République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme de **:**

MASTER en Mathématiques

Thème :

C_0-semi-groupe et leurs applications.

Option : **ANALYSE**

Présenté et soutenu publiquement par : **MAHDI Asma**.

Devant les membres du jury composé de :

Dr.	**RAHMANI Nacer**	UMKB	Président
Dr.	**HAMDI Soumia**	UMKB	Encadreur
Dr.	**GUIDAD Deradji**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

A mon cher père Abdelleh qui m'a toujours aidé à surmonter les difficultés.

A ma source de réussite ma chère mère pour ses encouragements,et pour leurs prières.

A mes trés chères soeurs Houda, Sarah, et Rawnek.

A mes trés chères frères Sami et Wassim.

A mes petits aimés Nedjel-Firas,Roudina,Miral-Jouri et sidra-Elmountaha.

A tous mes enseignants pours leurs utiles conseils, leur persévérance.

A mes chères amies sans exception.

A toutes la famille MAHDI et BELGROUN.

je dédie ce modeste travail.

REMERCIEMENTS

Au terme de notre mémoire, nous voudrais à remercier de tout cœur toutes les personnes qui nous ont aidé à accomplir notre tâche.

Nous tenons de remercier notre encadreur "HAMDI Soumia" et notre enseignants surtout "Mr YAHIA Djabrane" pour leurs patience, leurs juste ouverture d'esprit, leurs inébranlable grandeur de cœur et pour leurs juste mesure.

Un grand merci à ma famille, mes amies et mes collègues qui ont aidé de leurs conseils, leurs présence à la réalisation de ce modeste travail.

Notre sincères remerciement pour l'université de Mohamed KHIDHER.

Table des matières

Introduction

Compte tenu de la remarque simple que la fonction exponentielle réalise, en autre, l'isomorphisme fondamental algébrique et topologique entre le groupe topologique additif des nombres réels et le groupe topologique multiplicatif des nombres réels strictement positifs,on peut constater que la fonction $t \longmapsto e^{ta}$, $a \in \mathbb{R}$, est une solution réele continue de l'équation fonctionnelle de Cauchy $f(t+s) = f(t)f(s)$ avec la condition $f(0) = 1$. Cette équation a été traité par plusieurs mathématiciens comme avec Cauchy même. D'autre part, il est évidemment que la fonction exponentielle $t \longmapsto e^{ta}$ est la solution unique sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x' = ax$ avec la condition initiale $x(0) = 1$. L'importance des fonctions exponentielles a connu une grande croissance aprés l'année 1888, quand le grand mathématicien Giuseppe Peano a eu l'inspiration un développement la solution du probléme de Cauchy vectoriel

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = I, \end{cases}$$

où A est une matrice quadratique, sous la forme

$$t \longmapsto e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Ce résultat a été étendu aux équations différentielles opératorielles $X' = AX$, où A est un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach X, qui a pour solution fondamentale la fonction exponentielle $t \longmapsto e^{tA}, A \in B(X)$. Ces extensions de la fonction exponentielle admettent un modéle général dans le cadre des algébres de Banach abstraites. Plus précisément, si B est une algébre de Banach avec l'unité I et $a \in B$, alors la fonction

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto e^{ta} \in B$$
$$e^{ta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n a^n}{n!},$$

est dérivable et elle est l'unique solution du probléme de Cauchy

$$\begin{cases} x' = ax \\ x(0) = I \end{cases}$$

Compte tenu de l'unicité des solutions du probléme de Cauchy, il en résulte que la fonction $f(t) = e^{ta}$ satisfait sur $\mathbb{R}$ à l'équation fonctionnelle de Cauchy. Le probléme reciproque du savoir si les solutions de l'équation fonctionnelle de Cauchy sont des solutions pour les équations différentielles linéaires de premier ordre $x' = ax$, s'est avéré être plus dfficile, mais il a été résolu par Nathan et Yosida . Donc la double caractérisation de la fonction exponentielle par l'équation fonctionnelle de Cauchy et par l'équation différentielle linéeaire de premier ordre a été établie pour le cas géneral des algébres de Banach abstraites. Ces caractérisations importantes ont sugéré l'idée d'étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre par des extensions adéquates de la fonction exponentielle. De cette maniére est apparu la nécessité de considérer les équations différentielles vectorielles de premier ordre $x' = Ax$ où A n'est pas un opérateur de l'algébre de Banach des opérateurs linéaires bornés $B(X)$, mais un opérateur linéaire non-borné dans un espace de Banach X . La définition d'une fonction exponentielle comme une solution de cette équation a été realisée par l'introduction des semi-groupes de classe C_0. Mais, dans ce cas-là, l'équation fonctionnelle de Cauchy se référe aux fonctions

$$[0, \infty[\ \ni t \longmapsto T(t) \in B(X),$$

avec $T(0) = I$, satisfaisant la relation $T(t+s) = T(t)T(s)$ et qui sont fortement continues,c'est-à-dire ayant la propriété

$$\lim_{t \to 0} T(t)\, x = x \text{ pour tout } x \in X.$$

Aprés ce bref historique sur les C_0-semi-groupe, ce mémoire est constitué de trois chapitres. Dans le premier chapitre nous présentons une foule de définitions, propositions et également quelque théorèmes sans recourir aux démonstrations. Dans le second chapitre, nous preposons deux théorèmes le premièr est celui de Hille-Yosida quand au le deuxième de Lumer-Philips en mettant leurs preuves en valeur. En déffinitive, nous exposons dans le dernier chapitre le problème de cauchy abstrait qui utilisé pour étudier l'unicité et existence de la solution.

Chapitre 1

Semi-groupe de class C_0

1.1 Définitions.Propriétés élémentaires

Soit X un espace de Banach sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. on note par $B(X)$ l'algébre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans X et par I l'unité de $B(X)$. Pour un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to X$ on note par :

$$p(A) = \{\lambda \in C \setminus \lambda I - A \text{ est inversible dans } B(X)\}$$

l'ensemble résolvant de $A \in B(X)$ et par :

$$R(.,A) : p(A) \longrightarrow B(X)$$
$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

la résolvante de l'opérateur linéaire A.

Définition 1.1.1 *On appelle C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset B(X)$ vérifiants les propriétés suivantes :*

1. $T(0) = I$;

2. $T(t+s) = T(t)\,T(s)\,, \forall s,t \geq 0;$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} T(t)\,x = x,\ (\forall)\,x \in X.$

Définition 1.1.2 *Soit $T(t)$ être un C_0-semi-groupe.il existe des constants $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \text{ pour } 0 \leq t \leq \infty.$$

Si $\omega = 0$,$T(t)$ est appelé uniformément borné et si de plus $M = 1$ est appelé C_0-semi-groupe de contraction.

Définition 1.1.3 *On appelle générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, un opérateur A défini sur l'ensemble :*

$$D(A) = \left\{x \in \varepsilon \setminus \lim_{t\to 0} \frac{T(t)\,x - x}{t} \text{ existe}\right\}$$

par :

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)\,x - x}{t},\ \forall x \in D(A)\,.$$

Remarque 1.1.1 *Il est clair que le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe est un opérateur linéaire.*

Exemple 1.1.1 *Soit :*

$$C = \{f : [0,\infty) \longrightarrow R \setminus f \text{ est uniformément continueet bornée}\}\,.$$

Avec la norme $\|f\|_C = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} |f(\alpha)|$, l'espace C devient un espace de Banach.

$$(T(t)\,f)\,\alpha = f(t+\alpha)\,,\ \forall t \geq 0 \text{ et } \alpha \in [0,\infty]\,.$$

Evidemment $T(t)$ est un opérateur linéaire, et, en plus, on a :

1. $(T(0)f)\alpha = f(0+\alpha) = f(\alpha)$. donc $T(0) = I$;

2. $(T(t+s)f)\alpha = f(t+s+\alpha) = (T(t)f)(s+\alpha) = (T(t)T(s)f)(\alpha)$, $\forall f \in C$. Donc $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \geq 0$;

3. $\lim_{t\to 0} \|T(t)f - f\|_C = \left\{\sup_{\alpha \in C} |f(t+\alpha) - f(\alpha)|\right\} = 0$, $\forall f \in C$.

De même, on a :

$$\begin{aligned}
|T(t)f|_C &= \sup_{\alpha\in[0,\infty]} |(T(t)f)(\alpha)| \\
&= \sup_{\alpha\in[0,\infty]} |f(t+\alpha)| \\
&= \sup_{\beta\in[0,\infty]} |f(\beta)| \\
&\leq \sup_{\beta\in[0,\infty]} |f(\beta)| = \|f\|_C, \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Donc $\|T(t)\| = 1$, $\forall t \geq 0$. Par conséquent $\{T(t)\}_{t\geq 0}$est un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur C, nommé le C_0-semi-groupe de translations à droite.

Soit $A : D(A) \subset C \to C$ le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Si $f \in D(A)$, alors on a :

$$Af(\alpha) = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)f(\alpha) - f(\alpha)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\alpha+t) - f(\alpha)}{t} = f'(\alpha),$$

uniformément par rapport à α. Par conséquent :

$$D(A) \subset \{f \in C \setminus f' \in C\}.$$

Si $f \in C$ et tel que $f' \in C$, alors :

$$\left\|\frac{T(t)f - f}{t} - f'\right\|_C = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} \left|\frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha)\right|.$$

Mais :

$$\begin{aligned}\left|\frac{(T(t)f)(\alpha)-f(\alpha)}{t}-f'(\alpha)\right| &= \left|\frac{f(\alpha+t)-f(\alpha)}{t}-f'(\alpha)\right| \\ &= \left|\frac{1}{t}f(\tau)\mid_{\alpha}^{\alpha+t}-f'(\alpha)\right| = \frac{1}{t}\left|\int_{\alpha}^{\alpha+t}[f'(\tau)-f'(\alpha)]\,d\tau\right| \\ &\leq \frac{1}{t}\int_{\alpha}^{\alpha+t}|f'(\tau)-f'(\alpha)|\,d\tau \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

d'où $f \in D(A)$ et :

$$\{f \in C \setminus f' \in C\} \subset D(A)$$

Par conséquent $D(A) = \{f \in C \setminus f' \in C\}$ et $Af = f'$. Comme cet opérateur est non borné, il ne peut pas engendrer un semi-groupe uniformément continu.

On note par $SG(M,\omega)$ l'ensemble des C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset B(X)$ pour lesquels il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que :

$$\{T(t)\} \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Dans ce cas, on dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$est un C_0-semi-groupe exponentiellement borné.

Proposition 1.1.1 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal.*

Si $x \in D(A)$, alors $T(t)x \in D(A)$ et on a l'égalité :

$$T(t)Ax = AT(t)x, \ \forall t \geq 0.$$

Preuve. Soit $x \in D(A)$. Alors pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}T(t)Ax &= T(t)\lim_{h\to 0}\frac{T(h)x-x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{T(h)T(t)x-T(t)x}{h}.\end{aligned}$$

■

Donc $T(t)x \in D(A)$ et on a $T(t)Ax = AT(t)x$, $\forall t \geq 0$.

