République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Gherara Ahlem

Titre :

Opérateurs compacts et applications

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Khelil	Naceur	Président
Dr.	Taberha	Warda	Encadreur
Dr.	Bouziane	Nadjette	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A ma mère et mon père qui par leur dévouement et leur affection ont été pour moi un soutiens tout au long de mes études et ma vie.

A mon mari

A ma fille Djouri

A mon frères, mes soeurs, mes chères copines, mes collègues, mes amis

A tout la famille Gherara, Mezziani, Habibi et Dhmikha

Je dédie ce travail à toute personne de proche ou de loin n'a pas cessé de me guider et de m'encourager durant la réalisation de ce travail.

REMERCIEMENTS

Avant tout, Le plus grand merci revient à **DIEU** qui lui seul guide nos pas dans le bon sens durant notre vie.

Je tiens particulièrement à remercier vivement ma encadreuse **Dr. Taberha Warda**, pour sa guidance et son soutient indéfectible durant la préparation de ce travail, dès le début sa confiance à mon égard et à mon travail m'a donnée une énergie et une inspiration de soulever toutes les difficultés.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'il me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

J'ai également à remercier pour mes parents, mon mari, toute les amies, mes collèges, mes copines et particulièrement Azzouze Halima, qui m'ont apporté leur support moral tout au long de ma démarche.

En fin je remercie tout personne je connais et tout les personnel administratif du département des mathématique.

Table des matières

Introduction

Cette mémoire a pour but d'étudier les opérateurs compacts, qui constituent une classe importante d'opérateurs linéaires continus. Historiquement les premiers opérateurs compacts sont apparus avec les équations intégrales telle l'équation de Dirichlet où la résolution formelle fait intervenir un opérateur à noyaux compact. Un opérateur linéaire T entre deux espace de Banach X et Y est dit compact si l'image de la boule unité de X par T est relativement compacte dans Y.Cette difinition est due à Riesz (1918) elle est équivalente à de toute suit bornéé $(x_n)_n$ de X on puet extraire une sous suit $(Tx_{n_k})_k$ convergente dans espace vectoriel fermé de l'algèbre $\mathcal{L}(X,Y)$ des opérateurs continues de X dans Y, $K(X) = K(X,X)$ est un idéal bilatére de $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$.

Donnons maintenant un aparçu du contenu des chapitre :

Le premier chapitre compose de deux sections, la première section nous rapplons l'éssentiel des difinitions et résultats sur l'éspace de Hilbert. la dexième section, contient un aparçu sur les opéreteurs linéaire, adjoint et auto-adjoint ainsi ses propriétés spectrale.

Au deuxième chapitre on s'intéresse à l'opérateur compact on donne ses propriétés fondamentales, pui on étudié l'opérateur compact dans l'éspace de Hilbert et on lançes l'alternative de Fridholm. On continue par l'opérateur compact auto-adjoint et leur décomposition spéctrale.

Le troième et dernier chapitre est consacré aux application d'opérateur compact. on prend deux exemples opérateurs de Hilbert-Schmidt, et résolution d'une équation différentielle.

Chapitre 1

Espace de Hilbert et opérateur linéaire

Pour simplifier la lecture de ce travail, cette partie de ce mémoire est consacrée pour rappeler quelques défénitions et résultats danalyse fonctionnelle. Ces rappels concernent les espaces de Hilbert, et les opérateurs linéaires et leurs propriétés .

1.1 Espaces de Hilbert

1.1.1 Définition et Exemple.

Définition 1.1.1 *Soit H un espace vectoriel réel, resp complexe. On appelle produit scalaire sur H toute forme bilinéaire ; resp hermitienne, définie positive. On notera $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire des vecteurs $x, y \in H$. Cela signie que lapplication :*

$$\langle .,.\rangle : H \times H \to K = \mathbb{R} \ ou\ \mathbb{C}$$
$$(x, y) \to \langle x, y\rangle .$$

vérifie les conditions suivants :

1. *pour tout $y \in H$, lapplication $x \in H \to \langle x, y\rangle$ est une forme linéaire.*
2. *pour tout $x, y \in H$; on a :*

$$\begin{cases} \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \ \text{si l'espace est réel.} \\ \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \ \text{si l'espace est complexe.} \end{cases}$$

3. *pour tout* $x \in H$; *on a* $\langle x, x\rangle \geq 0$ *et* $\langle x, x\rangle = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.

Remarque 1.1.1 *Notons que dans le cas complexe, on a donc, pour* $x, y \in H$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$ *:*

$$\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\,\langle x, y\rangle$$

Exemple 1.1.1 *On a*

1. *Le produit scalaire usuel de* $\mathbb{R}^n$ *est défini par :*

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n, \text{ pour } x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Le produit scalaire usuel de $\mathbb{C}$ *est défini par :*

$$\langle x, y\rangle = x_1 \overline{y_1} + ... + x_n \overline{y_n} \text{ pour } x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$$

2. *On peut définir dautres produits scalaires sur* $\mathbb{k}^n$ *en se donnant des poids, c'est-à-dire des nombres* $a_1, ..., a_n > 0$ *; et en posant*

$$\begin{cases} \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k y_k \text{ si } \mathbb{k} = \mathbb{R}. \\ \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \overline{y_k} \text{ si } \mathbb{k} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

1.1.2 Propriétés des espaces de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert.

Proposition 1.1.1 *(Inégalité de Cauchy-Schwartz)*

Soient B *une forme hirmitienne et sur* E *et positif ; alors,*

$$|B(x, y)| \leq B(x, x)^{\frac{1}{2}} B(y, y)^{\frac{1}{2}}.$$

cette inégalité est appelée inégalité de Cauchy-Schwartz.

Preuve. voir [7] ■

Proposition 1.1.2 *(Identité du Parallélogramme)*

Pour tous $(u, v) \in H^2$, on a lidentité :

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|_H^2 = 2\left(\|u\|_H^2 + \|v\|_H^2\right).$$

appelée l'identité du parallélogramme.

Théorème 1.1.1 *(de Projection)*

Soit K un sous espace convexe fermé non vide de H. Pour tout f de H, il existe un élément unique u de K, tel que :

$$|f-u| = \min_{v \in K} |f-v|.$$

De plus, u est caractérisé par la propriété suivante

$$u \in K; \langle f-u, v-u \rangle \leq 0; \forall v \in K.$$

On appelle u la projection de f sur K, notée par : $u = P_K f$.

Définition 1.1.2 *Les deux éléments u, v de H sont dits orthogonaux et notés $u \perp v$ si $\langle u, v \rangle = 0$.*

On note l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F par :

$$F^{\perp} = \{u \in H; \langle u, v \rangle = 0; \forall v \in F\}.$$

1.2 Opérateurs linéaires

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\Bbbk$. On dit que l'application ou l'opérateur $T : E \to F$ est linéaire si*

$$\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in K \text{ on a : } T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

C'est un homomorphisme d'espaces vectoriels et l'on a $T(0) = 0$.

Remarque 1.2.1 *On a :*

- *Si* T *est bijectif alors,* T *est un isomorphisme.*
- *Si* $E = F$ *alors,* T *est un endomorphisme de* E.
- *Si* T *est un isomorphisme de* E *dans* E *alors,* T *est un automorphisme.*
- *Si* $F = \Bbbk$ *alors,* T *est une forme linéaire sur* E. *Quand* E *est un ensemble de fonctions,* T *est souvent appelé une fonctionnelle linéaire.*

Définition 1.2.2 *Soit* $T : E \to F$ *un opérateur linéaire. On a :*

1. *l'image de l'opérateur* T *est :*
$$\mathrm{Im}(T) = \{Tx,\ x \in E\}.$$
2. *le noyau de l'opérateur* T *est :*
$$\ker(T) = \{x \in E : Tx = 0\}.$$

1.2.2 Opérateur linéaire borné

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $T : E \to F$ un opérateur linéaire.

Théorème 1.2.1 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. T est continu,
2. T est continu en 0,
3. il existe une constante c telle que $\|Tx\| \leq c \parallel x \parallel$ pour tout $x \in E$.

Preuve. L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) est évidente. On va montrer l'implication (2) $\Rightarrow$ (3). On suppose que T est continu en 0, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : (\parallel x \parallel < \delta) \Rightarrow (\parallel Tx \parallel < \varepsilon). \tag{1.1}$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in E$, $x \neq 0$. On pose $x' = \dfrac{\delta}{2\|x\|}x$, alors, $\|x'\| = \dfrac{\delta}{2}$.

D'où, $\| x' \| < \delta$ et par conséquent $\|Tx'\| < \varepsilon$ (de 1.1)

$$\begin{aligned}\|Tx'\| &= \left\| T\left(\frac{\delta}{2\|x\|}x\right)\right\| \\ &= \frac{\delta}{2\|x\|}\|Tx\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Il résulte que $\|Tx\| < \dfrac{2\varepsilon}{\delta}\|x\|$ Il existe alors c satisfaisant (3). Cette inégalité est vraie aussi pour $x = 0$ et (3) est vérifiée avec $c = \dfrac{2\varepsilon}{\delta}$

On va montrer l'implication (3) $\Rightarrow$ (1).

