République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

BEN DAHMANE Raouia

Titre :

Stabilité Structurelle

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**LAADJAL Baya**	UMKB	Encadreur
Dr.	**ZERROUG Abdelhamid**	UMKB	Président
Dr.	**ADOUANE Saida**	UMKB	Examinateur

Juin 2019.

Dédicace

La vie loin des siens est pénible quel que soit l'âge et le degré de maturrité . Mais ce poids constitue une force dans l'ardeur au travail lorsqu'on regarde vers les retrouvailles"

Je dédie ce mémoire

A mon père : Salim

Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tuas consentis pour mon éducation et ma formation.

A ma trés chère mère : Zakia

Tu es l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi

A mes frères et soeur :

Khanssa, Med Charef Edin, Ikram, Lina

Je vous remercie de votre patience vous m'a aidée toujours à avancer vous êtes tous des grandes amies si gentilles, merci d'être toujours près de moi.

REMERCIEMENTS

En terminant mom mémoire de fin d'études, je remercie bien $\mathcal{ALLAH}$ *qui ma donné la force suffisante et la volonté pour faire ce travail.*

Un remerciement tout spécial à mon encadreur : LAADJAL Baya pour le suivi et l'aide qu'elle m'a apporté pour l'élaboration de ce mémoire.

Je tien aussi d'adresser mes vifs remerciements à l'ensemble des enseigmants de département de mathématique qui nous ont dirigé durant durant ces cinq années.

A la fin, je tien à remercier tous mes collégues d'études, particuliérement notre promotion.

Merci...

Table des matières

Table des figures

Introduction générale

“ *le savant n’étudie pas la nature parce que cela est utile, il l’étudie parce qu’il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu’elle est belle. Si la nature n’était pas belle, elle ne voudrait pas la peine d’être connue, la vie ne vaudrait pas la peine d’être vécue...*”

H. Poincaré_ Science et Méthode _

On dit que la trajectoire d’un point mobile est stable, lorsque, décrivant autour d’un point de départ un cercle ou une sphére de rayon r, le point mobile, après être sorti de ce cercle ou de cette sphére, y rentrera une infinité de fois, et cela, quelque petit que soit r.Elle sera instable si, aprés être sorti de ce cercle ou de cette sphére, le point mobile n’y rentre plus.

La notion de stabilité structurelle a été dégagée des études sur les systèmes différentieles non linéaires commencées aux environs de 1880 par **Henri Poincaré,** reprises vers 1920 par **Van Der Pol.** Pour les système linéaire, une théorie générale était possible, il n’en n’était plus ainsi pour les systémes non linéaires. Aussi s’est-on proposé le problème suivant : dégager une classe aussi large que possible de système non linéaire considérés comme intéressants pour laquelle une théorie générale est possible et justifier l’application de la théorie qualitative des systèmes dynamiques à l’analyse de systèmes physiques concrets. L’idée d’une telle analyse qualitative remonte au travaux **d’Andronov-Pontrjagin...** a étudié de manière rigoureuse la stabilité de petites perturbations d’un système donné

Dans ce mémoire nous donnons un concept simple et direct sur stabilité structurelle, c’est trouver des critères simples permettant de caractériser les systèmes structurellement stables en deux dimension.

Ce travail se compose de deux chapitres :

Chapitre 1 : Généralité sur les systèmes dynamiques

Dans ce chapitre on présente d'abord une introduction de système dynamique, en suite on propose les différents type d'attracteurs, et on termine par la notion de stabilité.

Chapitre 2 : Stabilité structurelle

Dans ce chapitre on présente d'abord, quelques définitions, en suite on propose stabilité structurelle dans $\mathbb{R}^2$, enfin des conditions nécessaires de stabilité structurelle.

Chapitre 1

Généralité sur les systèmes dynamiques

Dans ce chapitre, nous intéressons à la définition de système dynamique dans deux types (à temps continue et à temps discret). un système dynamique **autonome** et **non-autonome**, ainsi que la définition d'un attracteur et stabilite au seus de **Lyapunov**, stabilite au seus de **Poincaré** .

1.1 Définition du système dynamique

La notion de système dynamique est la formalisation mathématique du concept scientifique général d'un processus déterministe. On peut prédire dans une certaine mesure les états futurs et passés de nombreux systèmes physiques, chimiques, biologiques, écologiques, économiques, voire sociaux, en connaissant leur état actuel et les lois qui régissent leur évolution. La notion du système dynamique inclut un ensemble de ses états possibles (espace d'états) et une loi de l'évolution de l'état dans le temps. Discutons ces ingrédients séparément et donnons ensuite une définition formelle d'un système dynamique.

1. **Espace d'état :** Tous les états possibles d'un système sont caractérisés par les points de certains ensembles X. Cet ensemble s'appelle l'espace d'état du système. En réalité, la spécification d'un point $x \in U$ doit être suffisante non seulement pour décrire la

«position» actuelle du système, mais également pour déterminer son évolution.

2. **L'espace du temps :** L'évolution d'un système dynamique signifie un changement d'état du système avec le temps $t \in I$, où I est un ensemble de nombres. Nous considérerons deux types de systèmes dynamiques : ceux à temps continu (réel) $I = \mathbb{R}$ et ceux à temps discret (entier) $I = \mathbb{Z}$. Les systèmes du premier type sont appelés systèmes dynamiques à temps continu, alors que ceux du second type sont appelés systèmes dynamiques à temps discret.

3. **L'opérateur d'évolution :** Le composant principal d'un système dynamique est une loi d'évolution qui détermine l'état $x(t)$ du système à l'instant t, à condition que l'état initial x_0 soit connu. La manière la plus générale de spécifier l'évolution consiste à définir pour tout $t \in I$, l'application ϕ^t dans l'espace d'états U par:

$$\begin{array}{rccc} \phi^t: & U & \longrightarrow & U \\ & x_0 & \longrightarrow & \phi^t x_0 = x(t). \end{array}$$

   où $x_0 \in U$ est l'état initial.

   L'opérateur d'évolution ϕ^t a deux propriétés naturelles qui expliquent le caractère déterministe du comportement des systèmes dynamiques.

   (i) $\phi^0 = id.$

   (ii) $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s.$

Nous pouvons maintenant donner une définition formelle d'un système dynamique.

Définition 1.1 *Un système dynamique est un triple* $\{I, U, \phi^t\}$*, où* I *est un ensemble de temps,* U *est un espace d'état et* $\phi^t : U \to U$ *est une famille d'opérateurs d'évolution paramétrés par* $t \in I$ *et satisfaisant les propriétés* (i) *et* (ii)*.*

1.2 Système dynamique à temps continue

Dans le cas général un système dynamique en temps continue peut être représenté par une équation différentielle.