Remarque 1.1.2 *On voit que :*

$$T(t)\,D(A) \subseteq D(A)\,, \ \ \forall t \geq 0.$$

Proposition 1.1.2 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal.*

Alors l'application :

$$[0,\infty) \ni t \mapsto T(t)\,x \in X,$$

est dérivable sur $[0,\infty[$, pour tout $x \in D(A)$ et on a :

$$\frac{d}{dt}T(t)\,x = T(t)\,Ax = AT(t)\,x, \ \ \forall t \geq 0.$$

Preuve. Soient $x \in D(A)$ et $t \geq 0$ et $h \geq 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(t+h)\,x - T(t)\,x}{h} - T(t)\,Ax\right\| &\leq \|T(t)\| \left\|\frac{T(h)\,x - x}{h} - Ax\right\| \\ &\leq Me^{\omega t}\left\|\frac{T(h)\,x - x}{h} - Ax\right\|.\end{aligned}$$

■

Par conséquent :

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(t+h)\,x - T(t)\,x}{h} = T(t)\,Ax,$$

d'où :

$$\frac{d^+}{dt}T(t)\,x = T(t)\,Ax, \forall t \geq 0.$$

Si $t-h\geq 0$, alors on a :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h}-T(t)Ax\right\| &\leq \|T(t-h)\|\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-Ax+Ax-T(h)Ax\right\| \\ &\leq Me^{\omega t}\left(\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-Ax\right\|+\|T(h)Ax-Ax\|\right).\end{aligned}$$

Par suite :

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h}=T(t)Ax.$$

et :

$$\frac{d^-}{dt}T(t)x=T(t)Ax, \forall t\geq 0.$$

Alors l'application considérée dans l'enoncé est dérivable sur $[0,\infty)$, quelque soit $x\in D(A)$.

De plus, on a l'égalité :

$$\frac{d}{dt}T(t)x=T(t)Ax=AT(t)x,\ \forall t\geq 0.$$

Lemme 1.1.1 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe. Alors :*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)x\,ds=T(t)x$$

quels que soient $x\in X$ et $t\geq 0$.

Preuve. L'égalité de l'énoncé résulte de l'évaluation :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)x\,ds-T(t)x\right\| &= \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(T(s)-T(t))x\,ds\right\| \\ &\leq \sup_{s\in[t,t+h]}\|T(s)x-T(t)x\|,\end{aligned}$$

■

et de la continuité de l'application $[0,\infty] \ni t \mapsto T(t)x \in X$.

Proposition 1.1.3 *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal.Si* $x \in X$, *alors :*

$$\int_0^t T(s)\,xds \in D(A),$$

et on a l'égalité :

$$A\int_0^t T(s)\,xds = T(t)\,x - x,\ \forall t \geq 0.$$

Preuve. Soient $x \in X$ et $h > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)\,xds &= \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)\,xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)\,xds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(u)\,xdu - \int_0^t T(s)\,xds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(u)\,xdu - \frac{1}{h}\int_0^h T(u)\,xdu - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)\,xds \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(u)\,xdu - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)\,xds.
\end{aligned}$$

Par passage à limite pour $h \longrightarrow 0$ et compte tenu du lemme 1.1.1, on obtient :

$$A\int_0^t T(s)\,xds = T(t)\,x - x,\ \forall t \geq 0.$$

et :

$$\int_0^t T(s)\,xds \in D(A).$$

■

Théorème 1.1.1 *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal.Alors* $x \in D(A)$ *et* $Ax = y$, *si et seulement si :*

$$T(t)\,x - x = \int_0^t T(s)\,yds,\ \forall t \geq 0.$$

Preuve. $\Rightarrow$ Si $x \in D(A)$ et $Ax = y$, alors on a :

$$\frac{d}{ds}T(s)x = T(s)Ax = T(s)y,\ \forall s \in [0,t],\ \forall t \geq 0,$$

d'où :

$$\int_0^t T(s)yds = \int_0^t \frac{d}{ds}T(s)xds = T(t)x - x,\ \forall t \geq 0,$$

$\Longleftarrow$ Soient $x, y \in X$ tel que :

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds,\ \forall t \geq 0,$$

Alors on a :

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{d}{ds}T(s)yds,\ \forall t \geq 0,$$

d'où

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t \frac{d}{ds}T(s)yds = T(0)y = y,\ \forall t \geq 0,$$

compte tenu du lemme 1.1.1 Finalement on voit que $x \in D(A)$ et $Ax = y$. ■

Théorème 1.1.2 *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal.Alors :*

1. $\overline{D(A)} = X$.
2. A est un opérateur fermé.

Preuve. On a : ■

1. Soient $x \in X$ et $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, tel que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$. Alors :

$$x_n = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)xds \in D(A),\ \forall n \in \mathbb{N},$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)xds = T(0)x = x.$$

Par conséquent $\overline{D(A)} = X$

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$. Alors :

$$\|T(s)Ax_n - T(s)y\| \leq \|T(s)\| \|Ax_n - y\| \leq Me^{\omega t} \|Ax_n - y\|,$$

quel que soit $s \in [0,t]$. Par suite $T(s)Ax_n \longrightarrow T(s)y$, pour $n \to \infty$, Uniformément par rapport à $s \in [0,t]$. D'autre part, puisque $x_n \in D(A)$, on a :

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds,$$

d'où :

$$\lim_{n\to\infty} [T(t)x_n - x_n] = \lim_{n\to\infty} \int_0^t T(s)Ax_n ds,$$

ou bien

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds.$$

Finalement, on voit que :

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)yds = y.$$

Par suite $x \in D(A)$ et $Ax = y$, d'où il résulte que A est un opérateur fermé.

On montre maintenant un résultat qui concerne l'unicité de l'engendrement pour les C_0semi-groupe.

Théorème 1.1.3 *(L'unicité de l'engendrement) Soient deux C_0-semi-groupes $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A. Alors :*

$$T(t) = S(t), \forall t \geq 0.$$

Preuve. Soient $t > 0$ et $x \in D(A)$. On définit l'application :

$$[0,t] \ni s \mapsto U(s)x = T(t-s)S(s)x \in D(A).$$

■

Alors :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}U(s)x &= \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x \\ &= 0.\end{aligned}$$

Quel que soit $x \in D(A)$. Par suite $U(0)x = U(t)x$, pour tout $x \in D(A)$, d'où :

$$T(t)x = S(s)x, \forall x \in D(A) \text{ et } t > 0.$$

Puisque $\overline{D(A)} = X$ et $T(t)$, $S(s) \in B(X)$, pour tout $t \geq 0$, il résulte que :

$$T(t)x = S(s)x, \ \forall t \geq 0, \text{ et } x \in X,$$

ou bien :

$$T(t) = S(s), \ \forall t \geq 0.$$

1.2 La caractérisation de générateur infinitésimal de C_0-semi-groupe

Il existe de défférents types de caractérisations de générateur infinitésimal des C_0-semi-groupe de contraction, mais nous citons les deux plus important :

Lemme 1.2.1 *Soit A est un opérateur linéaire dont $\rho(A) \supset [0, +\infty[$ .Si :*

$$\|\lambda^n R(\lambda : A)^n\| \leq M, \quad pour\ n = 1, 2, ..; \lambda > 0. \tag{1.1}$$

Alors il existe norme $|.|$ sur X qui est équivalent à la norme d'origine $\|.\|$ sur X satisfait :

$$\|X\| \leq |x| \leq M\,|x|\,, \ pour\ x \in X. \tag{1.2}$$

Et

$$|\lambda R(\lambda : A)\,x| \leq |x|\,, \ pour\ x \in X; \lambda > 0. \tag{1.3}$$

Preuve. *Soit $\mu > 0$ et*

$$\|x\|_\mu = \sup_{n \geq 0} \|\mu^n R(\mu : A)^n x\|\,. \tag{1.4}$$

Alors évidement :

$$\|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\,\|x\|\,. \tag{1.5}$$

Et

$$\|\mu R(\lambda : A)\|_\mu \leq 1. \tag{1.6}$$

On prétend que :

$$\|\lambda R(\lambda : A)\|_\mu \leq 1 \quad pour\ 0 < \lambda < \mu. \tag{1.7}$$

En effet, si $y = R(\lambda : A)\,x$ puis $y = R(\mu : A)\,(x + (\mu - \lambda)\,y)$ et par 1.6

$$\|y\|_\mu \leq \frac{1}{\mu}\,\|x\|_\mu + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\|y\|_\mu\,.$$

D'où $\lambda\,\|y\|_\mu \leq \|x\|_\mu$ tel que revendiqué. D'aprés 1.5 *et* 1.7 *suit que :*

$$\|\lambda^n R(\lambda : A)^n x\| \leq \|\lambda^n R(\lambda : A)^n x\|_\mu \leq \|x\|_\mu \ pour\ 0 < \lambda < \mu. \tag{1.8}$$

Prendre le sup $n > 0$ sur le côté à gauche de 1.8 implique que :

$$\|x\|_{\lambda} \leq \|x\|_{\mu} \text{ pour } 0 < \lambda \leq \mu.$$

Enfin on définit :

$$|x| = \lim_{\mu \to +\infty} \|x\|_{\mu} . \tag{1.9}$$

Alors, 1.2 découle de 1.5.Prendre $n = 1$ dans 1.8. On'a : $\|\lambda R(\lambda : A) x\|_{\mu} \leq \|x\|_{\mu}$ et 1.3 suit aprés avoir laissé $\mu \to \infty$.

Lemme 1.2.2 *Soit $\{B_Y\}, y \in \Gamma$ est une famille d'opérateurs linéaires faisant d'exploitations uniformément borné. Alors il existe une norme équivalente sur X pour laquelle tout le B_y sont des contractions si est seulement si il y a constant M tel que :*

$$\|B_{y_1} B_{y_2} ... B_{y_m} x\| \leq M \|x\| . \tag{1.10}$$

Pour chaque sous-ensemble fini $\{y_1; y_2; ...; y_m\}$ de Γ. En effet, il est clair que s'il y a une telle norme équivalente 1.10 est satisfait. D'autre part, si 1.10 est satisfait on définit :

$$|x| = \sup \|B_{y_1} B_{y_2} ... B_{y_m} x\| , \tag{1.11}$$

où le sup est prise sur tous sous ensembles finis de Γ, et $|.|$ est la norme equivalente désirée, la condition plus faible :

$$\left\|B_y^n x\right\| \leq M \|x\| \quad \text{pour chaque :} y \in \Gamma \text{ et } n \geq 0. \tag{1.12}$$

n'est pas suffisant, en général pour assurer l'éxistance d'une norme équivalente sur X pour laquelle tous les B_y sont des contractions.Dans une cas spécial quand $\Gamma = \mathbb{R}^+$ et $B_y = R(y : A)$ pour certains opérateurs linéaires fixes A. Le lemme précédents montre que la condition la plus faible 1.12 suffit assurer une telle norme équivalente.