On suppose que (3) est vérifiée, alors, pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|T(x-y)\| \leq c\|x-y\|, \text{i.e.}, \|Tx - Ty\| \leq c\|x-y\|.$$

L'application T est lipschitzienne donc, elle est continue. ■

Définition 1.2.3 *Une application linéaire $T : E \to F$ entre espaces vectoriels normés qui est continue est souvent dite bornée.*

Notation 1.2.1 *: On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues entre E et F. Quand $E = F$, $\mathcal{L}(E,F)$ est noté $\mathcal{L}(E)$. Quand $F = \mathbb{k}$, on note E' l'espace dual (topologique) de E qui est l'espace vectoriel des formes linéaires continues de E dans $\mathbb{k}$. Par E'', on note le bidual de E.*

Pour $T \in \mathcal{L}(E,F)$, on pose

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

Remarque 1.2.2 *Si E est de dimension finie, alors, toute application linéaire de E dans F est continu.*

Proposition 1.2.1 *(Propriétés de la norme d'opérateur) Soient E, F, G des espaces vectoriels normés.*

1. *Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$, alors, $\|T\| = 0$ si et seulement si $T = 0$.*

2. *Si* $T, B \in \mathcal{L}(E,F)$*, alors,*$T + B \in \mathcal{L}(E,F)$ *et* $\|T + B\| \leq \|T\| + \|B\|$*.*

3. *Si* $\alpha \in \mathbb{k}$ *et* $T \in \mathcal{L}(E,F)$*, alors,* $\alpha T \in \mathcal{L}(E,F)$ *et* $\|\alpha T\| = |\alpha| \, \|T\|$*.*

4. *Si* $T \in \mathcal{L}(E,F)$ *et* $B \in \mathcal{L}(F,G)$ *, alors leurs composé* $BT \in \mathcal{L}(F,G)$ *et* $\|BT\| \leq \|B\| \, \|T\|$*.*

De cette proposition, dont la preuve est évidente, on déduit que l'application qui à un élément T de $\mathcal{L}(E,F)$ associe $\|T\|$ est une norme qui fait de $\mathcal{L}(E,F)$ un espace vectoriel normé. Notons que cette norme peut se définir encore par les relations

$$\|T\| = \sup_{x=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

$$= \inf\{c > 0 : \|Tx\| \leq c \|x\| \, ; \text{ pour tout } x \in E\}.$$

Preuve. voir [7] ■

Exemple 1.2.1 *(Projection orthogonale sur un sous-espace fermé) Soit* F *un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert* H*. L'opérateur projection* P_F *(voir Théorème 1.1.1) est continu de norme* 1 *car* $P_F(x) = x$ *pour tout* $x \in F$ *et* $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$ *pour tout* $x \in H$ *avec égalité si* $x \in F$*.*

Notons que la convergence dans $\mathcal{L}(E,F)$ d'une suite (T_n) vers T signifie que :

$$\lim_{n \to \infty} \|T - T_n\| \to 0.$$

Théorème 1.2.2 *Si* F *est complet alors* $\mathcal{L}(E,F)$ *est complet.*

Preuve. Supposons F un espace de Banach et soit (T_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{L}(E,F)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N \text{ } et \text{ } m \geq N \Rightarrow \|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$$

On en déduit que, pour tout élément x de E, et $n, m \geq N$, on a

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\| \leq \varepsilon \, \|x\|$$

de sorte que les éléments $T_n x$ forment une suite de Cauchy dans F ; celui-ci étant complet, cette suite converge vers un élément y de F. Posons $y = Tx$; on vérifie facilement que T est linéaire, de plus, par passage à la limite quand m tend vers l'infini dans l'inégalité précédente, on obtient

$$n \geq N \Rightarrow \|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon \|x\|$$

Comme T_n est continu, cette inégalité montre que T est continu et que, pour $n \geq N$, on a $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$. Il en résulte que la suite (T_n) converge en norme vers T. ■

Corollaire 1.2.1 *Soit E un espace vectoriel normé. Le dual E' d'un espace vectoriel normé E est un espace de Banach.*

1.2.3 Spectre d'un opérateur

Définition 1.2.4 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *On appelle spectre de T, l'ensemble*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \Bbbk : (\lambda I_{d_E} - T) \ non \ inversible\}.$$

Tout scalaire $\lambda \in \sigma(T)$ est dit valeur spectrale. Le rayon spectral de T noté $r(T)$ est défini par $r(T) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\}$ et l'on a toujours $r(T) \leq \|T\|$. Si $\sigma(T) = \emptyset$, alors, par convention, on pose $r(T) = 0$.

2. *On appelle valeur propre de T tout $\lambda \in \Bbbk$ tel que $\lambda I_{d_E} - T$ n'est pas injectif. On appelle spectre ponctuel de T, l'ensemble*

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \Bbbk : \lambda \ valeur \ propre \ de \ T\}.$$

Une valeur propre de T est une valeur spectrale et on a toujours $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$. On appelle espace propre associé à la valeur propre $\lambda \in \sigma_p(T)$, le sous-espace vectoriel $\ker(\lambda I_{d_E} - T) \neq \{0\}$. On appelle multiplicité géométrique d'une valeur propre $\lambda \in \sigma_p(T)$ la dimension de $\ker(\lambda I_{d_E} - T)$ et multiplicité algébrique, la limite de $\dim \ker(\lambda I_{d_E} - T)^k$ quand $k \to +\infty$.

3. *On appelle spectre continu de T, l'ensemble*

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \Bbbk : (\lambda I_{d_E} - T) \ injectif, \mathrm{Im}(\lambda I_{d_E} - T) \ dense \ mais \ distinctde \ E\}$$

4. *On appelle spectre résiduel de T, l'ensemble*

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \Bbbk : (\lambda I_{d_E} - T) \text{ } injectif, \mathrm{Im}(\lambda I_{d_E} - T) \text{ } non\ dense\ dans\ E\}.$$

5. *On appelle ensemble résolvant de T, l'ensemble*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \Bbbk : (\lambda I_{d_E} - T) \text{ } inversible\}.$$

Tout scalaire $\lambda \in \rho(T)$ est dit valeur résolvante. On a $\sigma(T) = \Bbbk \diagdown \rho(T)$. Si $\lambda \in \rho(T)$ alors, on note $R_\lambda(T) = (\lambda I_{d_E} - T) - 1 \in \mathcal{L}(E)$ la résolvante de T.

Théorème 1.2.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Si $|\lambda| > \| T \|$ alors $\lambda \in \rho(T)$ et $\sigma(T) \subset \overline{B}(0, \| T \|)$.*
2. *$\rho(T)$ est un ouvert non vide de $\Bbbk$.*
3. *$\sigma(T)$ est un compact non vide de $\Bbbk$.*
4. *Si T est inversible, alors, $\sigma(T^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in \sigma(T)\}$.*
5. *On a $\sigma(T) \subset \overline{B}(0, r(T))$. De plus, on a $r(T) = \lim\limits_{n \to +\infty} \| T^n \|^{\frac{1}{n}}$.*

Preuve.

1. Si $|\lambda| > \| T \|$ alors$\lambda \neq 0$ et $\|\lambda^{-1}T\| < 1$. On en déduit du Théorème 1.3.6 que $I_{d_E} - \lambda^{-1}T$ est inversible, i.e., $\lambda \in \rho(T)$.

2. On a $\rho(T)$ est non vide (d'aprés 1.) On considère l'application $f : \Bbbk \to \mathcal{L}(E)$ définie pour tout $\lambda \in \Bbbk$ par $f(\lambda) = \lambda I_{d_E} - T$. On remarque que $\rho(T) = f^{-1}(\Gamma\mathcal{L}(E))$ et pour tous λ, $\mu \in \Bbbk$ on a

$$\| f(\lambda) - f(\mu) \| = \| (\lambda - \mu) I_{d_E} \| \leq |\lambda - \mu|.$$

   Il résulte que f est continue. Or, $\Gamma\mathcal{L}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$. On en dèduit que $\rho(T) = f^{-1}(\Gamma\mathcal{L}(E))$ est un ouvert de $\Bbbk$.

3. On a $\sigma(T) = \Bbbk \diagdown \rho(T)$ est fermé (d'aprés 2.), il est borné (d'aprés 1.) alors il est compact.

■

Remarque 1.2.3 *Si E est de dimension finie, alors, $(\lambda I_{d_E} - T)$ est inversible si et seulement si $\ker(\lambda I_{d_E} - T) = \{0\}$. En particulier, on déduit $\sigma_p(T) = \sigma(T)$. En effet, si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors, tout opérateur linéaire T sur E peut être représenté par une matrice carée T, et que l'opérateur linéaire $(\lambda I_{d_E} - T)$ est inversible quand la matrice $(\lambda I_{d_E} - T)$ est inversible. Il est clair que pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$, l'un des cas suivants doit apparaître :*

i) *λ est une valeur propre de T,*

ii) *la matrice $(\lambda I_{d_E} - T)$ est inversible, i.e., la matrice $(\lambda I_{d_E} - T)^{-1}$ existe. Il en résulte que le spectre $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ est l'ensemble des valeurs propres de la matrice T, et la dimension de l'espace vectoriel propre correspondant à toute valeur propre est finie. Le spectre d'un opérateur linéaire dans un espace de dimension finie a une structure simple, mais pour un opérateur général dans un espace de dimension infinie, le spectre peut être différent et plus complexe.*

Exemple 1.2.2 *Soit I_{d_H} l'opérateur identité de l'espace de Hilbert H. Il est clair que $\sigma(I_{d_H}) = \{1\}$, car $\lambda I_{d_H} - I_{d_H} = (\lambda - 1)I_{d_H}$ est inversible si $\lambda - 1 \neq 0$. De même, si $\mu \in \mathbb{k}$, alors, $\sigma(\mu I_{d_H}) = \{\mu\}$*

1.2.4 Opérateur adjoint

Définitions

On commence par rappeler le théorème de représentation de Riesz.

Théorème 1.2.4 **a)** *Soit H un espace préhilbertien. Pour tout $y \in H$, l'application $x \in H \to \langle x, y \rangle$ est une forme linéaire continue de norme $\|y\|$.*

b) *Soit f une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert H, alors, il existe un élément y unique de H tel que $f(x) = \langle x, y \rangle, \forall x \in H$.*

Soient $(H, \langle ., . \rangle), (H_1, \langle ., . \rangle_1)$ et $(H_2, \langle ., . \rangle_2)$ des espaces de Hilbert.

Proposition 1.2.2 *Soit $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors, pour tout $y \in H_2$, il existe un unique $z \in H_1$ tel que*

$$\forall x \in H_1 : \langle Tx, y \rangle_2 = \langle x, z \rangle_1 . \tag{1.2}$$

On note $z = T^* y$.

Définition 1.2.5 *L'application T^* définie de H_2 dans H_1 par*

$$\forall x \in H_1, \forall y \in H_2 : \langle Tx, y \rangle_2 = \langle x, T^* y \rangle_1 \tag{1.3}$$

est appelé l'adjoint de T.

