Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département des Sciences de la Matière

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine des Sciences de la Matière
Filière de Physique

Spécialité Physique Energétique

Réf. : Entrez la référence du document

Présenté et soutenu par :
Abboude Mouna

Le : mardi 25 juin 2019

Traitement de quelques systèmes microscopiques dans le modèle quantique de Snyder

---

Jury :

Dr	*Djamel Belamri*	*MCB*	*Université Med Khider- Biskra*	*Président*
Dr	*Falek Mokhtar*	*MCA*	*Université Med Khider- Biskra*	*Rapporteur*
Dr	*Haif Khaif Ouanassa*	*MCB*	*Université Med Khider- Biskra*	*Examinateur*

Année universitaire : 2018-2019

Dédicaces

Après avoir rendu grâce à DIEU qui m'a permis d'accomplir ce mémoire Je dédie ce modeste travail :

A mes parents. Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour Dont ils ne cessent de me combler.

Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

A mes sœurs et mes frères

A tous mes amis

Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible, je vous dis merci.

Remerciements

Je remercie en premier lieu Dieu tout puissant pour avoir m'accordé
la puissance et la volonté de terminer ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur Monsieur Falek Mokhtar Maître de conférences (A) à l'université de Biskra qui 'a dirige ce mémoire, pour son assistante et son suivi tout au long de cette étude.

Je remercie chaleureusement Monsieur Djamel Belamri Maître de conférences (B) à l'université de Biskra de m'avoir fait

L'honneur de Président le jury de ce mémoire.

J'exprime ma profonde et respectueuse gratitude à Madame Haif Khaif Ouanassa Maître de conférences (B) à l'université de Biskra, pour avoir participé avec intérêt à mon jury de mémoire en qualité d'examinatice.

Ces remerciements vont aussi au corps professoral et administratif dela

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie Université

Med Khider Biskra. Un grand merci à mes professeurs et mes collègues de la spécialité physique des Matériaux de Biskra, Promotion 2019

Soyez assuré de ma profonde gratitude.

Table des matières

Introduction générale

Introduction générale:

Historiquement, la théorie de la mécanique quantique a rencontré d'énormes succès pour la description de la physique à très petite échelle (physique atomique et physique des particules) ainsi que la recherche des solutions exactes des équations d'onde, dans un cadre non relativiste ou dans un contexte relativiste, continue de susciter l'intérêt des chercheurs parallèlement au développement des modèles de potentiels proposés pour décrire des interactions nucléaires en physique nucléaire ou des interactions inter-atomiques en physique atomique ou moléculaire et en chimie quantique.

Depuis longtemps, l'équation de Schrödinger présentée par le physicien autrichien Erwin Schrödinger en 1926 a été reconnue comme un outil essentiel pour l'étude des atomes, les noyaux, les molécules et leurs comportements spectraux. Pour cela plusieurs efforts ont été déployés pour trouver la solution exacte (la fonction d'état) de cette équation non relativiste pour divers potentiels décrivant la nature de liaison ou la nature de vibration des systèmes quantiques. Pendant les dernières années, au niveau d'une échelle microscopique, beaucoup de chercheurs continuent d'étudier cette fascinante équation ayant une large application sur plusieurs domaines de physique théorique.

D'une part, il est bien connu que l'oscillateur harmonique représente un modèle physique fondamental, qui contient des états liés avec une énergie résiduelle non nulle, qui explique l'effet de confinement quantique dans le domaine de la physique nucléaire. Ce système possède une solution analytique et qui est la "brique de base" pour le développement de modèle plus complexes, notamment pour la description de la dynamique des cristaux, et pour les vibrations internes de molécules [1]

En d'autre part, les systèmes à deux dimensions jouent un rôle primordial à l'échelle nanométrique. Notamment, les systèmes non relativistes décrivant la dynamique d'une particule chargée confinée et soumise à l'action d'un champ magnétique externe et uniforme qui ont suscités un intérêt considérable grâce à leurs diverses applications dans différents domaines de la physique et de la chimie des matériaux. [2], les structures semi-conductrices [3], physiques moléculaires et spectroscopie [4].

Durant les dernières années, au niveau d'une échelle microscopique de haute énergie, beaucoup de théories ont été consacrées à l'étude des problèmes de théorie quantique des champs caractérisée par le non localité des processus physiques, pour absorber les infinis entachant les théories de champs standards. Notamment, la théorie de la géométrie non commutative qui a été suggérée que n'importe quel schéma d'unification des interactions fondamentales de la physique devrait en principe contenir des effets du non commutativité de l'espace décrivant le non localité des phénomènes quantiques. Ceci est l'un des arguments récemment proposé dans le modèle de Snyder qui a suggéré que les mesures en mécanique quantique non commutative peuvent être régis par un principe d'incertitude généralisée (GUP) [5], admettant une échelle de longueur fondamentale supposée être dans l'ordre de Planck comme celle proposée par Kempf [6],[7], qui nous conduit à une incertitude minimale non nulle dans la mesure de la position. Récemment, il existe un intérêt croissant à l'étude des solutions exactes de ce type de problème dans le contexte de la mécanique quantique ordinaire et déformée telle que l'oscillateur de Schrödinger à deux dimensions dans un champ magnétique externe[8].

Le but de ce travail est principalement d'examiner l'influence de la déformation spatiale due au formalisme quantique de Snyder sur la mécanique quantique non relativiste via une étude explicite de deux systèmes différents: l'oscillateur harmonique tridimensionnel de Schrödinger et le mouvement oscillatoire d'une particule non relativiste confinée et soumise à l'action d'un champ magnétique externe et uniforme dans un espace ordinaire et déformé.

Dans ce mémoire, après une introduction générale nous avons articulé l'essentiel de notre travail sur trois chapitres:

Le premier chapitre, est considéré comme un bref rappel sur l'équation de Schrödinger à trois dimensions dans l'espace ordinaire des positions et également au modèle quantique de Snyder.

Le deuxième chapitre est concentré sur la résolution exacte de l'équation tridimensionnelle de l'oscillateur harmonique de Schrödinger et aussi de l'équation de Schrödinger décrivant la dynamique oscillatoire d'une particule non relativiste en présence d'un champ magnétique externe et uniforme à trois dimensions dans un espace ordinaire des positions et des moments.

Le troisième chapitre est consacré à une étude explicite des systèmes en question qui ont décrit par les mêmes équations des mouvements du chapitre précédent dans le cadre de la mécanique quantique déformée via le modèle de Snyder.

A la fin on termine notre travail par une conclusion générale.

Chapitre I: Introduction sur l’équation de Schrödinger et le modèle quantique de Snyder

I-1.Introduction:

L'équation de Schrödinger, conçue par le physicien autrichien Erwin Schrödinger, est une équation fondamentale en mécanique quantique. Elle décrit l'évolution dans le temps d'une particule massive non relativiste, et remplit ainsi le même rôle que la relation fondamentale de la dynamique en mécanique classique.

En1925, Erwin Schrödinger a introduit une équation du second ordre pour expliquer la nature ondulatoire de la matière. Qui suppose que la particule se comporte comme une onde électromagnétique en termes d'une fonction appelée la fonction d'onde. Lorsque cette équation est résolue, elle donne deux choses; à savoir la fonction d'onde Ψ et l'énergie E de la particule considérée. Une fois la fonction d'onde Ψ est connue, tout ce qui concerne la particule est connue et peut être déduite à partir de cette fonction d'onde. En d'autre terme, la fonction d'onde Ψ est la chose la plus importante, qui lui-même n'a pas de signification physique, mais son carré absolu, à savoir $|\Psi|^2$ donne la probabilité du temps.

I.2.L'équation de Schrödinger stationnaire :

Il est bien connu que l'équation de Schrödinger est l'équation fondamentale de la mécanique quantique. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles qui d'écrit l'évolution au cours du temps de la fonction d'onde d'un système physique, d'où elle s'écrit sous la forme suivante

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \qquad \text{(I.1)}$$

Avec H est l'opérateur Hamiltonien (associé à l'´energie totale) du système considéré qui est définit par la somme des opérateurs d'énergie cinétique et potentielle:

$$H(r,t) = T + V(r,t) \qquad \text{(I.2)}$$

On note ici que l'opérateur Hamiltonien dépond donc du temps si les potentiels qui entrent en jeu dépendent eux-mêmes explicitement du temps et lorsque l'opérateur H ne dépend pas du temps. On est ramené d' séparation les variables spatiales et temporelle à une équation aux valeurs propres, appelée équation de Schrödinger stationnaire. Par contre si

L'Hamiltonien est en fonction du temps, on est obligé de résoudre l'équation de Schrödinger dépendant du temps. C'est le cas par exemple lorsqu'on traite certains

Problèmes de manière semi-classique ou quand on étudie l'effet sur un atome ou une molécule d'un champ électrique extérieur variable. Il est également parfois intéressant de résoudre l'´equation de Schrödinger dépendant du temps même si les potentiels ne dépendent pas du temps. On peut citer entre autres les problèmes de calcul de coefficients de transmission au travers de barrières de potentiel [9]. Maintenant afin de définir la fonction d'onde Ψ(r) associée à une particule mobile dans un champ à symétrie sphérique V(r) dans le cadre des systèmes tridimensionnels indépendants du temps, on doit résoudre l'équation de Schrödinger

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar}[E - V(r)]\psi = 0 \qquad \text{(I.3)}$$

Où ħ est la constante de Planck, m est la masse de la particule et V (r) désigne l'énergie potentielle, avec Δ est connu comme le Laplacien de la fonction ψ.

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \qquad \text{(I.4)}$$

Dans la mécanique classique tridimensionnelle, l'énergie totale est appeléle Hamiltonien classique:

$$H(r,p) = \frac{p^2}{2m} + V(r) \qquad \text{(I.5)}$$

Lorsqu'on met le passage suivant$(x \to \hat{x}, y \to \hat{y}, z \to \hat{z}),(p_x \to \hat{p}_x, p_y \to \hat{p}_y, p_z \to \hat{p}_z)$ nous obtenons facilement la formule quantique de l'Hamiltonien (I.5) comme suit:

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V(r) \qquad \text{(I.6)}$$

Où l'opérateur pour la position: $\hat{x}\psi = x\psi, \hat{y}\psi = y\psi, \hat{z}\psi = z\psi$, L'opérateur pour la quantité de mouvement:

$$\hat{p}_x\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x} \ , \hat{p}_y\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial y} \ \ , \hat{p}_z\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial z} \qquad \text{(I.7)}$$

Il existe certains états, appelés "*états stationnaires*" ou "*états propres du Hamiltonien*", pour lesquels l'action du hamiltonien donne l'énergie du système :

$$H\psi(x) = E\psi(x) \qquad \text{(I.8)}$$

Où $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)$ est l'opérateur Hamiltonien associé à l'énergie E.