Définition 1.2 *Une équation différentielle ordinaire de premier ordre en* $\mathbb{R}^n$ *est une expression de la forme :*

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t, x), \tag{1.1}$$

òu f *est une fonction d'un ensemble ouvert* $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *à* $\mathbb{R}^n$ *(l'espace euclidien à* $n+1$ *dimensions) lorsque le champ de vecteurs* f *dépend explicitement de* t*, l'équation (1.1) est appelée* ***non-autonome*** *ou* ***dépendante du temps****. Si* f *est indépendant de* t*, on l'appelle* ***autonome*** *ou* ***indépendant du temps****.*

Définition 1.3 *(**L'espace d'états**)*

L'ensemble ouvert U *ou évolue l'état* x *s'appelle l'espace des états (ou espace des phases) du système.*

Définition 1.4 *Une solution à (1.1) est une fonction différentiable* $x(t)$ *d'un intervalle réel* $I \subset \mathbb{R}^n$ *tel que :*

$$\{(t, x(t)) : t \in I\} \subseteq D \quad et \quad x'(t) = f(t, x(t)) \quad pour\ t \in I, x \in U.$$

Définition 1.5 *(**Orbite où trajectoire**)*

Pour tout point x *de* U*, on définie l'ensemble*

$$\Omega(x) = \{x\,(t)\,, t \in I\}\,.$$

L'ensemble $\Omega(x)$ *s'appele une orbite du système dynamique qui est un sous-ensemble de l'espace des phases.*

Définition 1.6 *(**Portrait de phase**)*

Le portrait de phase est l'ensemble des orbites qui représentent les solutions du système (1.1) dans l'espace de phase.

Définition 1.7 *(**Solution stationnaire**)*

Toute solution x_p *vérifant la relation* $f(x_p) = 0$*, est appelée solution stationnaire (point singulier, ou encore d'équilibre).*

Exemple 1.1 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x - y \end{cases}$$

$(0,0)$ *et* $(\pi, 0)$ *sont des solutions stationnaire.*

Définition 1.8 ***(Solution périodique)***

Une solution $x(t)$ d'un système dynamique autonome ou non-autonome est périodique s'il existe un entier T pour lequel :

$$\begin{cases} x(t+T) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \\ \qquad\qquad et \\ x(t+\overline{T}) \neq x(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leq \overline{T} \leq T. \end{cases}$$

où T est la période de la solution.
Les orbites des solutions périodiques d'un système dynamique autonome sont représenter dans l'espace d'état des courbes fermées.

Définition 1.9 ***(Cycle limite)***
C'est une solution périodique isolée c-à-d qu'aucune trajectoire suffisamment proche d'elle, ne soit également fermée.

Définition 1.10 (Probléme de Cauchy) *:*
Le problème de trouver une solution du système (1.1) satisfaisant à la condition initiale $x(t_0) = x_0$ est appelè problème de Cauchy ***(P.C)*** *et l'on écrit*

$$(P.C) : \begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Théorème 1.1 *(*Existence et Unicité)

Supposons que la fonction $f : U \to \mathbb{R}^n$ est continue et qu'elle est en x_0 localement Lipschitizienne pour le variable x, c-à-d il existe un voisinage $V \subset U$ de x_0 et une constante $K \geq 0$, tel que pour tout $x_1, x_2 \in U$ on a l'inégalité :

$$\parallel f(x_1) - f(x_2) \parallel \leq K \parallel x_1 - x_2 \parallel .$$

Alors, le probléme de Cauchy (P.C) admet une solution locale unique.

1.3 Système dynamique à temps discret

Dans le cas général, Un système dynamique discret est décrit par un système d'équation aux différences .

Définition 1.11 *Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble et $f : D \to D$ une fonction continue et dérivable. On appelle un système dynamique discret d'ordre 1 en dimension n, la suite récurrente suivante :*

$$\begin{cases} x_{k+1} &= f(x_k), k \in \mathbb{N}. \\ x(0) &= x_0. \end{cases}$$

Définition 1.12 ***(L'orbite)***

Etant donné le point initial x_0, on appelle orbite du système dynamique discret la suite

$$O(x_0) = \{x(0) = x_0, x(1) = f(x(0)), ..., x(k+1) = f(x(k)), ...\} .$$

Exemple 1.2 *Soit un système dynamique discret en dimension 1 définie par la fonction $f(x) = x^3$, sur l'intervalle $[0, +\infty[$.*

Prenons pour condition initiale $x(0) = \frac{1}{2}$, alors l'orbite correspondent est :

$$O(x_0) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{512} ...... \right\}$$

Prenons un autre point initial, $x(0) = 1$.

Donc

$$O(x_0) = \{1, 1........., x(n) = 1^{3n} = 1, ...\}$$

Remarque 1.1 *Dans ce mémoire on s'intéresse aux systèmes dynamiques à temps continus.*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

1.4 Attracteur

Définition 1.13 ***(Le flot)***

Le flot du système dynamique est la famille à un paramétre d'application $\{\phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de U dans lui même définies par :

$$\phi^t(x_0) = x(t, x_0),\ x_0 \in U.$$

où $x(t, x_0)$ est l'unique solution du probléme de Cauchy.

Nous notons que (dans son domaine de définition) ϕ^t satisfait les propriétés :

$$\begin{cases} (i) & : & \phi_0 & = & id. \\ (ii) & : & \phi^{t+s} & = & \phi^t \circ \phi^s. \\ (iii) & : & \phi(x_0, 0) & = & x_0 \text{ tel que } x_0 \in U. \end{cases}$$

La solution d'équation différentielle vérifie les condition du système dynamique. Alors on peut dire que l'équation (1.1) engendre un système dynamique.

Définition 1.14 ***(Ensemble invariant)***

Soit A un sous-ensemble de l'espace des phases U, A est dit invariant par un flot ϕ^t, si pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\phi^t(A)$ est inclus dans A.

Définition 1.15 ***(Ensemble non-errant** "Ω")*

*On considére un champ de vecteurs de classe C^1 dont on note ϕ^t le flot à l'instant t. Un point x de l'espace des phases est dit **non errant** si pour tout voisinage U de x et toute valeur*

$T > 0$, il existe $t > T$ tel que :

$$\phi^t(U) \cap U \neq \varnothing.$$

Définition 1.16 ***(Attracteur)***

Un attracteur est un ensemble compact de l'espace des phases, inveriant par le flot qui ***"attire"*** *toutes les autres orbites vers elle.*

Il existe deux type d'attracteurs :

1. Les attracteurs régulieres : qui caractérisent l'évolution du système (1.1) comme les poins singuliers et les cycles limites.
2. Les attracteurs étranges (ou chaotiques) est une forme géométrique plus complexe qui caractérise l'évolution des systémes dynamiques chaotiques.

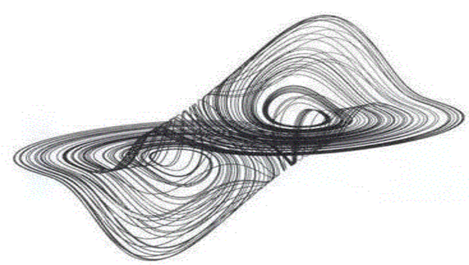

FIG. 1.1 – Chaotique

1.5 Notions de stabilité

Il existe plusieurs théories de stabilité pour les solutions des systèmes dynamiques. Elles traitent toutes de la question du comportement des solutions lorsque tend vers l'infinie. L'étude de stabilité des points singuliers et des solutions périodiques est décrit dans les deux sens de stabilité : au sens de Lyapunov et au sens de Poincaré.

1.5.1 Stabilité au sens de Lyapunov :

Dans les applications on s'intéresse souvent à la question de savoir si les solutions qui commencent à $t = t_0$ dans un voisinage d'un telle solution spéciale resteront dans ce voisinage pour $t > t_0$. Si tel est le cas, la solution spéciale est dite stable et on s'attend à ce que cette solution puisse être réalisée dans la pratique du champ d'application (une petite perturbation n'entraîne pas l'éloigement des solutions de cette solution particulière).

