

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Analyse**

Par

**Amel Bouselahi**

Titre :

**Résolution de l'équation de la chaleur**

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Dakhia Ghania	UMKB	Examineur
Dr. Khelil Naceur	UMKB	Encadreur
Dr. Zerouk Abdelhamid	UMKB	Président

Juin 2019

## DÉDICACE

Je dédie ce modeste mémoire à mes très chers parents, MOHAMED et NACIRA, qui ont toujours été là pour moi. Je remercie mes sœurs DONYA AYA ICHRAK FATIMA ET

MON FRÉRE SALAH , pour leurs encouragements.

Enfin, je remercie mes amis MANEL ASMA NABILA ET JOHAYNA qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une

grande aide.

À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de mémoire, DR KHELIL NACEUR. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé. quand je remerce

le DR Zerouk Abdelhamid et Dakhia Ghania à la présentation et leurs confiance

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches.

# Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Introduction	1
<b>1 Modélisation de l'équation de la chaleur</b>	<b>3</b>
1.1 Modélisation du problème . . . . .	3
1.2 La méthode analytique . . . . .	7
1.2.1 méthode de séparation des variables . . . . .	7
<b>2 méthode Numérique</b>	<b>12</b>
2.1 l'équation de la chaleur en dimension 1 les schémas implicites et explicites .	12
2.1.1 La Méthode de différences finies . . . . .	13
2.1.2 Le maillage , les conditions initiales et les conditions au bord . . . .	15
2.2 les schémas obtenus sous forme matricielle itérative . . . . .	17
2.2.1 le schéma explicite . . . . .	17
2.2.2 le schéma implicite . . . . .	19
2.3 Consistance,Stabilité,et convergence . . . . .	23
2.3.1 la consistance . . . . .	23

2.3.2	la convergence . . . . .	25
2.3.3	Stabilité . . . . .	27
<b>3</b>	<b>prgramation avec matlab</b>	<b>29</b>
3.1	<b>l'équation de la chaleur</b> . . . . .	29
3.1.1	Rappel de la notation spétial et temporelle . . . . .	30
3.2	programmation de la solution . . . . .	32
3.2.1	la solution analytique . . . . .	32
3.2.2	la solution numérique . . . . .	33
3.2.3	Comparaison des deux solution . . . . .	35
	<b>Conclusion</b>	<b>38</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>40</b>
	<b>Annexe B : Abréviations et Notations</b>	<b>41</b>

# Introduction

De nombreuses disciplines de la physique consistent à décrire des phénomènes de transport de la chaleur et d'induction. Pour décrire de tels phénomènes, il paraît tout à fait naturel de vouloir décrire l'évolution de certaines grandeurs physiques dans le temps ainsi que dans l'espace

Comme elles impliquent plusieurs paramètres, les équations différentielles font intervenir des dérivées partielles par rapport à chacun des paramètres

Après avoir modélisé un problème physique (un problème visible) on obtient un problème invisible (une équation mathématique), mais les EDP sont généralement très complexes à résoudre, ou elles possèdent des solutions pour des cas particuliers, mais les phénomènes aléatoires de la nature conduisent à des équations non linéaires ce qui donne une complexité au modèle mathématique étudié.

Le principe de la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer un système complexe en un objet ou un opérateur simple en laissant les aspects principaux de l'original, ce qu'on appelle une résolution numérique.

Dans ce mémoire nous nous concentrerons sur les EDP paraboliques et on va traiter un exemple type de ces équations "équation de chaleur". Dans le premier chapitre on va présenter une méthode puissante pour la résolution de l'équation de la chaleur linéaire, et on va voir aussi comment contrôler la solution analytique d'un problème sans la connaître explicitement, dans le deuxième chapitre on va discrétiser l'équation de la chaleur par la méthode de différences finies, et on va trouver une approximation de la solution en des

points du domaine de définition sur lequel on applique un maillage, et on va écrire le schéma numérique associé au problème, et on va essayer de démontrer quelque propriété de stabilité en se basant sur une méthode qui garantit la stabilité. Au dernier chapitre on va assurer notre travail par des exemples avec du code Matlab.

# Chapitre 1

## Modélisation de l'équation de la chaleur

Le principe d'un modèle est de remplacer un système complexe en un objet ou opérateur simple reproduisant les aspects ou comportement principaux de l'original (ex : modèle réduit, maquette, modèle mathématique ou numérique.....)

Dans la nature, les systèmes et phénomènes physiques les plus intéressants sont régis par un grand nombre de paramètres non linéaires interagissant entre eux (la météorologie, la turbulence des fluides....)

### 1.1 Modélisation du problème

Diffusion de la chaleur le long d'une barre métallique de longueur  $L$  a comme paramètres sa masse volumique  $\rho$ , sa conductivité thermique  $\lambda$  et son coefficient de chaleur massique  $C$ , l'une des extrémités de la barre est reliée à une source de température  $T_a$ ; et l'autre à une source de température  $T_b$ .

soit  $T(x, t)$  la température d'une de la barre au point d'abscisse  $x$  au temps  $t$ , l'équation de la chaleur est l'équation aux dérivées partielles d'ordre 2



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

Nous allons raisonner sur une petite tranche de la barre d'épaisseur  $\Delta_x$  (de section  $S$ ) et situé a la position  $x$

Une extrémité est initialement a la température  $T_x$  l'autre a température  $T(x + \Delta_x)$  sur ce petit élément de la barre on va avoir une certaine quantité de chaleur qui va entrer appelée  $Q_{in}$  et une chaleur qui va sortir notée  $Q_{out}$

Maintenant on peut évaluer la chaleur qui entre et la chaleur qui sort a partir de la loi de fourier

$$\frac{\partial Q_{in}(x, t)}{\partial t} = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}(x, t). \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial Q_{out}(x, t)}{\partial t} = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}(x + \Delta x, t). \quad (1.3)$$