Preuve. (**Démonstration de la Proposition**) . Soit $y \in H_2$. L'application $\varphi_y : x \to \langle Tx, y \rangle_2$ est linéaire et pour tout $x \in H_1$, on a

$$|\varphi_y(x)| \leq | \langle Tx, y \rangle_2 | \leq \|T\| \, \|y\|_2 \, \|x\|_1 .$$

Alors, φ_y est une forme linéaire continue sur H_1. On en déduit d'aprés le théorème de représentation de Riesz, qu'il existe un unique $z \in H_1$ tel que $\varphi_y(x) = \langle x, z \rangle_1$ pour tout $x \in H_1$. Ceci donne 1.2. ■

Proposition 1.2.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors, $T^* \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ et $\|T^*\| = \|T\|$.*

Preuve. Soient y_1, $y_2 \in H_2$ et $\alpha \in \Bbbk$. Alors, pour tout $x \in H_1$, on a

$$\begin{aligned}
\langle x, T^*(y_1 + \alpha y_2) \rangle_1 &= \langle Tx, y_1 + \alpha y_2 \rangle_2 = \langle Tx, y_1 \rangle_2 + \overline{\alpha} \langle Ax, y_2 \rangle_2 \\
&= \langle x, T^* y_1 \rangle_1 + \overline{\alpha} \langle x, T^* y_2 \rangle_1 \\
&= \langle x, T^* y_1 + \alpha T^* y_2 \rangle_1 .
\end{aligned}$$

D'où, $T^*(y_1 + \alpha y_2) = T^* y_1 + \alpha T^* y_2$, i.e., T^* est linéaire. De plus, pour tout $y \in H_2$, on a

$$\begin{aligned}
\|T^* y\|_1^2 &= \langle T^* y, T^* y \rangle_1 \\
&= \langle y, TT^* y \rangle_2 \leq \| y \|_2 \, \|T\| \, \|T^* y\|_1 .
\end{aligned}$$

D'où, $\|T^* y\|_1 \leq \|T\| \, \|y\|_2$. Cela dit que $T^* \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ et $\|T^*\| \leq \|T\|$. Enfin, pour $x \in H_1$, on a

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_2^2 &= \langle Tx, Tx \rangle_2 = \langle x, T^* Tx \rangle_1 \\
&\leq \|x\|_1 \, \|T^*\| \, \|Tx\|_2 .
\end{aligned}$$

Alors, on obtient $\|Tx\|_2 \leq \|T^*\| \|x\|_1$. On en déduit que $\|T\| \leq \|T^*\|$. D'où, résulte l'égalité des normes. ■

Proposition 1.2.4 *(Résultats relatifs à l'adjoint d'un opérateur) Soient T, $B \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $C \in \mathcal{L}(H, H_2)$ et $\alpha, \beta \in \Bbbk$ On a*

1. $(I_{d_H})^* = I_{d_H}$.
2. $T^{**} = T$.
3. $(\alpha T + \beta B)^* = \overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} B^*$.
4. $CT \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ *et* $(CT)^* = T^* C^*$.
5. $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|_2$.

Preuve. Ces propriétés se démontrent directement de la définition de l'adjoint par la relation (1.3). ■

Théorème 1.2.5 *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible si et seulement si T^* est inversible et on a $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Preuve. Si $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible, alors, d'aprés la Proposition 1.5.4, on a

$$\begin{aligned}(T^{-1})^* T^* &= (TT^{-1})^* = (I_{d_{H_2}})^* = I_{d_{H_2}} \\ T^*(T^{-1})^* &= (T^{-1}T)^* = (I_{d_{H_1}})^* = I_{d_{H_1}}.\end{aligned}$$

Donc, $T^* \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Maintenant, si $T^* \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible, alors l'étape précédente montre que $(T^*)^* \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible. Or, d'aprés la Proposition 1.5.4, on a $(T^*)^* = T$. Il s'en suit que T est inversible. La démonstration est alors terminée. ■

Exemple 1.2.3 *(Opérateur intégral à noyau) Soit $k : [c, d] \times [a, b] \to \mathbb{C}(c < d, a < b)$ une fonction continue de deux variables réelles. On considère l'opérateur intégral $T : L^2([a, b], C) \to L^2([c, d], \mathbb{C})$ tel que pour tout $f \in L^2([a, b], \mathbb{C})$, Tf est la fonction définie par $\forall x \in [c, d], Tf(x) = \int_a^b k(x, t) f(t) dt$, où la fonction k s'appelle le noyau de l'opérateur intégral T. Par la définition du produit scalaire dans*

$L^2([c,d],\mathbb{C})$, *pour tout* $f \in L^2([a,b],\mathbb{C})$, *pour tout* $g \in L^2([c,d],\mathbb{C})$, *on a*

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g\rangle &= \int_c^d [\int_a^b k(x,y)f(y)dy]\overline{g(x)}dx \\
&= \int_c^d \int_a^b k(x,y)f(y)\overline{g(x)}dydx \\
&= \int_c^d f(y)\left[\int_a^b k(x,y)dy]\overline{g(x)}dx\right] dy \\
&= \int_c^d f(y)\overline{\left[\int_a^b \overline{k(x,y)}dy]g(x)dx\right]} dy \\
&= \langle f, T^*g\rangle .
\end{aligned}$$

L'utilisation de Fubini est justifiée par l'intégrabilité sur $[c,d]\times[a,b]$ *de la fonction*

$$F(x,y) = k(x,y)f(y)\overline{g(x)}.$$

D'où, l'opérateur adjoint T^* *de* T *est défini pour tout* $g \in L^2([c,d],\mathbb{C})$ *par*

$$\forall s \in [a,b], (T^*g)(s) = \int_c^d \overline{k(t,s)}g(t)dt.$$

Définition 1.2.6 *Un opérateur* $T \in \mathcal{L}(H_1,H_2)$ *est dit unitaire si* $TT^* = I_{d_{H_2}}$ *et* $T^*T = I_{d_{H_1}}$.

Propriétés spectrales de l'opérateur adjoint

Proposition 1.2.5 *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$ *. Alors, on a*

1. $\ker(T) = [\mathrm{Im}(T^*)]^{\perp}$.
2. $\mathrm{Im}(T) = [\ker(T^*)]^{\perp}$.

Preuve.

1. On a

$$\begin{aligned}\ker(T) &= \{x \in H : Tx = 0\}\\ &= \{x \in H : \forall y \in H : \langle Tx, y\rangle = 0\}\\ &= \{x \in H : \forall y \in H : \langle x, T^*y\rangle = 0\}\\ &= [\mathrm{Im}(T^*)]^{\perp}\end{aligned}$$

2. D'aprés 1, on obtient

$$[\ker(T^*)]^{\perp} = [\mathrm{Im}(T)^{\perp}]^{\perp} = \mathrm{Im}(T).$$

d'où, résulte l'égalité cherchée.

■

Proposition 1.2.6 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors, on a*

1. $\rho(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{k} : \overline{\lambda} \in \rho(T)\}$, $\sigma(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{k} : \overline{\lambda} \in \sigma(T)\}$

2. Pour tout $\lambda \in \rho(T^*), R_\lambda(T^*) = (\overline{R}_\lambda(T))^*$.

Preuve.

1. On a équivalence : $\lambda I_{d_H} - T^*$ est inversible si et seulement si $(\lambda I_{d_H} - T^*)^*$ est inversible (d'aprés le Théorème 1.5.5). Or, $(\lambda I_{d_H} - T^*)^* = \lambda I_{d_H} - T^*$ donc

$$\begin{aligned}\rho(T^*) &= \{\lambda \in \mathbb{k} : \lambda I_{d_H} - T^* \ \textit{est inversible}\}\\ &= \{\lambda \in \mathbb{k} : \overline{\lambda} I_{d_H} - T^* \textit{est inversible}\}\\ &= \{\lambda \in \mathbb{k} : \overline{\lambda}\rho(T)\}.\end{aligned}$$

De plus,$\sigma(T^*) = \mathbb{k} \diagdown \rho(T^*)$, ce qui donne le résultat.

2. Si $\lambda \in \rho(T^*)$, alors, on a

$$\begin{aligned}R_\lambda(T^*) &= (\lambda I_{d_H} - T^*)^{-1}\\ &= ((\overline{\lambda} I_{d_H} - T^*)^*)^{-1}\\ &= ((\overline{\lambda} I_{d_H} - T^*)^{-1})^* = (\overline{R}_\lambda(T))^*\end{aligned}$$

ceci découle du Théorème 1.5.5. D'où, résulte l'égalité attendue.

■

Remarque 1.2.4 *On peut généraliser la notion d'opérateur adjoint au cas d'espaces de Banach E. Pour $f \in E'$ et $x \in E$, on note $\langle f, x\rangle_{E',E}$ au lieu de $f(x)$ et on appelle $\langle \cdot, \cdot\rangle_{E',E}$ le crochet de dualité de E', E. Alors, le crochet $\langle ., .\rangle_{E',E}$ est similaire au produit scalaire d'espace de Hilbert. En particulier, si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, alors, il existe $T^* \in \mathcal{L}(F', E')$ tel que $\forall x \in E, \forall f \in F'$:*

$$\langle T^* f, x\rangle_{E',E} = \langle f, Tx\rangle_{F',F}$$

Il s'agit d'une généralisation car si E est un espace de Hilbert alors, E' peut être identifié avec E d'aprés le théorème de représentation de Riesz. Le crochet de dualité $\langle \cdot, \cdot\rangle_{E',E}$ est alors le produit scalaire de E.

Définition 1.2.7 *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal s'il commute avec son adjoint, i.e,*

$$TT^* = T^*T.$$

Opérateur adjoint dans un espace euclidien

Définition 1.2.8 *DOn appelle espace vectoriel euclidien tout espace préhilbertien $(F, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ réel de dimension finie.*

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel euclidien $(F, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ de dimension n. On rappelle la notion d'opérateur adjoint dans un espace euclidien qui est un cas particulier du cas général sous forme de définition :

Définition 1.2.9 *Pour tout $U \in \mathcal{L}(F)$, il existe un unique $U^* \in \mathcal{L}(F)$, appelé adjoint de U, défini par $\forall x, y \in F : \langle x, U(y)\rangle = \langle U^*(x), y\rangle$.*

Notation 1.2.2 *:Si $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base orthonormée de F et si $T = Mat_B(U)$ (la matrice de l'application U dans la base B), alors, $Mat_B(U^*) = T^*$, où $T^* = T^t$ est la matrice transposée de T.*

Proposition 1.2.7 *Des propriétés suivantes sur les matrices, on en déduit les propriétés similaires sur les adjoints des endomorphismes d'un espace euclidien, on retrouve ainsi facilement les résultats de la Proposition 1.5.4 et du Théoréme 1.5.5.*

1. $(TB)^t = B^t T^t$.
2. $(T^t)^t = T$.
3. $(\alpha T + \beta B)^t = \alpha T^t + \beta B^t (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.
4. $\det(T) = \det(T^t)$.
5. *Si* $\det(T) \neq 0$, *alors, ona* $(T^{-1})^t = (T^t)^{-1}$.