Définition 1.17 *On considére le système dynamique qui admet $y(t)$ comme solution.*

1. *La solution $y(t)$ est dit* ***stable*** *si :*

$$\forall \rho > 0, \exists r(\rho) > 0 \text{ tel que : } \| x_0 - y_0 \| < r \Rightarrow \| x(t) - y(t) \| < \rho, \quad \forall t \geq 0.$$

2. *La solution $y(t)$ est* ***asymptotiquement stable*** *s'il stable et s'il existe $r > 0$ tel que :*

$$\forall x_0 \in B(x_0, r), \lim_{t \to +\infty} x(t) = y(t).$$

3. *La solution $y(t)$ est* ***instable*** *si elle n'est pas stable.*

Pour étudie la stabilité de point singulier on a les deux méthode suivante :

1-Méthode indirecte (linéarisation) :

Cette méthode peut être utiliser pour étudier la stablilite du point singulier hyperbolique.

Définition 1.18 (Linéarisation des systèmes dynamiques) *:*

Considérons ***le système dynamique non linéaire*** *défini par :*

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{où} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ f_n \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

et soit x_p un point singulier de ce système, alors le système $\dot{y} = Ay$ òu A est la matrice

Jacobienne *de la fonction f définit par :*

$$A = J_f(x_p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_p}$$

S'appelle le système linéarisé associé du système (1.2).

Définition 1.19 *Un point singulier est dit* ***hyperbolique*** *si toutes les valeurs propres λ_i de la matrice Jacobienne n'ont pas de partie réelle nulle ($\forall i = 1, 2, .., n/ \operatorname{Re}(\lambda_i) \neq 0$).*
Si l'une des valeurs propres à une partie réelle nulle, le point singulier est dit ***non-hyperbolique*** *($\exists i/ \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$).*

Théorème 1.2 *Soit le système dynamique autonome $\dot{x} = f(x)$, et x_p est un point singulier hyperbolique.*

1. *On dit que le point singulier x_p est asymptotique stable si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont à partie réelle négative.*
2. *On dit que le point singulier x_p est instable s'il existe une valeur propre à partie réelle positive.*

2- Méthode directe (fonction Lyapunov) :

Cette peut être utiliser pour étudier la stablilite du point singulier non-hyperbolique et elle est basée sur la définition d'une fonction particuliére, notée $V(x)$ est appelée **fonction de Lyapunov**.

Théorème 1.3 *Soit $x_p = 0$ un point singulier du système (1.2), s'il existe un voisinage D de 0 et une fonction $V : D \to \mathbb{R}$, continue ayant des dérivée partielles continues, telle que*
(i) V soit définie ***positive*** *c-à-d :$\{V(x) > 0\ , \forall x \neq 0$ et $V(x) = 0,\ x = 0\}$.*
(ii) la dérivée totale $\dot{V}$ soit ***négative*** *c-à-d : $\{\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \neq 0$ et $\dot{V}(x) = 0, x = 0\ \}$.*
Alors x_p est ***stable****.*

Définition 1.20 ***(Fonction Lyapunov)***

Une fonction $V : D \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 qui possède les conditions du théorème précident s'appelle la fonction de ***Lyapunov.***

Exemple 1.3 *On considére l'e systèmes différentiel suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - x_2^2. \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 - x_2^2 \end{cases}$$

Pour déterminer la stabilité de l'équilibre $(0,0)$, *posons*

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{1}{2} y_2^2 > 0.$$

On a V *défini positive c-à-d*

$$\begin{cases} V(0) = 0. \\ V(y_1, y_2) > 0, \forall (y_1, y_2) \neq (0,0). \end{cases}$$

La dérivée de V *pour le système vaut :*

$$\begin{aligned} \dot{V}(y_1, y_2) &= y_1(-y_1^3 - y_2^2) + y_2(y_1 y_2 - y_2^3) \\ &= -(y_1^4 + y_2^4). \end{aligned}$$

$\dot{V}$ *est clairement définie négative.*

D'aprés le théorème précident, on déduit que le point $(0,0)$ *est stable.*

Remarque 1.2 *La première méthode de Lyapunov est simple à appliquer mais ne permet d'analyser la stabilité des équilibres que très partiellement. La seconde méthode est plus difficile à mettre en œuvre mais, en contrepartie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée* $V(x)$ *est appelée fonction de Lyapunov.*

1.5.2 Stabilité au sens de Poincaré :

La section de Poincaré est un outil très fréquemment utilisé pour étudier les systèmes dynamiques et notamment les trajectoires périodiques (cycles limites).

Définition 1.21 *Soit $x(t)$ une solution du système dynamique définie par $x(t_0) = x_0$, et $y(t)$ est une solution périodique de cette système.*
*1/ La solution $y(t)$ est dite stable au sens de **Poincaré** si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \quad \| x(t_0) - y(t_0) \| \leq \delta \Rightarrow d(t) = \inf_{\tau \in [0,T]} \| x(t) - y(\tau) \| \leq \epsilon.$$

*2/ La solution $y(t)$ est dite asymptotiquement stable au sens de **Poincaré** si elle est stable et si de plus :*

$$\lim_{t \to +\infty} d(t) = 0.$$

3/ La solution $y(t)$ est dite instable si elle n'est pas stable.

Chapitre 2

Stabilité Structurelle

Dans ce chapitre nous allons étudier la stabilité structurelle des systèmes dynamiques. Nous commençons par introduire la notion de la conjugaison topologique entres deux systèmes, ensuite nous donnons des conditions nécessaire de la stabilité structurelle et enfin nous citons le théoréme d'**Andronov-Pontrjagin**.

2.1 Définitions

Définition 2.1 *(**Isomorphisme**)*

*Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. On dit que l'application $f : U \to V$ est un **isomorphisme** ssi **:***

- ▷ *f est bijective.*
- ▷ *f est linéaire.*

Définition 2.2 *(**Homéomorphisme**)*

*Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. On dit que l'application $f : U \to V$ est un **homéomorphisme** ssi :*

- ▷ *f est bijective.*
- ▷ *f est contine.*
- ▷ *L'application inverse f^{-1} est contine.*

Définition 2.3 *(**Difféomorphisme**)*

*Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. On dit que l'application $f : U \to V$ est un C^1-**difféomorphisme** ssi :*

▷ *f est bijective.*

▷ *f est de classe C^1.*

▷ *L'application inverse f^{-1} est de classe C^1.*

2.2 Relations d'équivalences

On se donne deux systèmes autonomes de $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) & (1) \\ \dot{y} = g(y) & (2) \end{cases}$$

Définition 2.4 *:*

• *On dit que (1) et (2) sont **équivalents** s'il existe une application $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ établit une correspondance entre les orbites de (1) et (2) si*

$$\forall t \in I, \forall x \in U,\ h(\phi^t(x)) = \psi^t(x).$$

telle que $\phi^t(x)$ est la solution de (1) et $\psi^t(x)$ est la solution de (2).