Comme le potentiel V(r) dans l'équation (I.3) dépend uniquement de la distance r, ceci suggère qu'on peut représenter en coordonnées sphériques, à la place des coordonnées cartésiennes. Pour cela nous rappelons la relation entre les deux représentations par les définitions suivantes

$$x = r sin\theta cos\varphi \qquad \text{(I.9)}$$

$$y = r sin\theta sin\varphi \qquad \text{(I.10)}$$

$$z = r cos\theta \qquad \text{(I.11)}$$

Où $(0 \leq r < \infty), (0 \leq \theta \leq \pi), (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$.

Où le laplacien prend la forme suivante:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \ \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \qquad \text{(I.12)}$$

On note ici que le premier terme dépend seulement de r, ce qui nous donne un certain espoir selon une approche basée sur la séparation des variables pour résoudre le problème en question.

A la lumière de cette approche, comme une première étape, on écrit la fonction d'onde $\psi(r,\theta,\varphi)$ comme un produit de deux fonctions

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi) \qquad \text{(I.13)}$$

Par une substitution dans l'équation (I.8), on au :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[Y(\theta,\varphi)\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)R(r) + R(r)\frac{1}{r^2 sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]Y(\theta,\varphi)\right] - [E - V(r)]R(r)Y(\theta,\varphi) = 0 \qquad \text{(I.14)}$$

En divisant par R(r)$Y(\theta,\varphi)$, on obtient (après multiplication par r²):

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2}[E - V(r)] = -\frac{1}{Ysin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]Y \qquad \text{(I.15)}$$

Nous remarquons que le membre de gauche dépond seulement de r, et le membre de droite dépond seulement de $\theta\ et\varphi$, donc les deux membres s'identifient à une constante, laquelle on peut définir comme $\ell(\ell+1)$, ceci nous conduit aux équations différentielles suivantes:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2}[E - V(r)]R(r) = l(l+1)R(r) \qquad \text{(I.16)}$$

Et $$-\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]Y(\theta,\varphi) = l(l+1)Y(\theta,\varphi) \qquad \text{(I.17)}$$

La première équation est appelée l'équation radiale, et la seconde équation est appelée l'équation angulaire. D'après les expressions (I.16) et (I.17), la solution de l'équation radiale dépond évidemment du choix de V(r), mais l'équation angulaire est universelle et valide pour tout potentiel central.

En mécanique quantique, dans l'équation de Schrödinger radiale qui décrit le mouvement d'une particule non relativiste plongée dans un potentiel central V(r), le laplacien s'écrit en coordonnées sphérique sous la forme

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \qquad (I.18)$$

Où nous avons utilisé l'expression suivante :

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \qquad (I.19)$$

Avec L désigne le moment cinétique orbital.

A cet égard, il est connue que les fonctions propres de L^2 sont des fonctions appelée les harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta,\varphi)$ ayant pour valeurs propres $\hbar^2 l(l+1)$avec l= 1,2, …et m varie entre $-l\ et + l$ On a alors

$$L^2 Y_l^m(\theta,\varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta,\varphi) \qquad (I.20)$$

Ainsi l'équation de Schrödinger devient comme:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} + V(r)\right]\psi(r,\theta,\varphi) = E\psi(r,\theta,\varphi) \qquad (I.21)$$

On voit que :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} + V(r) \qquad (I.22)$$

Ne dépond que de variable r seulement, et donc l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}+V(r)\right]R(r)=ER(r) \qquad (I.23)$$

Qui peut être réécrite sous la forme:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{\hbar^2}{m}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}+V(r)\right]R_{n,l}(r)=E_{n,l}R_{n,l}(r) \qquad (I.24)$$

Maintenant, si nous posons $S_{n,l}(r)=rR_{n,l}(r)$. La fonction $S_{n,l}(r)$ vérifie alors l'équation différentielle

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}+V(r)\right]S_{n,l}(r)=E_{n,l}S_{n,l}(r) \qquad (I.25)$$

On remarque ici que cette équation a la même forme que pour un système unidimensionnel sauf qu'à l'énergie potentielle V(r) s'ajoute le terme $\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}$ que l'on peut appeler terme de force centrifuge et qui s'annule pour l = 0 [10].

I-3:Le modèle quantique de Snyder:

Historiquement, à l'échelle microscopique de haute énergie, plusieurs scénarios ont été proposés pour étudier les systèmes déformés de la mécanique quantique à petite échelle afin d'absorber les infinis entachant les théories du champ standard. Notamment le modèle de Snyder, qui suggère que les mesures en mécanique quantique non commutative peuvent être régies par un principe d'incertitude généralisée (GUP) [5], admettant une échelle de longueur fondamentale supposée être dans l'ordre de la longueur de Planck qui nous conduit à une incertitude minimale non nulle dans la mesure de la position. Cela a été motivé par des géométries non commutatives [11].

Dans l'espace de Snyder, les relations de commutation entre les opérateurs de position $\hat{x}_i$et les opérateurs de moment $\hat{p}_i$ sont écrites comme suit :

$$[\hat{x}_i,\hat{x}_j]=i\hbar\beta^2\hat{J}_{i,j} \qquad [\hat{p}_i,\hat{p}_j]=0 \qquad [\hat{x}_i,\hat{p}_j]=i\hbar\left(\delta_{i,j}+\beta^2\hat{p}_i\hat{p}_j\right) \qquad (I.26)$$

D'après ces relations de commutation déformées, il est facile de voir qu'ils peuvent être réalisés en introduisant des opérateurs auxiliaires $\hat{x}_i$ et $\hat{p}_i$ obéissant à des relations de commutation canoniques comme.

$$\hat{x}_i = \sqrt{1-\beta^2\hat{P}_K^2}\, X_i, \qquad \hat{p}_i = \frac{\hat{P}_i}{\sqrt{1-\beta^2\hat{P}_K^2}}. \tag{I.27}$$

Le spectre de $\widehat{P}_i$ doit être limité par $\hat{P}_K^2 < 1\,/\,\beta^2$.

Où ces opérateurs quantiques vérifient la relation d'incertitude de Heisenberg suivante (I.26) :

$$\Delta x_i \Delta p_j \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle\left[\widehat{x_i}, \widehat{p_j}\right]\right\rangle\right| = \frac{\hbar}{2}\left[\delta_{i,j} + \beta^2 \Delta p_i \Delta p_j + \beta^2\langle\, \hat{p}_i\rangle\langle\, \hat{p}_i\rangle\right], \tag{I.28}$$

où<> indique la valeur moyenne.

Dans le cas unidimensionnel, les relations d’incertitude se réduisent à:

$$\Delta x_i \Delta p_j \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{x}, \hat{p}]\rangle| = \frac{\hbar}{2}[1 + \beta^2(\Delta p)^2 + \beta^2\langle\hat{p}\rangle^2] \tag{I.29}$$

Ces incertitudes généralisées ont été étudiées de manière approfondie dans la référence [12], où il a été montré qu’elles impliquent l’existence d’une incertitude de la position minimale, donnée par:

$$\Delta x_M = \hbar\beta\sqrt{1-\beta^2\langle\hat{p}\rangle^2} \tag{I.30}$$

Sa valeur minimale est obtenue lorsque $\langle\hat{p}\rangle = 0$ comme :

$$\Delta x_0 = \hbar\beta \tag{I.31}$$

En exploitant (I.27), nous pouvons définir les opérateurs de position $\hat{x}$et de moment $\hat{p}$ agissant sur des fonctions définies dans un espace des moments, comme :

$$\hat{p}\psi(P) = p\psi(P) = \frac{P}{\sqrt{1-\beta^2 p^2}}\psi(P), \quad \hat{x}\psi(P) = i\hbar\sqrt{1-\beta^2 p^2}\,\frac{\partial\psi(P)}{\partial P} \qquad \text{(I.32)}$$

Chapitre II: solution exacte de l’équation de l’oscillateur de Schrödinger avec la présence d’un champ magnétique uniforme

II-1: Introduction:

Il est bien connu que la solution exacte de l'équation de Schrödinger et des équations d'ondes non relativistes pour certains potentiels physiques sont très importantes dans plusieurs domaines de la physique et de la chimie puisqu'elles contiennent toutes les informations nécessaires au système quantique étudié. Dans ce chapitre, nous essayons d’étudier le problème tridimensionnel de l'oscillateur harmonique [1] et le mouvement oscillatoire d’une particule non relativiste confinée et soumise à l’action d’un champ magnétique externe uniforme dans le cadre de la mécanique quantique ordinaire [13].

Qui ont suscité un intérêt considérable en raison de leurs diverses applications dans différents domaines de la physique des matériaux et de la chimie [14], structures semi-conductrices, physico-chimie et spectroscopie vibratoire et rotationnelle de la physique moléculaire [15].

II-2: solution de l’équation radiale de l’oscillateur de Schrödinger à trois dimensions

Dans cette partie, nous essayons de traiter explicitement le système de l’oscillateur harmonique à trois dimensions à travers la résolution de l’équation de Schrödinger qui décrit le mouvement d’une particule de masse *m* confinée et soumise à l’action d’un potentiel isotrope dans l’espace de configuration (position) et de moment.