Définition 1.2.10 *Si un endomorphisme U vérifie $U^* = U$, on dit que U est auto-adjoint.*

Théorème 1.2.6 *Soit T une matrice réelle $n \times n$ (considérée comme un endomorphisme sur $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique). Alors, on a*

$$\mathrm{Im}(T) = [\ker(T^t)]^{\perp} \text{ et } \ker(T) = [\mathrm{Im}(T^t)]^{\perp}.$$

1.2.5 Opérateurs auto-adjoints

Dans cette partie, on se place dans le cadre d'un espace de Hilbert H.

Définitions et exemples

Définition 1.2.11 *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit auto-adjoint (ou parfois hermitien) s'il est égal à son adjoint, c'est-à-dire si, quels que soient x et y dans H, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$.*

Exemple 1.2.4

1. *Un opérateur intégral de Fredholm est auto-adjoint si et seulement si son noyau k vérifie $\overline{k(y,x)} = k(x,y)$.*
2. *L'opérateur de multiplication par une fonction $\varphi \in L^\infty(X, \Omega, \mu)$ est auto-adjoint dans $L^2(X, \Omega, \mu)$, si et seulement si φ est à valeurs réelles.*
3. *L'opérateur identité sur un espace de Hilbert est auto-adjoint.*

4. *Les opérateurs linéaires sur $\mathbb{C}^n$ donnés par des matrices hermitiennes $(a_{ij}), 1 \leq i,\ j \leq n$, c'ést à dire telles que $a_{ij} = a_{ji}$ sont auto-adjoints.*

5. *Pour tout opérateur $T^*T \in \mathcal{L}(H)$, on a $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint car $(T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T$.*

Remarque 1.2.5 *On a*

a) *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ Si T est auto-adjoint, alors, pour tout $x \in H$: $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.*

b) *Si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, T est auto-adjoint si et seulement si, pour tout $x \in H$: $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.*

Définition 1.2.12 *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit positif (notation $T \geq 0$) si T est auto-adjoint et si pour tout $x \in H$: $\langle Tx, x\rangle \geq 0$.*

Exemple 1.2.5 *Pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$, on a $T^*T \geq 0$ car pour tout $x \in H$ $\langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$.*

1.2.6 Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints

On s'intéresse dans la proposition suivante aux valeurs propres des opérateurs auto-adjoints.

Proposition 1.2.8 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint.*

Alors, on a :

1. *$\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$.*

2. *$\lambda \in \sigma_p(T)$ si et seulement si $\overline{\mathrm{Im}(\lambda I_{d_H} - T)} \neq H$.*

3. *Si $\lambda, \mu\sigma_p(T)$, $\lambda \neq \mu$, alors, $\ker(\lambda I_{d_H} - T) \perp \ker(\mu I_{d_H} - T)$, i.e., les sous-espaces propres de T sont orthogonaux deux à deux.*

Preuve.

1. Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, alors, il existe $x \in H \setminus \{0\}$ tel que $Tx = \lambda x$. D'où

$$\lambda = \frac{\langle \lambda x, x\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle Tx, x\rangle}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}.$$

2. Soit $\lambda \in \sigma_p(T)$. D'aprés la Proposition 1.5.6, on a

$$\overline{\mathrm{Im}(\lambda I_{d_H} - T)} = [\ker(\lambda I_{d_H} - T)^*]^{\perp} = [\ker(\overline{\lambda} I_{d_H} - A)]^{\perp}.$$

Comme $\sigma_p(T)$, $\lambda \in \sigma_p(T)$ si et seulement si $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T)$, ce qui équivaut à $\ker(\overline{\lambda} I_{d_H} - A) \neq \{0\}$, soit encore $[\ker(\overline{\lambda} I_{d_H} - A)]^{\perp} \neq H$. On déduit que $\lambda \in \sigma p(T)$ si et seulement si $\overline{\mathrm{Im}(\lambda I_{d_H} - T)} \neq H$.

3. Si $x \in \ker(\lambda I_{d_H} - T)$ et $y \in \ker(\mu I_{d_H} - T)$, alors, $Tx = \lambda x$ et $Ty = \mu y$. Comme $T = T^*$ et $\mu \in \mathbb{R}$, on obtient

$$(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle - \langle x, \mu y \rangle = \langle Tx, y \rangle - \langle x, Ty \rangle = 0.$$

Il résulte : $\langle x, y \rangle = 0$ car $\lambda \neq \mu$. D'où, $\ker(\lambda I_{d_H} - T) \perp \ker(\mu I_{d_H} - T)$.

La démonstration de la proposition est ainsi terminée.

■

Corollaire 1.2.2 *Si $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint, alors, $\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$.*

On termine ce chapitre par énoncer le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.3 *Soit T un opérateur auto-adjoint sur H. Si $\sigma(T) = \{0\}$ alors, $T = 0$.*

Chapitre 2

Opérateurs compacts

Soit E est un espace vectoriel normé, on note $B_E\,(0,r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r > 0$ et $\overline{B_E\,(0,r)}$ la boule fermée.

Dans le cas où $r = 1$ on note pour simplifier $B_E = B_E\,(0,1)$ et $\overline{B_E} = \overline{B_E\,(0,1)}$, tout au lang de ce chapitre on entend par E, F des espace de Banach.

2.1 Définitions et exemples

Définition 2.1.1 *Un opérateur linéaire T de E dans F est dit compact si $T(\overline{B_E})$ est compact de F. L'ensemble des opérateurs compacts de E dans F est noté $K(E,F)$.*

Si $E = F$ alors, on note $K(E)$.

Proposition 2.1.1 *Un élément T de $L(E,F)$ est un opérateur compact si et seulement si l'image par T de toute partie bornée M de E est relativement compact dans F.*

Définition 2.1.2 *En d'autres termes, T est un opérateur compact si, pour toute suite bornée (x_n) dans E, la suite $(Tx_n)_n$ contient une sous-suite convergente.*

Preuve. On suppose que T soit compact et on considére une suite bornée quel conque $(x_n)_n$. Si on pose $\alpha = \sup\limits_n \parallel x_n \parallel$, alors la suite $(Tx_n)_n$ est contenue dans l'ensemble $T(B_E(0,\alpha))$ Or $T(B_E(0,\alpha))$ est relativement compact, on peut alors extraire de $(Tx_n)_n$ une sous suite convergente.

Soient maintenant M une partie bornée de E et $(y_n)_n$ une suite d'éléments de $T(M)$. Il existe alors une suite $(z_n)_n$ d'éléments de $\overline{T(M)}$ telle que

$$\| z_n - y_n \| \leq \frac{1}{n} .$$

Par hypothèse, la suite $(z_n)_n$ admet une sous suite convergente, la suite $(y_n)_n$ aussi. Il s'en suit que $T(M)$ est relativement compact. D'où, T est compact. ■

Remarque 2.1.1 *Un opérateur compact est nécessairement continu, car sinon il existerait une suite $(x_n)_n$ bornée telle que $\|Tx_n\| \to +\infty$, ce qui contredit la compacité.*

2.2 Propriétés fondamentales des opérateurs compacts

On commence par rappeler le théorème de Riesz sous forme de lemme

Lemme 2.2.1 *(Théorème de Riesz) Soit E un espace vectoriel normé. Alors, la boule unité fermée de E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Remarque 2.2.1 *Le théorème de Riesz peut s'éxprimér sous la forme suivante :*

L'identité de E est un opérateur compacte si et seulement si E est de dimension finie.

Théorème 2.2.1 *L'ensemble $K(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.*

Preuve. Soient T et S deux opérateurs compacte de E dans F, et λ, μ deux éléments de $\Bbbk$ alors

$$(\lambda T + \mu S)\left(\overline{B}(E)\right) \subset \lambda\overline{T\left(\overline{B}(E)\right)} + \mu\overline{S\left(\overline{B}(E)\right)}.$$

Or, si K_1 et K_2 sont deux compacts de F alors $\lambda K_1 + \mu K_2$ qui est l'image du compact $K_1 \times K_2$, par l'application contine $(x, y) \to \lambda x + \mu y$ est compact. ■

Théorème 2.2.2 *Si E ou F est de dimension finie, alors $K(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.*

Preuve. Si E est de dimension finie, alors B_E sera compacte, d'où, $T(B_E)$ est compacte pour tout $T \in \mathcal{L}(E,F)$ car T est continu. On suppose que F est de dimension finie, alors, $T(B_E)$ est bornée donc relativement compacte (car F est de dimension finie). ■

Remarque 2.2.2 *On a :*

- *Tout opérateur compact est borné, c'est-à-dire que l'on a l'inclusion $K(E) \subset \mathcal{L}(E)$.*
- *Toute fonctionnelle linéaire $f \in E'$ est compacte (Il suffit de remarquer que* $\dim(\mathbb{k}) = 1$*).*

Théorème 2.2.3 *L'ensemble $K(E)$ est*

(a) *un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E)$.*

(b) *un idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire que si $T \in K(E)$ et $B \in \mathcal{L}(E)$, alors TB et BT sont dans $K(E)$.*

Preuve.

(a) voir[7]

(b) Si T est compact, alors, pour tout borné $M \subset E, \overline{T(M)}$ est compact. Or, l'image d'un compact par une application continue est compacte, donc, $B(\overline{T(M)})$ est compact. Il résulte que $B \circ T(M) \subset B(\overline{T(M)})$ est relativement compacte. Si B est compact, alors, pour tout borné $M \subset E$, $T(M)$ est aussi borné et donc $B \circ T(M)$ est relativement compacte.