D'après les deux équations

$$\partial Q_{in}(x, t) = -\lambda S \partial t \frac{\partial T}{\partial x}(x + \Delta x, t). \quad (1.4)$$

$$\partial Q_{out}(x, t) = -\lambda S \partial t \frac{\partial T}{\partial x}(x + \Delta x, t). \quad (1.5)$$

On constate que ces quantités de chaleur sont différentes puis qu'on évalue la température a des coordonnées différentes

Et ce qui est intéressant c'est d'évaluer la différence entre la chaleur qui entre et la chaleur qui sort pour un temps fixé :

$$\begin{aligned}
 dQ &= dQ_{in} - dQ_{out} \\
 &= -\lambda S \partial t \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) + \lambda S \partial t \frac{\partial T}{\partial x}(x + \Delta x, t) \\
 &= \lambda S \partial t \left[ \frac{\partial T}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \right].
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Un développement limité d'ordre 1 au point  $x + \Delta x$  donne :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x + \Delta x, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) + \Delta x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) + R_2(\Delta x)$$

avec

$$\begin{aligned}
 R_2(\Delta x) &\longrightarrow 0 \\
 \Delta x &\longrightarrow 0
 \end{aligned}$$

On introduit dans l'équation 1.5 le développement trouvé en 1.6 :

$$\begin{aligned}
 dQ &= \lambda S \partial t \left[ \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) + \Delta x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \right] \\
 &= \lambda S \partial t \Delta x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t)
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Cette chaleur sert à chauffer un petit morceau de masse élémentaire  $dm$  :

$$dQ = C dT m$$

Or

$$dm = \rho dv = \rho S \Delta x$$

donc on a :

$$dQ = \rho c S \Delta x dT \tag{1.8}$$

d'après 1.7 et 1.8 on peut faire le bilan thermique suivant :

$$\begin{aligned} \rho c S \Delta x dT &= \lambda S dt \Delta x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) \\ \rho c dT &= \lambda dt \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1.9}$$

Généralment on préfère noter la relation 1.9 de la manière suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ avec } D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

l'équation de la chaleur (1D) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + p(x, t) \text{ sur } \dots \Omega * [0, +\infty[ \\ u(x, 0) = \varphi(x) \dots \text{sur } \dots \Omega * \{0\} \\ u(x, t) = 0 \dots \text{sur } \dots \partial \Omega * [0, +\infty[ \end{array} \right.$$

On peut étendre l'équation de la chaleur sur des dimensions quelconques soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

On a :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = p \\ \frac{u}{\partial \Omega^*/R^+} = 0 \\ \frac{u}{\Omega^*\{0\}} = u_0 \end{cases}$$

## 1.2 La méthode analytique

### Rappel

Avant de commencer la résolution par la méthode analytique on suppose que  $p = \theta$  donc le problème c'est chercher une solution de l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$u_t = Du_{xx} \dots \text{pour } x \in \Omega = ]0, 1[ \text{ et } t \in ]0, +\infty[ \quad (1.10)$$

sujet aux conditions limites

$$u(x, 0) = u(1, t) = 0$$

et les conditions limites :

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

On va résoudre cette équation par la méthode de séparation des variables

### 1.2.1 méthode de séparation des variables

l'astuce c'est commencer par voir si la solution peut s'écrire comme le produit d'une fonction qui dépend de  $x$  et une fonction qui dépend de  $t$ , telle que :

$$u(x, t) = f(t)g(x) \quad (1.11)$$

On suppose que pas toute solution de l'équation 1.11 car ce n'est pas vrai ce qui va ce passer c'est qu'on peut exprimer toute solution sous forme factorisée

On a donc :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{dt}g$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^2} = Df \frac{d^2 g}{dx^2} \quad (1.12)$$

Alors :

$$\frac{df}{dt}g = Df \frac{d^2 g}{dx^2}$$

et

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dt} = \frac{D}{g} \frac{d^2 g}{dx^2} \quad (1.13)$$

Le terme a gauche de cette équation dépend seulement de  $t$  et le terme a droite dépend seulement de  $x$  d'où le nom séparation de variables il se peut que  $x$  et  $t$  varient indépendamment entre eux, la seule possibilité c'est que les deux termes soient égaux a la même constante

On l'appelle donc :

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dt} = a$$

et

$$\frac{D}{g} \frac{d^2 g}{dx^2} = a$$

telle que  $a$  un nombre quelconque :

Si  $a \geq 0$  :

$$f(t) = Ce^{at}$$
$$\text{et } g(x) = A \sinh\left(\sqrt{\frac{a}{D}}x\right) + B \cosh\left(\sqrt{\frac{a}{D}}x\right)$$

Si  $a \leq 0$  :

$$f(t) = Ce^{at}$$
$$\text{et } g(x) = A \sin\left(\sqrt{\frac{-a}{D}}x\right) + B \cosh\left(\sqrt{\frac{-a}{D}}x\right)$$

Si  $a=0$  :

$$f(t) = C$$
$$\text{et } g(x) = Ax + B$$

Or on a :

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 = f(t)g(0) = f(t)g(1)$$

donc :

$$g(0) = g(1) = 0$$

pour que soit vrai il faut que  $a$  soit positive  $a < 0$  donc :

$$g(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

$$k^2 = \frac{a}{D} \text{ et } f(t) = C e^{tK^2}$$

Condition initiale

$$g(0) = 0 \text{ alors } B = 0$$

$$g(1) = A \sin k = 0$$

$$\sin k = 0 \text{ alors } k = \pi n$$

On la note  $k_n = \pi n$

donc :

$$g_n(x) = A_n \sin K_n x$$

$$f_n(x) = C_n e^{-D(k_n)^2 t}$$

Finalement on obtient les solutions suivantes :

$$u_n(x, t) = f_n(t)g_n(x) = D_n \sin(xk_n) e^{-Dk_n^2 t}$$

avec

$$D_n = C_n * B_n$$

donc la solution générale s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(xk_n) e^{-Dk_n^2 t} \end{aligned}$$

donc on obtient un développement en série de Fourier de  $u_0$  et on a :

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(xk_n)$$

donc

$$D_n = 2 \int_0^1 u_0(x) \sin(xk_n) dx$$

en fin on trouve

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( 2 \int_0^1 u_0(x) \sin(xk_n) dx \right) \sin(xk_n) e^{-Dk_n^2 t}$$

Dans cette sous section on a étudié une méthode nommée séparation de variable, qui nous a permis de trouver une formule de la solution du problème 1.10. Ce pendant il est souvent possible d'obtenir certaines propriétés de la solution d'une équation différentielle sans connaître la solution en détail. De telles techniques sont importantes dans l'analyse des problèmes non linéaires.