• *On dit que (1) et (2) sont **linéairement équivalents** s'il existe un **isomorphismes** $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui établit une correspondance entre les orbites de (1) et (2).*

• *On dit que (1) et (2) sont **différentiellement équivalents** s'il existe un **difféomorphismes** $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui établit une correspondance entre les orbites de (1) et (2).*

• *On dit que (1) et (2) sont **topologiquement équivalents** s'il existe un **homéomorphismes** $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui établit une correspondance entre les orbites de (1) et (2).*

Théorème 2.1 (Equivalence topologique)

On considére les systèmes linéaires

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ \dot{y} = By \end{cases}$$

de point d'équilibre hyperbolique, et soit ϕ^t *et* ψ^t *deux flots associé au matrice* A *et* B *successivement tel que* $\phi^t = e^{At}x_0$ *et* $\varphi^t = e^{Bt}y_0$*.On dit que les deux systèmes sont topologiquement équivalent si le numbre des valeurs propres positives de la matrice* A *égale au numbre des valeurs propres positives de la matrice* B *(resp les valeurs propres négatives).*

Théorème 2.2 ***(Hatmann-Grobman)***

Soit le système différentiel autonome :

$$\dot{x} = f(x).$$

et soit :

$$\dot{x} = J_f(x_p)x.$$

son système linéarisé au point singulier x_p*.*

Si $J_f(x_p)$ *admet des valeurs propres non nulles ou imaginaires pures, alors il existe un homéomorphisme qui transforme les orbites du flot non linéaire vers celles du flot linéaire dans certain voisinage* U *de* x_p*.*

Le théorème suivant affirme l'équivalence topologique entre un système non linéaire et le système linéaire associe au point singulier x_p.

2.3 Les variétés invariantes d'un point singulier

Soit le système dynamique non linéaire suivant :

$$\dot{x} = f(x).$$

et x_p un point singulier.

Et soit A la matrice jacobienne d'ordre n associé au système, d'aprés sa linéarisation au voisinage du point singulier

$$\dot{x} = Ax \ / \ A = Jf(x_p).$$

Supposons x_p est point singulier hyperbolique et possons :

- $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_s$ les valeurs propres de la matrice jacobienne A dont la partie réelle est négative.
- $i_1, i_2, ...i_u$ les valeurs propres de la matrice jacobienne A dont la partie réelle est positive.

Et soient :

- E^s le sous espace propre de dimension s engendré par $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_s\}$.
- E^u le sous espace propre de dimension u engendré par $\{i_1, i_2, ...i_u\}$.

Théorème 2.3 *L'espace $\mathbb{R}^n$ se d´ecompose en somme directe*

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u.$$

de sous-espaces invariants par le flot $t \to \exp(tA)$ du système linéaire.

Théorème 2.4 *Soit un champ de vecteurs f de classe C^1 de flot ϕ^t associé au système dynamique $\dot{x} = f(x)$. On suppose que x_p est un point fixe hyperbolique et donc que la jacobienne $A = Jf(x_p)$ admet*

- *k valeurs propres de partie réelle strictement négative $(\lambda_i)_{i=1}^k$.*
- *$n - k$ valeurs propres de partie réelle strictement positive $(\lambda_i)_{i=k+1}^n$.*

On note E^s et E^u les espaces stables et instables du système linéarisé $\dot{x} = Ax$.

Alors :

1/ *Il existe une variété différentiable W^s de dimension k, tangente à E^s, invariante par le flot ϕ_t et telle que :*

$$\forall x_0 \in W^s, \lim_{t \to +\infty} \phi^t(x_0) = x_p.$$

2/ *Il existe de même une variété différentiable W^u de dimension $n - k$, tangente à E^u,* *invariante par le flot ϕ_t et telle que :*

$$\forall x_0 \in W^u, \lim_{t \to +\infty} \phi^t(x_0) = x_p.$$

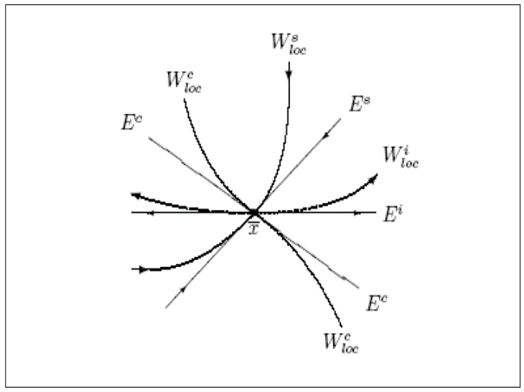

FIG. 2.1 – Représentation de la variété et sous-espace propre

2.3.1 Classification des points singuliers dans les système de $\mathbb{R}^2$

On considére le système de dimension deux

$$\dot{x} = f(x) \; ; x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2.$$

Soit λ_1 et λ_2 les valeurs propres de la matrice A, et soit v_1 et v_2 les vecteurs propres correspondant à λ_1 et λ_2 : toute solution est de la forme $x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + a_2 e^{\lambda_2 t} v_2$.

1^{er}**cas :** λ_1 et λ_2 réels.

(i) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$: toutes les solution tendent vers zéro quand t tend vers $+\infty, v_1$ et v_2 engendrent chacun un sous-espace stable. x_p s'appelle un nœud-stable encore appelé nœud attractif.

(ii) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$: toutes les solution s'éloignent vers l'infini quand t tend vers $+\infty, v_1$ et v_2 engendrent chacun un sous-espace instable. x_p s'appelle un nœud-instable encore appelé nœud répulsif.

(iii) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$: v_1 engendre un sous-espace instable. v_2 engendre un sous-espace stable. Seules les solution dont la valeur initiale est colinéaire à v_2 restent bornées. x_p s'appelle un col ou un point selle.

$2^{ème}$**cas :** $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.

Les vecteurs propres sont donc de la forme $v_1 = u + iw$ et $v_2 = u - iw$.les solutions réelles peuvent s'écrire : $x(t) = cte * e^{\alpha t}[\cos(\beta t + \phi)u - \sin(\beta t + \phi)w]$.

(i) $\alpha = 0$: les solutions sont toutes périodiques. x_p s'appelle un centre.

(ii) $\alpha < 0$: toutes les solutions tendent vers zéro quand t tend vers $+\infty$, x_p s'appelle un foyer ou point focal stable ou foyer attractif.

(iii) $\alpha > 0$: toutes les solutions tendent vers l'infini en module quand t tend vers $+\infty$, x_p s'appelle un foyer ou point focal instable ou foyer répulsif.

Pour les points singuliers non hyperboliques, il n'existe pas de résultats généraux de conjugaison topologique du flot avec le linéarisé. Ainsi la classification ne peut être entreprise à partir des valeurs propres de la jacobienne.

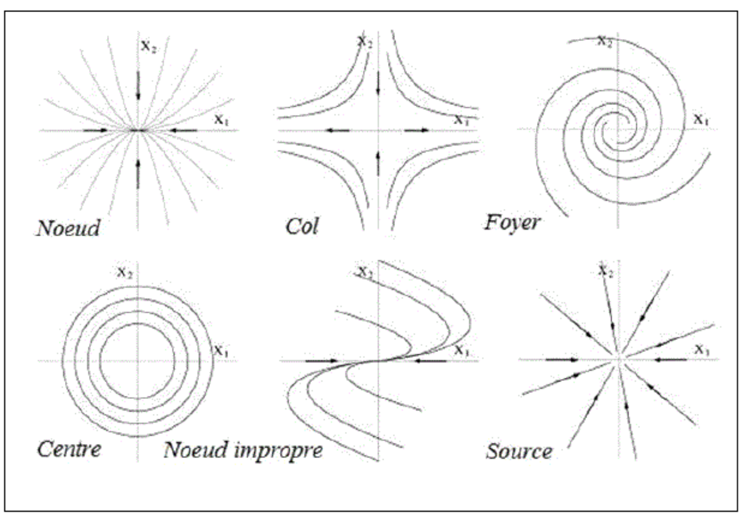

FIG. 2.2 – Classification des points singuliers

2.3.2 Point homoclines et hétéroclines

Dans certaniners conditions les variétés stable et instable d'un point singulier x_p pourant posséder des points d'intersection distincts de x_p. De même deux variétés instable de deux points singulier distincts x_{p_1} et x_{p_2} pourant se couper.