■

2.2.1 Opérateur de rang fini

Définition 2.2.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. On dit que T est un opérateur de rang fini si* $\mathrm{Im}(T)$ *est de dimension finie.Le rang de T est la dimension de son image*

Exemple 2.2.1 *Soit E un espace de Hilbert séparable et soit (e_n) une base hilbertienne de E. Pour tout entier n, on désigne par P_n l'opérateur de projection orthogonale sur le sous-espace engendré par $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. P_n est un opérateur de rang fini égal à n.*

Théorème 2.2.4 *Un opérateur borné T est de rang fini si, et seulement si, son adjoint T^* l'est aussi. Dans ce cas, T et T^* ont même rang.*

Preuve. On suppose T de rang fini n. Soit $(e_i)_i$, $i \leq n$, une base orthonormée de $\mathrm{Im}(T)$ et soit P l'opérateur de projection orthogonale sur l'image de T. On a $T = PT$ et donc $T^* = T^*P$ (car P est auto-adjoint). On en déduit que pour tout $x \in E$

$$\begin{aligned} T^*x &= T^*\left(\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle\, e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle\, T^*e_i \end{aligned}$$

L'image de T^* est donc engendrée par les vecteurs $(T^*e_i)_{i\leq n}$ et le rang de T^* est inférieur ou égal à celui de T. Comme $(T^*)^* = T$, on en déduit que T et son adjoint ont même rang. ■

Proposition 2.2.1 *Tout opérateur borné de rang fini est compact.*

Preuve. Soit $T \in L(E, F)$ un opérateur de rang fini. L'opérateur T est continu donc, pour tout $x \in B_E$: $\|Tx\| \leq \|T\|$. Alors, $T(B_E)$ est borné dans F et, par conséquent, $\overline{T(B_E)}$ aussi. De plus, $\mathrm{Im}(T)$ est fermé car c'est un espace vectoriel de dimension finie, donc, $\overline{T(B_E)} \subset \overline{\mathrm{Im}(T)} = \mathrm{Im}(T)$. Enfin, $\overline{T(B_E)}$ est fermé borné de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathrm{Im}(T)$, il est compact de $\mathrm{Im}(T)$. D'où, il résulte $T \in K(E, F)$. L'espace $K(E, F)$ est fermé et tout opérateur borné de rang fini est compact. ■

Corollaire 2.2.1 *Toute limite dans $\mathcal{L}(E, F)$ d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact.*

Proposition 2.2.2 *Soit $T \in K(E, F)$. Alors, $Im(T)$ est fermé si et seulement si T est de rang fini.*

Pour montrer cette proposition, on rappelle d'abord le théorème suivant :

Théorème 2.2.5 *(théorème de l'application ouverte) Soient E, F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective. Alors, T est ouverte, i.e., T transforme tout ouvert de E en un ouvert de F.*

Preuve. de la Proposition 2.2.2. On suppose que $\mathrm{Im}(T)$ est fermé dans l'espace de Banach F alors, $\mathrm{Im}(T)$ est aussi un espace de Banach. L'opérateur T est continu et surjectif de l'espace de Banach E sur l'espace de Banach $\mathrm{Im}(T)$. Alors, T est ouverte

(d'aprés le théorème de l'application ouverte). Comme la boule fermée B_E est un voisinage

de 0 dans E et T est ouverte, alors $T(B_E)$ est un voisinage de $T(0) = 0$ dans $\mathrm{Im}(T)$.

D'où, il existe $r \succ 0$ tel que

$$B_{\mathrm{Im}(T)}(0, r) = \{y \in \mathrm{Im}(T) : \|y\| < r\} \subset T(B_E).$$

L'adhérence $\overline{B_{Im(T)}(0, r)}^F$ de $B_{Im(T)}(0, r)$ dans F est un fermé dans le compact $T(B_E)$,elle est donc un compact de F. De plus, on a

$\overline{B_{\mathrm{Im}(T)}(0, r)}^F \subset \overline{T(B_E)}^F \subset \overline{\mathrm{Im}(T)}^F = \mathrm{Im}(T)$,

donc $\overline{B_{\mathrm{Im}(T)}(0, r)}^F$ est un compact de $\mathrm{Im}(T)$. On en déduit que la boule unité de $\mathrm{Im}(T)$ est un compact de $\mathrm{Im}(T)$. D'où, $\mathrm{Im}(T)$ est de dimension finie. ∎

2.2.2 Opérateur compact dans un espace de Hilbert

Théorème 2.2.6 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in K(E, H)$. Alors, il existe une suite $(T_n)_n$ de $\mathcal{L}(E, H)$ d'opérateurs de rang fini, qui converge vers T dans $\mathcal{L}(E, H)$.*

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.Comme $\overline{T(B_E)}$ est compact de H, il existe $k_n \in \mathbb{N}$ et $y_1, ..., y_{k_n} \in H$ tels que

$$T(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} B_H(y_i, \frac{1}{n+1}) \tag{2.1}$$

où $B_H(y, r) = \{x \in H : \|x - y\| < r\}$ Or, $Fn = vect\{y1, \cdots, y_{k_n}\}$ est un espace vectoriel de dimension finie, donc un fermé de l'espace de Hilbert H, d'où,$H = F_n \oplus F_n^{\perp}$.Soit $P_n \in \mathcal{L}(H)$ la projection orthogonale de H sur F_n. Alors, $T_n = P_n T \in \mathcal{L}(E, H)$ est un opérateur de rang fini car

$$\dim(\mathrm{Im}(T_n)) = \dim(\mathrm{Im}(P_n T)) \leq \dim(F_n) \leq k_n.$$

D'autre part, pour $x \in B_E$, d'aprés 2.1, il existe $i_0 \in \{1, ..., k_n\}$ tel que

$$\|Tx - y_{i_0}\| < \frac{1}{n+1}.$$

Or, y_{i_0} est dans F_n et P_nTx est la projection orthogonale de Tx sur F_n donc

$$\|Tx - P_nTx\| = d(Tx, F_n) \leq \|Tx - y_{i_0}\| < \frac{1}{n+1}.$$

Il résulte que

$$\forall x \in B_E : \|Tx - T_nx\| < \frac{1}{n+1}.$$

En revenant à la d´efinition de la norme d'opérateurs, on trouve $\|T - T_n\| < \dfrac{1}{n+1}$ ■

Remarque 2.2.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. De ce qui précède, les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *L'opérateur T est adhérent (en norme d'opérateur) à l'espace des opérateurs linéaires bornés de rang fini.*
2. *L'opérateur T est compact de H dans H.*

2.3 Quelleque exemple

2.3.1 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Définition 2.3.1 *Soit H un espace de Hilbert séparable, et soit $(x_k)_k$ une base hilbertienne de H. Un opérateur linéaire $T : H \to H$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt (ou simplement HS) si*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|T_{x_k}\|^2 < +\infty.$$

Le réel $\|T\|_{HS} = (\sum_{k=1}^{\infty} \|Tx_k\|^2)^{\frac{1}{2}}$, est appelé la norme de Hilbert-Schmidt de T.

Exemple 2.3.1 *(Opérateurs à noyau) Soient $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ $(\Omega \subset \mathbb{R}_n)$ et $k(.,.) \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathbb{C})$. Alors,* *l'opérateur*

$$f \to Tf(x) = \int_{\Omega} k(x,t)f(t)dt.$$

est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Remarque 2.3.1 *Tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\Omega,\mathbb{C})$ se représente de manière unique à l'aide d'une fonction $k(.,.) \in L^2(\Omega\times\Omega,\mathbb{C})$.*

Théorème 2.3.1 *Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.*

Preuve. On va montrer que T est limite d'opérateurs de rang fini. Soit T unopérateur HS. On pose

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} \|T_{x_k}\|^2 < +\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$, alors, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (fini) tel que

$$\sum_{k\succ\varepsilon} \|T_{x_k}\|^2 \leq \varepsilon.$$

Soit $F_\varepsilon = vect\{x_1,\cdots,x_{N\varepsilon}\}$ un sous espace vectoriel de dimension finie. Soit F l'orthogonal de F_ε, alors, $F = vect\{x_k\}_{k>N\varepsilon}$. Soient P_ε(resp.P) la projection orthogonale de H sur F_ε (resp.sur F), alors,$P_\varepsilon + P = I_{d_H}$. On pose $T_\varepsilon = TP_\varepsilon$ qui est un opérateur de rang fini et $T - T_\varepsilon = TP$. Or,

$$P_{x_k} = \begin{cases} x_k \text{ si } k > N_\varepsilon \\ 0 \text{ si } k \leq N_\varepsilon \end{cases}$$

On introduit la norme de Hilbert-Schmidt, on trouve

$$\begin{aligned} \|T - T_\varepsilon\|_{HS}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \|TP_{x_k}\|^2 \\ &= \sum_{k\succ N\varepsilon} \|T_{x_k}\|^2 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Or, $\|T - T_\varepsilon\| \leq \|T - T_\varepsilon\|_{HS}$ alors, l'opérateur T est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini. Il est donc compact. ■

Théorème 2.3.2 *On considère un espace de Hilbert séparable H et un opérateur (T). Soit (e_n) une base orthonormée de H. Alors, la suite (Te_n) tend vers 0.*

Preuve. On suppose que (Te_n) ne tende pas vers 0. Sinon, on pourrait (pour un certain $\varepsilon > 0$) extraire de (e_n) une sous-suite $(e_{k(n)})$ telle que $\left\|Te_{k(n)}\right\| > \varepsilon$ pour tout n. Comme T est compact, on peut extraire de $(Te_{k(n)})$ une sous-suite (notée $(Te_{k(n)})$) convergente. Si on note x sa limite, on a $\|x\| \geq \varepsilon$. Or, pour tout $y \in H$, on a

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \left\langle Te_{k(n)}, y\right\rangle = \lim_{n\to+\infty} \left\langle e_{k(n)}, T^* y\right\rangle = 0.$$

La dernière égalité découle du fait que pour tout vecteur $z \in H$, la série $\sum\limits_n |\langle e_n, z\rangle|^2$ converge alors, son terme général tend vers 0. En choisissant $y = x$, on obtient $x = 0$, ce qui est une contradiction. ∎

2.3.2 Alternative de Fredholm

Définition 2.3.2 *Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel (non supposé fermé). On appelle codimension de F la dimension de E/F. On note $co\dim F = \dim(E/F)$, où E/F est léspace vectoriel quotient, qui est une notion algèbrique. Lorsque F est fermé, on a la somme directe $E = F \oplus F^\perp$, donc E/F est isomorphe à $F^\perp$ et $co\dim F = \dim(F^\perp)$.*

Définition 2.3.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. On dit que T est un opérateur de Fredholm, si les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *l'image de T est fermée,*

b) *le noyau de T est de dimension finie,*

c) *l'image de T est de codimension finie. On note alors,*

$Ind\,(T) = \dim(\ker(T)) - co\dim(\mathrm{Im}(T))$ *et le nombre entier $Ind(T)$ s'appelle l'indice de T.*

Exemple 2.3.2 *L'opérateur $f \to f''$ est un opérateur de Fredholm de $C^2([0,1],\mathbb{R})$ dans $C([0,1],\mathbb{R})$. Il est clair qu'il est surjectif et son noyau est de dimension 2 (fonctions affines).*

Théorème 2.3.3 *(Théorème de Fredholm) Soient $T \in K(E)$ et $B = I_{d_E} - T$. Alors, B est un opérateur de Fredholm et $Ind(B) = 0$. Autrement dit, si $T \in K(E)$ alors, on a*

i) $\ker(I_{d_E} - T)$ *est de dimension finie et* $\mathrm{Im}(I_{d_E} - T) = [\ker(I_{d_E} - T^*)]^\perp$ *;*

ii) *l'opérateur* $I_{d_E} - T$ *est injectif si et seulement s'il est surjectif;*

iii) $\dim(\ker(I_{d_E} - T)) = \dim(\ker(I_{d_E} - T^*))$.