Une représentation analytique de la solution est généralement impossible de tirer dans la sous section suivante nous allons voir comment obtenir une propriété sans connaître la solution analytique.



# Chapitre 2

## méthode Numérique

Dans le domaine de l'analyse numérique, on peut être amené à rechercher la solution d'une équation comme par exemple l'équation de chaleur.

Parmi les méthodes des différences finies est la plus facile d'accès, puis elle repose sur deux notions : la discrétisation des opérateurs de dérivation, différentiation (assez intuitive) par différence d'une part, et la convergence du schéma numérique ainsi obtenu d'autre part.

Dans ce chapitre nous allons résoudre notre problème par cette méthode. Nous utilisons les schémas explicite et implicite d'Euler ainsi que celui de Crank-Nicolson.

### 2.1 l'équation de la chaleur en dimension 1 les schémas implicites et explicites

On s'intéresse au problème

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x) \text{ pour } t \in ]0, T[ \text{ et } x \in ]0, 1[ \quad (2.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \text{ pour } x \in ]0, 1[$$

$$u(t, 0) = 0 \text{ et } u(t, 1) = 0 \text{ pour } t \geq 0$$

Où l'on a pris pour simplifier des conditions au bord nulles. Il s'agit de l'équation de la chaleur en dimension 1 (d'espace), qui est un problème parabolique en dimension 2 (temps et espace).

Cet exemple est typique de la situation générale des problèmes paraboliques. On distingue deux grandes familles d'approximation par différences finies

### 2.1.1 La Méthode de différences finies

Soit  $N \in \mathbb{N}$  fixé. On définit les points de discrétisation du maillage par :

$$x_i = ih, i \in \{0, 1, 2, \dots, N+1\} \quad \text{ou } h = \frac{1}{N+1}$$

Les points  $x_0 = 0$  et  $x_{N+1}$  consistent le bord du domaine (les extrémités de l'intervalle de définition de  $u$ ), et les points  $x_1, x_2, \dots, x_N$  sont appelés points internes du maillage.

On cherche en chacun de ces points une valeur approchée, notée  $u_i$ , de  $u(x_i)$ . On prend naturellement  $u_0 = u(0) = g_0$  et  $u_{N+1} = u(1) = g_1$

Pour les sommets internes, on utilise l'approximation (2) de la dérivée seconde décrit plus haut :

$$\frac{-u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + c(x_i)u_i = f(x_i) \text{ pour } i \in \{1, \dots, N\} \quad (2.2)$$

$$u_0 = g_0, u_{N+1} = g_1$$

On observe qu'on obtient  $N$  équations servant à déterminer les  $N$  inconnues  $u_1, u_2, \dots, u_N$ . On dit usuellement qu'on a discrétisé le problème par une méthode de différences finies utilisant le schéma à trois points de dérivée seconde. On note que la connaissance des conditions au

bord  $u_0$  et  $u_{N+1}$  est nécessaires à la résolution du système, puis qu'elles apparaissent dans 2.2 lorsque  $i = 1$  et  $i = N$

Matriciellement, le problème s'écrit :

$$A_h u_h = b_h \tag{2.3}$$

ou

$$u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}$$

Et

$$b_h = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{g_0}{h^2} \\ f(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

$$A_h = A_h^{(0)} + \begin{pmatrix} c(x_1) & 0 & . & . & 0 \\ . & c(x_1) & . & . & 0 \\ . & . & c(x_1) & . & 0 \\ . & . & . & c(x_1) & . \\ . & . & . & . & c(x_N) \end{pmatrix}$$

$$A_h^{(0)} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & . & . \\ 0 & . & 2 & . & 0 \\ . & . & -1 & 2 & -1 \\ . & . & . & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

On note que le système ne porte que sur les inconnues  $u_1, u_2, \dots, u_N$ . En particulier les conditions au bord  $u_0 = g_0$  et  $u_{N+1} = g_1$  n'apparaissent que dans le vecteur  $b_h$ . On note également que les matrices  $A_h$  et  $A_h^{(0)}$  sont tridiagonales. Pour déterminer la solution discrète  $u_h$  il suffit donc de résoudre le système linéaire tridiagonal. La matrice  $A_h$  est inversible

**Proposition 2.1.1** *supposons  $C \geq 0$ . La matrice  $A_h$  est symétrique définie positive*

### 2.1.2 Le maillage , les conditions initiales et les conditions au bord

Dans toute la suite, on supposera pour simplifier que la condition initiale est compatible avec les conditions aux bords :  $u_0(0) = u_0(1) = 0$

On va chercher à calculer une solution approchée en un nombre fini de points  $(t_j, x_i)$  du domaine espace-temps  $[0, T] \times [0, 1]$ . On va se limiter au cas le plus simple du maillage régulier. Soient  $N, M$  deux entiers fixés

On pose

$$x_i = ih, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N + 1\}, \text{ ou } h = \frac{1}{N + 1}$$

$$t_j = j\Delta t, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N + 1\}, \text{ ou } \Delta t = \frac{T}{M + 1}$$

En particulier  $x_0 = 0, x_{N+1} = 1, t_0 = 0$  et  $t_{M+1} = T$ . Les points  $(t_j, x_i)$  sont alors les points d'intersecion d'une "grile" régulière en espace-temps

L'appximation par différences finies consiste alors à cherche une approximation, notée  $u_i^j$ , de  $u(t_j, x_i)$  (notez que l'indice en temps est en exposant, et l'indice en espace en indice, comme précédemment).

