

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Analyse**

Par

**Mahboub Wahiba**

Titre :

**Synchronisation non identique entre deux  
systèmes chaotiques au moyen d'un système  
auxiliaire**

Membres du Comité d'Examen :

Dr. KHELIL Naceur	UMKB	Président
Dr. <b>MENACER Tidjani</b>	UMKB	Encadreur
Dr. GHODJMIS Fatiha	UMKB	Examineur

Juin 2019

## DÉDICACE

j'ai l'honneur de dédier ce travail à :

Mon cher père, qui a consacré sa vie pour mon éducation.

Ma chère maman pour toute sa tendresse, amour, et affection.

Mes chères soeurs et mes chers frères.

Toutes mes amies.

Tous mes formateurs pour leurs efforts et leurs amabilités et tous qui m'ont aidé de près  
ou de loin pour la réalisation de ce travail.

## REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie DIEU le tout-puissant pour la volonté, la santé et la patience

qu'il m'a donnée durant ma vie.

je tiens à remercier particulièrement Mr Menacer Tidjani pour l'aide et les conseils

concernant ce travail.

je remercie également Mme GHODJMIS Fatiha et Mr KHELIL Naceur .

je remercie également les membres de nos familles qui nous ont offert soutien moral et

financier.

A tous ceux qui nous ont guidés avec gentillesse et efficacité.

# Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	ii
Liste des figures	v
Introduction	1
<b>1 Les systèmes dynamiques chaotiques</b>	<b>3</b>
1.1 Systèmes dynamiques et chaos . . . . .	3
1.1.1 Systèmes dynamiques . . . . .	3
1.1.2 <i>Points d'équilibre</i> . . . . .	4
1.1.3 <i>Attracteurs</i> : . . . . .	4
1.1.4 <i>La théorie de bifurcations</i> . . . . .	6
1.1.5 <i>Théorie du chaos</i> . . . . .	9
1.1.6 Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	10
<b>2 Synchronisation des systèmes chaotiques</b>	<b>14</b>
2.1 Introduction historique . . . . .	14
2.2 Méthodes de synchronisation . . . . .	16
2.2.1 Méthode du contrôleur actif . . . . .	16
2.2.2 Méthode du Backstepping . . . . .	17

2.2.3	Méthode du mode glissant . . . . .	19
2.3	Différents types de synchronisation . . . . .	22
2.3.1	La synchronisation identique . . . . .	22
2.3.2	La synchronisation généralisée . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Synchronisation de deux différents systèmes chaotiques par la méthode du système auxiliaire approché</b>	<b>29</b>
3.1	Synchronisation entre le système de Chen et celui de Lü . . . . .	29
3.1.1	Analyse théorique . . . . .	29
3.1.2	Simulation numérique . . . . .	32
	<b>Bibliographie</b>	<b>34</b>
	<b>Annexe A :Critères de Routh-Hurwitz</b>	<b>36</b>

# Table des figures

3.1	La synchronisation entre le système de Chen et celui de Lü est réalisée avec et les paramètres $k_1 = 15$ , $k_2 = 25$ et $k_3 = 20$ . . . . .	33
-----	---	----

# Introduction

La synchronisation des systèmes chaotiques est un sujet important sur par ses applications des sciences non linéaires, a été développé et largement étudiée au cours des dernières années.

Parallèlement aux grandes avancées réalisées dans la théorie du chaos, les perspectives de l'utilisation du chaos dans diverses applications [2], ont motivé les chercheurs à étudier la question de l'éventuelle possibilité de synchroniser le chaos. La synchronisation des oscillateurs non linéaires est un phénomène qui a attiré l'attention des chercheurs depuis le constat et la description de ce phénomène par **Huygens** en **1673** [4]. Jusqu'à ce jour là, plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été proposés. Tout d'abord avec les travaux de **Yamada** et **Fujisaka** qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique. Par la suite, **Afraimovich** et **Al.** ont développé les concepts importants liés à la synchronisation chaotique et ultérieurement **Pecora** et **Carroll** ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de synchronisation **identique**, développée sur la base de circuits chaotiques couplés, avec l'un appelé maître et l'autre esclave. Une autre solution plus récente est la méthode de synchronisation **généralisée**, dont **Rulkov** et **Al** ont posé les bases.

Au cours des dernières années, la synchronisation des systèmes chaotiques a attiré beaucoup d'attention en raison de ses larges applications dans divers domaines de la physique et de l'ingénierie. Différentes méthodes et diverses approches ont été appliquées avec succès à la synchronisation du chaos et hyperchaos dans les systèmes dynamiques, telles que :

la méthode de contrôleur actif (adaptif), la méthode de backstepping et la méthode de contrôleur en mode glissant, etc... Et on parcourir les deux types de la synchronisation : La synchronisation identique et la synchronisation généralisée.

En fait, de nombreux modèles mathématiques des processus physiques, des phénomènes biologiques, des réactions chimiques et des systèmes économiques ont été définis à l'aide des systèmes dynamiques continus. Par conséquent, il est important de considérer la synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques (hyperchaotiques) continus.

Cette mémoire a pour objet l'étude de la synchronisation non identique entre deux systèmes chaotiques au moyen d'un système auxiliaire.

Ce travail est donc structuré en trois chapitres :

**Premier chapitre** : Les propriétés des systèmes dynamiques chaotiques, ont été introduit telsque : les points d'équilibre, les attracteurs et ses différents types, la théorie de bifurcation, la théorie de chaos et ses propriétés, et finissant par la stabilité au sens de Lyapunov.

**Deuxieme chapitre** : on présente quelques méthodes de synchronisation, parcourirant les deux types de la synchronisation.

**Le troisième chapitre** est consacré à l'application de la synchronisation généralisée sur deux systèmes chaotiques différents

A la fin de ce mémoire, on trouvera une bibliographie utilisée pour cette mémoire.

# Chapitre 1

## Les systèmes dynamiques chaotiques

### 1.1 Systèmes dynamiques et chaos

#### 1.1.1 Systèmes dynamiques

**Définition 1.1.1** *En générale, un système dynamique d'écrit par une fonction phénomène qui évoluent au cours du temps. Le terme "système" fait réferece à un ensemble de variables d'état et aux interactions entre ces variables [3].*

Dans le cas où la composante temps est **continu** le système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t, \mu) \quad (1.1)$$

$X \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $\mu \in D \subseteq \mathbb{R}^p$  le vecteur des paramètre,

$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est appelé champ de vecteur sur  $\Omega$ ,  $n$  et  $p \in \mathbb{N}$ . Dans le cas où le temps est **discret** le système dynamique est présenté par une application :

$$X_{k+1} = X_k + \mu = F(X_k, \mu) \quad (1.2)$$

où  $X_k \in R^n$  et  $\mu \in R^p$ ,  $k \in \mathbb{N}$

Dans ce memoire on s'interasse aux **systemes continus**.