Preuve.

i) on a $\dim(\ker(I_{d_E} - T))$ est finie. Et $\overline{\mathrm{Im}(I_{d_E} - T)} = [\ker(I_{d_E} - T^*)]^\perp$. Or,$\mathrm{Im}(I_{d_E} - T)$ est un fermé dans E (voir Proposition (2.4.3), d'où, résulte l'égalité attendue.

ii) Il suffit de voir [8].

iii) On pose $d_1 = \dim(\ker(I_{d_E} - T))$ et $d_2 = \dim(\ker(I_{d_E} - T^*))$. Pour montrer que $d_2 \leq d_1$, on raisonne par l'absurde. On suppose que $d_1 \prec d_2$. Le sous-espace vectoriel $\ker(I_{d_E} - T)$ étant de dimension finie, alors, il admet un supplémentaire topologique dans E. Alors, il existe une projection continue P de E dans $\ker(I_{d_E} - T)$. Or, $\mathrm{Im}(I_{d_E} - T) = [\ker(I_{d_E} - T^*)]^\perp$ est de codimension finie d_2, il résulte que $\mathrm{Im}(I_{d_E} - T)$ admet un suppl´émentaire topologique dans E, noté F, de dimension d_2. Comme $d_1 < d_2$, il existe une application linéaire $B : \ker(I_{d_E} - T) \to F$ qui est injective et non surjective. On considère $C = T + BP$, alors, $C \in K(E)$ car BP est de rang fini. On va montrer que $\ker(I_{d_E} - C) = \{0\}$. En effet, si

$$0 = x - Cx = (x - Tx) - (BPx),$$

alors,

$$x - Tx = 0 \text{ et } BPx = 0,$$

ce qui équivaut à $x \in \ker(I_{d_E} - T)$ et $Bx = 0$, donc $x = 0$.

Maintenant, on applique ii) à l'opérateur C, il résulte que $\mathrm{Im}(I_{d_E} - C) = E$. Cela est absurde car il existe $f \in F$, $f \notin \mathrm{Im}(B)$, l'équation $x - Cx = f$ n'dmet pas de solution. D'où, on vient de montrer que $d_2 \leq d_1$. En appliquant ce résultat à T^*, on trouve

$$\dim(\ker(I_{d_E} - T^{**})) \leq \dim(\ker(I_{d_E} - T^*)) \leq \dim(\ker(I_{d_E} - T)).$$

Or, $\ker(I_{d_E} - T) \subset \ker(I_{d_E} - T^{**})$, il s'en suit que $d_1 = d_2$. La démonstration est donc achevée.

■

Corollaire 2.3.1 *(Alternative de Fredholm) Soit $T \in K(E)$ et $\lambda \in C, \lambda \neq 0$. On considère l'équation de Fredholm : pour $y \in E$, trouver $x \in E$ tel que*

$$\lambda x - Tx = y. \tag{2.2}$$

Alors, on distingue deux cas

1. *Soit, pour tout $y \in E$, il existe une unique solution $x \in E$ de l'équation 2.2.*
2. *Soit, l'équation homogène $\lambda x - Tx = 0$ admet une solution $x \neq 0$. Dans le deuxième cas, l'équation 2.2 admet une solution (non unique) si et seulement $y \in \mathrm{Im}(\lambda I_{d_E} - T)$.*

2.4 Opérateurs compacts auto-adjoints

2.4.1 Décomposition spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints

On commence par rappeler le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints endimension finie.

Théorème 2.4.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Si H est de dimension finie n, alors*

1. *Les sous-espaces propres $\ker(\lambda I_{d_H} - T)$, où $\lambda \in \sigma_p(T)$, sont deux à deux orthogonaux ;*
2. *T est diagonalisable dans une base orthonormée et*

$$H = \bigoplus_{\lambda \in \sigma p(T)} \ker(\lambda I_{d_H} - T).$$

3. *T admet la décomposition spectrale suivante*

$$T = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \lambda P_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma p(T) | \{0\}} \lambda P_\lambda$$

où P_λ est la projection orthogonale de H sur $\ker(\lambda I_{d_H} - T)$.

On caractérise dans ce lemme, la norme d'un opérateur auto-adjoint compact.

Lemme 2.4.1 *Soit $T \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors,*

$$\|T\| = \max|\lambda|, \{\lambda \in \sigma_p(T)\}.$$

Preuve. La condition $H \neq \{0\}$ est nécessaire pour assurer l'existence d'une valeur propre. Soit $\lambda \in \sigma_p(T)$, alors, il existe $y \in H$ tel que $\| y \| = 1$ et $Ty = \lambda y$. D'où,

$$\begin{aligned} |\lambda| &= |\langle \lambda y, y \rangle| = |\langle Ty, y \rangle| \\ &\leq \|Ty\| \, \|y\| \\ &\leq \|T\| \, \|y\|^2 = \|T\|. \end{aligned}$$

De plus, comme l'opérateur T est auto-adjoint, d'aprés le, il existe $\lambda_0 \in \sigma(T)$ telle que $|\lambda_0| = \|T\|$. Si $\lambda_0 = 0$, alors, $T = 0$, d'où $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$ (car H est non réduit à $\{0\}$).

Si $\lambda \neq 0$, comme T est compact, on a

$$\lambda_0 \in \sigma(T) \diagdown \{0\} = \sigma_p(T) \diagdown \{0\}.$$

D'où, $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$. On en d´éduit

$$\|T\| = |\lambda_0| \leq \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma_p(T)\} \leq \|T\|.$$

■

Théorème 2.4.2 *(Décomposition spectrale) Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Si H est séparable, alors, il admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T. Autrement dit, T est diagonalisable dans une base hilbertienne.*

Preuve. Comme T est compact, alors, son spectre est constitué de 0 et d'une suite finie ou non de valeurs propres non nulles. Comme T est auto-adjoint, ses valeurs propres sont réelles. Soit $(\lambda)_n \geq 1$ la suite des valeurs propres distinctes de $T(\lambda_0 = 0)$. On pose $F_n = \ker(\lambda_n I_{d_H} - T)$ et $F_0 = \ker(T)$. D'aprés le théorème de Fredholm, F_n est de dimension finie pour tout $n \geq 1$. De plus, les sous-espaces F_n sont deux à deux orthogonaux

Soit F l'espace vectoriel engendré par les $(F_n)_{n\geq 0}$. On va montrer que F est dense dans H. On remarque d'abord que $T(F) \subset F$ de sorte que $T(F^\perp) \subset F^\perp$. En effet

$$\forall x \in F^\perp, \forall y \in F, \langle Tx, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle = 0.$$

Soit B la restriction de T à $F^\perp$.D'aprés ce qui précède B est un opérateur de $F^\perp$ dans $F^\perp$. L'opérateur $B = T\diagdown_{F\perp}$ est auto-adjoint compact et $\sigma(B) = \{0\}$. En effet, $\sigma(B)\backslash\{0\}$ est constitué des valeurs propres de B, qui seraient alors aussi des valeurs propres de T. Les vecteurs propres associés appartiendront donc à F et à $F^\perp$, ce qui est absurde.D'apré corrollaire...., $B = 0$ et on a

$$F^\perp \subset \ker(T) \subset F,$$

ce qui entraîne que $F^\perp = \{0\}$. Autrement dit, F est dense dans H. Reste à la fin de choisir dans chaque F_n une base hilbertienne. La réunion de ces bases est une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T. ■

Ainsi, le résultat obtenu en dimension finie se généralise en dimension inifinie comme suit :

Théorème 2.4.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors on a,*

$$T = \sum_{\lambda\in\sigma_p(T)} \lambda P_\lambda = \sum_{\lambda\in\sigma_p(T)\diagdown\{0\}} \lambda P_\lambda$$

où P_λ est la projection orthogonale de H sur $\ker(\lambda I_{dH} - T)$.

Développement en série de Fourier

On a vu dans la section précédente comment construire une base hilbertienne formée de vecteurs propres d'opérateurs auto-adjoints compacts. Dans l'espace L^2, on utilise trés

souvent des bases spéciales formées de fonctions propres d'un opérateur différentiel, ce qui est par exemple le point de départ de l'analyse harmonique.

Définition 2.4.1 *Un polynôme trigonométrique est une somme finie du type*

$$P(t) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{2i\pi kt}$$

où $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, et $c_k \in \mathbb{C}$. Le degré du polynôme P est le plus petit n possible dans cette représentation.

Notation 2.4.1 *: Tout au long de cette section, on note par H l'espace de Hilbert $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ des classes de fonctions de carré intégrables sur $[0, 2\pi]$. On rappelle le produit scalaire et la norme sur H pour tous $f, g \in H$, par*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$
$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx.$$

Remarque 2.4.1 *Toute classe de fonctions appartenant à H est représentée par une fonction f : $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mesurable et de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$. Il est pratique de prolonger f en une fonction $\tilde{f}$, 2π-périodique et mesurable, il suffit de modifier f en un point afin que $f(0) = f(2\pi)$ et de poser $\tilde{f}(x + 2k\pi) = f(x)$ pour $x \in [0, 2\pi]$ et $k \in \mathbb{Z}$. L'inverse est possible, une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique mesurable et de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$ définit, par restriction, un élément de H.*

Proposition 2.4.1 *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction e_n sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes par*

$$e_n(x) = e^{inx}$$

La famille $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de H.