Afin de déterminer les valeurs propres et la fonction d’onde décrivant la dynamique d’une particule non relativiste sous l’action d’un potentiel central de type oscillateur de la forme :

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \qquad \text{(II.1)}$$

L'équation de Schrödinger à trois dimensions peut donc être:

$$\frac{p^2}{2m}\Psi + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \qquad \text{(II.2)}$$

II-2-a: Dans l’espace des positions (r) :

Si on suppose que le potentiel $V(x,y,z)$ est indépendant du temps, on peut utiliser la même méthode de séparation des variables que nous avons utilisée dans le cas du chapitre précédent pour obtenir directement l'équation radiale de Schrödinger (I.16) comme:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left(E-\frac{1}{2}m\omega^2r^2\right)\right)R(r)=l(l+1)R(r) \qquad \text{(II.3)}$$

Donc on aura:

$$\frac{\partial^2R(r)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\left(\frac{2mE}{\hbar^2}-\frac{m^2\omega^2r^2}{\hbar^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R(r)=0 \qquad \text{(II.4)}$$

Pour simplifier la forme de l'équation différentielle (II.4), on substitue la transformation suivante :

$$R(r)=\frac{1}{r}f(r) \qquad \text{(II.5)}$$

Où

$$\frac{\partial R}{\partial r}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{f}{r}\right) \qquad \text{(II.6)}$$

$$\frac{\partial^2R}{\partial r^2}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2f}{\partial r^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{2f}{r^2}\right) \qquad \text{(II.7)}$$

On remplacera l'équation (II.5). (II.6) et(II.7) dans(II.4) nous obtenons:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}-\frac{m^2\omega^2r^2}{\hbar^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\right)f(r)=0 \qquad \text{(II.8)}$$

Maintenant, lorsqu'on met le changement suivant $\rho=(\frac{r}{a})^2$ et les abréviations suivantes :

$$\alpha=\frac{2mE}{\hbar^2} \qquad , \qquad a=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \qquad \text{(II.9)}$$

L'équation (II.8) se transforme à :

$$\left(\rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{l(l+1)}{4\rho}-\frac{\rho}{4}+\frac{\alpha a^2}{4}\right)f(\rho)=0 \qquad \text{(II.10)}$$

Où nous avons utilisé les définitions suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{2r}{a^2} \qquad \text{(II.11)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=\frac{2}{a^2}\left(2\rho\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}+\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) \qquad \text{(II.12)}$$

Pour résoudre cette équation différentielle (II.10), on utilise la transformation suivante:

$$f(\rho)=e^{\frac{\rho}{2}}\rho^{\mathrm{k}}\omega(\rho) \qquad \text{(II.13)}$$

Avec :

$$\frac{\partial f}{\partial\rho}=e^{\frac{\rho}{2}}\rho^{\mathrm{k}}\left[\frac{\partial\omega}{\partial\rho}+\left(\frac{k}{\rho}-\frac{1}{2}\right)\omega\right] \qquad \text{(II.14)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}=e^{\frac{\rho}{2}}\rho^{\mathrm{k}}\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial\rho^2}+\left(\frac{2k}{\rho}-1\right)\frac{\partial\omega}{\partial\rho}+\left(\frac{k^2k}{\rho^2}-\frac{k}{\rho}+\frac{1}{4}\right)\omega\right] \qquad \text{(II.15)}$$

En remplaçant les équations (II.14) et (II.15) dans l'équation (II.10), on trouve:

$$\left(\rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\left(2k-\rho+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}+\left(k^2-\frac{k}{2}-\frac{l(l+1)}{4}\right)\frac{1}{\rho}+\frac{\alpha a^2}{4}-k-\frac{1}{4}\right)\omega(\rho)=0 \qquad \text{(II.16)}$$

Lorsqu'on met les conditions suivantes :

$$n=\frac{\alpha a^2}{4}-k-\frac{1}{4} \quad , \quad 4k^2-2k-\frac{l(l+1)}{4}=0 \qquad \text{(II.17)}$$

La prédite équation (II.16) peut se réduit directement à une équation de type confluente hypergéométrique.

A cette étape, on peut déterminer la constante k à partir de la deuxième condition de (II.17) comme:

$$4k^2 - 2k - \frac{l(l+1)}{4} = 0 \qquad \text{(II.18)}$$

Qui nous donne les deux racines:

$$k_1 = \frac{1}{2}(l+1) \qquad , k_2 = -\frac{l}{2} \qquad \text{(II.19)}$$

Par un choix adéquat pour la valeur de k dans (II.19), il est remarquable de noter que la fonction $f(\rho)$ doit être non singulière à $\rho = 0$, ce qui implique alors que la valeur acceptée de k est

$$n = \frac{\alpha a^2}{4} - \frac{1}{2}(l+1) - \frac{1}{4} \qquad \text{Pour} \qquad k = \frac{1}{2}(l+1) \qquad \text{(II.20)}$$

Nous substituons l'équation(II.9) dans (II.20) nous obtenons cette forme de n:

$$n = \frac{E}{2\hbar\omega} - \frac{l}{2} - \frac{3}{4} \qquad \text{(II.21)}$$

Afin d'obtenir l'expression du spectre énergétique de ce système, simplifier l'équation (II.21) comme suivante:

$$E_{n,l} = \hbar\omega(2n + l + \frac{3}{2}) \qquad \text{(II.22)}$$

La solution de l'équation (II.16) est de type confluent hypergéométrique sous la forme:

$$\omega(\rho) = \mathrm{C}F(-n, l + \frac{3}{2}, \rho) \qquad \text{(II.23)}$$

A partir de l'équation (II.23) on peut réécrire l'équation (II.13) comme:

$$f(r) = Ce^{-\frac{r^2}{2a^2}}(\frac{r}{a})^{2k}F(-n, l+\frac{3}{2}, \frac{r^2}{a^2}) \tag{II.24}$$

Donc la forme finale de la fonction d'onde radiale comme:

$$R(r) = \frac{C}{a^{2k}}e^{-\frac{r^2}{2a^2}}r^{(2k-1)}F(-n, l+\frac{3}{2}, \frac{r^2}{a^2}) \tag{II.25}$$

Finalement, la fonction d'onde $\psi(r, \theta, \varphi)$ est obtenue comme suit:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{C}{a^{2k}}\ r^{(2k-1)}F(-n, l+\frac{3}{2}, \frac{r^2}{a^2})Y_l^m(\theta, \varphi) \tag{II.26}$$

Où C est la constante de normalisation.

II-2-b: Dans l'espace des moments (p):

Dans cette représentation, pour résoudre l'équation de l'oscillateur de Schrödinger (II.3) dans l'espace ordinaire des moments, on doit écrire les règles de quantification pour les composantes de l'opérateur de position $\vec{r}$ dans l'espace des moments comme:

$$\mathrm{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x} \tag{II.27}$$

$$y = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_y} \tag{II.28}$$

$$z = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_z} \tag{II.29}$$

A cet égard, on note également que l'expression finale de Laplacien s'écrite comme:

$$\Delta_p = \frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(p^2\frac{\partial}{\partial p}\right) - \frac{L^2}{\hbar^2 p^2} \tag{II.30}$$

Où le moment cinétique orbital tient la même forme que le cas de chapitre précédent :

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \tag{II.31}$$

Les choses deviennent intéressantes quand on considère l'analyse relative aux trois dimensions spatiales. Une situation courante est celle où le potentiel est sphériquement symétrique; Il ne dépend que de p pour l'origine. Dans ce cas, il est plus logique d'utiliser des coordonnées sphériques, donc nous avons besoin de réécrire (II.30) en coordonnées sphériques. Nous avons simplement cité le résultat en coordonnées sphériques (p, θ, φ) (les formules générales pour les opérateurs div, grade, rot et Laplacien en coordonnées sphériques et cylindriques sont données dans l'Introduction à l'électrodynamique, ($p \geq 0$), θ est l'angle de l'axe positif $z, (0 \leq \theta \leq \pi)$, et φ est l'angle azimutal mesuré à partir de l'axe x (donc$(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$):

$$\Delta_p = \frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left(p^2 \frac{\partial}{\partial p}\right) + \frac{1}{p^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{p^2 \sin^2\theta} \qquad \text{(II.32)}$$

Compte tenu de cela, la partie indépendante du temps de l'équation de Schrödinger satisfait à:

$$\left[\frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left(p^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{p^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{p^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) - \frac{p^2}{m^2\omega^2\hbar^2} + \frac{2E}{m\omega^2\hbar^2}\right]\psi(p, \theta, \varphi) = 0 \qquad \text{(II.33)}$$

À ce stade, nous essayons de séparer les variables à nouveau, d'abord en décollant simplement la dépendance sur p. Nous proposons $\psi(p, \theta, \varphi) = R(p)Y(\theta, \varphi)$, nous obtenons:

$$\left[\frac{Y}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left(p \frac{\partial R}{\partial p}\right) + \frac{R}{p^{2 \sin\theta}}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}\right) + \frac{R}{p^{2 \sin^2\theta}}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \emptyset^2}\right) + \frac{1}{m\omega^2\hbar^2}\left(-\frac{p^2}{m} + 2E\right)RY\right] = 0 \qquad \text{(II.34)}$$

En divisant l'équation (II.34) par$R(p)Y(\theta, \varphi)$, on aura:

$$\left[\frac{1}{Rp^2}\frac{\partial}{\partial p}\left(p^2 \frac{dR}{dp}\right) + \frac{1}{Yp^{2 \sin\theta}}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{Yp^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}\right) + \frac{1}{m\omega^2\hbar^2}\left(-\frac{p^2}{m} + 2E\right)\right] = 0 \qquad \text{(II.35)}$$

Ou bien sous la forme suivante :

$$\left[\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial p}\left(p^2\frac{\partial R}{\partial p}\right)+\frac{p^2}{m\omega^2\hbar^2}\left(-\frac{p^2}{m}+2E\right)\right]+\left[\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial\emptyset^2}\right)\right]=0 \qquad \text{(II.36)}$$

Dans cette expression, on remarque que les termes dans les premiers crochets ne dépendent que de p, tandis que ceux des deuxièmes crochets ne dépendent que de θ et ϕ. Selon la méthode de séparation des variables, chaque terme doit être égal à une certaine constante, qui est écrite sous la forme $l(l+1)$. Ce qui nous permise d’écrire le système des équations suivant:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial p}\left(p^2\frac{\partial R}{\partial p}\right)+\frac{p^2}{m\omega^2\hbar^2}\left(-\frac{p^2}{m}+2E\right)=l(l+1) \qquad \text{(II.37)}$$

$$\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial\emptyset^2}\right)=-l(l+1) \qquad \text{(II.38)}$$

On note ici que, tant que l'équation angulaire ne dépend pas de p. Nous pouvons encore essayer de séparer les variables sous la forme suivante:

$$\mathrm{Y}(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi) \qquad \text{(II.39)}$$

Qui nous mène à:

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\emptyset^2}\right)=-l(l+1) \qquad \text{(II.40)}$$

Ou bien sous la forme :

$$\left[\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta\right]+\frac{1}{\Phi}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\emptyset^2}\right)=0 \qquad \text{(II.41)}$$

A ce stade, on divise l'équation (II.41) en deux parties dont la première dépend seulement de θ et la seconde ne dépend que de Φ, de sorte que chaque partie doit être égale à une autre constante de séparation m^2 comme suit. :

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta=m^2 \tag{II.42}$$

$$\frac{1}{\Phi}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}\right)=-m \tag{II.43}$$

La solution de la deuxième équation (II.43) est donnée par:

$$\Phi(\phi)=Ae^{im\phi} \tag{II.44}$$

Où A est une constante à déterminer par la condition de normalisation, Si les valeurs de m peuvent être négatives ou positives. On peut fusionner une autre solution $Be^{-im\phi}$avec celle qui vient d'être donnée.