### 1.1.2 Points d'équilibre

**Définition 1.1.2** *Un point d'équilibre (ou point critique, ou point singulière, ou points stationnaire). Un point  $X_0$  est dit point d'équilibre du système (1.1) s'il satisfait  $F(X_0) = 0$  si non le point  $X_0$ , est dit point ordinaire.*

**Remarque 1.1.1** *Par un changement de variable  $Y = X - X_0$  peut ramener le point à l'origine (0).*

### 1.1.3 Attracteurs :

**Définition 1.1.3** *La région de l'espace de phases vers lequel convergent les trajectoires d'un système dynamique dissipatif s'appelle "attracteur". Les attracteurs sont des formes géométrique qui caractérisent l'évolution à long terme des systèmes dynamique. On va donner quelque définitions d'un attracteur :*

- Pour tout voisinage  $U$  de  $A$  il existe un voisinage  $V$  de  $A$  telque toute solution  $X(X_0, t) = \varphi_t(X_0)$  restera dans  $U$  si  $X_0 \in V$ .
- $\cap \varphi_t(V) = A, t \geq 0$ .
- Il existe un orbite dense dans  $A$ .

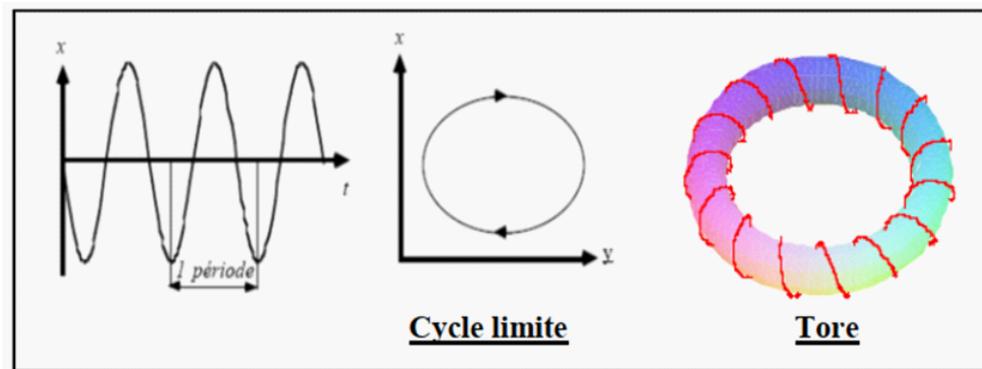
Il ya deux types d'attracteurs :

#### **Attracteurs réguliers**

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, et il existe trois types sortes :

1. *Le points fixe* : est l' attracteur le plus simple, dans le cas discret on dit que  $a \in E$  est un point fixe de l'application  $f : \Omega \longrightarrow \Omega$  si  $f(a) = a$ .

2. *Un cycle limite* : est une trajectoire fermée dans l'espace des phases vers laquelle tendent les trajectoires. C'est donc une solution périodique du système.
3. *Un tore* : il est caractérisé par un régime quasi-périodique ayant un  $n$  fréquences de base indépendantes.



### *Attracteurs étranges*

Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques : au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange. L'attracteur étrange se caractérise par :

- Sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique).
- La dimension  $d$  de l'attracteur est fractale avec  $2 < d < n$  (ce qui justifie l'adjectif étrange).
- L'attracteur est de volume nulle dans l'espace des phases.

### 1.1.4 La théorie de bifurcations

Un autre ensemble de concepts utile à l'analyse des systèmes dynamiques est la théorie de la "bifurcation". Ce concept renvoie à l'étude des changements de comportement d'un système lorsque les paramètres de ce dernier changent. La bifurcation signifie un changement qualitatif de la dynamique du système, qui résulte du changement d'un des paramètres du système. la valeur pour laquelle la bifurcation se produit est nommée "le point de bifurcation", nous allons nous restreindre aux modèles paramétrés :

$$\dot{X} = F(X, \mu), \quad X \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \mu \in D \subset \mathbb{R}^p, \quad F \in C^r \quad (1.3)$$

Nous intéressons ici aux bifurcations dites locales, c'est à dire relatives à un point d'équilibre.

#### *Bifurcation locale*

On parle ici seulement sur la bifurcation de codimension un, il existe quatre types :

***Bifurcation noeud-col*** C'est le bifurcation associé à l'équation :

$$\dot{X} = F(X, \mu) = \mu - X^2 \quad (1.4)$$

avec  $\mu$  le paramètre de contrôle. Nous allons étudier cette équation selon le paramètre de contrôle  $\mu$  :

- Si  $\mu < 0$ ,  $\dot{X} = 0$  n'admet pas la solution alors on n'est pas des points d'équilibre.
- Si  $\mu > 0$  on a :  $\mu - X^2 = 0 \iff X = \pm\sqrt{\mu}$ .

Par conséquent (1.4) admet deux points d'équilibres :

$$\frac{dF(X, \mu)}{dX} = -2X \text{ alors } \frac{dF(X = \sqrt{\mu}, \mu)}{dX} = -2\sqrt{\mu} < 0 \text{ et } \frac{dF(X = -\sqrt{\mu}, \mu)}{dX} = 2\sqrt{\mu} > 0.$$

Par suite le point d'équilibre  $X_e = \sqrt{\mu}$  est stable,  $X_e = -\sqrt{\mu}$  est instable.

– Si  $\mu = 0$  il y a un seul point d'équilibre  $X_e = 0$  est semi stable.

Même étude faite lorsque

$$F(X, \mu) = -\mu - X^2$$

$$F(X, \mu) = +\mu + X^2$$

$$F(X, \mu) = -\mu + X^2$$

Mais dans tous les cas, il y a une transition à  $\mu = 0$  entre existence d' aucun point d'équilibre et de deux points d'équilibre dont un est stable et l'autre instable.

**Bifurcation transcritique** C'est la bifurcation associé à l'équation :

$$\dot{X} = \mu X - X^2 \tag{1.5}$$

ona alors :

$$F(X, \mu) = 0 \iff \begin{cases} X = 0 \\ X = \mu \end{cases}$$

$$\frac{dF(X, \mu)}{dX} = \mu - 2X \text{ donc } \frac{dF(X=0, \mu)}{dX} = \mu \text{ et } \frac{dF(X=\mu, \mu)}{dX} = -\mu$$

par suite :

– Si  $\mu < 0$  le point d'équilibre  $X_e = 0$  est stable, mais  $X_e = \mu$  est instable.

– Si  $\mu > 0$  le point d'équilibre  $X_e = 0$  est instable, mais  $X_e = \mu$  est stable.

– Si  $\mu = 0$  il y a un seul point d'équilibre  $X_e = 0$  est semi stable.