Définition 2.4.2 *Si $f \in H$, on appelle n-iéme coefficient de Fourier de f le nombre complexe*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-2inx}dx.$$

La série formelle $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ est appelée série de Fourier de f.

Exemple 2.4.1 *Soit la fonction 2π-périodique définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ sur \ [0, \pi[\\ -1 \ sur \ [\pi, 2\pi[\end{cases}$$

sur $[\pi, 2\pi[$. Le n-ième coefficient de Fourier de f est

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-2inx} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{in} - \frac{(-1)^n}{in} \right). \end{aligned}$$

Alors, on a $c_n(f) = 0$ pour n pair et $c_n(f) = \dfrac{2}{in\pi}$ pour n impair.

Le développement en série de Fourier de f est

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{i\,(2n+1)\,\pi} e^{i(2n+1)x}.$$

Maintenant, on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème 2.4.4 *La suite $(e_n)_n \in \mathbb{Z}$ étant une base hilbertienne de l'espace H, on a alors le développement :*

$$\forall f \in H, f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$$

La série de Fourier d'une fonction f de H converge pour la topologie de H et sa somme est égale à f ,i.e.,

$$\lim_{n \to \infty} \left\| f - \sum_{|i| \leq n} c_i(f) e_i \right\| = 0 \ avec \ c_i(f) = \langle f, e_i \rangle .$$

De plus, pour deux fonctions f et g dans H, on a les formules

i) Inégalité de Bessel : pour tout $J \subset \mathbb{Z}$

$$\sum_{n \in J} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2 .$$

ii) Identité de Plancherel :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

iii) Identité de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)c_n(g).$$

Dans le cas de fonctions réelles, on note les coefficients de Fourier par $a_n(f)$ et $b_n(f)$, où

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,\ n\in\mathbb{Z}^* \\ b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx,\ n\in\mathbb{Z}^* \end{aligned}$$

Des relations précédentes, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2] \\ \langle f, g\rangle &= a_0(f)a_0(g) + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}[a_n(f)a_n(g) + b_n(f)b_n(g)]. \end{aligned}$$

Le corollaire suivant est une conséquence du théorème précédent.

Corollaire 2.4.1 *Soit f un élément de H. Dans l'ensemble des polynômes trigonométriques P de degré inférieur ou égal à n, le polynôme de Fourier $S_n f = \sum_{|i|\leq n} c_i(f)e_i$ réalise le minimum de$\|f-P\|_2$, et il est l'unique à avoir cette propriété.*

Remarque 2.4.2 *On peut généraliser le résultat suivant pour $f \in L^p([0,2\pi],\mathbb{C}), 1 < p < +\infty$: la série de Fourier d'une fonction $f \in L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$ converge et a pour somme $f(x)$ pour presque tout $x \in [0,2\pi]$. On note qu'il existe des fonctionsf intégrables sur $[0,2\pi]$ dont la série de Fourier diverge.*

Chapitre 3

Applications

Les appliction des opérateurs sont tré nombreuses et ont recherché plusieurs domaines, tel que les différent disciplines mathématiques et physique. Dans ce chapitre, nous allons proposer deux éxemple d'application des opérateurs, du premier sur l'équation différentielle et la duxième sur opérateurs de Hilbert-Schmidt.

3.1 Résolution d'une équation différentielle

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \begin{cases} u'' = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Lorsque f est continue sur $[a, b]$, cette équation peut se résoudre explicitement. En effet, en intégrant une premiére fois, il vient, pour une constante C à déterminer

$$u'(t) = \int_a^t f(s)ds - C. \tag{3.1}$$

puis, en intégrant une deuxiéme fois, sachant que l'on veut que $u(a) = 0$,

$$u(x) = \int_a^x \int_a^t f(s)dsdt - C(x - a).$$

La deuxième condition $u(b) = 0$ permet de déterminer C de manière unique. On obtient finalement :

$$u(x) = \int_a^x \int_a^t f(s)dsdt - \frac{x-a}{b-a} - \int_a^b \int_a^b f(s)dsdt. \tag{3.2}$$

On s'intéresse maintenant à l'opérateur T qui à f associe u. On munit $C([a,b];\mathbb{R})$ de la norme associée au produit scalaire

$$\langle g, h \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)h(x)dx.$$

Avec ce choix de norme, on a clairement, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans la formule 3.2, il est alors facile d'établir que T est borné de $C([a,b];\mathbb{R})$ dans $L^2 \overset{déf}{=} L^2([a,b];\mathbb{R})$ les deux espaces étant munis de la norme définie ci-dessus. Par densité de $C([a,b];\mathbb{R})$ dans L^2, on peut donc prolonger T en un opérateur borné de L^2 dans L^2. On note encore T le prolongement obtenu. Montrons que T est compact.

Soit B la boule unité de L^2 et $f \in B$. En utilisant l'égalité 3.1 et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on constate que u' est continue. Donc u' est C^1 sur $[a,b]$. De plus, toujours à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on montre l'existence d'un réel positif M indépendant de $f \in \overline{B}$ tel que

$$\| T(f) \|_{L^2} + \| (T(f))' \|_{L^2} \leq M.$$

En conséquence,

$$T(\overline{B}) \subset \left\{ g \in C1([a,b];\mathbb{R}) / \| g \|_{L^2}^2 + \| g' \|_{L^2}^2 \leq M \right\}$$

on a l'ensemble de droite est relativement compact dans $C([a,b];\mathbb{R})$ et donc a fortiori dans L^2. Donc Test bien un opérateur compact.

Vérifions ensuite que T est auto-adjoint.

En intégrant par parties deux fois et en utilisant (E), on a pour tout couple de fonctions f et g continues sur $[a,b]$,

$$
\begin{aligned}
(T(f)|g) &= \int_a^b T(f)(x)g(x)dx, \\
&= \int_a^b T(f)(x)(T(g))''(x)dx, \\
&= -\int_a^b (T(f))'(x)(T(g))'(x)dx, \\
&= \int_a^b (T(f))''(x)T(g)(x)dx, \\
&= (f|T(g)).
\end{aligned}
$$

Par densité de $C([a,b];\mathbb{R})$ dans L^2, l'égalité demeure vraie pour tout $(f,g) \in L^2 \times L^2$. Donc T est auto-adjoint. Remarquons aussi au passage que la troisième égalité ci-dessus appliquée avec $g = f$ montre que T est négatif. De plus, à l'aide de la formule 3.2, il n'est pas difficile de montrer que $KerT = \{0\}$. Donc toutes les valeurs propres de T sont strictement négatives. Le théorème spectral assure donc qu'il existe une base hilbertienne de L^2 constituée de vecteurs propres pour T. Comme les valeurs propres sont strictement négatives, on peut les chercher sous la forme $\lambda = -\alpha^{-2}$ avec $\alpha > 0$. Soit donc f un vecteur propre associé à une telle valeur propre. Comme $T(f) = \lambda f$ et $T(f)$ est de classe C^1, il en est de meme pour f. En conséquence f vérifie l'équation différentielle

$$
(F) : \begin{cases} f'' + \alpha^2 f = 0, \\ f(a) = f(b) = 0. \end{cases}
$$

Il s'agit maintenant de déterminer pour quelles valeurs de α le système (F) admet une solution non triviale.

La solution générale de $f'' + \alpha^2 f = 0$ s'écrit :

$$
f(t) = Csin(\alpha t + \phi) \text{ avec } (C,\phi) \in \mathbb{R}^2.
$$

Pour $C \neq 0$, les conditions$f(a) = f(b) = 0$ sont assurées si et seulement si $\alpha a + \phi \equiv 0[\pi]$ et

$\alpha b + \phi \equiv 0[\pi]$.

On en déduit que $\alpha = k\omega/2$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $\phi = -ak\omega/2$. Comme d'habitude, on a posé $\omega = 2\pi/(b-a)$. Enfin, on choisit $C = \sqrt{2}$ afin d'avoir $\| f \|_{L^2} = 1$. Nous pouvons résumer les résultats obtenus ainsi :

Proposition 3.1.1 *L'opérateur T defini ci-dessus est compact, auto-adjoint, et défini négatif. La suite des valeurs propres $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et la base hilbertienne correspondante $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont*

$$\lambda_k = -\frac{4}{\omega^2 k^2} \text{ et } f_k(t) = \sqrt{2}\sin(\frac{k\omega(t-a)}{2}).$$

3.2 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Notons I l'intervalle $[a,b]$ et Q le carré $[a,b]\times[a,b]$. Notons $L^2(I) = L^2(I;\mathbb{R})$ et $L^2(Q) = L^2(Q;\mathbb{R})$. On munit $L^2(I)$ du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{L^2(I)} = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

et $L^2(Q)$ du produit scalaire

$$\langle F, G\rangle_{L^2(Q)} = \int_a^b\int_a^b F(x,y)G(x,y)dxdy.$$

on définit (formellement)

$$Tu(x) = \int_a^b K(x,y)u(y)dy. \text{ la fonction fixé } K \in L^2(Q) \text{ et } u \in C([a,b];\mathbb{R})$$

Si K et u sont continues, cette expression définit une fonction continue. Vérifions que sous nos hypothèses, l'opérateur T est continu de $L^2(I)$ dans $L^2(I)$. Tout d'abord, on peut vérifier à l'aide du théorème de Fubini et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que la fonction $(x,y) \to K(x,y)u(y)$ est intégrable sur Q. Donc Tu est une fonction mesurable. Ensuite, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\int_a^b \mid \int_a^b K(x,y) \mid^2 u(y)dy \leq \int_a^b (\int_a^b K^2(x,y)dy)(\int_a^b u^2(y)dy)dx = \parallel K \parallel_{L^2(Q)} \parallel u \parallel_{L^2(I)} .$$

Donc T est un opérateur borné de $L^2(I)$ dans $L^2(I)$, et $\parallel T \parallel_{\mathcal{L}(L^2(I))} \leq \parallel K \parallel_{L^2(Q)}$.