Revenant à la première équation, lorsqu’on la multiplié par $\Theta/\sin^2\theta$, on obtient:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0 \tag{II.45}$$

Ce résultat est similaire à celle de l'équation de Legendre. C'est-à-dire que ces solutions sont données par les fonctions de Legendre associées $p_l^m(\cos\theta)$. Ainsi, la partie angulaire complète de la fonction d'onde peut être écrite comme:

$$Y_l^m(\theta,\phi)=Ae^{im\phi}p_l^m(\cos\theta) \tag{II.46}$$

Les fonctions combinées Y_l^m sont appelées les harmoniques sphériques, ayant pour valeurs propres $\hbar^2\, l(l+1)$ avec $l=1{,}2$ ... et m varie entre -*l* et +*1*, on a alors:

$$L^2Y_l^m(\theta,\varphi)=\hbar^2 l(l+1)Y_l^m(\theta,\varphi) \tag{II.47}$$

Nous avons déjà établi l'orthogonalité des fonctions de Legendre associées, l'orthogonalité de la partie ϕ des harmoniques sphériques est heureusement beaucoup plus facile à montrer:

$$\int_0^{2\pi} e^{-im'\varphi} e^{im\varphi} d\varphi = \frac{1}{i(m-m')} e^{i(m-m')\varphi} \Big|_0^{2\pi} = 0 \qquad \text{(II.48)}$$

Fourni $m' \neq m$, Si $m' = m$ alors l'intégrale est simplement:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \qquad \text{(II.49)}$$

Lorsqu'on examine les propriétés d'orthogonalités des fonctions de Legendre associées, on trouve que:

$$\int_{-1}^{1} P_p^m P_q^m dx = \frac{2}{2p+1} \frac{(p+m)!}{(p-m)!} \delta_{pq} \qquad \text{(II.50)}$$

Maintenant, pour normaliser les harmoniques sphériques, il faut donc définir la constante de normalisation A comme:

$$A = \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2} \qquad \text{(II.51)}$$

Ainsi que les expressions des harmoniques sphériques normalisées sont données par:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2} e^{im\varphi} p_l^m(\cos\theta) \qquad \text{(II.52)}$$

Qui sont satisfait à la condition de normalisation:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (Y_l^m)^* Y_{l'}^{m'} \sin\theta \, d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \qquad \text{(II.53)}$$

Revenant maintenant à l'équation radiale:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{2}{p}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{l(l+1)}{p^2} - \frac{p^2}{m^2\omega^2\hbar^2} + \frac{2E}{m\omega^2\hbar^2}\right) R(p) = 0 \qquad \text{(II.54)}$$

Pour simplifier la forme de l'équation différentielle (II.54), on substitue la transformation suivante :

$$R(p) = \frac{1}{p} f(p) \tag{II.55}$$

Où
$$\frac{\partial R}{\partial p} = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{f}{p}\right) \tag{II.56}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial p^2} = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} - \frac{2}{p}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{2f}{p^2}\right) \tag{II.57}$$

On remplacera l'équation (II.55). (II.56) et(II.57) dans(II.54) nous obtenons:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} - \frac{l(l+1)}{p^2} - \frac{m^2\omega^2 p^2}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right) f(p) = 0 \tag{II.58}$$

Maintenant, lorsqu'on met le changement suivant$\rho = (\frac{p}{a})^2$ et les abréviations suivantes :

$$\alpha = \frac{2mE}{\hbar^2} \qquad \text{Et} \qquad a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \tag{II.59}$$

L'équation (II.58) se transforme à :

$$\left(\rho\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{l(l+1)}{4\rho} - \frac{\rho}{4} + \frac{\alpha a^2}{4}\right) f(\rho) = 0 \tag{II.60}$$

Où nous avons utilisé les définitions suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{2p}{a^2}\frac{\partial f}{\partial \rho} \tag{II.61}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = \frac{2}{a^2}\left(2\rho\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) \tag{II.62}$$

Pour résoudre cette équation différentielle (II.60), on utilise la transformation suivante:

$$f(\rho) = e^{\frac{\rho}{2}} \rho^{\mathrm{k}} \omega(\rho) \tag{II.63}$$

Avec

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = e^{\frac{\rho}{2}} \rho^{\mathrm{k}} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \left(\frac{k}{\rho} - \frac{1}{2}\right)\omega\right] \tag{II.64}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} = e^{\frac{\rho}{2}} \rho^{\mathrm{k}} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} + \left(\frac{2k}{\rho} - 1 \right) \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \left(\frac{k^2 k}{\rho^2} - \frac{k}{\rho} + \frac{1}{4} \right) \omega \right] \qquad \text{(II.65)}$$

En remplaçant les équations (II.64) et (II.65) dans l'équation (II.60), on trouve:

$$\left(\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \left(2k - \rho + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} + \left(k^2 - \frac{k}{2} - \frac{l(l+1)}{4} \right) \frac{1}{\rho} + \frac{\alpha a^2}{4} - k - \frac{1}{4} \right) \omega(\rho) = 0 \qquad \text{(II.66)}$$

Lorsqu'on met les conditions suivantes, la prédite équation (II.66) peut se réduit directement à une équation de type confluente hypergéométrique

Où $$n = \frac{\alpha a^2}{4} - k - \frac{1}{4} \quad , \quad 4k^2 - 2k - \frac{l(l+1)}{4} = 0 \qquad \text{(II.67)}$$

A cette étape, on peut déterminer la constante k à partir de la deuxième condition de (II.67) comme:

$$4k^2 - 2k - \frac{l(l+1)}{4} = 0 \qquad \text{(II.68)}$$

Qui nous donne les deux racines:

$$k_1 = \frac{1}{2}(l+1) \qquad , k_2 = -\frac{l}{2} \qquad \text{(II.69)}$$

Par un choix adéquat pour la valeur de k dans (II.69), il est remarquable de noter que la fonction$f(\rho)$ doit être non singulière à $\rho = 0$, ce qui implique alors que la valeur acceptée de k est :

$$n = \frac{\alpha a^2}{4} - \frac{1}{2}(l+1) - \frac{1}{4} \qquad \text{Pour} \qquad k = \frac{1}{2}(l+1) \qquad \text{(II.70)}$$

Nous substituons l'équation(II.69) dans (II.20) nous obtenons cette forme de n :

$$n = \frac{E}{2\hbar\omega} - \frac{l}{2} - \frac{3}{4} \qquad \text{(II.71)}$$

Afin d'obtenir l'expression du spectre énergétique de ce système, on duit l'équation (II.71) comme suivante:

$$E_{n,l} = \hbar\omega(2n + l + \tfrac{3}{2}) \qquad \text{(II.72)}$$

Nous notons ici que lors de changement de la représentation de l'espace, l'énergie totale de notre système (valeur propre) reste invariante.

Ainsi que la solution de l'équation (II.66) est de type confluent hypergéométrique sous la forme:

$$\omega(\rho) = CF(-n, l + \tfrac{3}{2}, \rho) \qquad \text{(II.73)}$$

A partir de l'équation (II.73) on peut réécrire l'équation (II.63) comme:

$$f(p) = Ce^{-\frac{p^2}{2a^2}}(\tfrac{r}{a})^{2k}F(-n, l + \tfrac{3}{2}, \tfrac{p^2}{a^2}) \qquad \text{(II.74)}$$

Donc la forme finale de la fonction d'onde radiale comme:

$$R(p) = \frac{C}{a^{2k}}e^{-\frac{r^2}{2a^2}}p^{(2k-1)}F(-n, l + \tfrac{3}{2}, \tfrac{p^2}{a^2}) \qquad \text{(II.75)}$$

Finalement, la fonction d'onde $\psi(r, \theta, \varphi)$ est obtenue comme suit:

$$\psi(p, \theta, \varphi) = \frac{C}{a^{2k}}\, p^{(2k-1)}F(-n, l + \tfrac{3}{2}, \tfrac{p^2}{a^2})Y_l^m(\theta, \varphi) \qquad \text{(II.76)}$$

Où C est la constante de normalisation.