Définition 2.5 *:*

• *On appelle point* ***homocline*** *toute intersection* $W^s(x_p) \cap W^u(x_p)$ *distincte de* x_p.

• *On appelle point* ***hétérocline*** *toute intersection* $W^s(x_{p_1}) \cap W^u(x_{p_2})$ *(où* $W^u(x_{p_1}) \cap W^s(x_{p_2})$*)* x_{p_1} *et* x_{p_2} *étant deux points singulier distincts.*

Le caractére invariant par le flot des variétés invariantes stable et instable fait que :
des que l'on a un point homocline ou hétérocline ou en a une infinité.
Lorsque deus "arcs" de variétés invariantes de deux points singuliers (où W^s et W^u d'un même point singulier) seront confondus on parlera d'orbites hétéroclinique (où homoclinique) ou de comexion hétéroclinique (où homoclinique).

Définition 2.6 *:*

Une orbite ***homoclinique*** *est la trajectoire d'un écoulement d'un système dynamique qui relie un point d'équilibre de selle à lui-même.*

Définition 2.7 *:*

Une orbite ***hétéroclinique*** *est un chemin dans l'espace des phases qui relie deux points d'équilibre différents.*

Exemple 2.1 *Soit le système dynamique suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = y. \\ \dot{y} = -x + x^2. \end{cases}$$

Les points singuliers sont $P_1 = (0,0)$ *un centre et* $P_2 = (1,0)$ *une col.*

Intersection $W^s(x_{p_1}) \cap W^u(x_{p_2})$ *définit un orbite homoclinique ou connexion col.*

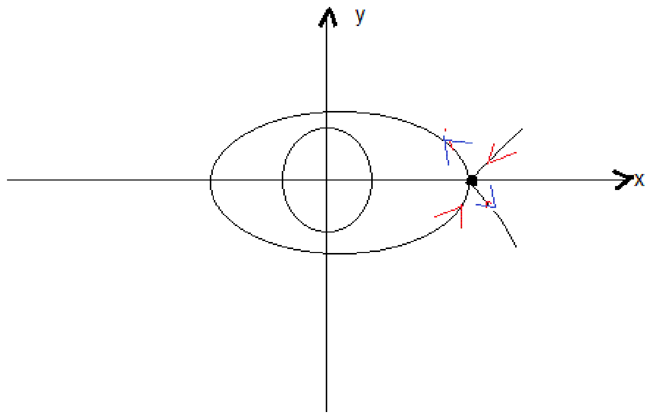

FIG. 2.3 – Orbite homoclinique

2.4 Stabilité structurelle

2.4.1 Introduction

Une propriété très importante des systèmes différentiels non linéaires (interviennent sur tout en physique) est que les données numériques d'un système physique ne sont jamais connues exactement, mais seulement à une approximation aussi bonne qu'on le veut. Par consiéquent ce qu'on connait ce n'est pas le système différentiel exact régissant l'évolution du système matériel, mais un système approché aussi voisin qu'on le voudra. Pour que l'on puisse dire quoi que ce soit sur l'évolution du système, il faut que l'allure (trajectoire) qualitative dans le plan des phases de l'ensemble des solutions du système exact décrivant des évolutions réelles du système matériel ressemble à celle de l'ensemble des solutions du système approché, et que la solution du système exact correspondant à un ensemble de conditions initiales données soit voisine à tout instant de la solution du système approché correspondant à un ensemble de conditions initiales voisines. Ces propriétés sont des propriétés de stabilité

Avant de donner une formulation mathématique, nous allons voir sur un exemple ce qui peut se produire.

2.4.2 Exemple élémentaire

Oscillateur harmonique à un de gré de liberté x

Equation régissant l'oscillateur : $\ddot{x} + wx = 0$. On peut classiquement transformer cette équation en un système, en introduisant l'inconnue $y = \frac{1}{w}\dot{x}$.

Le système régissant l'oscillateur harmonique est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = wy. \\ \dot{y} = -wx. \end{cases}$$

Dans le plan de phase (plan x, y) les trajectoires sont des cercles $x^2 + y^2 = cte$, et le point singulier $(0, 0)$

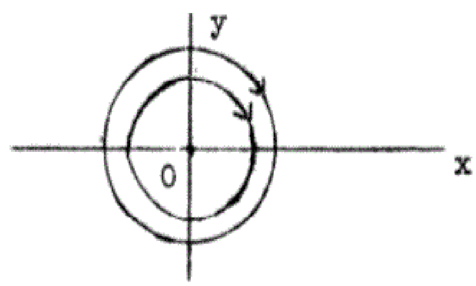

FIG. 2.4 – Trajectoires de solution sont cercles

L'oscillateur harmonique est un oscillateur idéalisé, obtenu en négligeant les résistances. En général, dans le cas réel, il y a une petite résistance de la forme $k\dot{x}$, ou k est un coefficient positif trés petit.

Le système qui régit l'évolution d'un oscillateur réel est :

$$\begin{cases} \dot{x} = wy. \\ \dot{y} = -wx - ky. \end{cases}$$

Dans le plan de phase les trajectoires sont des spirales de foyer $(0, 0)$ (k est trés petit) et le point singulier $(0, 0)$

Les deux systèmes différent d'aussi peu qu'on le voudra, et pour tant la différence entre l'allure

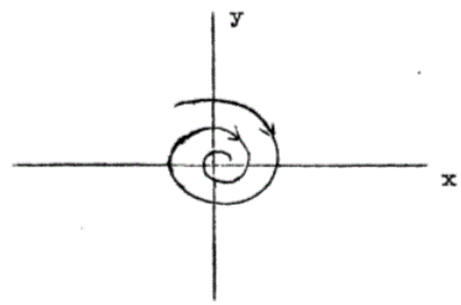

FIG. 2.5 – Trajectoires de solution sont foyer

des trajectoires dans le plan de phase est considérable. les trajectoires fermées (cycles) ont disparu : toutes les oscillations sont amorties. Le point singulier qui était un centre devient un foyer.

Le système régissant l'oscillateur harmonique n'est donc pas un système "intéressant".

2.4.3 Définitions de la stabilite structurelle

Définition 2.8 *:*

1- La norme d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}^n$ en classe C^r sur un ouvert U est le nombre

$$\| f \|_{U,r} = \max_{X \in U} \left\{ | f(X) |, | D_f(X) |, ..., | D_f^r(X) | \right\},$$

s'il existe.

2- La distance de deux fonctions $g, f : U \to \mathbb{R}^n$. en classe C^r sur U est le nombre

$$d_{U,r}(f,g) = \| f - g \|_{U,r},$$

s'il existe.

Cette norme nous permet de dire que deux fonctions sont "**proches**".

Définition 2.9 *(**Systèmes suffisamment proches**)*

*Soit champs de vecteurs $f : U \to \mathbb{R}^n$ en classe C^r on dit que deux système (U, f)et (U, g) sont **suffisamment proches** s'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $g \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$satisfaisant*

$d_{U,r}(f, g) < \epsilon$.

Définition 2.10 *Un système dynamique est structurellement stable si les systèmes suffisamment "proches" présentent un même comportement dynamique.*

Définition 2.11 ***(Structurellement stable)***
On considére un champ de vecteurs f de classe C^r associé a un système dynamique autonorme. On dit que le champ de vecteurs f (ou le système dynamique) est ***structurellement stable,*** *si pour tout champ de vecteurs g* ***suffisamment proches*** *par rapport f sont* ***topologiquement conjugués.***

La grande question du sujet est : Peut-on décrire les champs structurellement stables ?
Des réponses assez complétes existent en dimension 2 .La situation est beaucoup plus complexe en plus grande dimension.