**Bifurcation fourche** Si on peut réduire  $F(X, \mu)$  à un polynôme cubique a ces quatres

cas :

$$F(X, \mu) = \mu X - X^3. \tag{1.6}$$

$$F(X, \mu) = \mu X + X^3. \tag{1.7}$$

$$F(X, \mu) = -\mu X + X^3. \quad (1.8)$$

$$F(X, \mu) = -\mu X - X^3. \quad (1.9)$$

L'équation (1.6) s'appelle la forme normale d'une bifurcation fourche supercritique. Nous calculons ses points d'équilibre :

$$F(X, \mu) = \mu X - X^3 \iff \begin{cases} X = 0 \\ X^2 = \mu \end{cases}$$

- Si  $\mu < 0$  alors on a un seul point d'équilibre  $X_e = 0$ .
- Si  $\mu > 0$  on a trois points d'équilibre :

$$\begin{cases} X_e = 0. \\ X_e = \sqrt{\mu}. \\ X_e = -\sqrt{\mu}. \end{cases}$$

nous étudions la nature des points d'équilibre :

$$\frac{dF(X, \mu)}{dX} = \mu - 3X^2 \text{ alors } \frac{dF(X=0, \mu)}{dX} = \mu \text{ et } \frac{dF(X = \pm\sqrt{\mu}, \mu)}{dX} = -2\mu.$$

par suite :

- Si  $\mu < 0$  alors le seul point d'équilibre  $X_e = 0$  est stable.
- Si  $\mu > 0$  le point d'équilibre  $X_e = 0$  est instable, mais  $X_e = \pm\sqrt{\mu}$  sont stable.

**Bifurcations Hopf** C'est la bifurcation à l'équation dans le plan complexe :

$$\dot{Z} = \mu Z - |Z|^2 Z. \quad (1.10)$$

pour étudier cette équation on écrit le variable  $Z$  sous la forme  $Z(t) = X(t)e^{i\theta(t)}$  et  $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ . On obtient alors :

$$\begin{cases} \dot{X} = \mu_1 X - X^3 \\ \dot{\theta} = \mu_2 \end{cases} \quad (1.11)$$

nous obtenons donc une bifurcation fourche dans (1.11) de paramètre  $\mu_1$ , et pour l'amplitude tandis que la phase tourne à la vitesse  $\mu_2$ . Nous partons d'un système où le paramètre  $\mu_1$  est négatif le système possède un point d'équilibre stable qui correspond ici à un point puits (trajectoire s'inroulent en spirale vers l'origine), lorsque  $\mu_1$  est positive il se forme alors une trajectoire périodique stable ou cycle limite. La bifurcation de Hopf correspond à une instabilité oscillatoire.

### 1.1.5 Théorie du chaos

#### *Définitions du chaos*

Il n'existe pas encore de définition du chaos valable pour un système dynamique quelconque, mais on peut dire que c'est l'étude des systèmes qui ont une évolution extrêmement complexe et qui paraissent désordonnés.

Cette théorie fut développée à partir des années soixante, lorsque **Edward Lorenz** montra le caractère chaotique de l'atmosphère terrestre. On peut donner une définition approche du chaos comme :

**Définition 1.1.4** *Un système chaotique est un système dynamique déterministe qui possède un comportement imprévisible à long terme. Cette imprévisibilité est due à la sensibilité aux conditions initiales, particularité des systèmes chaotiques.*

#### **Propriétés du chaos**

Les phénomènes chaotiques ne sont pas aléatoires, mais au contraire qui obéissent à des lois déterministes, parfois assez simples dans leur représentation mathématique. Les phé-

nomènes traités par les lois du chaos se caractérisent par des propriétés génériques fondamentales en plus de la sensibilité aux conditions initiales on peut citer les propriétés suivantes :

### **1/ La non linéarité**

Un système chaotique est un système dynamique non linéaire, mais un système linéaire ne peut pas être chaotique.

### **2/ La structure fractale**

Le comportement d'un système chaotique se reproduit de manière auto-similaire à des échelles différentes. Plus on le regarde de près, plus on découvre de nouveaux détails comparables à ceux qu'on observait aux échelles supérieures. Sa représentation géométrique ne s'intègre pas dans un espace de dimension entière, mais de dimension fractionnaire (une courbe, n'est plus tout à fait une courbe, mais elle n'est pas devenue une surface).

### **3/ Les attracteurs étranges**

Bien qu'imprévisibles et infiniment complexes à toutes les échelles, les systèmes chaotiques ne suivent pas des trajectoires privilégiées. La courbe d'un tel système, sans jamais repasser par les mêmes points évolue toujours dans un espace délimité dans lequel elle finit par décrire une figure géométrique particulière qui représente son attracteur, appelé étrange en raison de l'étrangeté de ce comportement.

## **1.1.6 Stabilité au sens de Lyapunov**

**Définition 1.1.5** *Soit le système dynamique suivant :*

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t) \tag{1.12}$$

avec  $F$  une fonction non linéaire

**Définition 1.1.6** : Soit  $\Phi(t)$  une solution du système (1.12) :

1.  $\Phi(t)$  est dite stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|X(t_0) - \Phi(t_0)\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t) - \Phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

2.  $\Phi(t)$  est dite asymptotiquement stable si :

$$\forall \delta > 0 : \|X(t_0) - \Phi(t_0)\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t) - \Phi(t)\| = 0.$$

3. La solution  $\Phi(t)$  est instable si elle n'est pas stable.

**Définition 1.1.7** : Soit  $X_p$  est un point d'équilibre du système (1.12) :

1.  $X_p$  est dit stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|X_0 - X_p\| < \delta \implies \|X(t) - X_p\| < \varepsilon.$$

2.  $X_p$  est dit asymptotiquement stable s'il est stable et si :

$$\exists \delta > 0 : \|X_0 - X_p\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = X_p.$$

3. Un équilibre qui n'est pas stable est dit instable.

Nous présentons ici deux méthode de Lyapunov pour étudier la stabilité :

**Méthode indirecte** :

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation autour du point d'équilibre  $x_0$  du système (1.12). Plus précisément, on examine les valeurs propres  $i$  de la matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre. Selon cette méthode, les propriétés de stabilité de  $x_0$  s'expriment comme suit :

- Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative,  $x_0$  est exponentiellement stable.
- Si la matrice jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive,  $x_0$  est instable.

**Remarque 1.1.2** *Cette méthode ne permet pas de dire si l'équilibre est stable ou instable quand la matrice jacobienne comporte au moins une valeur propre nulle, et aucune valeur propre avec partie réelle strictement positive. Dans ce cas, les trajectoires du système convergent vers un sous-espace (une variété) dont la dimension est le nombre de valeurs propres nulles de la matrice jacobienne, et la stabilité de l'équilibre peut être étudié dans ce sous-espace par la seconde méthode.*

**Méthode directe :**

Comme on a vu, la première méthode de Lyapunov est simple à appliquer mais elle ne permet d'analyser la stabilité des équilibres que très partiellement. En outre elle ne donne aucune indication sur la taille des bassins d'attraction. La seconde méthode est plus difficile à mettre en oeuvre mais, en contrepartie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée  $V(x)$  et appelée fonction de Lyapunov, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction. Ce théorème va résumer cette méthode.