II-3 Etude de l'oscillateur de Schrödinger sous l'effet d'un champ magnétique uniforme :

Dans cette section, nous étudions le système de l'oscillateur harmonique de Schrödinger soumettant à l'action d'un champ magnétique constant dans l'espace commutatif via la substitution suivante :

$$\vec{P} \to \vec{P} + \frac{q}{c}\vec{A} \tag{II.77}$$

Pour la simplicité, nous choisissons dans notre étude que la direction de champ magnétique suivant l'axez, où la jauge est fixée comme suit :

$$\vec{A} = B(-y, x, 0) \tag{II.78}$$

Ce qui nous donne :

$$p_x \to p_x - \frac{q}{C}A_x = p_x - \frac{qB}{C}y \tag{II.79}$$

$$p_y \to p_y - \frac{q}{c}A_y = p_y + \frac{qB}{c}x \tag{II.80}$$

$$p_z \to p_z \tag{II.81}$$

Dans ce cas l'équation tridimensionnelle de Schrödinger d'une particule scalaire de masse m oscillant dans un champ magnétique constant s'écrite comme suit :

$$\left(\frac{(\overrightarrow{P} + \frac{q}{c}\vec{A})^2}{2m} + \frac{1}{2}m^2\omega^2 r^2\right)\psi = E\psi \tag{II.82}$$

Où $\quad (\overrightarrow{P} + \frac{q}{c}\vec{A})^2 = ((p_x - \frac{qB}{C}y)^2 + (p_y + \frac{qB}{c}x)^2 + p_z^2)\ , r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)$ (II.83)

Donc l'équation (II.82) s'écrite comme suit:

$$\left[\frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + \left(\frac{qB}{C}\right)^2 (x^2 + y^2) + \frac{2qB(xp_y - yp_x)}{C}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2)\right]\psi = E\psi \tag{II.84}$$

Où nous avons utilisé:

$$(p_x - \frac{qB}{C}y)^2 = \left[p_x^2 + \left(\frac{qB}{C}y\right)^2 - \frac{2qByp_x}{C}\right] \tag{II.85}$$

$$(p_y + \frac{qB}{c}x)^2 = \left[p_y^2 + \left(\frac{qB}{c}x\right)^2 + \frac{2qBxp_y}{C}\right] \tag{II.86}$$

$$p_z^2 = p_z^2 \tag{II.87}$$

Après une simple simplification, nous obtenons le résultat suivant :

$$\left[p_x^2 + p_y^2 + \left(m^2\omega^2 + \frac{q^2B^2}{c^2}\right)(x^2+y^2) + \frac{2qB}{c}L_z + p_z^2 + m^2\omega^2 z^2\right]\psi = 2mE\psi \tag{II.88}$$

Avec $L_Z = xp_y - yp_x$ représente la composante de l'opérateur de moment cinétique suivant l'axe z.

II-3-a: Dans l'espace des positions (r):

Dans cette représentation de l'espace, nous voyons qu'il est commode d'utiliser les coordonnées cylindriques ($x = \rho cos\varphi,\ y = \rho sin\varphi, z$) , où le Laplacien s'exprime de la façon suivante :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{II.89}$$

Et $$L_Z = \frac{-i\hbar\partial}{\partial\varphi} \tag{II.90}$$

En utilisant la représentation des coordonnées cylindrique dans l'équation (II.89) on aura :

$$\left[-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \left(m^2\omega^2 + \frac{q^2B^2}{c^2}\right)\rho^2 + m^2\omega^2 z^2 - \frac{i\hbar 2qB}{c}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\psi(\rho,\varphi,z)$$

$$= 2mE\psi(\rho,\varphi,z) \tag{II.91}$$

Lorsqu'on utilise la séparation de variable suivante :

$$\psi(r) = \psi(\rho, \varphi, z) = h(\rho, \varphi) f(z) \qquad \text{(II.92)}$$

L'équation (II.91) s'est réduite à la forme :

$$f(z)\left[-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) - \frac{i\hbar 2qB}{c}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] h(\rho,\varphi) + f(z)\left(m^2\omega^2 + \frac{q^2B^2}{C^2}\right)\rho^2 h(\rho,\varphi) +$$

$$m^2\omega^2 z^2 f(z) h(\rho,\varphi) - \hbar^2 h(\rho,\varphi)\frac{\partial^2}{\partial z^2} f(z) \;\; = 2mEf(z)h(\rho,\varphi) \qquad \text{(II.93)}$$

Après un simple calcul, nous obtenons le système des équations différentielles suivant:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) - \frac{i\hbar qB}{mC}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{2m}\left(m^2\omega^2 + \frac{q^2B^2}{C^2}\right)\rho^2 - E - \alpha\right] h(\rho,\varphi) = 0 \qquad \text{(II.94)}$$

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial Z^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2 + \alpha\right) f(z) = 0 \qquad \text{(II.95)}$$

Où α est une constante de séparation.

A cette étape nous essayons de résoudre le système en question. Pour cette raison, d'après l'équation (II.95) on peut écrit:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{z^2}{a'^4} + \alpha'\right) f(z) = 0 \qquad \text{(II.96)}$$

Avec:

$$\alpha' = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \qquad \text{Et} \qquad a' = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \qquad \text{(II.97)}$$

Utilisant la même transformation:

$$f(z) = e^{-\frac{\lambda}{2}z^2} g(z) \qquad \text{(II.98)}$$

Avec les dérivées suivantes :

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = e^{-\frac{\lambda}{2}z^2}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \lambda z\right) g(z) \tag{II.99}$$

$$\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = e^{-\frac{\lambda}{2}z^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2\lambda z\frac{\partial}{\partial z} + \lambda^2 z^2 - \lambda\right) g(z) \tag{II.100}$$

L'équation (II.96) se transforme a :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2\lambda z\frac{\partial}{\partial z} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{a'^4}\right) z^2 - \lambda + \alpha'\right] g(z) = 0 \tag{II.101}$$

Pour réduire cette équation (II.101) à une classe des équations différentielles connues avec une solution polynomiale, on néglige le coefficient du terme (z^2)par la condition suivante:

$$\lambda^2 - \frac{1}{a'^4} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \frac{1}{a'^2} \tag{II.102}$$

La valeur acceptée de λ pour que la fonction d'onde doive être non-singulière à l'origine est :

$$\lambda = \frac{m\omega}{\hbar} \tag{II.103}$$

Cela simplifie l'équation (II.101) à:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{2}{a'^2} z\frac{\partial}{\partial z} + (\alpha' - \lambda)\right] g(z) = 0 \tag{II.104}$$

Substituant le changement de variable suivant :

$$z = a's \;\; \Longrightarrow \quad \partial z = a'\partial s \tag{II.105}$$

Dans la relation (II.104), on obtient :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} - 2s\frac{\partial}{\partial s} + (\alpha' - \lambda)a'^2\right] g(s) = 0 \tag{II.106}$$

A ce point, lorsqu'on la condition suivante:

$$(\alpha' - \lambda){a'}^2 = 2n_z \qquad \text{(II.107)}$$

L'équation (II.106) devient similaire à celle polynôme d'Hermite :

$$g(s) = C\mathrm{H_{nz}}(s) = \mathrm{CH_{nz}}(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{a'}}) \qquad \text{(II.108)}$$

On écrit alors la solution finale de notre système comme:

$$f(z) = Ce^{\frac{z^2}{2a'^2}}\mathrm{H_{nz}}(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{a'}}) \qquad \text{(II.109)}$$

A partir de la condition (II.107), on peut extraire directement l'expression de la consente de séparation :

$$\alpha' = (2n_z + 1)\frac{m\omega}{\hbar} \qquad \text{(II.110)}$$

Donc $$\alpha = -\frac{\hbar\omega}{2}(2n_z + 1) \qquad \text{(II.111)}$$

Revenant maintenant à la deuxième partie de l'équation de Schrödinger (II. 94), et en utilisant la séparation des variables de la fonction $h(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$, avec $\Phi(\varphi) = e^{im_l\varphi}$ on obtient:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{m_l^2}{\rho^2}\right) + \frac{\hbar qBm_l}{mc} + \frac{1}{2m}\left(m^2\omega^2 + \frac{q^2B^2}{C^2}\right)\rho^2 - E - \alpha\right]R(\rho) = 0 \qquad \text{(II.112)}$$

Qui peut être réécrite comme suit :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{m_l^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{b^4} + \eta\right]R(\rho) = 0 \qquad \text{(II.113)}$$

Où $$b = \sqrt{\frac{\hbar}{\sqrt{m^2\omega^2 + \frac{q^2B^2}{c^2}}}}$$ et $$\eta = \frac{2m(E+\alpha)}{\hbar^2} - \frac{2qBm_l}{\hbar c} \qquad \text{(II.114)}$$

Pour éliminer la première dérivée dans l'équation (II.113), on pose la transformation suivante:

$$R(\rho)=\frac{1}{\sqrt{\rho}}f(\rho) \tag{II.115}$$

Avec
$$\frac{\partial R(\rho)}{\partial\rho}=\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left[\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho}-\frac{f(\rho)}{2\rho}\right] \tag{II.116}$$

$$\frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial\rho^2}=\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left[\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho}+\left(\frac{3}{4\rho^2}\right)f(\rho)\right] \tag{II.117}$$

En substituant les équations (II.116)-(II.117) dans l'équation (II.113), nous obtenons:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\frac{\left(m_l^2-\frac{1}{4}\right)}{\rho^2}-\frac{\rho^2}{b^4}+\eta\right]f(\rho)=0 \tag{II.118}$$

A ce stade, selon le changement de variable suivant $\xi=\left(\frac{\rho}{b}\right)^2$

D'où
$$\frac{\partial\xi}{\partial\rho}=\frac{2\rho}{b^2} \tag{II.119}$$

Et
$$\frac{\partial f}{\partial\rho}=\frac{2\rho}{b^2}\frac{\partial f}{\partial\xi} \tag{II.120}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}=\frac{1}{b^2}(4\xi\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\frac{2\partial f}{\partial\xi}) \tag{II.121}$$

L'équation (II.118) se transforme a:

$$\left[\xi\frac{\partial^2}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\left(m_l^2-\frac{1}{4}\right)}{4\xi}-\frac{\xi}{4}\frac{\eta b^2}{4}\right]f(\xi)=0 \tag{II.122}$$

Maintenant, pour arriver a une équation différentielle connue, on utilise la transformation suivante:

$$f(\xi)=e^{-\frac{\xi}{2}}\xi^K\omega(\xi) \tag{II.123}$$

Avec:

$$\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} = e^{-\frac{\xi}{2}}\xi^{K}(\frac{k}{\xi} - \frac{1}{2} + \frac{\partial}{\partial \xi})\omega(\xi) \qquad \text{(II.124)}$$

$$\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} = e^{-\frac{\xi}{2}}\xi^{K}(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{2k}{\xi} - 1\right)\frac{\partial}{\partial \xi} + \left(\frac{k^2-k}{\xi^2} - \frac{k}{\xi} + \frac{1}{4}\right))\omega(\xi) \qquad \text{(II.125)}$$