2.4.4 Les conditions nécessaires de stabilité structurelle dans $\mathbb{R}^2$

Il existe des systèmes dynamiques dont le portrait de phase (dans certains domaines) ne change pas qualitativement sous toutes les perturbations suffisamment faibles.
Citons maintenant quelques conditions nécessaires de stabilité structurelle d'un système différentiel autonome de $\mathbb{R}^2$.

$$(E) : \begin{cases} \dot{x} = P(x, y). \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \tag{2.1}$$

dont on va perturber la forme pour obtenir le système perturbé

$$(\overline{E}) : \begin{cases} \dot{x} = \overline{P}(x, y). \\ \dot{y} = \overline{Q}(x, y). \end{cases}$$

Les systèmes (E) et $(\overline{E})$ sont suffisamment proches.

Critère 2.1 *Un système plan (2.1)structurellement stable ne peut avoir des points d'équilibres* (x_p, y_p) $[P(x_p, y_p) = Q(x_p, y_p) = 0]$ *pour lesquels :*

$$J = \det(A)_{(x_p,y_p)} = \begin{bmatrix} P_x(x_p, y_p) & P_y(x_p, y_p) \\ Q_x(x_p, y_p) & Q_y(x_p, y_p) \end{bmatrix} = 0.$$

Telle que P, Q *deux fonctions.*

Exemple 2.2 *Soit le système plan*

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2. \\ \dot{y} = x^2. \end{cases}$$

le point fixe est $(x_p, y_p) = (0, 0)$*,la matrice jacobienne* $J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$

On a $J(0, 0) = 0$*,alors le système plan n'est pas structurellement stable.*

La topologie des solutions des systèmes linéaires planaires que nous avons établie à partir de la nature des valeurs propres de la matrice du système peut également se résumer dans un plan $(tr, \det)$.

Les valeurs propres de A sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0 \text{ avec } \begin{cases} tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2. \\ \det(A) = \lambda_1\lambda_2. \end{cases}$$

Critère 2.2 *Un système plan structurellement stable ne peut avoir de point d'équilibre telle que :*

$$\det(A) \succ 0 \ \textit{et} \ tr(A) = 0.$$

La nature des valeurs propres dépend du signe du discriminant $\Delta = (tr(A))^2 - 4\det(A)$.

Il résulte de ces proprietés qu'un système plan structurellement stable ne peut avoir de point d'équilibre que des 3 type suivants :

- $\det(A) > 0, \Delta > 0$ (noeud stable ou instable suivant le signe de $tr(A)$).

- $\det(A) < 0$ (cols).
- $\det(A) > 0, \Delta < 0, tr(A) \neq 0$ (foyer stable ou instable suivant le signe de $tr(A)$).

Exemple 2.3 *Soit le système dynamique suivant :*

$$(S)\begin{cases} \dot{x} = x - y. \\ \dot{y} = \cos x. \end{cases}$$

Ce système admet une infinité de points d'équilibre sur la droite $y = x$: $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

La matrice Jacobienne s'écrit : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\sin x & 0 \end{pmatrix}$

- **Si k est pair :**

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A^* = -1 < 0. \Rightarrow (0,0)$ *est point col.*

- **Si k est impair :**

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det(A^*) = 1 > 0. \\ \Delta = -3 < 0. \end{cases} \Rightarrow (0,0)$ *est foyer stable ou instable suivant le signe de $tr(A)$.*

Critère 2.3 *Un système plan structurellement stable ne peut avoir de trajectoire fermée (correspondant à une solution périodique de période T d'équation $x = \varphi(t), y = \psi(t)$) telle que :*

$$h = \frac{1}{T}\int_0^T [P_x(\varphi, \psi) + Q_y(\varphi, \psi)]dt = 0.$$

Critère 2.4 *Un système plan structurellement stable ne peut pas posséder d'orbites homoclinique (où hétéoclinique) d'un ou deux col.*

En général, un système plan (2.1) sera **structurellement stable** dans un ouvert U si :

- ses positions d'équilibre sont telles que $\det(A) \neq 0$ où si $\det(A) \succ 0$ et $tr(A) \neq 0$.
- ses cycles limites sont tels que $h \neq 0$.
- ses séparatrices ne joignent pas deux cols ou ne retourne pas à un même point de col.

2.4.5 Théorème d'Andronov-Pontryagin

Ce théorème considère des champs de vecteurs f sur le disque D_R de rayon R dans $\mathbb{R}^2$ tels que le champ est transversal au cercle frontiére ∂D_R et rentre dans le disque. Il caractérise les champs structurellement stables.

Théorème 2.5 ***(Le théorème d'Andronov-Pontryagin)***
On considére un champ de vecteurs f de classe C^r sur un ouvert U contenant la fermeture du disque D_R de rayon R dans $\mathbb{R}^2$ tel que le champ est transversal au cercle frontiére ∂D_R et rentre dans le disque. Le champ f est ***structurellement stables*** *si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

- ⋄ *Il a un nombre fini de points singuliers qui sont hyperboliques.*
- ⋄ *Il a un nombre fini de solutions périodiques qui sont hyperboliques (et qui sont donc des cycles limites).*
- ⋄ *Il n'y a pas de trajectoires homoclines où hétéroclines de cols(selles).*

Généralement, pour les orbites périodiques et les points singuliers, la stabilité structurelle peut être testée a partir des valeurs propres du système linéarisé. Mais cette méthode échoue pour les orbites homoclines et les orbites hétéroclines, car la structure de l'orbite à proximité peut être très extrêmement compliquée et défient toute description locale.
Démonstration. Pour la démonstration voir [4] ■

Exemple 2.4 *Soit le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y. \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

n'est pas structurellement stable.
En effet le point d'équilibre est $P_1(0,0)$, alors la matrice jacobienne est $J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Donc les valeus propres sont $\lambda = \pm i$ n'est pas hyperboliques, alors n'est pas structurellement stable.

Exemple 2.5 *Soit le système dynamique suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu + x^2 - xy. \\ \dot{y} = -1 + y^2 - x^2. \end{cases}$$

- $\mu = 0:$ *le système à deux points d'équilibre* $P_1 = (0, 1)$ *et* $P_2 = (0, -1)$ *des cols, alors la matrice jacobienne est* $J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - y & -x \\ -2x & 2y \end{pmatrix}$ *les valeurs propres associer de* P_1 *sont* $\lambda_1 = 1$ *et* $\lambda_2 = -2$. *Et pour* P_1 *sont* $\lambda_1 = -1$ *et* $\lambda_2 = 2$.