**Théorème 1.1.1** *Le point d'équilibre  $x_0$  du système (1.12) est stable si il existe une fonction  $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$  continuellement différentiable ayant les propriétés suivantes :*

1.  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $x_0 \in D$ .
2.  $V(x) > V(x_0) \forall x \neq x_0$  dans  $D$ .
3.  $\dot{V}(x) < 0 \forall x \neq x_0$  dans  $D$ .

Il n'y a aucune méthode pour trouver une fonction de Lyapunov. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.

**Exemple 1.1.1** *Le pendule*

Le pendule évolue dans  $\mathbb{R}^2$  selon la loi suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{g}{l} \sin x \end{cases}$$

La fonction de Lyapunov au voisinage de l'origine est donné par :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}l^2y^2 = gl(1 - \cos x)$$

elle satisfait les conditions du théorème de Lyapunov dans un voisinage de l'origine et on a

$$\dot{V}(x) = 0$$

# Chapitre 2

## Synchronisation des systèmes chaotiques

### 2.1 Introduction historique

Le sens originel de synchronisation a été maintenu jusqu'à présent dans l'usage familier de ce mot, comme un accord ou corrélation dans le temps des différents processus. Ce phénomène était un sujet de recherche active depuis les jours les plus tôt de la physique. L'histoire de la synchronisation remonte au dix-septième siècle [1], quand le scientifique hollandais, **Christian Huygen** aurait constaté que deux de ses horloges à balancier, placées côte à côte, convergeaient rapidement vers un mouvement identique en phase et en fréquence; c'est à dire que les deux horloges avaient une parfaite synchronisation. S'il les perturbait, elles se resynchronisaient en une demi-heure, et s'il les éloignait, la synchronisation cessait. Dans la terminologie moderne, cela signifie que les deux horloges ont été synchronisées dans l'antiphase due à l'accouplement par le support mural [1]. Récemment, la recherche pour la synchronisation s'est déplacée vers les systèmes chaotiques.

Et comme ces derniers sont caractérisés par la sensibilité aux conditions initiales, la syn-

chronisation entre deux systèmes chaotiques paraissait impossible. Mais les travaux de plusieurs scientifiques dans ce domaine ont montré le contraire. Durant la décennie passée, plusieurs types de synchronisation ont été étudiés, et beaucoup de méthodes ont été proposées. Tout d'abord avec les travaux de **Yamada** et **Fujisaka** qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique. Par la suite, **Afraimovich** et **Al.** Ont développé les concepts importants liés à la synchronisation chaotique. Ultérieurement **Pecora** et **Carroll** ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de synchronisation identique, développée sur la base de circuits chaotiques couplés, avec l'un appelé maître et l'autre esclave. Une autre solution plus récente est la méthode de synchronisation généralisée, dont **Rulkov** et **Al.** Ont posé les bases.

Cette approche considère aussi une paire de systèmes configurés en maître-esclave, mais cette fois le couplage n'est pas réservé à l'identité. En parallèle avec ces études, est apparue la notion de synchronisation de phases entre deux circuits chaotiques couplés, dans ce cas la synchronisation vise à réaliser une cohérence de phases entre les variables d'état des systèmes considérés.

Plusieurs similitudes entre les systèmes chaotiques et les systèmes cryptographiques ont été constatées, ce qui a motivé les chercheurs à exploiter des propriétés cryptographiques du chaos dans les applications de télécommunication et de transmission sécurisée d'informations. Depuis l'année 1990, l'utilisation de la synchronisation chaotique a attiré l'attention des chercheurs travaillant dans le domaine de la cryptographie.

**Définition 2.1.1** *de Larousse* : synchronisation est un mot grec décomposé en deux parties : **Syn** veut dire ensemble, et **Chrono** veut dire temps. C'est l'action de mettre

en phase pour créer une simultanéité entre plusieurs opérations, en fonction du temps.

**Définition 2.1.2** (générale) : la synchronisation est une manière de faire l'entretien d'un mouvement périodique (ou chaotique).

## 2.2 Méthodes de synchronisation

Cette section est consacrée à la présentation de diverses méthodes de synchronisation les plus performantes et les plus rencontrées.

### 2.2.1 Méthode du contrôleur actif

L'application du contrôle actif pour la synchronisation des systèmes chaotiques, a été proposée par **Bai** et **Lonngren**, c'est une technique efficace qui a montré sa puissance non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques. De plus, cette méthode offre une simplicité remarquable pour l'implémentation de l'algorithme [9]. Soit deux systèmes chaotiques à synchroniser, maître et esclave, définis par :

$$x(k+1) = F(x(k)), \quad (2.1)$$

$$y(k+1) = G(y(k)) + U, \quad (2.2)$$

d'où  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(k) \in \mathbb{R}^n$  sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$  est un contrôleur à déterminer. Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Cette erreur est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} e(k+1) &= y(k+1) - x(k+1) \\ &= G(y(k)) - F(x(k)) + U \end{aligned} \quad (2.3)$$

si on peut écrire la quantité  $G(y(k)) - F(x(k))$  de la façon suivante

$$G(y(k)) - F(x(k)) = Ae(k) + N(x(k), y(k)), \quad (2.4)$$

l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$e(k+1) = Ae(k) + N(x(k), y(k)) + U \quad (2.5)$$

d'où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice constante et  $N$  une fonction non linéaire. Le contrôleur  $U$  est proposé comme suit :

$$U = V - N(x(k), y(k)), \quad (2.6)$$

d'où  $V$  est le contrôleur actif, défini par :

$$V = -Le(k) \quad (2.7)$$

d'où  $L$  est une matrice de contrôle inconnue. On obtient donc, la formule finale de l'erreur :

$$e(k+1) = (A - L)e(k) \quad (2.8)$$

Donc le problème de la synchronisation entre le système maître (2.1) et le système esclave (2.2) est transformé en problème de zero-stabilité du système (2.8).

### 2.2.2 Méthode du Backstepping

La méthode du backstepping est une méthode récursive qui se base sur le choix d'une fonction de Lyapunov avec la conception du contrôleur nécessaire [7]. En considère que le système maître et le système esclave sont définis comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (2.9)$$

et

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(y_1, y_2), \\ \dot{y}_2 = f_2(y_1, y_2, y_3), \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n) + u, \end{cases} \quad (2.10)$$

d'où  $f_1$  est une fonction linéaire,  $f_i$ , ( $i = 2, 3, \dots, n$ ), sont des fonctions non-linéaires et  $u$  est un contrôleur qui doit être choisi convenablement pour obtenir la synchronisation entre les systèmes (2.9) et (2.10). L'erreur de synchronisation est définie comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - x_1, \\ e_2 = y_2 - x_2, \\ \vdots \\ e_n = y_n - x_n, \end{cases} \quad (2.11)$$

alors, la dynamique du système d'erreur s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = g_1(e_1, e_2), \\ \dot{e}_2 = g_2(e_1, e_2, e_3), \\ \vdots \\ \dot{e}_n = g_n(e_1, e_2, \dots, e_n) + u, \end{cases} \quad (2.12)$$

d'où  $g_1$  est une fonction linéaire, et  $g_i$ , ( $i = 2, 3, \dots, n$ ), sont des fonctions non-linéaires. L'objectif est de calculer une loi de contrôle  $u$  qui assure la convergence du système  $e_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), vers l'origine en utilisant l'algorithme backstepping. Pour cela, le système d'erreur (2.12) doit être décomposé en sous système :

$$e_1, (e_1, e_2), (e_1, e_2, e_3), \dots, (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n),$$

et pour chaque sous système on définit une fonction de Lyapunov  $V$  positive :

$$V_j(e_j, u_j, \alpha_j) \quad (2.13)$$

d'où  $j$  est l'ordre du sous-système,  $u_j$ ,  $\alpha_j$  représentent, respectivement, la loi de contrôle et le contrôleur virtuel du sous système d'ordre  $j$ .  $u_j$  et  $\alpha_j$  sont calculés à chaque fois de tel sorte que  $\dot{V} < 0$ .