Dans l'équation (II.122), on obtient l'équation différentielle suivante:

$$\left[\xi\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(2k + \frac{1}{2} - \xi\right)\frac{\partial}{\partial \xi} + \left(k\left(k - \frac{1}{2}\right) - \frac{\left(m_l^2 - \frac{1}{4}\right)}{4}\right)\frac{1}{\xi} + \frac{\eta b^2}{4} - k - \frac{1}{4}\right]\omega(\xi) = 0 \qquad \text{(II.126)}$$

Lorsqu'on met les conditions suivantes, la prédite équation (II.126) peut se réduit directement à une équation de type confluente hypergéométrique :

$$n = \frac{\eta b^2}{4} - k - \frac{1}{4} \qquad \text{Et} \qquad k\left(k - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(m_l^2 - \frac{1}{4}\right) = 0 \qquad \text{(II.127)}$$

A cette étape, on peut déterminer la constante k à partir de la deuxième condition de (II.127) comme:

$$4k^2 - 2k - \left(m_l^2 - \frac{1}{4}\right) = 0 \qquad \text{(II.128)}$$

Où les solutions de cette équation sont données par:

$$k_1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + m_l) \qquad , \qquad k_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - m_l) \qquad \text{(II.129)}$$

Par un choix adéquat pour la valeur k de dans (II.129), il est remarquable de noter que la fonction $f(\xi)$ doit être non singulière a $\xi = 0$, ce qui implique alors que la valeur acceptée de k est :

$$n = \frac{\eta b^2}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + m_l\right) - \frac{1}{4} \qquad \text{Pour} \qquad k_1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + m_l) \qquad \text{(II.130)}$$

Afin d'atteindre l'expression de spectre énergétique de ce système, nous substituons l'équation (II.114) dans (II.130) on aura le résultat suivant [16]:

$$E_{n,m_l} = \hbar\omega\left[\left(1+\frac{q^2B^2}{m^2\omega^2c^2}\right)^{\frac{1}{2}}(2n+m_l+1)+\left(n_z+\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{qB\hbar m_l}{mc} \tag{II.131}$$

Revenant à la solution de l'équation (II.126) qui est de type confluent hypergéométrique comme:

$$\omega(\xi) = C''F(-n,(m_l+1),\xi) \tag{II.132}$$

Donc la fonction radiale selon l'ancienne variable devient

:

$$R(\rho) = \frac{C''}{b^{2k}}e^{-\frac{\rho^2}{2b^2}}\rho^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)}F\left(-n,(m_l+1),\frac{\rho^2}{b^2}\right) \tag{II.133}$$

Finalement, la fonction d'onde $\psi(\rho,\varphi)$s'écrite comme :

$$\psi(\rho,\varphi) = \frac{C''}{b^{2k}}e^{im_l\varphi}e^{-\frac{\rho^2}{2b^2}}\rho^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)}F\left(-n,(m_l+1),\frac{\rho^2}{b^2}\right) \tag{II.134}$$

Où C'' est la constante de normalisation.

II-3-b: Dans l'espace des moments (p):

D'après les coordonnées cylindriques dans l'espace des moments ($p_x = \rho cos\varphi,\ p_y = \rho sin\varphi, p_z$) ,on peut écrire:

$$x^2+y^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2}+\frac{\partial^2}{\partial p_y^2}\right) = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \tag{II.135}$$

Et $$p_z^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial p_z^2} \quad , \quad L_Z = \frac{i\hbar\partial}{\partial\varphi} \tag{II.136}$$

Dans ce cas nous utilisons la représentation des coordonnées cylindrique dans l'équation (II.88):

$$\left[-\hbar^2\left(m^2\omega^2+\frac{q^2B^2}{c^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\frac{2i\hbar qB}{c}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\rho^2-m^2\omega^2\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial p_z^2}+\right.$$

pz2ψρ,φ,z=2mEψ(ρ,φ,pz) (II.137)

Lorsqu'on utilise la séparation des variables suivante :

$$\psi(r)=\psi(\rho,\varphi,z)=h(\rho,\varphi)f(z) \tag{II.138}$$

L'équation (III.137) s'est réduite à la forme:

$$f(p_z)\left[\left(m^2\omega^2+\frac{q^2B^2}{c^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{i\hbar 2qB}{C}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\rho^2\right]h(\rho,\varphi)+$$

$$f(z)\left[-m^2\omega^2\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial p_z^2}+p_z^2\right]h(\rho,\varphi) \quad =2mEf(z)h(\rho,\varphi) \tag{II.139}$$

Après un simple calcul, nous obtenons le système des équations différentielles suivant:

$$\left[-\hbar^2\left(\frac{m\omega^2}{2}+\frac{q^2B^2}{2mc^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{i\hbar qB}{mC}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\rho^2}{2m}-E-\alpha\right]h(\rho,\varphi)=0 \tag{II.140}$$

$$\left(\frac{1}{2}m\omega^2\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial p_z^2}-\frac{p_z^2}{2m}-\alpha\right)f(z)=0 \tag{II.141}$$

Où α est une constante de séparation.

A cette étape nous essayons de résoudre ce système, on commence par l'équation (II.141) qui peut être écrite:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p_z^2}-\frac{p_z^2}{a'^4}+\alpha'\right)f(z)=0 \tag{II.142}$$

Avec:

$$\alpha' = -\frac{2\alpha}{m\omega^2\hbar^2} \qquad \text{Et} \qquad a' = \sqrt{m\omega\hbar} \tag{II.143}$$

On note ici que cette équation concorde exactement avec l'équation (II.96).A cette étape, nous résolvons l'équation (142) via la même méthode que le cas précédent, d'où la solution est donnée en fonction de polynôme d'Hermite comme suit :

$$f(p_z) = Ce^{\frac{p_z^2}{2a'^2}}\mathrm{H}_{\mathrm{nz}}(\frac{\mathrm{P_z}}{a'}) \tag{II.144}$$

Avec la valeur acceptée de λ est :

$$\lambda = \frac{1}{a'^2} = \frac{1}{m\hbar\omega} \tag{II.145}$$

Et la condition suivante:

$$(\alpha' - \lambda)a'^2 = 2n_z \tag{II.146}$$

Qui nous permet d'extraire l'expression de la constante de séparation α comme :

$$\alpha = -\frac{\hbar\omega}{2}(2n_z + 1) \tag{II.147}$$

Revenant maintenant à la deuxième partie de l'équation de Schrödinger (II.133), et en utilisant la séparation des variables de la fonction $h(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$, avec $\Phi(\varphi) = e^{-im_l\varphi}$ on obtient:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\left(m^2\omega^2 + \frac{q^2B^2}{c^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{m_l^2}{\rho^2}\right) + \frac{\hbar qBm_l}{mc} + \frac{\rho^2}{2m} - E - \alpha\right]R(\rho) = 0 \tag{II.148}$$

Qui peut être réécrite comme suit:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{m_l^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{b^4} + \eta\right]R(\rho) = 0 \tag{II.149}$$

Où $$b = \left(\hbar^2\left(m^2\omega^2 + \frac{q^2B^2}{c^2}\right)\right)^{\frac{1}{4}} \quad , \eta = \frac{1}{b^4}\left(2m(E + \alpha) - \frac{2\hbar qBm_l}{c}\right) \tag{II.150}$$

Pour éliminer la première dérivée dans l'équation (II.149), on pose la transformation suivante:

$$R(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} f(\rho) \tag{II.151}$$

Avec
$$\frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left[\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} - \frac{f(\rho)}{2\rho}\right] \tag{II.152}$$

$$\frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left[\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} + \left(\frac{3}{4\rho^2}\right) f(\rho)\right] \tag{II.153}$$

En substituant les équations (II.152)-(II.153) dans l'équation (II.149), nous obtenons:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\left(m_l^2 - \frac{1}{4}\right)}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{b^4} + \eta\right] f(\rho) = 0 \tag{II.154}$$

A ce stade, selon le changement de variable suivant $\xi = \left(\frac{\rho}{b}\right)^2$

D'où
$$\frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{2\rho}{b^2} \tag{II.155}$$

Et
$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{2\rho}{b^2}\frac{\partial f}{\partial \xi} \tag{II.156}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} = \frac{1}{b^2}\left(4\xi \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{2\partial f}{\partial \xi}\right) \tag{II.157}$$

L'équation (II.154) se transforme a:

$$\left[\xi \frac{\partial^2}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\left(m_l^2 - \frac{1}{4}\right)}{4\xi} - \frac{\xi}{4} + \frac{\eta b^2}{4}\right] f(\xi) = 0 \tag{II.158}$$

Maintenant, pour arriver a une équation différentielle connue, on utilise la transformation suivante:

$$f(\xi) = e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^K \omega(\xi) \tag{II.159}$$

Avec:

$$\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} = e^{-\frac{\xi}{2}}\xi^{K}\left(\frac{k}{\xi} - \frac{1}{2} + \frac{\partial}{\partial \xi}\right)\omega(\xi) \qquad \text{(II.160)}$$

$$\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} = e^{-\frac{\xi}{2}}\xi^{K}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{2k}{\xi} - 1\right)\frac{\partial}{\partial \xi} + \left(\frac{k^2-k}{\xi^2} - \frac{k}{\xi} + \frac{1}{4}\right)\right)\omega(\xi) \qquad \text{(II.161)}$$

Dans l'équation (II.158), on obtient l'équation différentielle suivante:

$$\left[\xi\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(2k + \frac{1}{2} - \xi\right)\frac{\partial}{\partial \xi} + \left(k\left(k - \frac{1}{2}\right) - \frac{\left(m_l^2 - \frac{1}{4}\right)}{4}\right)\frac{1}{\xi} + \frac{\eta b^2}{4} - k - \frac{1}{4}\right]\omega(\xi) = 0 \qquad \text{(II.162)}$$

Lorsqu'on met les conditions suivantes, la prédite équation (II.127) peut se réduit directement à une équation de type confluente hypergéométrique :

$$n = \frac{\eta b^2}{4} - k - \frac{1}{4} \qquad \text{Et} \qquad k\left(k - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(m_l^2 - \frac{1}{4}\right) = 0 \qquad \text{(II.163)}$$

A cette étape, on peut déterminer la constante k à partir de la deuxième condition de (II.163) comme:

$$4k^2 - 2k - \left(m_l^2 - \frac{1}{4}\right) = 0 \qquad \text{(II.164)}$$

Où les solutions de cette équation sont données par :

$$k_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + m_l\right) \quad , \quad k_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - m_l\right) \qquad \text{(II.165)}$$

Par un choix adéquat pour la valeur k de dans (II.165), il est remarquable de noter que la fonction $f(\xi)$ doit être non singulière a $\xi = 0$, ce qui implique alors que la valeur acceptée de k est :

$$n = \frac{\eta b^2}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + m_l\right) - \frac{1}{4} \qquad \text{Pour} \qquad k_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + m_l\right) \qquad \text{(II.166)}$$

Afin d'atteindre l'expression de spectre énergétique de ce système, nous substituons l'équation (II.150) dans (II.166) on aura le résultat suivant :

$$E_{n,m_l} = \hbar\omega\left[\left(1+\frac{q^2B^2}{m^2\omega^2c^2}\right)^{\frac{1}{2}}(2n+m_l+1)+\left(n_z+\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{qB\hbar m_l}{mc} \qquad \text{(II.167)}$$

À cet égard, nous notons également que cette expression d'énergie est exactement en accord avec celle obtenue dans l'espace des positions.