Les valeurs approchées aux points de maillage au bord du dommaine et en  $t = 0$  sont données par la valeur exacte-donnée-de la fonction  $u$  :

$$u_0^j = u_{N+1}^j = 0 \tag{2.5}$$

$$\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N + 1\} \tag{2.6}$$

$$u_j^0 = u_0(x_i) \tag{2.7}$$

$$\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, M + 1\} \tag{2.8}$$

Ceci laisse  $N(M + 1)$  inconnues à déterminer les  $u_i^j$  pour  $1 \leq i \leq N$  et  $1 \leq j \leq M + 1$

Les équation correspondantes sont obtennues en approchant les dérivées partielles dans l'EDP par des quotients différentiels. On a déjà vu que le terme de dérivée seconde pouvait etre approché avec :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_j, x_i) \approx \frac{u(t_j, x_{i+1}) - 2u(t_j, x_i) + u(t_j, x_{i-1}))}{h^2} \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \tag{2.9}$$

(schéma a trois points pour la dérivée seconde). Comme on l'a vu dans la section 2.1.1, plusieurs choix sont possibles pour l'approximation de la dérivée en temps. Chacun de ces choix conduit a une famille de schémas distincte.

## 2.2 les schémas obtenus sous forme matricielle itérative

### 2.2.1 le schéma explicite

#### le schéma explicite a trois points pour la dérivée

La première possibilité est d'utiliser l'approximation décentrée a droite

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t_j, x_i)}{\partial t} &\approx \frac{u(t_{j+1}, x_i) - u(t_j, x_i)}{\Delta t} \\ &\approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} \end{aligned}$$

On obtient alors le schéma suivant :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^j - u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} = f(t_j, x_i)$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \text{ et } \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}$$

Soit  $N(M+1)$  équation pour  $N(M+1)$  inconnues. On note que les conditions aux limites (8) et (9) doivent être connues pour résoudre ces équation et que l'indice de temps  $j$  doit varier entre  $0$  et  $M$  il est commode de réécrire ce système vectoriellement

On introduit la notation :

$$u^j = \begin{pmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N^j \end{pmatrix},$$

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, M + 1\}$$

Le vecteur  $u^0$  est donné par les condition initiales et le schéma précédent s'écrit :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + A_h^0 u^j = C^j$$

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, M\}$$

ou la matrice  $A_h^0$  a été définie dans (6) et

$$C^j = \begin{pmatrix} f(t_0, x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(t_j, x_N) \end{pmatrix}$$

$$\forall j \in \{0, 2, \dots, M + 1\}$$

Ce système peut également se réécrire sous la forme :

$$w^{j+1} = (Id - \Delta t A_h^0) w^j + \Delta t C^j$$

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, M\}$$

Où on utilise la notation  $Id$  pour la matrice identité.

Cette équation justifie le nom explicite pour ce schéma puisqu'il permet de calculer la valeur approchée au temps  $t_{j+1}$  par simple produit de matrice avec la valeur approchée au temps  $t_j$

En particulier, aucune inversion de matrice ou résolution de système linéaire n'est nécessaire pour calcul

**Proposition 2.2.1** *Le schéma 2.9 et de seconde ordre est instable quel que soit  $\Delta t$ .*

## 2.2.2 le schéma implicite

### le schéma implicite à trois points pour la dérivée seconde

On aurait pu approximer la dérivée partielle en temps par l'approximation décentrée à gauche :

$$\frac{\partial u(t_j, x_i)}{\partial t} \approx \frac{u(t_j, x_i) - u(t_{j-1}, x_i)}{\Delta t} \approx \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t}$$

On obtient alors le schéma suivant :

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} = f(t_j, x_i)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, M + 1\}$$



couplé aux même conditins initiales que le schéma explicite ( noter que cette foit l'indice  $j$  varia de 1 a  $M + 1$ ,vectoriellement ,on obtient :

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} + A_h^0 u^j = C^j$$

$$\forall j \in \{1, \dots, M + 1\}$$

ou les  $C^j$  sont définis comme plus haut ce qui se réécrit :

$$u^j = (Id + \Delta t A_h^0)^{-1} u^{j-1} + \Delta t (Id + \Delta t A_h^0)^{-1} C^j$$

$$\forall j \in \{1, \dots, M + 1\}$$

On remarque que la matrice  $(Id + \Delta t A_h^0)$  est symétrique définie positive ,ce schéma est dit implicite puisque,contraînement au schéma explicite, sa résolution nécessité la résolution d'un système lineaire a chaque pas de temps( ou le calcul initiale de l'inverse de la matrice  $((Id + \Delta t A_h^0))$ ,utilisé ensuite a chaque pas de temps). la résolution de schéma implicite est donc plus contense que le schéma explicite cependant comme ou le verra plus loin , ce cout en temps de calcul est largement compensé par la meilleure stabilité du schéma.