**Remarque 2.2.1** *Il existe plusieurs avantages dans cette méthode :*

- Elle présente une procédure systématique pour la sélection du contrôleur.
- Elle peut être appliquée à différents systèmes chaotiques.
- Elle offre la possibilité de réaliser la synchronisation avec un seul contrôleur.
- Le contrôleur calculé offre une simplicité dans l'implémentation de l'algorithme.

### 2.2.3 Méthode du mode glissant

Dans la théorie du contrôle robuste, la méthode du mode glissant est souvent pratiquée en raison de ses avantages inhérents, telles que la réalisation facile, la réponse rapide et une bonne performance transitoire ainsi que sa sensibilité aux incertitudes des paramètres et des perturbations externes [6]. Soit les systèmes chaotiques maître et esclave donnés par les formes suivantes :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)), \quad (2.14)$$

et

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + f(y(t)) + u, \quad (2.15)$$

d'où  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(k) \in \mathbb{R}^n$  sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice constante,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction non-linéaire et  $u \in \mathbb{R}^n$  est un contrôleur à déterminer. L'erreur entre le système maître (2.14) et le système esclave (2.15) est définie par :

$e = y - x$ . La dynamique de l'erreur peut s'écrire comme suit :

$$\dot{e} = Ae + \eta(x, y) + u, \quad (2.16)$$

d'où  $\eta(y, x) = f(y(t)) - f(x(t))$ . Si on se base sur le principe du contrôle actif pour éliminer la partie non-linéaire du système d'erreur (2.16), la loi de contrôle  $u$  est choisie comme suit :

$$u = Bv - \eta(x, y), \quad (2.17)$$

d'où  $v$  c'est le contrôleur actif et  $B$  un vecteur constant de gain qui doit être calculé de telle sorte que le couple  $(A, B)$  soit contrôlable. En substituant (2.17) dans (2.16), la dynamique de l'erreur est simplifiée comme suit :

$$\dot{e} = Ae + Bv, \quad (2.18)$$

Ainsi, le problème de synchronisation peut être remplacé par un équivalent problème de la stabilisation de la solution  $e = 0$  du système (2.18) par un choix approprié du contrôleur en mode glissant. Dans la méthode du mode glissant, nous définissons la surface de glissement  $s$ , comme suit :

$$s(e) = Ce = \sum_{j=1}^n c_j e_j \quad (2.19)$$

d'où  $C$  : est un vecteur constant à déterminer, et le système contrôlé doit satisfaire :

$s(e) = 0, \dot{s}(e) = 0$ . Alors, on peut écrire :

$$\dot{s}(e) = C(Ae + Bv) = 0, \quad (2.20)$$

donc le contrôleur  $v$  est donné par

$$v = -(CB)^{-1}CAe \quad (2.21)$$

d'où  $C$  est choisi de telle sorte que  $CB \neq 0$ . L'existence de  $(CB)^{-1}$  est une condition nécessaire. La nouvelle forme de l'erreur de synchronisation est donnée par

$$\dot{e} = [I - B(CB)^{-1}C] Ae. \quad (2.22)$$

Pour assurer la stabilité asymptotique du système contrôlé, le vecteur  $C$  doit être choisi de telle sorte que les parties réelles des valeurs propres de la matrice  $[I - B(CB)^{-1}C] A$  soient toutes négatives. Dans. Le contrôleur en mode glissant est proposé de la forme :

$$\dot{s} = -q \operatorname{sgn}(s) - ks, \quad (2.23)$$

d'où  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  est la fonction signe, et  $q, k > 0$ , sont des constantes. Dans ce cas, Le contrôleur  $v$  est donné par

$$v = -(CB)^{-1}[C(kI + A)e + q \operatorname{sgn}(s)], \quad (2.24)$$

ce qui est équivalent à

$$v = \begin{cases} -(CB)^{-1}[C(kI + A)e + q], & \text{si } s(e) > 0 \\ -(CB)^{-1}[C(kI + A)e - q], & \text{si } s(e) < 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

**Théorème 2.2.1** *Le système maître (2.14) et le système esclave (2.15) sont globalement synchronisés par le contrôleur*

$$u = Bv - \eta(x, y), \quad (2.26)$$

d'où  $v$  est défini par (2.24),  $(A, B)$  soit contrôlable et  $q, k > 0$ .

**Preuve.** Pour observer la zero-stabilité de la dynamique de l'erreur de synchronisation, on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$v = \frac{s^2}{2} \quad (2.27)$$

d'où

$$\dot{V} = -ks - q \operatorname{sgn}(s)s, \quad (2.28)$$

puisque  $\operatorname{sgn}(s)$  est toujours positive tant que  $e \neq 0$  et  $k, q > 0$ , alors  $\dot{V} < 0$ . Ainsi, par la théorie de la stabilité de Lyapunov, il est immédiat que la dynamique d'erreur (2.15) est globalement asymptotiquement zéro-stable. Par conséquent, il en résulte que le système maître (2.14) et le système esclave (2.15) sont globalement synchronisés. ■

## 2.3 Différents types de synchronisation

Il existe deux types de synchronisation identique et non identique.

Ce chapitre est basé essentiellement sur la synchronisation généralisée.

