end{cases}$$

On utiliserons aussi une version discrète de l'opérateur Laplacien définie par :

$$\nabla u = \operatorname{div} \nabla u.$$

3.1.4 Algorithme de projection de Chambolle

Récemment, Antonin Chambolle a proposé dans [1] un algorithme de projection pour résoudre le problème de Rudin-Osher-Fatemi. Plus précisément, le problème étudié dans [1] est le suivant :

$$\inf_{u \in X} \left(J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u\|^2_X \right). \tag{3.3}$$

Comme J d'finie par (3.1) est homogène de degré un (i.e. $J(\lambda u) = \lambda J(u)$ $\forall u$ et $\lambda > 0$), il est standard (cf [4]) que J^* la transformée de Legendre-Fenchel de J,

$$J^*(v) = \sup \left((u, v)_X - J(u) \right),$$

est la fonction indicatrice d'un ensemble convexe fermé K. Un calcul rapide montre que K s'identifie à l'ensemble :

$$K = \{\mathrm{div}\,(g)\,/g \in Y, |g_{i,j}| \leq 1\ \forall i,j\}\,.$$

et

$$J^*(v) = \chi_K(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in K \\ +\infty & \text{si non .} \end{cases} \tag{3.4}$$

Le résultat suivant est montré dans [1] :

Proposition 3.1.1 *La solution de (3.3) est donnée par :*

$$u = f - \lambda P_{\lambda K}(f)\,, \tag{3.5}$$

où P est le projecteur orthogonal sur λK.

Preuve. Donnons ici quelques éléments pour montrer (3.5) (nous suivons ici la démarche de [1]). On note ∂J le sous différentiel de J (voir 10) défini par :

$$w \in \partial J(u) \Longleftrightarrow J(v) \geq J(u) + (w, v-u)_X\ \ \forall v \in X.$$

Si u est minimiseur de (3.3), alors nécessairement :

$$0 \in \frac{u-f}{\lambda} + \partial J(u)\,, \tag{3.6}$$

(3.6) est équivalent à :

$$\frac{f-u}{\lambda} \in \partial J(u)\,. \tag{3.7}$$

On passe ensuite à une formulation duale en utilisant une identité classique en analyse convexe (dans [4]), qui affirme que (3.7) est équivalente à $u \in \partial J^*\left(\frac{f-u}{\lambda}\right)$ soit encore

$$0 \in \frac{f-u}{\lambda} - \frac{f}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\partial J^*\left(\frac{f-u}{\lambda}\right).$$

On en déduit que $w = \frac{f-u}{\lambda}$ est un minimiseur de $\frac{\left\|w-\frac{f}{\lambda}\right\|^2}{2} + \frac{1}{\lambda}J^*(w)$. Comme J^* es donnée par (3.4), cela implique que $w = \frac{f-u}{\lambda}$ est la projection orthogonale de $\frac{f}{\lambda}$ sur le convexe K.

On remarque de plus que $P_K\left(\frac{f}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}P_{\lambda K}(f)$, et on en déduit (3.5). ■

Algorithme

[1] donne un algorithme pour calculer $P_{\lambda K}(f)$ qui peut s'écrire :

$$\min\left\{\|\lambda \operatorname{div}(p) - f\|_X^2 : p/\,|p_{i,j}| \leq 1\ \forall i,j = 1,\cdots,N\right\}. \tag{3.8}$$

(3.8) peut se résoudre par une méthode de point fixe.

$$p^0 = 0,$$

et

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^n + \tau\left(\nabla\left(\operatorname{div}(p^n) - f/\lambda\right)\right)_{i,j}}{1 + \tau\left|\left(\nabla\left(\operatorname{div}(p^n) - f/\lambda\right)\right)_{i,j}\right|}. \tag{3.9}$$

Et [1] donne une condition suffisante pour que l'algorithme converge :

Théorème 3.1.1 *Supposons que le paramètre τ dans (3.9) vérifie $\tau \leq 1/8$. Alors $\lambda \operatorname{div}(p^n)$ converge vers $P_{\lambda K}(f)$ quand $n \longrightarrow +\infty$.*

La solution du problème (3.3) est donc donnée par :

$$u = f - \lambda \operatorname{div}(p^\infty). \tag{3.10}$$

où $\lim_{n\to\infty} p^n \to p^\infty$.

Nous utiliserons dans la suite cet algorithme à plusieurs reprises. Il présente l'avantage d'être simple et efficace.

Bibliographie

[1] A. Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications. JMIV. 20 : 89-97. 2004.

[2] A. Chambolle and P.L. Lions. Image recovery vian total variation minimization and related problems. Numerische mathematic, 76(3) : 197-188, 1997.

[3] http ://mathonline.wikidot.com.

[4] I. Ekeland and R. Temam. Analyse convexe problèmes variationnels, volume 224, of grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Dunod, second edition, 1983.

[5] Jean-François Aujol. Contribution à l'analyse de textures en traitement d'images par méthodes variationnelles et équations aux dérivées partielles. Mathématiques [math]. Université Nice Sophia Antipolis,. Français, 2004.

[6] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara. Functions of bounded variations and free discontinuy problems. Oxford mathematical monographs. Oxford University Press, 2000.

[7] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. Pyusiqua D, 60 : 259-268, 1992.

[8] Michael Goldman. Quelques applications des fonctions à variation bornée en dimension finie et infinie. 2011.

[9] Mourad Oudghiri. Complément d'analyse : Intégrale de Riemann-Stieltjes, 2011.

[10] T. Rockafellar. Convex Analysis, volume 224 of Grundlehrender mathematischen Wissenschaften. Princeton University Press, second edition, 1983.