### le schéma de Crank Nicklson

Nous remplacons les dérivées partielles par leurs approximation déjà  talies pour avoir l'équation numérique suivante :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{(\Delta x)^2} \right)$$

$$= \frac{cp}{k} * \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}$$

ce qui implique

$$2(u_i^{j+1} - u_i^j) = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} * \frac{k}{cp} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j + u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1})$$

posons :

$$r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} * \frac{k}{cp}$$

on trouve l'équation :

$$-ru_{i-1}^{j+1} + (2 + 2r)u_i^{j+1} - ru_{i+1}^{j+1} = ru_{i-1}^j + (2 - 2r)u_i^j + ru_{i+1}^j$$

ceci est le schéma numérique de Crank-Nicklson

Lorsque nous fixons  $j$  et faisons varier  $i$ , nous obtenons le système lineaire suivant :

$$\begin{aligned} -ru_0^{j+1} + (2 + 2r)u_1^{j+1} - ru_2^{j+1} &= ru_0^j + (2 - 2r)u_1^j + ru_2^j \\ -ru_1^{j+1} + (2 + 2r)u_2^{j+1} - ru_3^{j+1} &= ru_1^j + (2 - 2r)u_2^j + ru_3^j \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ -ru_{nx-2}^{j+1} + (2 + 2r)u_{nx-1}^{j+1} - ru_{nx}^{j+1} &= ru_{nx-2}^j + (2 - 2r)u_{nx-1}^j + ru_{nx}^j \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$M_1 u^{j+1} + N_1 = M_2 u^j + N_2$$

avec

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2+2r & -r & 0 & \cdot & 0 \\ -r & 2+2r & -r & 0 & 0 \\ 0 & -r & 2+2r & -r & 0 \\ 0 & 0 & -r & 2+2r & -r \\ 0 & 0 & 0 & -r & 2+2r \end{pmatrix}$$

et

$$N_1 = \begin{pmatrix} -ru_0^{j+1} \\ 0 \\ \vdots \\ -ru_{nx}^{j+1} \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2+2r & r & 0 & \cdot & 0 \\ r & 2+2r & r & 0 & 0 \\ 0 & r & 2+2r & r & 0 \\ 0 & 0 & r & 2+2r & r \\ 0 & 0 & 0 & r & 2+2r \end{pmatrix}$$

et

$$N_2 = \begin{pmatrix} ru_0^{j+1} \\ 0 \\ \vdots \\ ru_{nx}^{j+1} \end{pmatrix}$$

ce qui implique :

$$u^{j+1} = M_1^{-1}[M_2 u^j + (N_2 - N_1)]$$

ce système matriciel est linéaire d'ordre  $nx - 1$

## 2.3 Consistance, Stabilité, et convergence

Les trois schémas précédents peuvent s'écrire sous la forme générale

$$B_1 u^{j+1} + B_0 u^j + B_{-1} u^{j-1} = C^j. \quad (2.10)$$

avec  $B_1$  inversible ou  $B_1 = 0$  et  $B_0$  inversible pour le schéma explicite, on a :

$$B_1 = \frac{1}{\Delta t} Id, \quad B_0 = -\frac{1}{\Delta t} Id + A_h^0, \quad B_{-1} = 0. \quad (2.11)$$

pour le schéma implicite, on a :

$$B_1 = 0, \quad B_0 = \frac{1}{\Delta t} Id + A_h^0, \quad B_{-1} = -\frac{1}{\Delta t} Id$$

L'étude de la convergence de ces schémas est basée sur les propriétés de consistance et stabilité, définies ci-dessous pour le schéma général 2.10. On pourrait bien sûr imaginer des schémas faisant intervenir des indices en temps plus grands que  $j + 1$  et plus petits que  $j - 1$ . Les définitions suivantes s'étendraient sans difficulté à ces schémas.

### 2.3.1 la consistance

La définition suivante étend celle de la section 2.3.1

**Définition 2.3.1** On appelle *erreur de consistance* à l'instant  $t_j$  du schéma 2.10 le vecteur  $\xi_h(u)^j$  de  $\mathbb{R}^N$  défini par :

$$\xi_h(u)^j = B_1(\pi_h(u))(t_{j+1}) + B_0(\pi_h(u))(t_j) + B_{-1}(\pi_h(u))(t_{j-1}) - C^J$$

Ou :

$$\pi_h(u)(t) = \begin{pmatrix} u(t, x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u(t, x_N) \end{pmatrix}$$

On dit que le schéma est consistant pour norme  $\| \cdot \|$  de  $R^n$  si

$$\sup_{\substack{0 \leq j \leq M+1 \\ \Delta t \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} \|\xi_h(u)^j\| \rightarrow 0$$

Si de plus il existe  $C > 0$  et  $P > 0$  et  $q > 0$  indépendants de  $\Delta t$  et  $h$  tels que :

$$\sup_{\substack{0 \leq j \leq M+1 \\ \Delta t \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} \|\xi_h(u)^j\| \leq C[(\Delta t)^p + h^q]$$

On dit que le schéma est consistant d'ordre p en temps et q en espace pour la norme  $\| \cdot \|$

**Proposition 2.3.1** *Supposons que la solution  $u$  au problème 2.1 est  $C^2$  par rapport a la variable  $t$  et  $C^4$  par rapport a la variable  $x$ . Alors les schémas explicites et implicites sont consistants d'ordre 1 en temps et 2 en espace. Si de plus  $u$  est  $C^3$  par rapport a la variable  $t$ , alors les schémas auto-mouton est consistant d'ordre 2 en temps et en espace.*

**Proof.** Les trois résultats se démontrent de façon similaires. ■

On ne détaille la preuve que pour les schéma explicite. En utilisant le fait que :

$$f(t_j, x_i) = \frac{\partial u}{\partial t}(t_j, x_i) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_j, x_i)$$

il découle de la définition de l'erreur de consistance que

$$\varepsilon(u)_i^j = E_i - F_i$$

ou l'on a posé

$$E_i = \frac{u(t_{j+1}, x_i) - u(t_j, x_i)}{\Delta t} - \frac{\partial u}{\partial t}(t_j, x_i)$$

$$F_i = \frac{u(t_j, x_{i+1}) - 2u(t_j, x_i) + u(t_j, x_{i-1}))}{h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_j, x_i)$$

Par un développement de Taylor par rapport a la variable de temps ( $x_i$  étant fixé), on obtient :

$$u(t_{j+1}, x_i) = u(t_j, x_i) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(t_j, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\theta, x_i)$$

où  $\theta \in ]t_j, t_{j+1}[$ , de sorte que

$$E_i = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \theta)$$

Concernant  $F_i$ , on montre de même que :

$$F_i = \frac{h^2}{24} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(t_j, \varepsilon_1) + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(t_j, \varepsilon_2) \right)$$

où  $\varepsilon_1 \in ]x_{i-1}, x_i[$  et  $\varepsilon_2 \in ]x_i, x_{i+1}[$ . Compte-tenu des hypothèses de régularité, on en déduit facilement la majoration de l'erreur de consistance.