### 2.3.1 La synchronisation identique

Pour illustrer la méthode de synchronisation par couplage entre deux systèmes chaotiques, on a choisi de présenter la synchronisation identique proposée par Pecora et Carroll [6]. Celle-ci a l'avantage de représenter une solution simple et performante de synchronisation, dont l'objectif est que l'esclave reproduise le plus fidèlement possible l'état du maître, après un régime transitoire. Considérons un système dynamique autonome, en temps continu, de dimension  $n$ , représenté par la relation suivante :

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) \quad (2.29)$$

Où  $x = [x_1, \dots, x_n]^T$

Par la suite on divise le système initial en deux sous-systèmes  $\{S_1, S_2\}$  :

$$\begin{cases} S_1 : x^{\{1\}} = F^{\{1\}} [x^{\{1\}}, x^{\{2\}}] \\ S_2 : x^{\{2\}} = F^{\{2\}} [x^{\{1\}}, x^{\{2\}}] \end{cases} \quad (2.30)$$

avec les états et les dynamiques définis conformément aux relations suivantes :

$$x = [x^{\{1\}}, x^{\{2\}}]^T \quad (2.31)$$

$$x^{\{1\}} = [x_1, \dots, x_m]^T$$

$$x^{\{2\}} = [x_{m+1}, \dots, x_n]^T$$

$$F(x) = [F^{\{1\}}(x); F^{\{2\}}(x)] \quad (2.32)$$

Bien sûr, cette opération peut être réalisée de manière arbitraire avec une réorganisation des variables d'état dans un ordre quelconque. On considère maintenant un deuxième sous-système  $S_2^1$  caractérisé par une dynamique identique  $F^{\{2\}}$ , et un vecteur d'état  $\hat{x}^{\{2\}}$  :

$$S_2^1 : \hat{x}^{\{2\}} = F^{\{2\}}(x^{\{1\}}, \hat{x}^{\{2\}}) \quad (2.33)$$

On peut dire que ce sous-système réplique  $S_2^1$ , est un candidat susceptible de se synchroniser avec la dynamique complète initiale. Pecora et Carroll ont démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que cette proposition soit vraie, est que le sous système  $S_2^1$  soit stable. Cette hypothèse qui est équivalente à la condition de l'ensemble des coefficients Lyapunov du sous-système  $S_2^1$  qui sont négatifs.

Une synchronisation parfaite peut alors être accomplie ; les trajectoires étant asymptotiquement convergentes :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \hat{x}^{\{2\}}(t) - x^{\{2\}}(t) \right\| = 0 \quad (2.34)$$

Dans le cas pratique où la variance de ce bruit d'observation est significative, l'équation (2.34) qui traduit la convergence asymptotique ne reste plus valable. Dans ce cas on doit utiliser une approche de synchronisation généralisée.

Semblent tous les types de synchronisation (la synchronisation généralisée, la synchronisation identique). Elle est basée sur les propriétés d'accouplement de deux systèmes ou plus, si ces systèmes sont identiques, on parle de la synchronisation identique, et s'ils sont différents

on parle de la synchronisation généralisée.

**Définition 2.3.1** *Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques identiques liés par un accouplement unidirectionnel, et représentés par les équations suivantes :*

$$\dot{X} = f(X, t) \quad (2.35)$$

$$\dot{y} = g(X, Y, t) \quad (2.36)$$

On dit qu'il y a une synchronisation identique entre ces deux systèmes si :

$$\lim |Y(t) - X(t)| = 0, \text{ pour } t \rightarrow \infty \quad (2.37)$$

pour toutes conditions initiales  $X(0), Y(0)$ , des deux systèmes.

**Remarque 2.3.1** *Cette définition est toujours valable si on applique la méthode de **Carroll** et de **Pecora** [5], il suffit de mettre la condition (2.37) sous la forme :*

$$\lim |Y(t) - X_2(t)| = 0, \text{ pour } t \rightarrow \infty$$

D'après cette définition on peut conclure que l'étude de la synchronisation nous ramène à l'étude de la stabilité au voisinage de l'origine d'un nouveau système à qui on donne le nom du "système erreur". Ce dernier représente la perturbation qui peut exister entre le système émetteur et le système récepteur. La question qu'on peut poser ici : est-ce que cette perturbation va tendre vers le zéro exponentiellement ou non. A cet effet, on va supposer que la petite perturbation entre les deux systèmes est donnée par l'équation :

$$e = Y - X$$

L'évolution de cette dernière par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{de}{dt} = g(X, Y) - f(X) \quad (2.38)$$

On a obtenu un système dynamique, et on va étudier sa stabilité, et pour cela il suffit de

– Linéariser le système (2.38) au voisinage de ces points d'équilibre.

Il est bien clair que le seul point d'équilibre est le point  $X = Y$ . Alors la linéarisation

du système (2.38) nous donne :

$$\frac{de}{dt} = J(X).e \quad (2.39)$$

Avec

$$J(X) = \left[ \frac{\partial g(X, Y)}{\partial Y} \right]_{Y=X}$$

la matrice jacobienne associée.

- Utiliser la dixième méthode de Lyapunov, pour cela il suffit de choisir une fonction qui vérifie les conditions nécessaires de stabilité.
- Calculer les exposants de Lyapunov du système récepteur pour garantir sa stabilité asymptotique.

### 2.3.2 La synchronisation généralisée

Dans le concept de la synchronisation identique sous l'effet d'accouplement unidirectionnel il a été indiqué que le système récepteur est identique ou presque identique au système émetteur. Cependant, on va essayer d'imaginer la situation pratique intéressante où le système récepteur est différent du système émetteur.

En général, quand il existe une différence essentielle entre les systèmes couplés, on ne peut pas être sûr du premier coup d'oeil d'affirmer que les systèmes chaotiques non identiques peuvent être synchronisés, mais plusieurs travaux ont démontré que ce type de synchronisation chaotique peut exister en généralisant le concept de la synchronisation

pour inclure la non identification entre les systèmes couplés, et on a appelé ce phénomène **la synchronisation généralisée**.

Pour définir la synchronisation généralisée pour deux systèmes chaotiques couplés unidirectionnellement, on va travailler avec des systèmes non-linéaires composés d'un système émetteur autonome avec les variables dynamiques  $x$  dans un espace de phase  $X$  couplé à un système récepteur avec des variables dynamiques  $y$  dans l'espace d'état  $Y$ .

La dynamique des systèmes émetteur et récepteur est donnée par :

$$\dot{x} = F(x(t)) \tag{2.40}$$

$$\dot{y} = G(y(t), g, x(t)) \tag{2.41}$$

avec  $g$  une constante qui caractérise la force d'accouplement unidirectionnel.

**Définition 2.3.2** *Quand  $g \neq 0$ , on dit que les deux systèmes chaotiques (2.40), et (2.41) sont synchronisés dans un sens généralisé s'il y a une transformation  $\gamma : X \rightarrow Y$  qui prend les trajectoires de l'attracteur de l'espace  $X$  dans les trajectoires de l'attracteur de l'espace  $Y$ , pour que  $y(t) = \gamma(x(t))$ , et si cette transformation ne dépend pas des conditions initiales du système récepteur  $y(0)$  dans le bassin d'attraction de l'attracteur synchronisé.*

**Remarque 2.3.2** *On souligne que dans cette définition de synchronisation généralisée que l'existence de transformation est exigée seulement pour les trajectoires sur l'attracteur.*

La transformation n'est pas exigée d'exister pour les trajectoires passagères. Plusieurs méthodes ont été proposées pour détecter et étudier la stabilité de la synchronisation généralisée, mais on va proposer une de ces méthodes qui est connue sous le nom de "Le système auxiliaire approché".