Revenant à la solution de l'équation (II.162) qui est de type confluent hypergéométrique comme:

$$\omega(\xi) = C''F(-n,(m_l+1),\xi) \qquad \text{(II.168)}$$

Donc la fonction radiale selon l'ancienne variable devient:

$$R(\rho) = \frac{C''}{b^{2k}}e^{-\frac{\rho^2}{2b^2}}\rho^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)}F\left(-n,(m_l+1),\frac{\rho^2}{b^2}\right) \qquad \text{(II.169)}$$

Finalement, la fonction d'onde $\psi(\rho,\varphi)$s'écrite comme:

$$\psi(\rho,\varphi) = \frac{C''}{b^{2k}}e^{im_l\varphi}e^{-\frac{\rho^2}{2b^2}}\rho^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)}F\left(-n,(m_l+1),\frac{\rho^2}{b^2}\right) \qquad \text{(II.170)}$$

Où C'' est la constante de normalisation.

Chapitre III: solution de l'équation de l'oscillateur harmonique de Schrödinger en présence d'un champ magnétique uniforme dans le modèle de Snyder

III-1: Introduction:

La structure de l'espace-temps à l'échelle de longueur de Planck, où les effets gravitationnels quantiques ne peuvent être ignorés, est toujours inconnue puisqu'il s'agit d'un domaine de la physique où il est pratiquement impossible d'obtenir des données physiques. Une dizaine d'années environ après le travail de Heisenberg, Snyder a étudié une méthode d'apprivoisement des divergences liée aux interactions de la matière et des champs dans la théorie quantique des champs, a introduit le concept de longueur minimale [5], d'où il a montré que l'introduction de cette longueur minimale nous conduit nécessairement à une algèbre non-commutative des coordonnées de l'espace-temps [17], [18].

Dans ce chapitre, nous nous reprenons le même problème du chapitre précédent et nous essayons de trouver la solution exacte de l'équation de l'oscillateur de Schrödinger tridimensionnelle en présence d'un champ magnétique uniforme dans le modèle de Snyder.

III-2 Solution de l'équation déformée de l'oscillateur de Schrödinger à trois dimensions:

Dans cette partie, nous allons généraliser l'application précédente, en résolvant l'équation de l'oscillateur du Schrödinger à trois dimensions dans le formalisme de la mécanique quantique avec un principe d'incertitude généralisé via le modèle de Snyder.

Au début, il est très utile d'écrire les règles de quantifications pour les composantes de l'opérateur de position $\boldsymbol{r}$ ainsi du moment $\mathbf{P}$ dans l'espace de moment comme [17]:

$$\begin{cases} Xf = i\hbar\sqrt{1-\beta^2p^2}\,\frac{\partial f}{\partial p_x} \\ Yf = i\hbar\sqrt{1-\beta^2p^2}\,\frac{\partial f}{\partial p_Y} \\ Zf = i\hbar\sqrt{1-\beta^2p^2}\,\frac{\partial f}{\partial p_z} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \mathrm{P_x}f = \frac{p_x}{\sqrt{1-\beta^2p^2}}f \\ \mathrm{P_y}f = \frac{p_y}{\sqrt{1-\beta^2p^2}}f \\ \mathrm{P_z}f = \frac{p_z}{\sqrt{1-\beta^2p^2}}f \end{cases} \tag{III.1}$$

Qui nous permet d'exprimer les operateurs $\vec{r}$ et $\vec{P}$ en termes des opérateurs de coordonnées commutatives et leurs opérateurs des moments sous la forme:

$$\Rightarrow \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = i\hbar\sqrt{1-\beta^2p^2}\,\left(\frac{\partial}{\partial p_x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial p_y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial p_z}\vec{k}\right) \tag{III.2}$$

Avec $\vec{r_D} = i\hbar\sqrt{1-\beta^2p^2}\,\vec{r}$ et $\vec{P_D} = \frac{P}{\sqrt{1-\beta^2p^2}}\,\vec{P}$ (III.3)

D'après l'équation stationnaire de l'oscillateur de Schrödinger à trois dimensions dans l'espace ordinaire :

$$\left(\frac{1}{2}m\omega^2r^2 + \frac{P}{2m}\right)\psi(\vec{P}) = E\psi(\vec{P}) \tag{III.4}$$

Où $\mathrm{P}^2 = \frac{\mathrm{p}^2}{(1-\beta^2p^2)}$ (III.5)

$$r^2 = -\hbar^2\left[(1-\beta^2p^2)\Delta_p - \beta^2\vec{p}\vec{r}\right] \tag{III.6}$$

Et la représentation (III.3) des operateurs $\vec{r}$ et $\vec{P}$ dans l'espace des moments, l'équation stationnaire de l'oscillateur du Schrödinger modifiée s'écrit :

$$\left[-\frac{m\omega^2\hbar^2}{2}\left[(1-\beta^2p^2)\Delta_p - \beta^2\left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)\right] + \frac{p^2}{2m}\right]\psi(\vec{P}) = E\psi(\vec{P}) \tag{III.7}$$

Par un calcul direct dans la représentation des coordonnées sphérique dans l'espace des moments nous arrivons à:

$$\sum_{i=1}^{N=3}\frac{\partial^2}{\partial p_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{2}{p}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{L^2}{\hbar^2p^2} \tag{III.8}$$

$$\sum_{i=1}^{N=3}p_i\frac{\partial}{\partial p_i} = p\frac{\partial}{\partial p} \tag{III.9}$$

Mathématiquement, on peut supposer que les fonctions peuvent être écrites comme un produit d'une fonction d'onde radiale et des harmoniques sphériques:

$$\psi(\vec{P}) = R(p)\Upsilon_l^m(\theta,\varphi) \tag{III.10}$$

Avec :

$$L^2\Upsilon_l^m(\theta,\varphi) = \hbar^2l(l+1)\Upsilon_l^m(\theta,\varphi) \tag{III.11}$$

Nous trouvons donc, de façon inattendue, que l'équation de Schrödinger pour l'oscillateur harmonique tridimensionnel peut être réduite pour la fonction d'onde radiale $R(p)$comme:

$$\left[-m\omega\hbar\left[(1-\beta^2p^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2}+\frac{2}{p}\frac{\partial}{\partial p}-\frac{l(l+1)}{p^2}\right)-\beta^2p\frac{\partial}{\partial p}\right]+\frac{p^2}{m\omega\hbar(1-\beta^2p^2)}-\frac{2E}{\hbar\omega}\right]R(p)=0 \qquad \text{(III.12)}$$

Après quelques simplifications, nous aboutissons:

$$\left[-m\omega\hbar\left[\left(\sqrt{1-\beta^2p^2}\,\frac{\partial}{\partial p}\right)^2+\frac{2(1-\beta^2p^2)}{p}\frac{\partial}{\partial p}-\frac{l(l+1)(1-\beta^2p^2)}{p^2}\right]+\frac{p^2}{m\omega\hbar(1-\beta^2p^2)}-\frac{2E}{\hbar\omega}\right]R(p)=0 \qquad \text{(III.13)}$$

Maintenant, pour simplifier les calculs, on introduit le changement de variable suivant:

$$\beta p = sin\beta\rho \qquad \text{(III.14)}$$

Donc:

$$\beta\partial p = \beta cos\rho\partial\rho \qquad \text{(III.15)}$$

Et

$$\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{1}{cos\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} \qquad \text{(III.16)}$$

$$\sqrt{1-\beta^2p^2}\,\frac{\partial R}{\partial p}=\frac{\partial R}{\partial \rho} \qquad \text{(III.17)}$$

$$\frac{(1-\beta^2p^2)}{p}\frac{\partial}{\partial p}=\beta\cot(\beta\rho)\frac{\partial f}{\partial \rho} \qquad \text{(III.18)}$$

$$\frac{(1-\beta^2p^2)}{p^2}=\beta^2cot^2\beta\rho \qquad \text{(III.19)}$$

$$\frac{p^2}{(1-\beta^2p^2)}=\frac{1}{\beta^2}tan^2\beta\rho \qquad \text{(III.20)}$$

Pour que la nouvelle forme de l'équation (III.13) sera réécrite comme:

$$\left[-m\omega\hbar\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+2\beta cot\beta\rho\frac{\partial}{\partial\rho}-\beta^2l(l+1)cot^2\beta\rho\right)+\frac{1}{m\omega\hbar\beta^2}tan^2\beta\rho-\frac{2E}{\hbar\omega}\right]R(\rho)=0 \qquad \text{III.21)}$$

Lorsqu' on pose:

$$\varepsilon=\frac{2E}{\hbar\omega} \qquad ,\xi=\frac{\rho}{\sqrt{m\omega\hbar}} \qquad ,k=\beta\sqrt{m\omega\hbar} \qquad \text{(III.22)}$$

On aura:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-2kcotk\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+k^2l(l+1)cot^2k\xi+\frac{tan^2k\xi}{k^2}-\varepsilon\right]R(\xi)=0 \qquad \text{(III.24)}$$

Où nous avons utilisé les changements de variables suivantes :

$$\begin{cases} u = \cos k\xi \\ v = \sin k\xi \end{cases} \quad \text{(III.25)}$$