### 2.3.2 la convergence

Du point de vue numérique, la propriété fondamentale d'un schéma est celle de convergence

**Définition 2.3.2** *on considér le schéma 2.10 et on suppose que les données initiales vérifient si  $B_1 = 0, B_{-1} = 0$  (par exemple pour les schémas explicite et implicité)*

supposons :

$$\| u^0 - (\pi_h u)(t_1) \| \rightarrow 0$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

$$h \rightarrow 0$$

si  $B_1 \neq 0, B_{-1} \neq 0$  (par exemple pour le schémma sauté-mouton) supposons :

$$\| u^0 - (\pi_h u)(t_1) \| + \| u^1 - (\pi_h u)(t_1) \| \rightarrow 0$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

$$h \rightarrow 0$$

on dit alors que le schéma 2.10 est convergent (par la norme  $\| \cdot \|$  en espace) si :

$$\sup \| u^j - (\pi_h u)(t_j) \| \rightarrow 0$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

$$h \rightarrow 0$$

Il se peut que la convergence ci-dessusait lient pour  $\delta t$  et  $h$  tendant vers 0 mais pa nécessairement indépendamment l'un de l'autre

En plus de la consistence , la propriété de stabilité joue un role fondamental dans l'étude de la convergence des schémas d'approximation des E D P linéaire

**Remarque 2.3.1** *Il se peut que la convergence ci-dessus ait lieu pour  $\Delta t$  et  $h$  tendant vers 0, mais pas nécessairement indépendamment l'un de l'autre .*

En plus de consistance de la schémas d'approximation des EDP linéaire

### 2.3.3 Stabilité

En analyse numérique, la stabilité d'un schéma numérique aux différences finies est une propriété globale de l'algorithme qui en découle. Elle concerne essentiellement le comportement numérique qui se manifeste lorsque les pas de discrétisation ( $\Delta t, \Delta x, \text{etc.}$ ) tendent tous vers 0.

Sous certaines hypothèses, le théorème de Lax montre que la stabilité est une condition nécessaire et suffisante pour assurer la convergence.

Bien qu'un schéma numérique soit conçu pour tenter de résoudre un problème décrit par des équations aux dérivées partielles, la stabilité du schéma n'a aucun lien avec la solution exacte du problème.

La stabilité d'un schéma ne doit pas être confondue avec la stabilité de la solution du problème d'origine (par exemple la stabilité de Lyapunov des systèmes dynamiques).

**Définition 2.3.3** *On dit que le schéma 2.10 est stable pour la norme  $\| \cdot \|$  dans  $R^N$  s'il existe deux constantes positives  $C_1(T)$  et  $C_2(T)$  indépendantes de  $\Delta t$  et  $h$  telle que*

$$\max_{0 \leq j \leq M+1} \| U^j \| \leq C_1(T) \| U^0 \| + C_2(T) \max_{0 \leq j \leq M+1} \| C^j \|$$

si  $B_1 = 0$  et  $B_{-1} = 0$ , ou bien

$$\max_{0 \leq j \leq M+1} \| U^j \| \leq C_1(T) (\| U^0 \| + \| U^1 \|) + C_2(T) \max_{0 \leq j \leq M+1} \| C^j \|$$

si  $B_1 \neq 0$  et  $B_{-1} \neq 0$ , et ceci quelles que soient les données initiales  $U^0$  (et  $U^1$ ) et les termes sources  $C^j$



**Théorème 2.3.1** (*théoreme de Lax*) *Le schéma 2.10 est convergences si et seulement s'il est consistant et stable*

# Chapitre 3

## programmation avec matlab

### 3.1 l'équation de la chaleur

Soit à résoudre l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.1)$$

Considérons le problème bien posé suivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{k}{pc} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) &= \sin(\pi x) \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 \end{aligned}$$

On prend  $k = 0.13, 0.11, p = 7.8g/cm^2$  et  $\Delta x = 0.25$   $\Delta t$  sera donné par les conditions de stabilité qu'on avait vu définie par l'inéquation  $r = \frac{k}{cp} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$  et la solution analytique donne par :

$$u_{exacte} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) \exp(-an\pi^2 t)$$

### 3.1.1 Rappel de la notation spatiale et temporelle

Si la fonction  $u$  prend comme variable le temps  $t_j$  et de l'espace  $x_i, y_i, \dots$ , par commodité du langage, on notera  $u(x_i, t_j)$  par  $u_i^j$

#### Discrétisation des dérivées partielles

Nous pouvons approximer  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} \quad (3.2)$$

puisque  $\frac{\partial u}{\partial t}$  est une dérivée simple c'est à dire une dérivée première alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} \quad (3.3)$$

Nous avons remplacé  $h_x$  par  $\Delta x$  et  $h_t$  par  $\Delta t$ , remplaçons 3.2 et 3.3 dans l'EDP donnée 3.1. On aura

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} \approx \frac{k}{cp} \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2}$$

ce qui implique :

$$u_i^{j+1} - u_i^j = \frac{k}{cp} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2}$$

poson :

$$r = \frac{k}{cp} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

L'équation devient :

$$u_i^{j+1} = r u_{i+1}^j + (1 - 2r) u_i^j + r u_{i-1}^j \quad (3.4)$$

Ceci est l'équation discrétisation de l'équation de la chaleur avec la méthode des différences finies