Théorème 1.2.1 *A opérateur linéaire est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $T(t)$, satisfaisant $\|T(t)\| \leq M$ $(M \geq 1)$, si est seulement si :*

■

1. A est fermé et $D(A)$ est dense dans X.
2. L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient $\mathbb{R}^+$ et

$$\|R(\lambda : A)^n \leq M\lambda^n\| \text{ pour } \lambda > 0, n = 1, 2, ...$$

Preuve. Soit $T(t)$ C_0-semi-groupe dans un espace de Banach X et soit A son générateur infinitésimal. Si la norme en X est changée en une norme équivalente $T(t)$ dit un C_0-semi-groupe sur X avec la nouvelle norme. La générateur infinitésimal A ne change pas , ni le fait que A soit fermé et dense changement défini lorsque nous passons à une norme équivalente sur X. tout cela sont les propriétés topologiques qui sont indépendentes de la norme équivalente perticulière dont X est doté.

Soit A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe satisfaisant $\|T(t)\| \leq M$. Définie :

$$|x| = \sup_{t \geq 0} \|T(t)x\|. \tag{1.13}$$

Alors :

$$\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|. \tag{1.14}$$

Et donc $|.|$ est une norme sur X qui est équivalente à la norme d'origine $\|.\|$ sur X. En outre,

$$|T(t)x| = \sup_{s \geq 0} \|T(s)T(t)x\| \leq \sup_{s \geq 0} \|T(s)x\| = |x| \tag{1.15}$$

et $T(t)$ est C_0-semi-groupe de contractions sur X doté avec la norme $|.|$. Il découle du théorème de Hille-Yosida et les remarques au début de la preuve, que A est fermé et dense et que $|R(\lambda : A)| \leq \lambda^{-1}$ pour $\lambda > 0$.Donc d'aprés 1.14 et 1.15 on'a :

$$\|R(\lambda : A)^n x\| \leq |R(\lambda : A)^n| x \leq |x| \leq M \|x\|,$$

et les conditions (1) et (2) sont nécessaires. ■

Soit les conditions (1) et (2) sont satisfait. D'aprés le lemme 1.2.1 il existe une norme $|.|$ sur X satisfaisante 1.2 et 1.3.Considérant X avec cette norme, est un opérateur fermé et dense avec $\rho(A) \supset]0, \infty[$ et $|R(\lambda : A)| \leq \lambda^{-1}$ pour $\lambda > 0$. Donc par le théorème de Hille-Yosida,A est aussi un générateur infinitésimal de $T(t)$ et,

$$\|T(t)x\| \leq |T(t)x| \leq |x| \leq M \|x\|,$$

alors $\|T(t)\| \leq M$ au besoin. Les conditions (1) et (2) sont-ils également suffisants.

Si $T(t)$ est un C_0-semi-groupe général sur X alors, il y a des constants $M \geq 1$ et ω tel que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}. \tag{1.16}$$

Considérer le C_0-semi-groupe $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$ alors $\|S(t)\| \leq M$ et A un générateur infinitésimal de $T(t)$ si et seulement si $A - \omega I$ est un générateur infinitésimal de $S(t)$. En utilisant ces remarques avec théorème nous obtenons.

Théorème 1.2.2 *A un opérateur linéaire A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $T(t)$ satisfisant $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, si et seulement si*

1. A est fermé et $D(A)$ est dense dans X.
2. L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient le rayon $]\omega, \infty[$ et

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \text{ pour } \lambda > \omega,\ n = 1, 2, ... \tag{1.17}$$

Corollaire 1.2.1 *Si A générateur infinitésimal de C_0-semi-groupe $T(t)$ alors $D(A)$ le domaine de A est dense sur X tel que A est un opérateur liéaire fermé.*

Remarque 1.2.1 *La condition que chaque réel λ, $\lambda > \omega$, soit dans l'ensemble résolvant de A avec l'estimation 1.17 implique que chaque complexe λ satisfaisant $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ est dans l'ensemble résolvant de A et*

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n} \text{ pour } \lambda > \omega, \quad n = 1, 2, ... \tag{1.18}$$

Preuve. On définit :

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, x dt.$$

Puisque $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $R(\lambda)$ est bien défini pour chaque λ satisfaisant $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. L'identique à l'argument montre que $R(\lambda) = R(\lambda : A)$. Pour prouver 1.18 nous supposons que $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, alors

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda : A)\, x = \frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, x dt = -\int_0^\infty t e^{-\lambda t} T(t)\, x dt.$$

Procédant par induction, on obtient :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda : A)\, x = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t)\, x dt. \tag{1.19}$$

D'autre part,à partir de l'identité résolue

$$R(\lambda : A) - R(\mu - A) = (\mu - \lambda)\, R(\lambda : A)\, R(\mu : A),$$

il s'ensuit que pour chaque $\lambda \in \rho(A)$,$\lambda \to R(\lambda : A)$ est un homorphisme et

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda : A) = -R(\lambda : A)^2. \tag{1.20}$$

Procédant à nouveau par induction, on trouve :

$$\frac{d^n R(\lambda : A)}{d\lambda^n} = (-1)^n n! R(\lambda : A)^{n+1}. \tag{1.21}$$

Comparer les rendements 1.19 et 1.20

$$R(\lambda : A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} T(t) x dt, \tag{1.22}$$

d'où

$$\|R(\lambda : A)^n x\| \leq \frac{M}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{(\omega - \operatorname{Re}\lambda)t} \|x\| dt = \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n} \|x\|.$$

■

Théorème 1.2.3 *Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $T(t)$ sur X. Si A_λ est l'approximation de Yosida de A, c-à-d $A_\lambda = \lambda A R(\lambda - A)$ alors*

$$T(t) = \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda} x.$$

Preuve. On commence par le cas où $\|T(t)\| \leq M$. Dans la preuve de théorème 1.2.2 on a exposé une norme $\|.\|$ sur X qui est équivalent à la norme d'origine $\|.\|$ sur X et pour lequel $T(t)$ est C_0-semi-groupe de contractions. D'aprés le corollaire (1.5) il s'ensuit que $\left\|e^{tA_\lambda} x - T(t) x\right\| \to 0$ comme $\lambda \to \infty$ pour tout $x \in X$.Depuis $\|.\|$ est equivalente à $\|.\|$ **??** tenir dans X. Dans le cas général où $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$ on a pour $\omega \leq 0, \|T(t)\| \leq M$ et donc par ce qu'on vient de prouver, le résultat est valable.Il reste de prouver le résultat pour $\omega > 0$. Soit $\omega > 0$ et noté $\lambda \to \left\|e^{tA_\lambda}\right\|$ est borné pour $\lambda > 2\omega$. En effet :

$$\begin{aligned} \left\|e^{tA_\lambda}\right\| & = e^{-\lambda t} \left\|e^{\lambda^2 R(\lambda:A)t}\right\| \\ & \leq e^{-\lambda t} \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^2 t^k \left\|R(\lambda:A)^k\right\|}{k!} \\ & \leq M e^{(\frac{\lambda\omega}{\lambda-\omega})t} \leq M e^{2\omega t}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Ensuite, on considère semi-groupe uniformement borné $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$ dont le générateur infinitésimal est $A - \omega I$. D'aprés la première partie de la preuve on a :

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{t\langle A-\omega I\rangle_\lambda + \omega I}x \quad \text{pour } x \in X \tag{1.24}$$

A calcul simple montre que :

$$(A - \omega I)_\lambda + \omega I = A_{\lambda+\omega} + H(\lambda).$$

Où

$$\begin{aligned} H(\lambda) \qquad &= 2\omega I - \omega(\omega + 2\lambda) R(\lambda + \omega : A) \\ &= \omega\left[\omega R(\lambda+\omega : A) - 2AR(\lambda+\omega : A)\right]. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $\|H(\lambda)\| \leq 2\omega I + (2\omega + \lambda^{-1}\omega^2) M$ et $x \in D(A)\, \|H(\lambda)x\| \leq M\lambda^{-1}(\omega^2\|x\| + 2\omega\|Ax\|) \to 0$ comme $\lambda \to \infty$. Donc $H(\lambda)x \to 0$ comme $\lambda \to \infty$ pour chaque $x \in X$. Depuis :

$$\left\|e^{tH(\lambda)}x - x\right\| \leq te^{t\|H(\lambda)\|}\|H(\lambda)x\|.$$

On'a

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tH(\lambda)}x = x \quad \text{pour } x \in X. \tag{1.25}$$

Enfin, puisque $H(\lambda)$ et $A_{\lambda+\omega}$ sont commutatif on'a :

$$\left\|e^{tA_\lambda}x - T(t)x\right\| \leq \left\|e^{tA_\lambda + tH(\lambda-\omega)}x - T(t)x\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}\right\|\left\|e^{tH(\lambda-\omega)}x - x\right\|. \tag{1.26}$$

Comme $\lambda \to \infty$ le premier terme du côté droit tend à zéro de 1.24 tandis que le second terme tend à zéro de 1.23 et 1.25.Donc :

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x \quad \text{pour } x \in X,$$

et le preuve est complet. ■

Corollaire 1.2.2 *Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction. Si A_λ l'approximation de Yosida. Alors :*

$$T(t)\,x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA} x.$$

Chapitre 2

Théorèmes Hille-Yosida/Lumer-Phillips

2.1 Théorème de Hille-Yosida

Théorème 2.1.1 *A opérateur linéaire non borné, A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $T(t)$, $t \geq 0$ si et seulement si :*

i A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.

ii L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient $\mathbb{R}^+$ et pour tout $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}. \tag{2.1}$$

Preuve. (Preuve de la nécessité du théorème) ■

Si A est générateur infinitésimal de C_0-semi-groupe alors est borné et d'aprés le colloraire 1.2.1 $\overline{D(A)} = X$. Pour $\lambda > 0$ et soit $x \in X$

$$R(\lambda)\, x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt. \tag{2.2}$$

Comme $t \to T(t)x$ est continu et uniformément borné l'intégral existe en tant que l'integral de Riemann improper et défini un opérateur linéaire borné $R(\lambda)$ satisfaisant :

$$\| R(\lambda) x \| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \| T(t)x \| \, dt \leq \frac{1}{\lambda} \|x\| . \tag{2.3}$$

Donc, pour $h > 0$

$$\begin{aligned} \tfrac{T(h)-I}{h} R(\lambda) x &= \tfrac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(T(t+h)x - T(t)x\right) dt \\ &= \tfrac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt - \tfrac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Comme $h \downarrow 0$ la limite droite de 2.4 converge vers $\lambda R(\lambda) x - x$. Ce qui implique que pour tout $x \in X$ et $\lambda > 0$, $R(\lambda) x \in D(A)$ et $AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I$, ou :

$$(\lambda I - A) R(\lambda) = I. \tag{2.5}$$

Pour $x \in D(A)$ on'a :

$$\begin{aligned} R(\lambda) Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) Axdt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} AT(t) xdt \\ &= A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) xdt\right) = AR(\lambda) x. \end{aligned} \tag{2.6}$$

On'a pour $x \in D(A)$, $T(t) x \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt} T(t) x = AT(t) x = T(t) Ax.$$

Et on'a A est fermé. D'aprés 2.5 et 2.6 il s'ensuit que :

$$R(\lambda)(\lambda I - A) x = x \text{ pour } x \in D(A). \tag{2.7}$$

Ainsi, $R(\lambda)$ est l'inverse de $\lambda I - A$, il existe pour tout $\lambda > 0$ et satisfait à l'estimation souhaitée 2.1. Les conditions (i) et (ii) sont là pour la necessité.