### La méthode du système auxiliaire approché

Le principe de cette méthode est basé sur le fait que si le même système émetteur  $x(t)$  conduit deux systèmes récepteurs identiques  $y(t)$  et  $z(t)$  qui commencent par des conditions initiales différentes dans le bassin d'attraction, alors l'analyse de stabilité de la synchronisation dans l'espace  $X \oplus Y$ , qui peut en général avoir une forme très compliquée  $y(t) = (x(t))$ , peut être remplacée par l'analyse de la stabilité tout à fait simple  $z(t) = y(t)$  dans l'espace  $Z \oplus Y$ .

A cet effet on va supposer le système auxiliaire suivant

$$\dot{z} = G(z(t), g, x(t)) \quad (2.42)$$

qui est identique au système récepteur (2.41). Clairement, quand le système récepteur (2.41) et son auxiliaire (2.42) ont le même signal émetteur  $x(t)$ , alors les champs (domaines) vectoriels dans les espaces de phase du récepteur et des systèmes auxiliaires sont identiques et les systèmes peuvent se développer sur des attracteurs identiques.

Il est facile de montrer que la stabilité linéaire du collecteur  $z(t) = y(t)$  est équivalente à la stabilité linéaire du collecteur des mouvements synchronisés dans  $X \oplus Y$ . Les équations linéarisées qui dirigent l'évolution des quantités  $y(t) = y(t) - (x(t))$  et  $z(t) = z(t) - (x(t))$ , sont :

$$\dot{y}(t) = DG((x(t)), g, x(t)) \cdot y(t) \quad (2.43a)$$

$$\dot{z}(t) = DG((x(t)), g, x(t)) \cdot z(t) \quad (2.44a)$$

avec

$$DG(\omega, h_u(t)) = \frac{\partial G(\omega, h_u(t))}{\partial \omega} \quad (2.45)$$

Puisque les équations linéarisées pour  $y(t)$  et  $z(t)$  sont identiques, les équations linéarisées pour  $z(t) - y(t) = z(t) - y(t)$  ont la même matrice Jacobienne  $DG(., g, x(t))$  que dans l'équa-

tion précédente. Donc, si le collecteur des mouvements synchronisés dans  $X \oplus Y \oplus Z$  est linéairement stable pour  $z(t) - y(t)$ , alors il est linéairement stable pour  $y(t) - x(t)$  et vice versa. Notons que l'équation linéarisée pour  $z(t) - y(t)$  est identique à l'équation qui définit les exposants de Lyapunov conditionnels pour le système récepteur. Ainsi, quand le collecteur  $z = y$  est linéairement stable, les exposants de Lyapunov conditionnels pour le système émetteur, conditionnés sur la valeur du système récepteur  $x(t)$ , sont tous négatifs.

# Chapitre 3

## Synchronisation de deux différents systèmes chaotiques par la méthode du système auxiliaire approché

### 3.1 Synchronisation entre le système de Chen et celui de Lü

#### 3.1.1 Analyse théorique

Dans ce paragraphe on va prendre deux systèmes chaotiques différents, le premier est le système de Chen :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = (c - a)x - xz + cy, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases}$$

où  $(a, b, c) = (35, 3, 28)$ .

Le deuxième est le système de Lü :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = \delta y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases}$$

où  $(\lambda, \beta, \delta) = (36, 3, 20)$  et on va détecter la synchronisation au moyen d'un système auxiliaire.

Pour cela on va supposer le système émetteur de Chen suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a(y_1 - x_1), \\ \frac{dy_1}{dt} = (c - a)x_1 - x_1z_1 + cy_1, \\ \frac{dz_1}{dt} = x_1y_1 - bz_1, \end{cases} \quad (3.1)$$

On va supposer le système de Lü comme un système récepteur

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = \lambda(y_2 - x_2) - k_1(x_2 - x_1), \\ \frac{dy_2}{dt} = \delta y_2 - x_2z_2 - k_2(y_2 - y_1), \\ \frac{dz_2}{dt} = x_2y_2 - \beta z_2 - k_3(z_2 - z_1), \end{cases} \quad (3.2)$$

$k_1, k_2, k_3$  sont des nombres réels positifs. Le système émetteur est couplé avec le système récepteur par les trois scalaires  $x(t), y(t)$  et  $z(t)$ , on choisit le système auxiliaire, qui est identique au système récepteur (3.2) comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx_3}{dt} = \lambda(y_3 - x_3) - k_1(x_3 - x_1) \\ \frac{dy_3}{dt} = \delta y_3 - x_3z_3 - k_2(y_3 - y_1) \\ \frac{dz_3}{dt} = x_3y_3 - \beta z_3 - k_3(z_3 - z_1) \end{cases} \quad (3.3)$$

pour  $e_x = x_3 - x_2, e_y = y_3 - y_2, e_z = z_3 - z_2$  la soustraction des deux systèmes (3.2) et

(3.3), nous donnons le système erreur suivant :

$$\begin{cases} \frac{de_x}{dt} = \lambda(e_y - e_x) - k_1 e_x \\ \frac{de_y}{dt} = \delta e_y - z_2 e_x - x_3 e_x - k_2 e_y \\ \frac{de_z}{dt} = x_3 e_y - y_2 e_x - \beta e_z - k_3 e_z \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{de_x}{dt} \\ \frac{de_y}{dt} \\ \frac{de_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda - k_1 & \lambda & 0 \\ 0 & \delta - k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta - k_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -z_2 e_x - x_3 e_x \\ x_3 e_y + y_2 e_x \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Le système (3.5) peut être écrit sous forme matricielle comme le suivant :

$$\begin{pmatrix} \frac{de_x}{dt} \\ \frac{de_y}{dt} \\ \frac{de_z}{dt} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} + f(x, y, z), \quad (3.6)$$

où

$$B = \begin{pmatrix} -\lambda - k_1 & \lambda & 0 \\ 0 & \delta - k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta - k_3 \end{pmatrix}$$

et

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -z_2 e_x - x_3 e_x \\ x_3 e_y + y_2 e_x \end{pmatrix}$$

est une fonction non linéaire satisfait la condition de Lipschitz, donc au voisinage de zéro, elle converge vers zéro. Pour étudier la stabilité du système (3.6), nous utilisons les conditions de critère de Routh-Hurwitz généralisées à l'ordre entier. Le polynôme caractéristique

de la matrice  $B$  est donné par :

$$\begin{aligned}
 P(x) = & x^3 + (\beta + \lambda - \delta + k_1 + k_2 + k_3)x^2 + \\
 & ((\beta + k_3)(\lambda - \delta + k_1 + k_2) - (\lambda + k_1)(\delta + k_2))x \\
 & - (\lambda + k_1)(\beta + k_3)(\delta - k_2)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

**Proposition 3.1.1** *Si  $k_2 > \delta$  et quels que soient  $k_1$  et  $k_2$  des réels positifs, alors la synchronisation, au sens généralisé, entre les systèmes (3.1) et (3.2) est achevée.*

**Preuve.** On note par  $a_1 = \beta + \lambda - \delta + k_1 + k_2 + k_3$  et  $a_2 = (\beta + k_3)(\lambda - \delta + k_1 + k_2) - (\lambda + k_1)(\delta + k_2)$  et  $a_3 = -(\lambda + k_1)(\beta + k_3)(\delta - k_2)$  ■

Il est clair que si  $k_2 > \delta$ , alors  $a_1 > 0$  et  $a_2 > 0$  et aussi  $a_1 a_2 - a_3 > 0$ .