D'après les approximations vues dans la première partie nous approximer le problème 3.1 par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{j+1} = ru_{i+1}^j + (1 - 2r)u_i^j + ru_{i-1}^j \\ u_0^n = 0 \\ u_{M+1}^n = 0 \\ u_j^0 = \sin(\pi x_j) \end{array} \right. \quad (3.5)$$

ou on peut l'écrire en notation matricielle

$$U^{n+1} = (Id - rA)U^n$$

$$n = 0, \dots, N$$

Avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & . & . & . & . \\ -1 & 2 & . & . & . & . \\ . & . & 2 & . & . & . \\ . & . & . & 2 & . & . \\ 0 & . & . & -1 & 2 & -1 \\ 0 & . & . & . & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$U^n = (u_1^n, \dots, u_M^n)^t$$

Nous avons pris  $r = 1/4$  pour le cas où  $r \leq 1/2$  et  $r = 0.625$ , pour le cas où  $r \geq 1/2$  on a

le programme suivant qui nous calcule les valeurs du vecteur  $u$ , remplacé par le vecteur  $h$  dans le programme

## 3.2 programmation de la solution

### 3.2.1 la solution analytique

```
clc ;clear ;
Tmax=0.5 ;
a=0 ;b=1 ;
dt=0.01 ;
dx=0.01 ;
nx=(b-a)/dx ;
nt=Tmax/dt ;
x=0 :dx :b ;t=0 :dt :Tmax
v=zeros(nx+1,nt+1) ;
n=0 ;
while(n<101) ;
fori=1 :nx+1
forj=1 :nt+1
u(i;j)= v(i;j)+ sin(n pi x(i)) exp( - n (pi)2
t(j)) ;
v(i,j)=u(i,j) ;
end
end
n=n+1 ;
end
mesh(t,x,v) ;
```

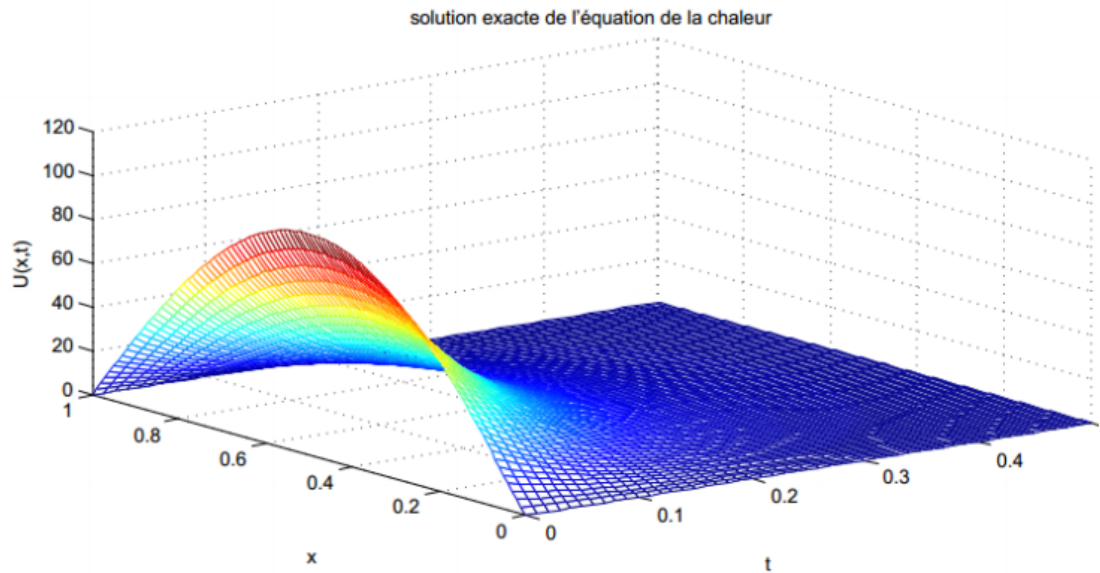


Figure 3.1 Courbe de la solution analytique

### 3.2.2 la solution numérique

```

clc ;clear ;
k=0.13;c=0.11 ;
p=7.8 ;dx=0.125 ;
r=1/4 ;dt=dx*dx*c*p*r/k ;
Tmax=100*dt ;
a=0 ;b=1 ;
cla=0 ;clb=0 ;
nx=(b-a)/dx ;
nt=Tmax/dt ;
x=0 :dx :b ;t=0 :dt :Tmax ;
fori=1 :nx-1

```

```

N(i)=0;
end
N(1)=r*cla;
N(nx-1)=r*clb;
for i=1 :nx-2
M(i,i)=1-2*r;
M(i,i+1)=r;
M(i+1,i)=r;
end
M(nx-1,nx-1)=1-2*r;
for i=1 :nx+1
Ci(i)=sin(pi*x(i));
end
for i=1 :nx-1
h(i)=Ci(i+1);
end
j=1;
h=h';
while(j<nt+2)
for i=1 :nx-1
w(i,j)=h(i);
end
h=M*h+N';
j=j+1;
end
for i=nx :-1 :2
for j=nt+1 :-1 :1

```

```
w(i,j)=w(i-1,j);  
end  
end  
for j=1 :nt+1  
w(1,j)=0;  
w(nx+1,j)=0;  
end  
mesh(t,x,w);
```