Afin de prouver que les conditions (i) et (ii) sont pour que A. soit un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction on aura besoin de quelque lemme.

Lemme 2.1.1 *Soit A satisfait la condition (i) et (ii) de théorème 2.1 et $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$ puis :*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda : A)\, x = x \quad \text{pour } x \in X \tag{2.8}$$

Preuve. Supposant que $x \in D(A)$ puis :

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda : A)\, x - x\| &= \|AR(\lambda : A)\, x\| \\ &= \|R(\lambda : A)\, Ax\| \\ &\leq \tfrac{1}{\lambda} \|Ax\| . \end{aligned}$$

Mais $D(A)$ est dense dans X et tends vers 0 comme $\lambda \to \infty$

$\|\lambda R(\lambda : A)\| \leq 1$. Donc $\lambda R(\lambda : A)\, x - x$ comme $\lambda \to \infty$ pour tout $x \in X$. Maintenant pour tout $\lambda > 0$, l'approximation de A donnée par

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda : \Lambda) = \lambda^2 R(\lambda : \Lambda) - \lambda I. \tag{2.9}$$

A_λ est l'approximation de A. ■

Lemme 2.1.2 *Soit A satisfait les conditions (i) et (ii) du théorème de Hille-Yosida. Si A_λ est l'approximation de Yosida de A. Alors :*

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax \quad \text{pour } x \in D(A) . \tag{2.10}$$

Preuve. *Pour* $x \in D(A)$, *avec lemme* 2.1.1 *et la définition de* A_λ :

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda : A) Ax = Ax.$$

Lemme 2.1.3 *Soit* A *satisfait les conditions* (i) *et* (ii) *de théorème 2.1.1. Si* A_λ *est l'approximation de Yosida de* A*. Alors est générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction uniformément continue* e^{tA_λ} *pour chaque* $x \in X$, λ, $\mu > 0$ *on'a :*

$$\left\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \right\| \leq t \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\|. \tag{2.11}$$

Preuve. *D'aprés 2.9 il est clair que* A_λ *est un opérateur linéaire borné et ainsi que le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continue* e^{tA_λ} *d'un opérateur linéaire borné,aussi :*

$$\begin{aligned} \left\| e^{tA_\lambda} \right\| &= e^{-t\lambda} \left\| e^{t\lambda^2 R(\lambda:A)} \right\| \\ &\leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda:A)\|} \\ &\leq 1. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Donc e^{tA_λ} *est un semi-groupe de contractions. Il est clair de définition que* e^{tA_λ}, e^{tA_μ}, A_λ *et* A_μ *commutatif entre eux. Par conséquent :*

$$\begin{aligned} \left\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \right\| &= \left\| \int_0^I \frac{d}{ds} \left(e^{tsA_\lambda} e^{t(I-s)A_\mu} x \right) ds \right\| \\ &\leq \int_0^I t \left\| e^{tsA_\lambda} e^{t(I-s)A_\mu} \left(A_\lambda x - A_\mu x \right) \right\| ds \\ &\leq t \parallel A_\lambda x - A_\mu x \parallel. \end{aligned}$$

■

■

Preuve. *(Preuve de théorème suffisance) Soit $x \in D(A)$ .Alors*

$$\begin{aligned} \left\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \right\| &\leq t \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\| \\ &\leq t \left\| A_\lambda x - Ax \right\| + t \left\| Ax - A_\mu x \right\| . \end{aligned} \tag{2.13}$$

De 2.13 et le lemme 2.1.2 il s'ensuit que pour $x \in D(A)$,$e^{tA_\lambda}x$ converges comme $\lambda \to \infty$ et la convergence est uniforme aux intervalles bornées. Puisque $D(A)$ dense en X et $\left\| e^{tA_\lambda} \right\| \leq 1$, il s'ensuit que :

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda x} = T(t)\, x \quad \textit{pour tout } x \in X. \tag{2.14}$$

La limite dans 2.14 est à nouveau uniforme à l'intervalle borné. De 2.14 il s'ensuit que la limite $T(t)$ satisfait les propriétés des semi-groupe que $T(0) = I$ et que $\|T(t)\| \leq 1$.Aussi $t \to T(t)\, x$ est continue pour $t \geq 0$ comme une limite uniforme de fonction continue $t \longmapsto e^{tA_\lambda}x$. Donc $T(t)$ est C_0-semi-groupe de contractions sur X. ■

Pour conclure la preuve on'a montrer A est un générateur infinitésimal de $T(t)$.

Soit $x \in D(A)$ puis en utilisant 2.14

et on'a $x \in X$, $\int_0^t T(s)\, xds \in D(A)$ et $A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x$.

On'a

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda \to \infty} (e^{tA_\lambda}x - x) = \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^t e^{tA_\lambda} xds \\ &= \int_0^t T(s)\, Axds. \end{aligned} \tag{2.15}$$

La dernière égalité découle de la convergence uniforme de $e^{tA_\lambda}A_\lambda x$ à $T(t)Ax$ dans l'intervalles bornés. Soit B est un générateur infinitésimal de $T(t)$, il résulte de la condition nécessaire que $I \in \rho(B)$. D'autr part, on suppose que $I \in \rho(A)$ (l'hypothèse (ii)). Depuis $B \sqsupseteq A, (I - B)\, D(A) = (I - A)\, D(A) = X$ implique que : $D(B) = (I - B)^{-1} X = D(A)$ donc $A = B$.

Corollaire 2.1.1 *Soit A générateur infinitésimal de C_0-semi-groupe de contractions $T(t)$.*

Si A_λ est l'approximation Yosida de A, alors :

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x \quad \text{pour } x \in X. \tag{2.16}$$

Preuve. D'aprés la preuve de théorème 2.1.1 il s'ensuit que la côté droite de 2.16 défini un C_0-semi-groupe de conntraction, $S(t)$, dont A est générateur infinitésimal. De théorème (Soit $T(t)$ et $S(t)$ sont des opérateurs bornés de C_0-semi-groupe avec les générateurs infinitésimals A et B respectivement. Si $A = B$ alors $T(t) = S(t)$ pour $t \geq 0$.)alors $T(t) = S(t)$. ■

Corollaire 2.1.2 *Soit A est générateur infinitésimal de C_0-semi-groupe de contraction $T(t)$. L'ensemble résolvant de A contient le demi plan d'ouvert droite c-à-d : $\rho(A) \sqsupseteq \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ et pour un tel λ*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}. \tag{2.17}$$

Preuve. L'opérateur $R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x dt$ est bien défini pour λ satisfait $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Dans la preuve de théorème nécessaire 2.1.1 on montre que $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ et donc $\rho(A) \sqsupseteq \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$.Cette estimation 2.17 pour $R(\lambda)$ est évidente. ■

Exemple 2.1.1 *Soit $X = BU[0,\infty[$, c'est l'espace de toute les fonctions non formellement bornés dans $[0,\infty[$. Défini*

$$(T(t)f)(x) = f(t+s). \tag{2.18}$$

$T(t)$ est C_0-semi-groupe de contractions dans X. A Son générateur infinitésimal donné par

$$D(A) = \{f : f \text{ et } f' \in X\} \tag{2.19}$$

Et

$$(Af)(s) = f'(s) \quad pour\ f \in D(A). \tag{2.20}$$

D'aprés le corollaire 2.1.2 on sait que $\rho(A) \supseteq \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$. *Pour tout complexe* λ *l'equation* $(\lambda - A)\varphi_\lambda = 0$ *a la solution non triviale* $\varphi_\lambda(s) = e^{\lambda s}$. *Si* $\operatorname{Re}\lambda \leq 0, \varphi_\lambda \in X$ *et donc le demi-plan gauche fermé est le spetre* $\sigma(A)$ *sur* A.

Soit $T(t)$ *est* C_0*-semi-groupe satisfait* $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ *(pour certains* $\omega \geq 0$*).Considérer* $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$. $S(t)$ *est évidement un* C_0*-semi-groupe de contractions. Si* A *est un générateur infinitésimal de* $T(t)$ *alors* $A - \omega I$ *est générateur infinitésimal de* $S(t)$. *D'autre part, si* A *est générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe de contractions* $S(t)$. *Alors* $A + \omega I$ *est générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $T(t)$ *satisfait* $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$. *En effet,* $T(t) = e^{\omega t}S(t)$. *Ces remarques nous amènent à la caractérisation de générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe satisfait* $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$.

Corollaire 2.1.3 *A opérateur lineaire, A générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe satisfait* $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ *si et seulement si :*

1. A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.
2. L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient le rayon $\{\lambda : \operatorname{Im}\lambda = 0, \lambda > \omega\}$ et pour un tel λ
$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}. \tag{2.21}$$

On conclut avec un résultat souvent utile pour prouver qu'un opérateur donné satisfait à la condition suffisante du théorème de Hille-Yosida est donc le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions.

Soit X un espace de Banach et soit X^* son dual. On note la valeur de $x^* \in X^*$ à $x \in X$ par $\langle x^*, x\rangle$ ou $\langle x^*, x\rangle$. Si A un opérateur linéaire sur X, $S(t)$ son plage numérique est l'ensemble :

$$S(A) = \{\langle x^*, Ax\rangle : x \in D(A), \|x\| = 1, x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, \langle x^*, x\rangle = 1\} \tag{2.22}$$

Théorème 2.1.2 *Soit A un opérateur linéaire fermé avec un domaine dense $D(A)$ sur X. Soit $S(A)$ est un plage numérique de A et soit $\sum$ est le complément de $\overline{S(A)}$ dans $\mathbb{C}$. Si $\lambda \in \sum$ alors $\lambda I - A$ est un à un et plan fermé. En outre, si $\sum_0$est un composant de $\sum$ satisfait $\rho(A) \cap \sum_0 \neq \varnothing$ alors le spectrede de A est contient dans le complément S_0 de $\sum_0$ et*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{d(\lambda : S(A))}, \tag{2.23}$$

où $d\left(\lambda : \overline{S(A)}\right)$ est la distence de λ de $\overline{S(A)}$.