### 3.1.2 Simulation numérique

Les systèmes couplés (3.1) et (3.2) sont intégrés numériquement avec les valeurs des paramètres  $a = 35, b = 3$  et  $c = 28$ , pour le système (3.1),  $\lambda = 36, \beta = 3$ , et  $\sigma = 20$  pour le système (3.2). En sélectionnant les paramètres "feedback control"  $k_1 = 15, k_2 = 25$  et  $k_3 = 20$ , qui satisfont  $a_1 > 0, a_2 > 0$  et aussi  $a_1 a_2 - a_3 > 0$ .

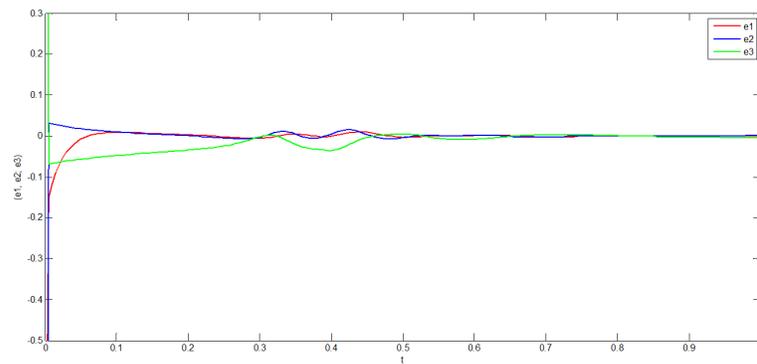


FIG. 3.1 – La synchronisation entre le système de Chen et celui de Lü est réalisée avec et les paramètres  $k_1 = 15$ ,  $k_2 = 25$  et  $k_3 = 20$

# Conclusion

On a étudié dans ce mémoire la synchronisation non identique entre deux systèmes chaotiques au moyen d'un système auxiliaire des systèmes, pour atteindre l'objectif de cet étude nous avons divisé notre thèse en trois chapitres :

- Le premier chapitre est consacré à la présentation des notions de base sur les systèmes dynamiques tels que : Points d'équilibre, les attracteurs et ses différents types, la théorie de bifurcation, la théorie de chaos et ses caractéristiques et notions de stabilité.
- Le deuxième chapitre est dédié à la théorie de la synchronisation où nous avons donné des définitions de la synchronisation, Ensuite nous avons présenté des différentes méthodes de la synchronisation et les différents types de la synchronisation (synchronisation identique, la synchronisation généralisée) et on a proposé une méthode de synchronisation de deux différents systèmes chaotiques, appelée la méthode de synchronisation par un "système auxiliaire", en se basant sur le critère de Routh-Hurwitz, pour garantir la stabilité du système erreur.
- Dernier chapitre est une application de la méthode choisie sur deux systèmes différents le premier est le système de Chen tandis que le deuxième est celui de Lü et on a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour achever leur synchronisation.

# Bibliographie

- [1] Arkady Pikovsky, Michael Roesenblum et Jurgen Kurths, "synchronization A universal concept in nonlinera sciences", Cambridge university press 2001.
- [2] Edward Ott, " Chaos in dynamical systems", Cambridge university press, 2002.
- [3] Heinz George Schuster et Wolfram Just, " Deterministic chaos", Wiley-VCH Verlag Gmbh and Co. KGaA.
- [4] Jules Haag, "la synchronisation des systèmes oscillants non linéaires.", Annales scientifiques de l'E.N.S, 3 éme série, tome 67 (1950), p.(321-392).
- [5] Kazunori Aoki, "Nonlinear dynamics and chaos in semiconductors", Series in condensed matter physids 2001
- [6] Li, X., Zhao, L., Zhao, G. (2005), "Sliding mode control for synchronization of chaotic systems with structure or parameters mismatching," J. Zhejiang University Science, Vol. 6(6), pp 571-576.
- [7] Tan, X., Zhang, J., Yang, Y. (2003), "Synchronizing chaotic systems using backstepping design," Chaos Solitons Fractals, Vol. 16, pp. 37–45.
- [8] U. E. Vincent, "Synchronization of identical and non identical 4-D chaotic systems using active control," Chaos. Solitons and Fractals, Vol. 37, pp. 1065-1075, 2008.
- [9] Yassen, M.T. (2005), "Chaos synchronization between two different chaotic systems using active control," Chaos Solitons Fractals, Vol. 23 (1), pp. 131–140.

# Annexe A : Critères de Routh-Hurwitz

Critère algébrique qui permet la détermination de la stabilité de système sans connaître les pôles.

Soit un polynôme de la forme :

$$D(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

On pose :

$$\begin{array}{c|c}
 \begin{array}{c} x^n \\ x^{n-1} \\ x^{n-2} \\ x^{n-3} \\ \dots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^0 \end{array} & \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdot & \cdot \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdot & \cdot \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdot & \cdot \\ \dots & & & & \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdot & \cdot \end{bmatrix}
 \end{array} \leftarrow \text{La matrice de Routh}$$

On calcul :

$$A_{11} = \frac{-\det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix}}{a_{n-1}}, \quad A_{12} = \frac{-\det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{bmatrix}}{a_{n-1}},$$

$$A_{13} = \frac{-\det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{bmatrix}}{a_{n-1}}, A_{21} = \frac{-\det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}}{A_{11}},$$

$$A_{22} = \frac{-\det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ A_{11} & A_{13} \end{bmatrix}}{A_{11}}, A_{23} = \frac{-\det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ A_{11} & A_{14} \end{bmatrix}}{A_{11}},$$

$$A_{ij} = \frac{-\det \begin{bmatrix} a_{i-2,1} & a_{i-2,j+1} \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,j+1} \end{bmatrix}}{a_{i-1,1}}$$

– **Condition nécessaire pour la stabilité de système :**

Tous les coefficients sont positifs ou ils ont le même signe.

Si un des coefficients est zéro ,ou négatif , et au moins un autre coefficient est positif, il existe au moins une racine imaginaire avec une partie réelle positive.

– **Conditions suffisante pour la stabilité du système :**

Tous les éléments de la première colonne de Routh sont positifs, ou ils ont le même signe. Donc la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité du système est que les coefficients du pôleynme caractéristique et les éléments de la première colonne de Routh doivent être positifs ou doivent avoir le même signe.

Pour un pôleynome d'ordre 3, le critère de Routh va devenir : si

$$a_2 > 0, a_1 > 0, a_2 a_1 - a_0 > 0$$

alors les racines du pôleynome

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

sont à parties réelles négatives.