Alors la variété stable de points P_2 *égale la variété instable de points* P_1 $(W^u(P_1) = W^s(P_2))$*, pour* $y \in [-1, 1]$ *définit une orbite hétéroclinique où connexion col.*

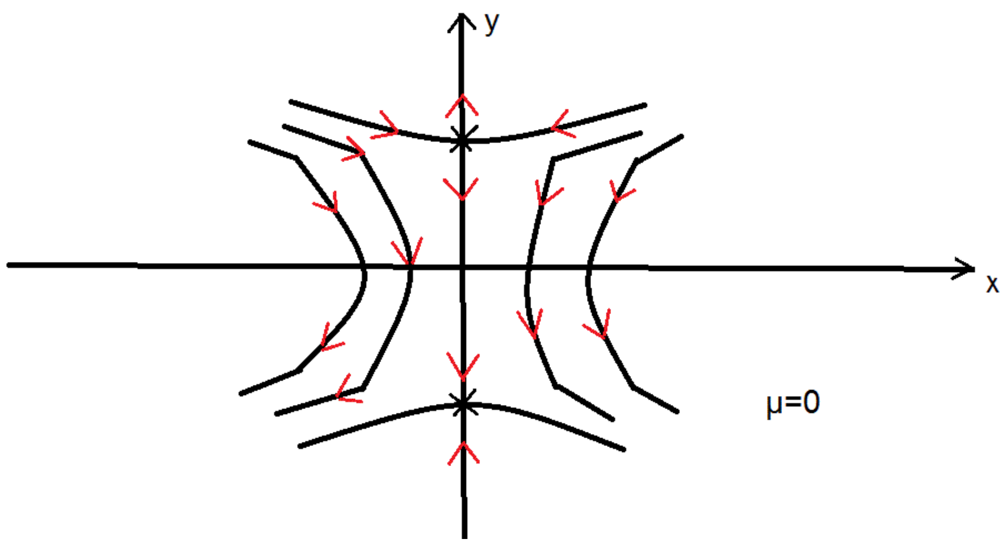

FIG. 2.6 – Représentation d'orbite hétéroclinique $\mu = 0$

- $\mu \neq 0:$ *les col* P_1 *et* P_2 *se deplacent et la connexion col n'existent plus.*

Exemple 2.6 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2). \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

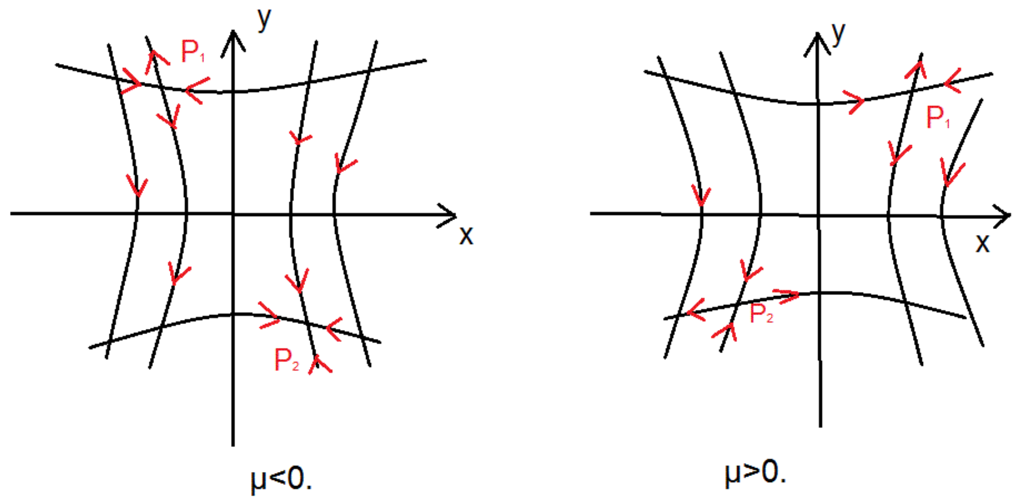

FIG. 2.7 – Représentation d'orbite hétéroclinique $\mu \neq 0$

Si on passe en coordonnées polaires $r^2 = x^2 + y^2$ *et* $\tan\theta = \frac{y}{x}$ *le système devient :*

$$\begin{cases} \dot{r} = r - r^3. \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Pour trouve point singulier on va calculer $\dot{r} = 0$.

• $\dot{r} = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0. \\ 1 - r^2 = 0. \end{cases}$ *Dans le plan de phases, c'est le cercle d'équation* $1 - x^2 + y^2$ *et c'est un cycle limite. Les autres solutions s'obtiennent par intégration du système. Lorsque* $t \to \infty$ *toutes ces solutions s'approchent du cycle limite.*

Dans cet exemple, on a :

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^t, \mathrm{div}(P_x, Q_y) = 2 - 4x^2 - 4y^2.$$

Pour étude la stablité de cycle limite on va calculer l'indice h telle que

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[P_x(\varphi,\psi)+Q_y(\varphi,\psi)]dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[2-4\cos^2 t-4\sin^2 t]dt \\ &= -2. \end{aligned}$$

Puisque l'indice $h \neq 0$ le système est structurelle stable.

2.4.6 Application : Pendule simple

Si θ désigne l'angle que fait le pendule simple avec la verticale descendante, l'equation du mouvement de pendule est : $\ddot{\theta}+h\sin\theta=0$, où $h>0$ est une constante caractéristique du pendule.

On transforme l'équation en un système équivalent en posant $\dot{\theta}=z$:

$$(1): \begin{cases} \dot{\theta}=z. \\ \dot{z}=-h\sin\theta. \end{cases} \quad / \quad h>0.$$

Mais il s'agit ici d'un pendule idéal. Dans le cas du pendule réel, il y a une résistence au mouvement de la forme $\mu\dot{\theta}$ où $\mu>0$ est un coefficient petit si le pendule est bien construit. Le système régissent le mouvement du pendule réel est :

$$(2): \begin{cases} \dot{\theta}=z. \\ \dot{z}=-h\sin\theta-\mu z. \end{cases} \quad / \quad h>0.$$

- **Pour** $\mu=0$: On va calculer les points singuliers

$$\begin{cases} \dot{\theta}=0 \\ \dot{z}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ -h\sin\theta=0 \end{cases} \quad / \quad h>0.$$

Alors les points singuliers sont : $P(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. La matrice jacobienne est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -h\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$.

Si $k = 2p$ (pair) alors les valeurs propres sont : $\lambda = \pm i\sqrt{h}$, donc les poins singuliers sont des centres.

Si $k = 2p+1$ (impair) alors les valeurs propres sont : $\lambda = \pm\sqrt{h}$, donc les poins singuliers sont des cols.

Le plan des phases est représenté ci-dessous

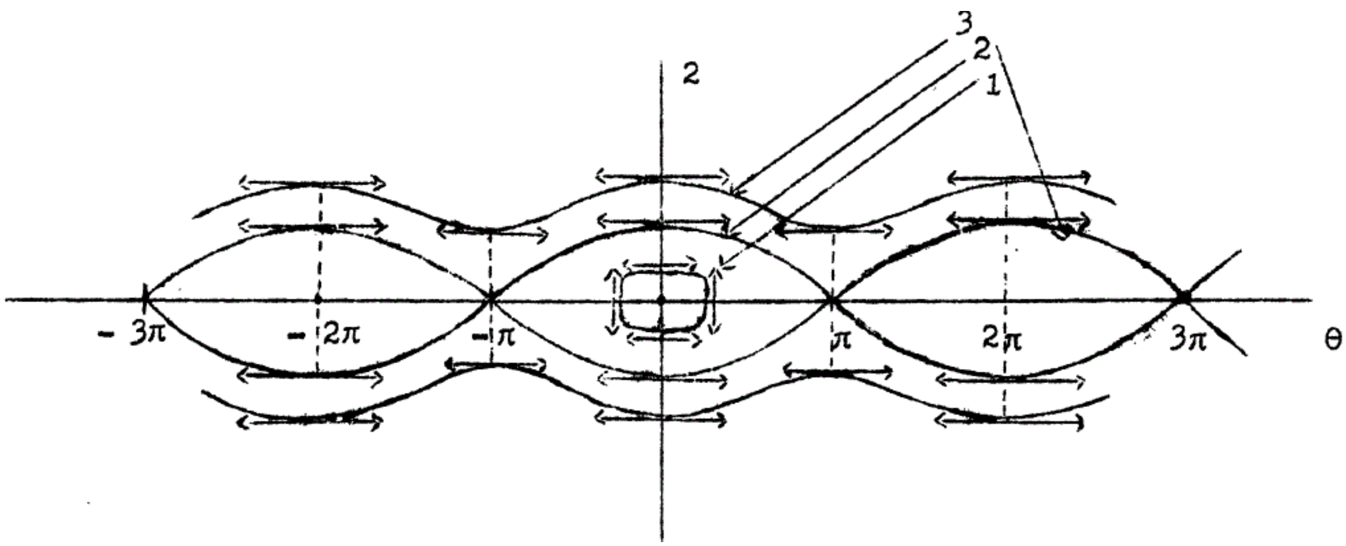

FIG. 2.8 – Représentation du système (1)