Preuve. Soit $\lambda \in \sum$. Si $x \in D(A), \|x\| = 1, x^* \in X^*, \|x^*\| = 1$ sont $\langle x^*, x\rangle = 1$ alors

$$0 < d\left(\lambda : \overline{S(A)}\right) \leq |\lambda - \langle x^*, Ax\rangle| \leq \|\lambda x - Ax\|, \tag{2.24}$$

et donc $\lambda I - A$ est un à un et son plan fermé. Si en outre $\lambda \in \rho(A)$ alors 2.24 implique que 2.23 et

$$d\left(\lambda : \overline{S(A)}\right) \leq \|R(\lambda : A)\|^{-1}. \tag{2.25}$$

■

Il reste à montrer que si $\sum_0$ est le composant de $\sum$ qui a intersection non vide avec l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A alors $\rho(A) \sqsubseteq S_0$. A cela considérer l'ensemble $\rho(A) \cap \sum_0$. Cet ensemble est évidemment ouvert dans $\sum_0$. Mais tout est fermé en $\sum_0$ depuis $\lambda_n \in \rho(A) \cap \sum_0$ et $\lambda_n \to \lambda \in \sum_0$ implique que pour n assez grand que $d(\lambda_n : \overline{S(A)}) \geq \frac{1}{2} d(\lambda : \overline{S(A)}) > 0$ et par conséquence de l'assez grand $|\lambda - \lambda_n| < d\left(\lambda_n : \overline{S(A)}\right)$. De 2.25 alors s'ensuit que le grand n, λ est dans une boule de rayon inférieur à $\|R(\lambda_n : A)\|^{-1}$ centré à λ_n tout en impliquant que $\lambda \in \rho(A)$ et donc $\rho(A) \cap \sum_0$ est fermé en $\sum_0$. La connexité de $\sum_0$ alors implique que $\rho(A) \cap \sum_0 = \sum_0$ où $\rho(A) \supseteq \sum_0$ alors est équivalent à $\sigma(A) \sqsubseteq S_0$.

2.2 Théorème de Lumer-Phillips

Définition 2.2.1 *Soit* X *espace be Banach muni de la norme* $\|.\|$, *et soit* X^* *l'espace dual du* X *posons :*

$$F(x) = \left\{x^* \in X^*, \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\right\}.$$

On dit que l'opérateur $A : D(A) \sqsubseteq X \to X$ est dissipatif si pour tout $x \in X$,il existe $x^* \in F(x)$ tel que :

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0.$$

Proposition 2.2.1 *Un opérateur linéaire* $A : D(A) \sqsubseteq X \to X$ *est dissipatif si et seulement si pour tout* $\alpha > 0$ *on a :*

$$\|(\alpha I - A)x\| \geq \alpha \|x\| \, \forall x \in D(A).$$

Preuve. *Supposons que l'opérateur* $A : D(A) \sqsubseteq X \to X$ *est dissipatif donc pour tout* $x \in X$, *il existe* $x^* \in F(x)$ *tel que :*

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0.$$

■

Si $\alpha > 0$ alors on'a :

$$\begin{aligned}\|(\alpha I - A)x\| \|x\| &= \|(\alpha I - A)x\| \|x^*\|_{x^*} \geq |\langle(\alpha I - A)x, x^*\rangle| \\ &\geq \operatorname{Re}\langle(\alpha I - A)x, x^*\rangle = \operatorname{Re}(\alpha x, x^*) - \operatorname{Re}(Ax, x^*) \\ &\geq \alpha \|x\|^2.\end{aligned}$$

Donc :

$$\|(\alpha I - A)x\| \geq \alpha \|x\|.$$

D'autre part soit $A : D(A) \sqsubseteq X \to X$ tel que pour tout $\alpha > 0$ et $x \in D(A)$ on a :

$$\|(\alpha I - A)x\| \geq \alpha \|x\|.$$

Soit $Y_\alpha^* \in F((\alpha I - A)x)$ donc :

$$\begin{aligned} \langle (\alpha I - A)x, Y_\alpha^* \rangle &= \|(\alpha I - A)x\|^2 \\ &= \|Y_\alpha^*\|. \end{aligned}$$

D'où

$$\|Y_\alpha^*\| = \|(\alpha I - A)x\| \geq \alpha \|x\|$$

Posons :

$$z_\alpha^* = \frac{Y_\alpha^*}{\|Y_\alpha^*\|_{x^*}}.$$

Soit $\overline{B}_{X^*}$ la boule unité de X^* tel que

$$\overline{B}_{X^*} = \{x^* \in X^*, \|x^*\|_{X^*} \leq 1\},$$

et $\partial\overline{B}_{X^*}$ sa frontière, donc $z_\alpha^* \in \partial\overline{B}_{X^*}$. De plus

$$\begin{aligned} \alpha \|x\| \quad & \leq \|(\alpha I - A)x\| \\ & = \tfrac{1}{\|Y_\alpha^*\|} \langle (\alpha I - A)x, Y_\alpha^* \rangle \\ & \left\langle (\alpha I - A)x, \tfrac{Y_\alpha^*}{\|Y_\alpha^*\|} \right\rangle \\ & \langle (\alpha I - A)x, z_\alpha^* \rangle \\ & \operatorname{Re}\langle \alpha x, z_\alpha^* \rangle - \operatorname{Re}\langle Ax, z_\alpha^* \rangle \\ & \leq |\langle \alpha x, z_\alpha^* \rangle| - \operatorname{Re}\langle Ax, z_\alpha^* \rangle \\ & \leq \alpha \|x\| \|z_\alpha^*\| - \operatorname{Re}\langle Ax, z_\alpha^* \rangle. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Donc

$$\operatorname{Re}\langle Ax, z_\alpha^*\rangle \leq 0.$$

D'où

$$-\operatorname{Re}\langle Ax, z_\alpha^*\rangle \leq \langle Ax, z_\alpha^*\rangle \leq \|Ax\|,$$

et d'aprés 2.26 on a :

$$\alpha\|x\| \leq \alpha\operatorname{Re}\langle x, z_\alpha^*\rangle + \|Ax\|$$

Par suite

$$\operatorname{Re}\langle x, z_\alpha^*\rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\alpha}\|Ax\|,$$

et d'aprés le théorème (Banach-Aloglu-Bourbaki) la boule $\overline{B}_{X^*}$ est compact pour la topologie faible, $\sigma(X^*, X)$ et puisque X^* est un espace de Banach donc de tout suite de $\overline{B}_{X^*}$ on peut éxtraire une sous suite convergente. Par suite il existe une sous suite $\left(z_\beta^*\right)_{\beta>0} \subset (z_\alpha^*)_{\alpha>0}$ et il existe $z^* \in \overline{B}_{X^*}$ tel que : $z_\beta^* \to z^*$ si $\beta \to +\infty$ pour la topologie faible, car

$$\operatorname{Re}\left\langle Ax, z_\beta^*\right\rangle \leq 0,$$

et

$$\operatorname{Re}\left\langle Ax, z_\beta^*\right\rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\beta}\|Ax\|.$$

On obtient par passage à limite pour $\beta \to +\infty$

$$\operatorname{Re}\langle Ax, z^*\rangle \leq 0 \text{ et } \operatorname{Re}\langle x, z^*\rangle \geq \|x\|.$$

Mais comme

$$\operatorname{Re}\langle x, z^*\rangle \leq |\langle x, z^*\rangle| \leq \|x\|.$$

Alors :

$$\langle x, z^* \rangle = \|x\|$$

On pose :

$$x^* = \|x\| \, z^*$$

Il vient

$$\langle x, x^* \rangle = \langle x, \|x\| \, z^* \rangle$$

Ainsi on a :

$$x^* \in F(x) \text{ et } \operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0.$$

Proposition 2.2.2 *Soit $A : D(A) \sqsubseteq X \to X$ un opérateur dissipatif s'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que*

$$\operatorname{Im}(\alpha_0 I - A) = X.$$

Alors, pour tout $\alpha > 0$ on'a :

$$\operatorname{Im}(\alpha I - A) = X.$$

Preuve. Soient $A : D(A) \sqsubseteq X \to X$ un opérateur dissipatif et $\alpha_0 > 0$ tel que

$$\operatorname{Im}(\alpha_0 I - A) = X.$$

■

D'aprés la proposition précédente on'a :

$$\|(\alpha_0 I - A) x\| \geq \alpha_0 \|x\| \, \forall x \in D(A),$$

et comme $Im(\alpha_0 I - A) = X$ il résulte que $(\alpha_0 I - A) \in InvB_X$. Donc $\alpha_0 \in \rho(A)$.

Soit $(x_n)_{n\geq 0} \subset D(A)$ tel que $x_n \to x$ et $Ax_n \to y$ si $n \to +\infty$ on'a :

$$(\alpha_0 I - A)\, x_n \to \alpha_0 x - y \text{ si } n \to +\infty.$$

Par suite

$$x_n = R\,(\alpha_0, A)\,(\alpha_0 I - A)\, x_n \to R\,(\alpha_0, A)\,(\alpha_0 x - y)\,.$$

On obtient

$$R\,(\alpha_0, A)\,(\alpha_0 x - y) = x.$$

Comme

$$\operatorname{Im} R\,(\alpha_0, A) \in D\,(A)\,.$$

Donc $x \in D(A)$.

De plus

$$(\alpha_0 I - A)\, x = \alpha_0 x - y.$$

D'où

$$Ax = y.$$

Par conséquent A est un opérateur fermé.

D'autre part on pose $\Pi = \{\alpha \in [0, +\infty[\,, \operatorname{Im}(\alpha I - A) = X\}$

Soit $\alpha \in \Pi$, comme A est un opérateur dissipatif on'a :

$$\|(\alpha_0 I - A)\, x\| \geq \alpha\, \|x\|\; \forall x \in D\,(A)\,.$$

D'où il résulte que $\alpha \in \rho\,(A)$, et puisque $\rho(A)$ est une ensemble ouvert il existe un voisinage ϑ de α contenu dans $\rho(A)$, et comme

$$\vartheta \cap\,]0, +\infty[\, \subset \Pi.$$

Donc : Π est un ensemble ouvert.

Soit $(\alpha_n)_{n\geq 0} \subset \Pi$ tel que $\alpha_n \to \alpha$. Comme :

$$\mathrm{Im}\,(\alpha_n I - A) = X \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc $\forall y \in X, \exists x_n \in D(A)$ tel que

$$(\alpha_n I - A)\, x_n = y \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par suite, il existe $C > 0$ tel que :

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{\alpha_n} \|y\| \leq C \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\alpha_n \|x_n - x_m\| \qquad & \leq \|(\alpha_m I - A)\,(x_n - x_m)\| \\
& = \|(\alpha_m I - A)x_n - (\alpha_m I - A)x_m\| \\
& = \|(\alpha_m x_n - Ax_n - y\| \\
& = \|\alpha_m x_n - \alpha_n x_n + \alpha_n x_n - Ax_n - y\| \\
& = \|\ (\alpha_m - \alpha_n)\, x_n + y - y\ \| \\
& = |\alpha_m - \alpha_n|\, \|x_n\| \\
& \leq C\, |\alpha_m - \alpha_n| \to 0.
\end{aligned}$$

D'où il résulte que $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy car X est un espace de Banach.