Nous allons maintenant montrer que T est compact. Pour cela, nous allons écrire T comme limite d'une suite d'opérateurs de rang fini à l'aide d'une base hilbertienne $(e_k)_{k\in N}$ de $L^2(I)$.

Nous aurons besoin du résultat suivant :

Lemme 3.2.1 *La famille tensorisée $(e_j \otimes e_k)_{k\in N}$ définie sur Q par*

$$(e_j \otimes e_k)(x,y) = e_j(x)e_k(y).$$

Lemme 3.2.2 *est une base hilbertienne de $L^2(Q)$.*

Preuve. *: Un calcul immédiat montre que $(e_j \otimes e_k)_{k\in N}$ est orthonormale. Il s'agit maintenant de démontrer que cette famille est totale, et pour cela il suffit d'établir que le seul élément F de $L^2(Q)$ orthogonal à tous les $(e_j \otimes e_k)_{k\in N}$ est 0. Supposons donc que*

Preuve.

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \int_a^b \int_a^b F(x,y)e_j(x)e_k(y)dxdy = 0 \tag{3.3}$$

Considérons deux fonctions f et g continues sur I.

Soit $f \otimes g : (x,y) \to f(x)g(y)$. Comme$(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$est une base hilbertienne de $L^2(I)$, on peut écrire

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle f, e_j \rangle_{L^2(I)} e_j \text{ et } g = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle g, e_k \rangle_{L^2(I)} e_k$$

où les égalités doivent être comprises au sens de la norme de $L^2(I)$.

Il est alors facile de vérifier que, au sens de la norme de $L^2(Q)$,

$$f \otimes g = \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} (f|e_j)_{L^2(I)}(g|e_k)_{L^2(I)} e_j \otimes e_k.$$

Comme le produit scalaire dans $L^2(Q)$ est continu par rapport à ses deux arguments, l'identitè 3.3 *combinée au résultat de convergence ci-dessus permet de conclure que*

$$\int_a^b \int_a^b F(x,y)f(x)g(y)dxdy = 0. \tag{3.4}$$

D'autre part, le s.e.v. $\mathcal{F}$ *engendré par l'ensemble des fonctions de type* $(x,y) \to f(x)g(y)$ *avec* f *et* g *continues sur* I *est stable par combinaison linéaire, multiplication, contient les fonctions constantes et sépare les points. Comme* Q *est un espace métrique compact, le théorème de Stone-Weirstrass assure la densité de* $\mathcal{F}$ *dans* $C(Q;\mathbb{R})$ *au sens de la norme* $L^\infty(Q)$ *et donc, a fortiori, au sens de la norme. Mais comme* $C(Q;\mathbb{R})$ *est dense dans* $L^2(Q;R)$ *(d´emonstration similaire à celle de la densité de* $C(I;\mathbb{R})$ *dans* $L^2(I;\mathbb{R})$*), on en déduit que* $\mathcal{F}$ *est également dense dans* $L^2(Q)$*.*

Soit $\varepsilon > 0$ *et* $G \in \mathcal{F}$ *tel que* $\|F - G\|_{L^2(Q)} \leq \varepsilon$*. écrivons que*

$$\|F\|^2_{L^2(Q)} = \langle F, F-G\rangle_{L^2(Q)} + \langle F, G\rangle_{L^2(Q)} .$$

Comme G *est combinaison linéaire de fonctions du type* $f \otimes g$ *avec* f *et* g *continues sur* I*, l'égalité 3.4 assure que le dernir terme ci-dessus est nul. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans* $L^2(Q)$ *afin de majorer le premier terme du membre de droite, on conclut que*$\|F\|_{L^2(Q)} \leq \varepsilon$*. Comme notre raisonnement est valable pour tout* $\varepsilon > 0$*, on conclut que* $F = 0$*. Donc* $(e_j \otimes e_k)_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}$ *est totale.* ■

■

Grace à ce lemme, en vertu de l'égalité de Parseval dans $L^2(I)$ puis dans $L^2(Q)$, on peut donc écrire que

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{N}} \|T(e_j)\|^2_{L^2(I)} &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle T(e_j), e_k\rangle_{L^2(I)}|^2, \\
&= \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} \left| \int_a^b \int_a^b K(x,y)e_j(y)e_k(x)dxdy \right|^2, \\
&= \|K\|^2_{L^2(Q)}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

En observant que tout $f \in L^2(I)$ se décompose en

$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle f, e_j \rangle_{L^2(I)} e_j,$$

il vient, par continuité de T,

$$T(f) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle f, e_j \rangle_{L^2(I)} T(e_j).$$

Il est donc naturel de poser

$$\forall f \in L^2(I), T_n(f) = \sum_{j<n} \langle f, e_j \rangle_{L^2(I)} T(e_j).$$

L'opérateur T_n obtenu est clairement borné sur $L^2(I)$ et de rang fini. Par ailleurs

$$\forall f \in L^2(I), (T - T_n)(f) = \sum_{j \geq n} \langle f, e_j \rangle_{L^2(I)} T(e_j)$$

Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans ℓ^2 et l'égalité de Parseval,

$$\begin{aligned} \|(T - T_n)(f)\|_{L^2(I)}^2 &\leq \left(\sum_{j \geq n} |\langle f, e_j \rangle_{L^2(I)}| \, \|T(e_j)\|_{L^2(I)} \right)^2, \\ &\leq \sum_{j \geq n} |\langle f, e_j \rangle_{L^2(I)}|^2 \sum_{j \geq n} \|T(e_j)\|_{L^2(I)}^2, \\ &\leq \|f\|_{L^2(I)}^2 \sum_{j \geq n} \|T(e_j)\|_{L^2(I)}^2. \end{aligned}$$

La somme de la dernière ligne est le reste d'une série convergente donc tend vers 0 quand n tend vers l'infini. En conséquence, $T_n \to T$ dans $\mathcal{L}(L^2(I))$ ce qui assure que T est compact. Supposons de plus que la fonction K soit symétrique :

$$K(x, y) = K(y, x) \textit{ pour presque tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

et vérifions que T est alors auto-adjoint. Pour $(f, g) \in L^2(I) \times L^2(I)$, le théorème de Fubini, le changement de variables $(x, y) \to (y, x)$ et le fait que $K(x, y) = K(y, x)$ permettent d'écrire que

$$
\begin{aligned}
\langle Tf, g\rangle_{L^2(I)} &= \int_a^b \int_a^b K(x,y)f(y)g(x)dydx, \\
&= \int_a^b \int_a^b K(y,x)f(x)g(y)dxdy, \\
&= \int_a^b \int_a^b K(x,y)g(y)f(x)dxdy, \\
&= \langle f, Tg\rangle_{L^2(I)} .
\end{aligned}
$$

Donc T est bien auto-adjoint.

Résumons le résultat obtenu.

Proposition 3.2.1 . *Soit $K \in L^2(Q)$ tel que$K(x,y) = K(y,x)$. L'opérateur de Hilbert-Schmidt T défini de $L^2(I)$ dans $L^2(I)$ par*

$$
Tf(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy
$$

est compact auto-adjoint et admet donc une base hilbertienne de vecteurs propres.

Remarque 3.2.1 *Si l'on choisit pour $(f_j)_{j\in N}$ la base hilbertienne associée à la suite de valeurs propres $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de T, on obtient, grace à 3.5,*

$$
\begin{aligned}
\|K\|^2_{L^2(I)} &= \sum_j \|T(f_j)\|^2_{L^2(I)} , \\
&= \sum_{j\in N} \lambda_j^2.
\end{aligned}
$$

Conclusion

En conclusion, que L'étude des opérateurs linéaires occupe une partie importante en analyse fonctionnelle spisifiquemet hilbertienne. Dans ce travail, nous donne les propriétés générales des opérateurs linéaires dans un espace normée :spectre, adjoint, opérateurs auto-adjoints, opérateurs de projection orthogonale,...,ect.

Parmi tous les opérateurs continus dans un espace de Hilbert, on distingue dans le deuxième chapitre une classe importante d'opérateurs, dont les propriétés sont les plus proches de celles des opérateurs linéaires dans un espace de dimension finie. C'est la classe des opérateurs compacts, appelés encore opérateurs complètement continus.Dans ce chapitre, on vu que lorsque l'opérateur compact est en plus auto-adjoint (non nul), son spectre ne peut être réduit à 0 et qu'un tel opérateur est diagonalisable.

En fin, on prend deux exemples comme une applications d'opérateur compat qui sont l'opérateur de Hilbert-schmidt, et la deuxième exemple est résolution d'une équation différentielle.

Bibliographie

[1] J.P Aubin. Analyse fonctionnelle appliquée, Tome 2, Presses universitaire de France, 1987.

[2] F. Bayen, C. Margaria. Espace de Hilbert et opérateurs problémes de mathématiques appliquées. Tome 2, Ellipses, 1986.

[3] H.Brézis, Analyse fonctionnelle théorie et appliquation, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, Paris, 1983.

[4] J. Charles, M. Mbekhta, H. Queffélec, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs,Dunod, Paris, 2010

[5] E. Fricain, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs : cours et exercices (Master en Mathématiques pures), 2009-2010.

[6] .F.Hirsch, G.Lacombe, Elements d'analyse fonctionnelle, Coures et éxercices avec réponses.Masson, Paris, 1997 pour la première édition, Dunod, Paris, 1999, pour la nouvelle présentation.

[7] chebli Houcine, Analyse Hilbertienne. Centre de Publication Universitaire Tunis, 2001.

[8] A. Kolmogorov, S. Fomine, Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Mir Moscou, 1977.

[9] .V. Trénoguine, B. Pissarevski, T. Soboléva, Problèmes et exercices d'analyse fonctionnelle, Mir Moscou, 1987.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\langle .,. \rangle$	:	Produit scalaire.
$\mathcal{L}(E,F)$	:	L'éspace vectoriels des aplications linéaires continues.
$E^{'}$	:	L'éspace dual de E
$\sigma(T)$	:	Spectre de T
$r(T)$	:	Le ryon spectral de T.
$\sigma_p(T)$	:	Spectre ponctuel de T.
$\sigma_c(T)$	:	Spectre continu de T
$R_\lambda(T)$	:	La résolvante de T.
$K(E,F)$	:	L'ensemble des opérateurs compacts.
$Ind(T)$	:	L'ndice de T.