Il y a trois type de trajctoires :

- Les trajectoires (1) entourant les centres et correspondant aux petites oscillation.
- Les trajectoires (2) dites séparative joignant deux cols.
- Les trajectoires (3) correspondant au mouvement du pendule autour de son point de suspension.

• **Pour** $\mu \neq 0$: La matrice de jacobienne est :$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -h\cos\theta & -\mu \end{pmatrix}$ les valeurs propres sont :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu \pm i\sqrt{-\mu^2+4h}}{2} \text{ si } \mu \in \left[-2\sqrt{h}, 2\sqrt{h}\right] \text{ est foyer}$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2-4h}}{2} \text{ si } \mu \in \left]-\infty - 2\sqrt{h}, 2\sqrt{h}; +\infty\right[\text{ est col}$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2+4h}}{2} \quad \text{est col}$$

Le plan des phases est représenté ci-dessous

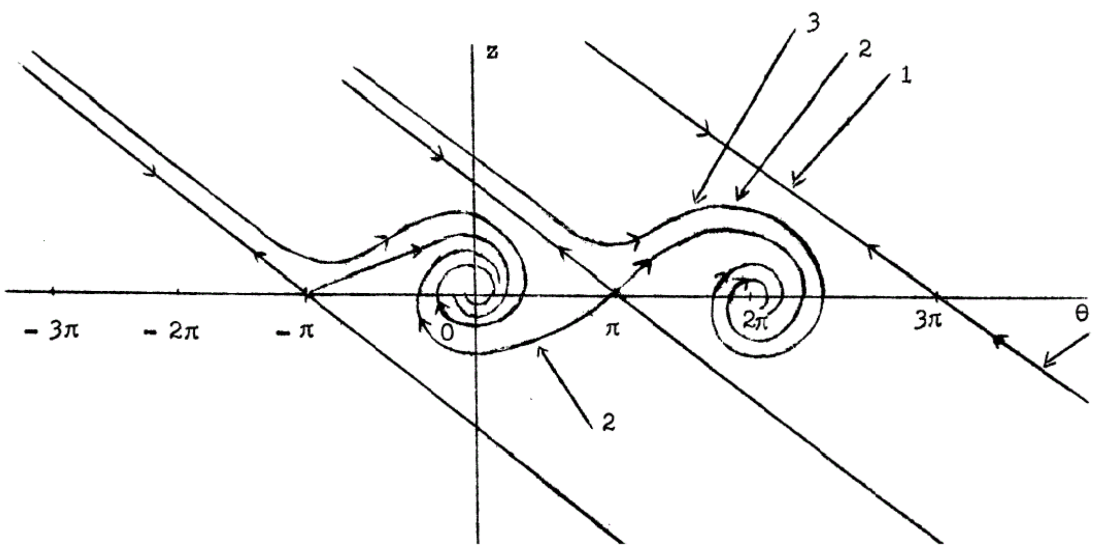

FIG. 2.9 – Représentation du système (2)

Les points singuliers sont les mêmes que dans le cas où $\mu = 0$. Les cols sont restés des cols, mais les centres sont devenus des foyers.

Les trajectoires sont de trois type :

- Les trajectoires (1) aboutissant à un col.
- Les trajectoires (2) joignant un col à un foyer.
- Les trajectoires (3) aboutissant à un foyer.

Si on compare les trajectoires des deux systèmes, on voit que les centres sont dévenus des foyers, les cycles ont disparu, les cols sont restés des cols, mais les séparatrices qui les joignaient ont disparu.

Tout ceci nous montre que le système n'est pas structurellement stable.

Conclusion

On peut conclure que la stabilité structurelle des systèmes dynamiques qui a été largement étudiée dans les cinqs dernières décennies et a plusieurs applications dans divers domaines tels que la biologie, la chimie, le génie civile, la mécanique, l'informatique,la morphologie, l'économie, le statistique, ...etc. En mathématiques, la stabilité structurelle est une propriété fondamentale d'un système dynamique, ce qui signifie que le comportement qualitatif des trajectoire n'est pas affecté par de petites perturbations.

Bibliographie

[1] Alexandre, V. (2015). *Modéles mathématiques edo pour la Biologie.*

[2] Alexandre, V. (2016). Qualitative analysis of dynamical systems and models in life science.

[3] Emmanual, M. (2007), Stabilité des équations différentielles ordinaires.

[4] https ://wwwf.imperial.ac.uk/~dturaev/bif_theory2.pdf.

[5] Mammeri, M .(2011). Sur la stabilité structurelle des difféomorphismes quadratiques en dimension 2.

[6] Mémoire du diplome magister. Université Kasdi merabah - Ouargla.

[7] Sandrine,C et Christelle, L. (2008).Biologie mathématique et modélisation.

[8] Séminaire, J. (1960 – 1961). Mécanique analytique et mécanique céleste.

[9] Talbi, I. (2010). Système dynamique non linéaires et phénoménes de Choas.Mémoire du diplome magister. Université Mentouri de constantine.

[10] Yuri A. Kuznetsov. Elements of applied Bifurcation Theory, second Edition.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\mathbb{R}$	:	Esemble des nombres réel.
$\mathbb{R}^n$	:	Espace vectoriel de n dimension.
U	:	Overt dans $\mathbb{R}^n$.
C^1	:	Ensemble des fonctions continuement différentiable
$\mid . \mid$	:	Valeur absolue ou module.
$\Vert . \Vert$	:	Norme sur $\mathbb{R}^n$.
$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$	:	Dérivée temporelle.
Id	:	Matrice identité $\mathbb{R}^n \times n$.
$\exp(A)$ ou e^A	:	Exponentielle de la matrice A.
W^s	:	Variété stable .
W^u	:	Variété instable.
E^s	:	Sous-espace propre stable.
E^u	:	Sous-espace propre instable.
$d(f, g)$	:	La distance de f à g.
n	:	Entier.
T	:	Péride.

λ	:	Valeur propre.
$\oplus$	:	Somme directe.
$B(x_0, r)$	:	Boule de centre x_0 et de rayon r.
$(P.C)$	:	Problème de cauchy.
J	:	Matrice de jacobienne.
$\mathrm{Re}(\lambda)$	:	Partie réelle de valeur propre λ.
$\det(A)$	:	déterminant de la matrice A.
$\Omega(f)$	:	Ensemble des points non-errants de f.
$\mathbb{R}^d$	:	Espace des nombres réels de dimension d.
$tr(A)$	:	trace de la matrice A.