Donc $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers un point $x \in X$. alors on en déduit que :

$$Ax_n \to \alpha x - y \text{ si } n \to +\infty.$$

et comme A est un opérateur fermé, on obtient $x \in D(A)$ et $\alpha x - Ax = y$.

Par suite

$$\operatorname{Im}(\alpha I - A) = X \text{ et } \alpha \in \Pi.$$

Donc est fermé dans $]0;+\infty[$ et puisque $\alpha \in \Pi$ on déduit que $\Pi =]0;+\infty[$.

Définition 2.2.2 *Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0 est appelle semi-groupe de contraction de classe C_0 si l'on a :*

$$\|T(t)\| \leq 1 \textit{ pour tout } t \geq 0.$$

Théorème 2.2.1 (Lumer-Phillips)

Soit $A : D(A) \sqsubseteq X \to X$ un opérateur tel que $\overline{D(A)} = X$ alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction si et seulement si :

1- A est dissipatif.

2- Il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda I - A$ est surjectif.

Preuve. Si A est le générateur infinitésimal de C_0-semi-groupe de contraction $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'aprés le théorème de Hille-Yosida on'a : $]0;+\infty[\sqsubseteq \rho(A)$. Par suite $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$, si $x \in D(A)$ et $x^* = F(x)$ on'a :

$$|\langle T(t)x, x^*\rangle| \leq \|x\| \|T(t)x\| \leq \|x\|^2.$$

■

Ainsi

$$\operatorname{Re}\langle T(t)x - x, x^*\rangle = \operatorname{Re}\langle T(t)x, x^*\rangle - \|x\|^2$$

Donc :

$$\lim_{t\to 0}\left\langle \frac{T(t)x - x}{t}, x^*\right\rangle \leq 0.$$

Par suite

$$\operatorname{Re}\langle Ax - x, x^*\rangle \leq 0.$$

Réciproquement si A est dissipatif et pour un certaine $\lambda_0 > 0$ l'opérateur $\lambda I - A$ est surjectif

D'apeés la proposition 2.2.2 l'opérateur A est fermé et $\lambda I - A$ est dissipatif pour tout $\lambda > 0$, il résulte d'prés la proposition 2.2.1 que pour tout $x \in D(A)$ on a :

$$\|(\lambda I - A)\, x\| \geq \lambda \|x\| \;\; \forall\lambda > 0.$$

Donc :

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\, x\right\| \leq \frac{1}{\lambda} \;\forall\lambda > 0.$$

De plus :

$$]0, +\infty[\subset \rho\,(A)\,.$$

Ainsi d'aprés le théorème de Hille-Yosida l'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction.

Chapitre 3

Problème de Cauchy abstrait

3.1 Problème homogène de valeur initiale

Soit X un espace de banach est $A : D(A) \subset X \to X$ un opéraeur linéaire. Etant donné que $x \in X$, le problème de cauchy abstrait pour A est de la forme :

$$(ACP)\ \begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} = AU(t) \\ U(0) = x. \end{cases}$$

3.1.1 L'unicité de la solution de (ACP)

Lemme 3.1.1 *Soit $U(t)$ une fonction continue sur $[0,T]$ si*

$$\left\| \int_0^T e^{ns} U(s)\, ds \right\| \leq M. \quad n = 1, 2, ... \tag{3.1}$$

Alors : $U(t) = 0$ sur $[0,T]$.

Preuve. *Soit $x^* \in X^*$, on pose $\varphi(t) = \langle x^*, U(t) \rangle$, donc il est évident que φ est continue sur $[0,T]$ et*

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T e^{ns} \varphi(s)\, ds \right| &= \left| \left\langle x^*, \int_0^T e^{ns} U(s)\, ds \right\rangle \right| \\ &\leq \| x^* \| M = M_1. \ pour\ n = 1, 2, .. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ce qui implique que $\varphi(0) \equiv 0$ *sur* $[0;T]$ *et car* $x^* \in X^*$ *est arbitraire, il s'ensuit que :*

$$U(t) \equiv 0 \ sur \ [0,T].$$

Considérons la serie :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn\tau} = 1 - \exp\left(-e^{n\tau}\right).$$

Cette serie converge uniformement en τ *sur un interval borné donc :*

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(t-T+s)} \varphi(s)\, ds \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{kn(t-T)} \left| \int_0^T e^{kns} \varphi(s)\, ds \right| \\ &\leq M_1 \left(\exp\left(e^{n(t-T)}\right) - 1 \right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Pour $t < T$ *le côté droit de 3.3 tend vers* 0 *si* $n \to \infty$*. D'autre part on'a :*

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(t-T+s)} \varphi(s)\, ds = \int_0^T \left(1 - \exp\left(-e^{n(t-T+s)}\right) \varphi(s)\right) ds \tag{3.4}$$

D'aprés le théorème de convergence dominée de Lebesgue la côté droite de 3.4 converge vers.

$$\int_{T-t}^{T} \varphi(s)\, ds \ si \ n \to \infty,$$

et avec 3.3 on trouve que, pour tout $0 \leq t \leq T$, $\int_{t-T}^{T} \varphi(s)\, ds = 0$*. Ce qui implique* $\varphi(s) \equiv 0$ *sur* $[0,T]$*.*

Théorème 3.1.1 *Soit* A *un opérateur linéaire de domaine dense, si* $R(\lambda, A)$ *existe pour* $\operatorname{Re}\lambda > 0$ *et :*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sup \lambda^{-1} \log \|R(\lambda, A)\| = 0. \tag{3.5}$$

Alors le problème (ACP) *admet au plus une solution pour tout* $x \in X$*.*

Preuve. *Notons d'abord que* $u(t)$ *est une solution de* (ACP) *si et seulement si* $e^{zt}u(t)$

est une solution de problème de valeur initiale.

$$\frac{dv}{dt} = (A + zt)\, v; v\,(0) = x.$$

Ainsi, nous pouvons effectuer une translation sur A par une constante multipliée par l'identité I. ■

■

On suppose que $R(\lambda; A)$ existe pour tout $\operatorname{Re}\lambda\,; \lambda > 0$, et que 3.5 est vérifiée.

Soit $u\,(t)$ une solution de (ACP) satisfaisante $u(0) = 0$, on montre que $u(t) \equiv 0$. Considérons la fonction $t \to R(\lambda; A)u(t)$ pour $\lambda > 0$, comme $u(t)$ est une solution de (ACP) on'a :

$$\frac{d}{dt} R\,(\lambda, A)\, u\,(t) = R\,(\lambda, A)\, Au\,(t) = \lambda R\,(\lambda, A)\, u\,(t) - u\,(t)\,.$$

Ce qui implique :

$$R\,(\lambda, A)\, u\,(t) = -\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} u\,(\tau)\, d\tau \tag{3.6}$$

De l'hypothèse 3.5 on déduit que pour tout $\theta > 0$:

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{-\theta\lambda} \parallel R\,(\lambda, A) \parallel = 0,$$

et par conséquent 3.6 il résulte que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{t-\theta} e^{\lambda(t-\theta-\tau)} u\,(\tau)\, d\tau = 0.$$

D'aprés le lemme 3.1.1 on déduit que $u(\tau) = 0$ pour $0 \leq \theta \leq t - \theta$, puisque t et θ étaient arbitraire $u(\tau) \equiv 0$ pour $t \geq 0$

3.1.2 L'existence de la solution de (ACP)

Théorème 3.1.2 *Soit A un opérateur linéaire de domaine dense et de résolvant $\rho(A)$ non vide. Le problème (ACP) admet une solution unique $u(t)$ qui est continûment différentiable sur $[0;+\infty[$ pour tout valeur initiale $x \in D(A)$, si est seulement si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.*

Preuve. Si A est le générateur infinitésimal de C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, alors d'aprés le théorème , on résulte que pour tout $x \in X$, $T(t)x$ est l'unique solutions de (ACP) avec la valeur initiale $x \in D(A)$, de plus $T(t)x$ est continûment déffférentiable pour $0 \leq t \leq \infty$. ■

D'autre part, si le problème (ACP) admet une solution unique continûment différentiable sur $[0;+\infty[$, pour toutes les données initiales $x \in D(A)$, alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. On suppose maintenant que pour tout $x \in D(A)$ le problème (ACP) admet une unique solution $u(t)$ continûment différentiable sur $[0;+\infty[$.

Pour $x \in D(A)$ on définit la norme du graphe

$$\|x\|_G = \|x\| + \|Ax\|.$$

Puisque $\rho(A) \neq \emptyset$; donc $D(A)$ muni de la norme du graphe est un espace de Banach notons par $[D(A)]$.Soit X_{t_0} l'espace de Banach des fonction continues de $[0;t_0]$ dans $[D(A)]$ muni de la norme usual. Nous considérons l'application

$$S : [D\,(A)] \rightarrow X_{t_0}$$

Définie par :

$$S_x = u\,(t,x) \text{ pour } 0 \leq t \leq t_0.$$

D'aprés la linéairité de (ACP) et l'unicité de la solution, il est clair que S est un opérateur linéaire définie sur $[D(A)]$. L'opérateur S est fermé, en effet si $x_n \rightarrow x$ dans $[D(A)]$ et

$Sx_n \to v$ dans X_{t_0}, donc à partir de la fermeture de A et :

$$u\left(t,x_n\right)=x_n+\int_0^t Au\left(\tau,x_n\right)d\tau.$$

Il s'ensuit que l'orsque $n\to\infty$

$$v\left(t\right)=x+\int_0^t Av\left(\tau\right)d\tau.$$

Ce qui implique $v(t)=u(t,x)$ et S est fermé. Donc d'aprés le théorème du graphe fermé S est borné, et

$$\sup_{0\le t\le t_0}\left\|u\left(t,x\right)\right\|_G\le C\left\|x\right\|_G. \tag{3.7}$$

On définit maintenant l'application :

$$T(t):\left[D\left(A\right)\right]\to\left[D\left(A\right)\right]$$

Par

$$T(t)x=u\left(t,x\right)$$

D'aprés 3.7 et pour $0\le t\le t_0T(t)$ est uniformément borné et d'aprés la proposition 1.1.3 on peut prolonger

$$T(t)x=T\left(t-xt_0\right)T\left(t_0\right)^n x \text{ pour } nt_0\le t\le\left(n_0+1\right)t.$$