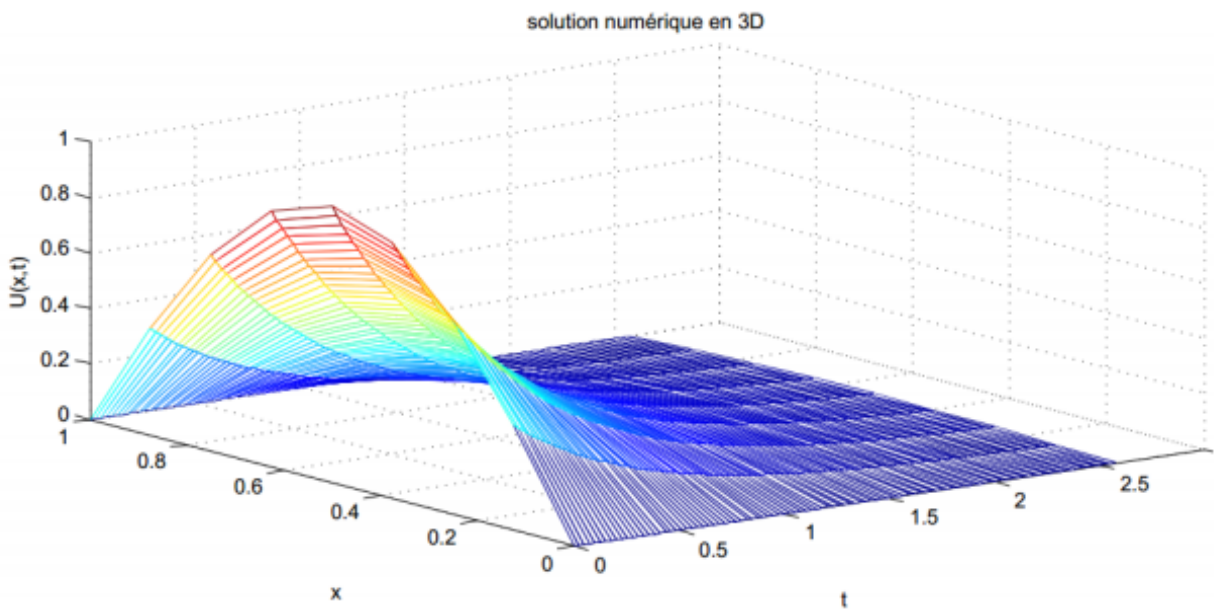


Figure 3.2 courbe de la solution numérique

### 3.2.3 Comparaison des deux solution

```
xmin=0;  
xmax=1;  
N=21;
```



```

dt=0.00105;
t=0;
tmax=1;
dx=(xmax-xmin)/N;
x=xmin :dx :xmax;
r = dt/(dx^2)
;
u0=sin(pi.*x);
u=u0;
unpun=u0;
netaps=tmax/dt;
for n=0 :netaps
u(1)=0;
u(N+1)=0;
for i=2 :N
unpun(i)=r*u(i+1)+(1-2*r)*u(i)+r*u(i-1);
end
t=t+dt;
u=unpun;
*solution exacte*
exacte = sin(pi * x) exp( -(pi)^2*t);
plot(x,exacte,'r-');hold on
plot(x,u,'bo-','markerfacecolor','b');
hold on
xlabel('x','fontsize',16)
ylabel('u(x,t)','fontsize',16)
shg

```

```
pause(0.01*dt);  
end
```

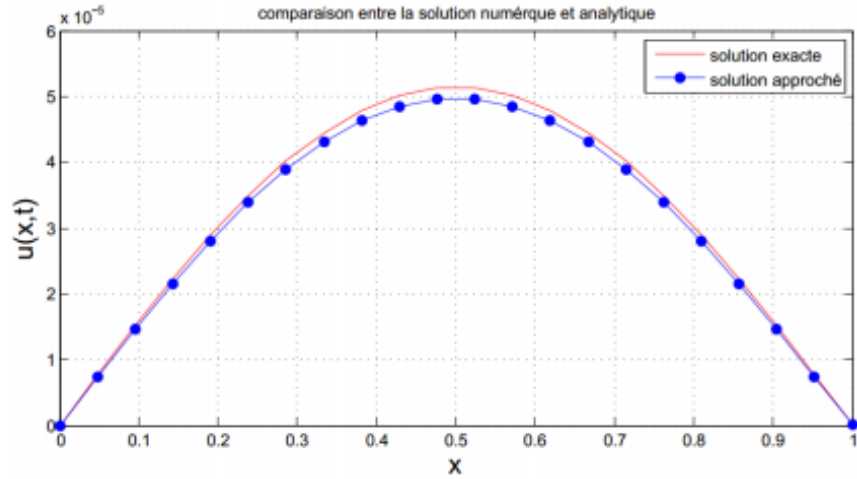


Figure 3.3 courbe de comparaison les deux solution

# Conclusion

On peut diviser les apports de ce mémoire et de l'étude des techniques de résolution numérique de l'équation de la chaleur par la méthode des différences finies, en trois domaines :

- Sur le plan mathématiques, il nous a permis de découvrir une méthode de résolution analytique et numérique de cette équation.
- Sur le plan informatique, il nous a permis de mettre en pratique les connaissances de nos cours d'informatique.
- Sur le plan physique, il nous a permis de comprendre comment établir un modèle physique associé à un phénomène simple.

.

# Bibliographie

- [1] [A.Tai](#)-Traveux Pratique :Equations au dérivées partielles.Méthode des Différence finies 2008
- [2] Brachet Matthie- Introductions des équation aux dérivées partielles-Les différence finies-15/12/2014
- [3] Bourras Ismail-Rapport DU mini projet de l'analyse Numérique-Résolution de l'Equation de la chaleur par la Méthode de différence finies 2010/2011
- [4] Guendouz Hichem-Etude de l'écoulement de couette instationnaire avec mable Mémoire fin d'étude-D'ingenieur D'état -spécialité- Mécanique -2009/2010
- [5] Jacques Hadamard, Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique,Princeton University Bulletin, 1902
- [6] Nicolas champagnat -Différences finies et analyse matricielles 15/10/2010
- [7] P.Lascaux et R.Théodor. Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur.Tome1.Masson (1986).
- [8] <https://fr.scribd.com> Résolution de l'équation de chaleur
- [9] <https://perso.uni-lyon1.fr/marc.buffat/cours/coursdf.html>

# Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\mathbb{T}_a$	source de température
$L$	la longueur
$Q_{in}$	une chaleur que va entrer
$\Delta x$	un pas d'espace
$\Delta t$	un pas de temps
$\rho$	masse volumique
$u_i^j$	Indice de temps et espace
$R$	l'erreur de Taylor
$\  \cdot \ $	norme
$U^n$	vecteur
$B^{-1}$	matrice Inversible
$U^t$	vecteur transposer