à un semi-groupe sur $[D(A)]$ satisfaisant :

$$\left\|T(t)x\right\|_G\le Me^{wt}\left\|x\right\|_G.$$

Ensuite, nous montrons que :

$$T\left(t\right)Ay = AT(t)y \text{ pour } y \in D\left(A^2\right), \tag{3.8}$$

posant

$$v(t) = y + \int_0^t u\left(s, Ay\right)ds$$

D'où :

$$\begin{aligned} v'(t) &= u(t, Ay) \\ &= Ay + \int_0^t \tfrac{d}{ds} u\left(s, Ay\right)ds \\ &= A\left(y + \int_0^t u\left(s, Ay\right)ds\right) \\ &= Av\left(t\right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Car $v(0) = y$, on a d'aprés l'unicité de la solution de (ACP)

$$v(t) = u(t, y)$$

Donc

$$Au(t, y) = v_0(t) = u(t, Ay)$$

Maintenant, puisque $D(A)$ est dense dans X, et d'aprés l'hypothèse $\rho(A) \neq \emptyset$, $D(A^2)$ est aussi dense dans X. Soient $\lambda_0 \in \rho\left(A\right), \lambda_0 \neq 0$ et $y \in D(A^2)$ si $x = (\lambda_0 I - A)y$, et d'aprés 3.8 on'a :

$$T\left(t\right)x = \left(\lambda_0 I - A\right)T\left(t\right)y$$

D'où

$$\begin{aligned} \|T(t)x\| & \quad \|(\lambda_0 I - A)T(t)y\| \\ &\leq C\left\|T\left(t\right)y\right\|_G \\ &\leq C_1 e^{wt}\left\|x\right\|. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Mais

$$\left\|y\right\|_G = \|y\| + \|Ay\| \leq C_2\left\|x\right\|.$$

Ce qui implique

$$\|T(t)x\| \leq C_2 \|x\| \tag{3.11}$$

Donc $T(t)$ peut être prolongé par la continuité à tout X, reste à montrer que A est le générateur infinitésimal de $T(t)$. Notons par A_1 le générateur infinitésimal de $T(t)$, si $x \in D(A)$ on a d'aprés la définition de $T(t)$

$$T(t)x = u(t,x)$$

Et par l'hypothèse il résulte que :

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x \text{ pour } t > 0.$$

Ce qui implique en particulier que

$$\frac{d}{dt}T(t)x \mid_{t=0} = Ax.$$

Alors $A \subset A_1$.

Soient $\operatorname{Re}\lambda > w$ et $y \in D(A^2)$, à partire de 3.8 et $A \subset A_1$, on déduit que :

$$e^{-\lambda t}AT(t)y = e^{-\lambda t}T(t)Ay = e^{-\lambda t}T(t)A_1 y \tag{3.12}$$

Et par d'intégration 3.12 de 0 à ∞ on trouve :

$$AR(\lambda, A_1)y = R(\lambda, A_1)A_1 y. \tag{3.13}$$

Mais

$$A_1 R(\lambda; A_1)y = R(\lambda; A_1)A_1 y.$$

Donc

$$AR(\lambda;A_1)y = A_1R(\lambda;A_1)y \text{ pour tout } y \in D\left(A^2\right)$$

Puisque $A_1R(\lambda;A_1)$ est uniformément borné, A est fermé et $D(A^2)$ est dense dans X, il s'ensuit que :

$$AR\left(\lambda,A_1\right)y = A_1R\left(\lambda,A_1\right)y \; pourtouty \in X.$$

Théorème 3.1.3 ***Preuve.*** *Ce qui implique $D(A) \supset RangeR(\lambda,A_1) = D(A_1)$ et $A_1 \sqsubset A$. Alors $A = A_1$.* ■

Définition 3.1.1 *Si A est le générateur d'un semi-groupe différentiable, alors pour tout $x \in X$ le problème (ACP) admet une solution unique.*

Preuve. L'unicité résulte de théorème 3.1.1. Si $x \in D(A)$ l'existence résulte de théorème **??**. Si $x \in X$, d'aprés la dérivabilité de $T(t)x$ et les résultas de deusième chapitre, il s'ensuit que pour tout $x \in X$:

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x \text{ pour } t > 0.$$

et $AT(t)x$ est lipschitz continue pour $t > 0$, donc $T(t)x$ est une solution de (ACP). ■

Définition 3.1.2 *On dit que la fonction continue $u : R_+ \to X$ est solution mild du (ACP),si*

$$\textstyle\int_0^t u(s)ds \in D\left(A\right) \; \textit{pour tout } t \geq 0,$$

et

$$u\left(t\right) = A\textstyle\int_0^t u\left(s\right)ds + x.$$

Proposition 3.1.1 *Soit $(A, D(A))$ le générateur d'un semi-groupe fortement continu $\{T\left(t\right)\}_{t\geq 0}$ alors pour tout $x \in X$, la fonction :*

$$u : t \to u(t) = T(t)x,$$

est l'unique solution mild du problème (ACP).

Preuve. Il suffit de montrer l'unicité de la solution zéro pour la valeur initiale $x = 0$, à cette fin.On suppose que u soit solution mild du problème (ACP) pour $x = 0$ et prennent $t > 0$, alors pour chaque $s \in [0; T]$, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(T\left(t-s\right)\int_0^s u\left(\tau\right)d\tau\right) = T\left(t-s\right) - T\left(t-s\right)A\int_0^s u\left(\tau\right)d\tau = 0$$

L'intégration de cette égalité de 0 à t donne

$$\int_0^t u\left(\tau\right)d\tau = 0, \text{ d'où : } u(0) = 0.$$

Selon : ■

Exemple 3.1.1 *Soit $(B, D(B))$ est un opérateur fermé et non borné sur X. Sur l'espace $\varkappa = \chi \times \chi$, on considère l'opérateur $(A, D(A))$ s'écrit à la forme d'une matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec le domaine $D(A) = \chi \times D(B)$*

Alors $t \to u(t) = \binom{x+tBy}{y}$ est l'unique solution du problème (ACP) associée à A.

Toute fois l'opérateur A ne génère pas un semi-groupe fortement continu, puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :

$$(\lambda - A)\,D\left(A\right) = \left\{\begin{pmatrix} \lambda x - By \\ \lambda y \end{pmatrix}, x \in \chi, y \in D\left(B\right)\right\} \subset X \times D\left(B\right) \neq \chi.$$

Donc $\sigma(A) = \mathbb{C}$.

Corollaire 3.1.1 *Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique alors pour tout $x \in X$ le probléme (ACP) admet une solution unique.*

Remarque 3.1.1 *Si A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe qui n'est pas différentiable alors en général, si $x \notin D(A)$ le problème (ACP) n'admet pas une solution* *unique.*

Remarque 3.1.2 *La fonction $t \to T(t)x$ est appellé solution mild du problème (ACP).*

Définition 3.1.3 *Le problème de Cauchy (ACP) est dit uniformément bien posé sur $E \subset X$ (où $\overline{E} = X$) si*

1. Il existe une solution pour tout $x \in E$.
2. La solution est unique pour tout $T > 0$ est uniformément stable pour $t \in [0; T]$ par rapport aux données initiales.

Exemple 3.1.2 *On considère le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x(,t))}{\partial x} = 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R}. \\ u\left(x,0\right) = f \end{cases} \tag{3.14}$$

Sur l'espace $X = L^2(R)$. On peut l'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), t \geq 0 \\ u(0) = f \end{cases}$$

avec $A = \frac{-d}{dx}$ avec le domaine

$$D\left(A\right) = \left\{u \in L^2\left(\mathbb{R}\right)\right\}$$

Pour trouver la résolvante de A, on résolve l'équation :

$$(\lambda I - A)g = \lambda g + g' = f, g \in D(A). \tag{3.15}$$

En supposant que f donné dans l'espace X . Si $\lambda > 0$, alors la solution est

$$g\left(s\right) = \left(R\left(\lambda, A\right)f\right)\left(x\right) = \int_0^x e^{-\lambda(x-s)} f\left(s\right)ds, x \in \mathbb{R}.$$

Utilison la transformation de Fourier, il n'est pas difficile de vérifier que l'état Hille-Yosida

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

est vérifiée pour $\lambda > 0$*. Ainsi 3.14 est uniformément bien posé sur* $D(A)$*. D'autre part,* A *est le générateur d'un* C_0*-emi-groupe défini par :*

$$(T(t)f)(x) = f(x-t); x \in \mathbb{R}; t \geq 0.$$

Et pour tout $f \in D(A)$*, la fonction :*

$$u(x,t) = (T(t)f)(x); t \geq 0; x \in \mathbb{R},$$

est l'unique solution de 3.14, Ce qui est stable par rapport à f*.Maintenant, on considère le problème de Cauchy 3.14 sur l'espace* $X = L \in [0; +\infty[$*. Dans ce cas,*

$$D(A) = \left\{ u \in L^2\left[0, +\infty\right[\diagup u' \in L^2\left[0, +\infty\right[, u(0) = 0 \right\}.$$

et

$$(R(\lambda, A)f)(x) = \textstyle\int_0^x e^{-(x-s)} f(s)\, ds, \lambda > 0, x \in \left[0, +\infty\right[.$$

Le C_0*-semi-groupe engendré par* A *est défini par :*

$$(T(t)f)(x) = \begin{cases} f(x-t) \\ 0, 0 \leq x \leq t \end{cases} \Big/ , x \geq t.$$

Enfin, si $X = L^2[0; +1[$ *et*

$$D(A) = \left\{ u \in L^2\left[0, +\infty\right[\diagup u' \in L^2\left[0, +\infty\right[, u(0) = 0 \right\}.$$

Alors pour tout $\lambda > 0$ *n'appartiennent pas à l'ensemble résolvante de* A*. Dans ce cas,3.14* *est résoluble que pour* $f \equiv 0$.

3.2 Le problème non homogène de valeur initiale

Nous considérons le problème de Cauchy non homogène de valeur initiale suivant :

$$(iACP)\ \begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), t > 0. \\ u(0) = x \end{cases}$$

Où $f : [0; T[\to X$

3.2.1 L'unicité de la solution de problème (iACP)

Définition 3.2.1 *Une fonction* $u : [0; T[\to X$ *est une solution classique de problème (iACP) sur* $[0; T[$ *si :*

1. u *est continue sur* $[0; T[$.
2. u *est continûment différentiable sur* $]0; T[$.
3. $u(t) \in D(A)$ *pour* $0 < t < T$ *et le problème (iACP) est vérifié sur* $[0; T[$.

Proposition 3.2.1 *Soit* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe engendré par* A *et soit* u *une solution de problème (iACP), alors la fonction* $g(s) = T(t-s)u(s)$ *est différentiable pour* $0 < s < t$ *,et*

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds} &= -AT(t-s)\,u(s) + T(t-s)\,u'(s) \\ &= -AT(t-s)\,u(s) + T(t-s)\,Au(s) + T(t-s)\,f(s) \\ &= T(t-s)\,f(s). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Remarque 3.2.1 *Si* $f \in L^1(0, T; X)$ *alors* $T(t-s)f(s)$ *est intégrable et l'intégration 3.16 de* 0 *à* t *donne*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)\,f(s)\,ds. \tag{3.17}$$

Par conséquent on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.1 *Si $f \in L^1(0,T;X)$ alors pour tout $x \in X$ le problème (iACP) admet au plus une solution, cette solution si elle existe s'ecrit sous la forme*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s) f(s)\, ds.$$

Remarque 3.2.2 *Pour tout $f \in L^1(0,T;X)$ la côté droite de (2 :2) est une fonction continue sur $[0;T]$.*

On peut le considérer comme solution généralisée du problème (iACP), même si ce n'est pas différentiable et ne satisfait pas strictement l'équation dans le sens de la définition précédent.

Définition 3.2.2 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, soit $x \in X$ et $f \in (0,T;X)$ la fonction $u \in C([0,T] : X)$ donne par :*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s) f(s)\, ds, 0 \leq t \leq T,$$

est la solution mild du problème (iACP) sur $[0,T]$.

Remarque 3.2.3 *La définition de la solution mild du problème de valeur initiale coincide quand $f \equiv 0$ à la définition de $T(t)x$ comme la solution mild de l'equation homogène correspondant.*

Il est clair que pas toute solution mild de (iACP) est une solution classique, même dans le cas $f \equiv 0$.

Pour $f \in L^1(0,T;X)$, le problème (iACP) admet par la définition 3.2.2 une solution mild unique.On a maintenant être intéressé à imposer autre condition sur f de sorte que pour $x \in D(A)$, la solution mild devient une solution classique, et prouver que dans ces condition,l'existence d'une solution du problème (iACP) pour $x \in D(A)$.

Remarque 3.2.4 *On commence par montrer que, la continuite de f en générale n'est pas suffisante pour assurer l'existence d'une solution du problème (iACP).*

Exemple 3.2.1 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et soit $x \in X$ tel que $T(t)x \notin D(A)$ pour tout $t \geq 0$. Soit $f(s) = T(s)x$ alors $f(s)$ est continue pour $s \geq 0$*

Considérons le problème de valeur initiale

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + T(t)x \\ \quad u(0) = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Le problème 3.18 n'est pas de solution, même si $u(t) = 0 \in D(A)$.En effet la solution mild du problème 3.18 est :

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)T(s)xds = tT(t)x.$$

Mais $tT(t)x$ n'est pas différentiable pour $t > 0$ donc ne peut pas être une solution du problème 3.18.

3.2.2 L'existence de la solution de problème (iACP)

Théorème 3.2.1 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, soit $f \in (0,T;X)$ continue sur $]0;T]$ et soit*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)T(s)xds = tT(t)x. \tag{3.19}$$

Le problème (iACP) admet une solution u sur $[0,T[$ pour tout $x \in D(A)$, si l'une des condition suivantes est satisfait :

(i). $v(t)$ est continûment différentiable sur $[0,T[$.

(ii). $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et $Av(t)$ est continue sur $]0, T[$ si le problème (iACP) admet une solution u sur $[0; T[$ pour certains $x \in D(A)$ alors v satisfait à la fois (i) et (ii).

Preuve. Si le problème (iACP) admet une solution u pour certain $x \in D(A)$, alors cette solution est donne par 3.17, par conséquent :

$$v(t) = u(t) - T(t)x.$$

est différentiable pour $t > 0$, (différence de deux fonctions différentiable) et

$$v'(t) = u'(t) - T(t)Ax,$$

est continue sur $]0; T[$. ■

Donc (i) est vérifiée de plus si $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ pour $t \geq 0$ alors

$$v(t) = u(t) - T(t)x \text{ pour } t > 0.$$

et

$$Av(t) = Au(t) + AT(t)x = u'(t) - f(t) - T(t)Ax.$$

est continue sur $]0; T[$ donc (ii) est vérifiée.D'autre part, pour $h > 0$ on a :

$$\frac{T(h) - I}{h} v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s) f(s) \, ds. \tag{3.20}$$

De la continuité de f, il est claire que le second terme de la côté droite de 3.20 admet la limite $f(t)$ quand $h \to 0$.

Si $v(t)$ est continuement différentiable sur $]0; T[$, il résulte de 3.20 que $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et $Av(t) = v'(t) - f(t)$.

Puisque $v(0) = 0$; il en résulte que $u(t) = T(t)x + v(t)$ est une solution du problème (iACP), pour $x \in D(A)$.

Si $v(t) \in D(A)$, il résulte de 3.20 que $v(t)$ est différentiable à de t et la dérivée droite $D^+v(t)$ de v vérifiant :

$$D^+v(t) = Av(t) + f(t).$$

Puisque $D^+v(t)$ est continue, $v(t)$ est continûment différetiable et $v'(t) = Av(t) + f(t)$. Et car $v\,(0) \equiv 0$, $u(t) = T(t)x + v(t)$ est la solution de problème (iACP) pour $x \in D(A)$

Les deux corollaires suivants sont des conséquence du théorème précident.

Corollaire 3.2.2 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Si $f(s)$ est continuement diérentiable sur $[0;T]$, alors le problème (iACP) admet une solution u sur $[0;T[$, pour tout $x \in D(A)$.*

Preuve. *On a :*

$$\begin{aligned} v(t) &= \textstyle\int_0^t T\,(t-s)\,f\,(s)\,ds \\ &= \textstyle\int_0^t T(t)f(t-s)ds. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Donc $v(t)$ est différentiable pour $t > 0$ et que sa dérivée

$$\begin{aligned} v'(t) &= T(t)f(0) + \textstyle\int_0^t T(s)f'\,(t-s)\,ds \\ &= T(t)f\,(0) + \textstyle\int_0^t T\,(t-s)\,f'\,(s)\,ds. \end{aligned}$$

est continue sur $]0;T[$. Le résultat découle donc du théorème **??**. ■

Corollaire 3.2.3 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T\,(t)\}_{t\geq 0}$. Soit $f \in L^1(0,T;X)$ une fonction continue sur $]0;T[$.*

i- Si $f(s) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et $Af(s) \in L^1(0;T;X)$, alors pour tout $x \in D(A)$ le problème (iACP) admet une solution sur $[0;T[$.

Preuve. D'aprés la condition i) il en résulte que pour $s > 0, T(t-s)f(s) \in D(A)$ et que

$$AT(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s).$$

est intégrable. par conséquent $v(t)$ définie par 3.19 vérifiant $v(t) \in D(A)$ pour $t > 0$ et

$$\begin{aligned} Av(t) &= A\int_0^t T(t-s) f(s) ds \\ &= \int_0^t T(t-s) Af(s) ds \end{aligned}$$

est continue d'aprés le théorème 3.2.2 ■

Soit $f \in L^1(0,T;X)$. Si u est la solution mild de problème (iACP) sur $[0;T]$, alors pour tout $T' < T$, u est la limite uniforme sur $[0;T']$ de la solution du problème (iACP)

Preuve. Supposons que $\| T(t) \| \leq Me^{wt}$, soient $x_n \in D(A)$ satisfaite $x_n \to x$ et $f_n \in C^1([0,T];X)$ satisfaite $f_n \to f$ dans $L^1(0,T;X)$. D'aprés le corollaire 1.2.1 on a : ■

pour chaque $n \geq 1$ le problème de la valeur initiale :

$$\begin{cases} \frac{du_n(t)}{dt} = Au_n(t) + f_n(t) \\ u_n(0) = x_n \end{cases} \tag{3.22}$$

admet une solution $u_n(t)$ sur $[0;T]$ satisfaisant

$$u_n(t) = T(t)x_n + \int_0^t T(t-s) f_n(s) ds$$

Si u est la solution mild de problème (iACP) sur $[0;T]$ alors

$$\begin{aligned} \| u_n(t) - u(t) \| &\leq Me^{wt} \| x_n - x \| + \int_0^t Me^{w(t-s)} \|f_n(s) - f(s)\| ds \\ &\leq Me^{\omega T} \left(\|x_n - x\| + \int_0^t \|f_n(s) - f(s)\| ds \right). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Par suite u est une limite uniforme.

Définition 3.2.3 *Une fonction u qui est dérivable presque partout sur* $[0;T]$ *tel que* $u' \in$

$L^1(0,T;X)$ *est appelée une solution forte du problème (iACP) si* $u(0) = x$ *et* $u'(t) = Au(t) + f(t)$ *presque partout sur* $[0;T]$.

Théorème 3.2.2 *Soit* A *le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, *soient* $f \in L^1(0,T;X)$ *et*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s) f(s)\, ds, 0 \leq t \leq T.$$

Le problème (iACP) admet une solution forte u *sur* $[0;T]$ *pour tout* $x \in D(A)$, *si l'une des conditions suivantes est vérifiée.*

i)- $v(t)$ est différentiable sur $[0;T]$ et $v'(t) \in L^1(0,T,X)$.

ii)- $v(t) \in D(A)$ sur $[0;T]$ et $Av(t) \in L^1(0,T,X)$.

Si le problème (iACP) admet une solution forte u sur $[0;T]$ pour certaine $x \in D(A)$ alors v vérifiant les deux condition (i) et (ii).

Un conséquent de théorème **??** on a :

Corollaire 3.2.4 *Soit* A *le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, *si* f *est différentiable presque partout sur* $[0;T]$ *et* $f' \in L^1(0,T,X)$ *alors pour tout* $x \in D(A)$, *le problème (iACP) admet une unique solution forte sur* $[0;T]$.

En général la continuité de lipschitz de f sur $[0;T]$ n'est pas suffisante pour assurer l'existence d'une solution forte de (iACP) pour $x \in D(A)$, toute fois, si X est réflexif et f est Lipschitz continue sur $[0;T]$ c'est

$$\| f(t_1) - f(t_2) \| \leq C \| t_1 - t_2 \| \text{ pour } t_1, t_2 \in [0;T].$$

Par suite f est différentiable presque partout et $f' \in L^1(0,T,X)$.

Donc le corolaire3.2.4 implique :

Corollaire 3.2.5 *Soit X un espace de Banach réflexif et A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X, si f est Lipschitz continue sur $[0;T]$ alors pour tout $x \in D(A)$, le problème (iACP) admet une unique solution forte u sur $[0;T]$ donnée par :*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)\, f(s)\, ds.$$

Bibliographie

[1] A. Pazy- semigroups of linear operators and applications to partial equations, Springer-Verlage, New York, 1983.

[2] E. Hille and R.S. Phillips, Functional analysis and semigroups, American Mathematical Society, Providence, R.I,1974, third printing of the revised edition of 1957,American Mathematical Society Colloquim Publication, Vol XXXI..

[3] .I. I- Vrabie- C0-semigroups and applications, University of Rochester New York, 2003.

[4] K. Ezzinbi, Lecture notes in functional analysis and evolution equations, African University of Science and Technology, Garki,Abuja F.C.T Nigeria, Août 2010.

[5] Ludovic Dan LEMLE sous la direction de Gilles CASSIER, Mémoire de recherche en Mathématique Pures intitulé "La formule de lie-trotter pour les semi-groupes fortement continue", L'univercité CLAUDE BERNARD LYON 1, Le 4 Juillet 2001.

[6] Sheree L.LeVarge, Semigroups of Linear Operators, December 4, 2003.