Avec les dérivées suivantes :

$$\begin{cases} du = -k\sin k\xi\partial\xi \\ dv = k\cos k\xi\partial\xi \end{cases} \quad \text{(III.26)}$$

Toujours pour simplifier l'équation (III.24), nous utilisons l'ansatz suivant $R(\xi) = u^{\lambda} f(v)$, et les dérivées suivantes :

$$dR = \frac{\partial R}{\partial u} du + \frac{\partial R}{\partial v} dv \quad \text{(III.27)}$$

$$\frac{dR}{d\xi} = \frac{\partial R}{\partial u}\frac{du}{d\xi} + \frac{\partial R}{\partial v}\frac{dv}{d\xi} \quad \text{(III.28)}$$

Alors:

$$\frac{dR}{d\xi} = k\left(-\frac{\partial R}{\partial u} v + \frac{\partial R}{\partial v} u\right) = \phi \quad \text{(III.29)}$$

Et: $$\frac{d^2R}{d\xi^2} = \frac{d\phi}{d\xi} = k\left(-\frac{\partial^2 R}{\partial u^2} v + \frac{\partial R}{\partial v} + \frac{\partial R}{\partial u\partial v} u\right)\frac{du}{d\xi} + k\left(-\frac{\partial^2 R}{\partial v^2} u + \frac{\partial R}{\partial u} - \frac{\partial R}{\partial u\partial v} v\right)\frac{dv}{d\xi} \quad \text{(III.30)}$$

D'où $$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial u} = \lambda u^{\lambda-1} f \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 R}{\partial u^2} = \lambda(\lambda-1) u^{\lambda-2} f \\ \frac{\partial R}{\partial v} = u^{\lambda}\frac{\partial f}{\partial v} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 R}{\partial v^2} = u^{\lambda}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{cases} \quad \text{(III.31)}$$

$$\frac{\partial R}{\partial u\partial v} = \lambda u^{\lambda-1}\frac{\partial f}{\partial v} \quad \text{(III.32)}$$

Finalement :

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} = u^{\lambda}(k^2u^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - k^2 v\frac{\partial f}{\partial v} + k^2\lambda(\lambda-1)\frac{v^2}{u^2} f - 2k^2\lambda f - k^2 2\lambda v\frac{\partial f}{\partial v}) \quad \text{(III.33)}$$

Au moyen de cette définition (III.33), l'équation différentielle pour $f(v)$ se réduira à :

$$\left[u^2\frac{d^2}{dv^2} - \left[(2\lambda+1)v - \frac{2u^2}{v}\right]\frac{d}{dv} + \left(\lambda(\lambda-1) - \frac{1}{k^4}\right)\frac{v^2}{u^2} + l(l+1)\frac{u^2}{v^2} - 4\lambda + \frac{\varepsilon}{k^2}\right] f(v) = 0 \quad \text{(III.34)}$$

Qui peut être réécrite sous la forme :

$$(1-v^2)\frac{d^2f}{dv^2} + \left(-(2\lambda+3)v + \frac{2}{v}\right)\frac{df}{dv} + \left[\left(\lambda(\lambda-1) - \frac{1}{k^4}\right)\frac{v^2}{u^2} + l(l+1) - \frac{l(l+1)}{v^2} - 4\lambda + \frac{\varepsilon}{k^2}\right] f(v) = 0 \quad \text{(III.35)}$$

A l'intérêt d'atteindre une équation différentielle connue, on omet le coefficient du terme tangent $\left(\frac{v^2}{u^2}\right)$, par la condition suivante :

$$\lambda(\lambda-1)-\frac{1}{k^4}=0 \qquad \text{(III.36)}$$

À partir de cette condition (III.36), on peut déduire alors la valeur acceptée de λ pour que la fonction d'onde doit être non-singulière à l'origine comme :

$$\lambda=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{k^4}} \qquad \text{(III.37)}$$

Ensuite, pour simplifier l'équation (III.35), nous utilisons l'ansatz suivant $f(v)=v^l g(v)$, et les dérivées suivantes :

$$\frac{df}{dv}=\left[v^l\left(\frac{d}{dv}+\frac{l}{v}\right)\right]g \qquad \text{(III.38)}$$

$$\frac{d^2f}{dv^2}=v^l\left(\frac{d^2}{dv^2}+\frac{2l}{v}\frac{d}{dv}+\frac{l(l-1)}{v^2}\right)g \qquad \text{(III.39)}$$

Cette transformation élimine le terme barrière centrifuge et donne l'équation pour $g(v)$, comme:

$$(1-v^2)\left(\frac{d^2}{dv^2}+\frac{2l}{v}\frac{d}{dv}+\frac{l(l-1)}{v^2}\right)g+\left(-(2\lambda+3)v+\frac{2}{v}\right)\left(\frac{d}{dv}+\frac{l}{v}\right)g+\left(l(l+1)-\frac{l(l+1)}{v^2}-4\lambda+\frac{\varepsilon}{k^2}\right)g=0 \qquad \text{(III.40)}$$

Qui peut être s'écrite comme:

$$(1-v^2)\frac{d^2g}{dv^2}+\left[\frac{2(l+1)}{v}-(2\lambda+2l+3)v\right]\frac{dg}{dv}+\left[-(2\lambda+1)l-4\lambda+\frac{\varepsilon}{k^2}\right]g=0 \qquad \text{(III.41)}$$

Maintenant, nous utilisons un nouveau changement de variable :

$$z=2v^2-1 \quad \Longrightarrow dz=4v\,dv \qquad \text{(III.42)}$$

$$1-v^2=1-\frac{1}{2}(z+1)=\frac{1}{2}(1-z) \qquad \text{(III.43)}$$

Et également ces dérivation comme suit :

$$\frac{dg}{dv}=\frac{dz}{dv}\frac{dg}{dz}=4v\frac{dg}{dz} \qquad \text{(III.44)}$$

$$\frac{d^2g}{dv^2} = 8(z+1)\frac{d^2g}{dz^2} + 4\frac{dg}{dz} \qquad \text{(III.45)}$$

Dans l'équation (III.41), et par certaines simplifications, nous aurons :

$$\left[4(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} + 4\big((l-\lambda+1)-(l+\lambda+2)z\big)\frac{d}{dz} - (2\lambda+1)l - 3\lambda + \frac{\varepsilon}{k^2}\right]g = 0 \qquad \text{(III.46)}$$

Ainsi que:

$$\left[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} + \big((l-\lambda+1)-(l+\lambda+2)z\big)\frac{d}{dz} + \frac{\eta}{4}\right]g = 0 \qquad \text{(III.47)}$$

Avec:

$$\eta = -(2\lambda+1)l - 4\lambda + \frac{\varepsilon}{k^2} \qquad \text{(III.48)}$$

Afin de réduire cette équation (III.47) à une classe d'équations différentielles connues avec une solution polynomiale, on impose la condition suivante:

$$\frac{1}{4}\left[-(2\lambda+1)l - 4\lambda + \frac{\varepsilon}{k^2}\right] = n(n+a+b+1) \qquad \text{(III.49)}$$

Où n est un nombre entier non négatif, et a, b sont définis par :

$$\begin{cases} b-a = l-\lambda+1 \\ a+b+2 = l+\lambda+2 \end{cases} \qquad \text{(III.50)}$$

Qui nous donne :

$$\begin{cases} 2b = 2l+1 \;\Rightarrow b = l+\frac{1}{2} \\ \;2a = 2\lambda-1 \;\Rightarrow\; a = \lambda-\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{(III.51)}$$

Dans l'équation (III.47), pour obtenir la forme suivante:

$$(1-z^2)\frac{d^2g}{dz^2} + [(b-a)-(a+b+2)z]\frac{dg}{dz} + n(n+a+b+2)g = 0 \qquad \text{(III.52)}$$

Dont la solution exacte est donnée par le polynôme de Jacobi [19]:

$$g(z) = P_n^{(a,b)}(z) \qquad \text{(III.53)}$$

En substituant les équations (III.22) et (III.51) dans la condition (III.49), on obtient le spectre énergétique de l'oscillateur Schrödinger à 3-dimensions dans le modèle de Snyder :

$$E = \hbar\omega\left[\left(2n + l + \frac{3}{2}\right)\sqrt{1 + \frac{\beta^4 m^2 \omega^2 \hbar^2}{4}} + \beta^2 m\omega\hbar(2n+1)(n+l+1)\right] \qquad \text{(III.54)}$$

Il est remarquable que l'expression ci-dessus du spectre d'énergie contienne une correction supplémentaire, qui dépend du paramètre de déformation β et que sa déviation croît rapidement avec n^2. Cet effet est dû à la modification de l'algèbre de Heisenberg standard.

Nous constatons ici que ce résultat explique le confinement au secteur de haute énergie, qui peut être testé ; en utilisant la limite $\beta \to 0$, pour obtenir le résultat exact de l'oscillateur ordinaire de Schrödinger (II.91).

Maintenant, la solution exacte de l'équation (III.41) peut être exprimée par le polynôme de Jacobi comme :

$$g(v) = P_n^{(a,b)}(2v^2 - 1) \qquad \text{(III.55)}$$

Ainsi que :

$$f(v) = v^l P_n^{(a,b)}(2v^2 - 1) \qquad \text{(III.56)}$$

Par conséquent, l'expression de $R(\rho)$ devient:

$$R(\rho) = N(cos\beta\rho)^{\lambda}(sin\beta\rho)^{l} P_n^{(a,b)}\left(2(sin\beta\rho)^2 - 1\right) \qquad \text{(III.57)}$$

En retournant à l'ancienne variable *p*, la fonction d'onde radiale $R(p)$ est réécrite comme :

$$R(p) = N(1 - (\beta p)^2)^{\frac{\lambda}{2}}(\beta p)^l P_n^{(a,b)}(2(\beta p)^2 - 1) \qquad \text{(III.58)}$$

Où *N* est une constante de normalisation.

III-2 Solution de l'équation déformée de l'oscillateur de Schrödinger soumise à l'action d'un champ magnétique uniforme:

Dans cette partie, nous allons généraliser l'application précédente, en résolvant l'équation déformée de l'oscillateur de Schrödinger soumise à l'action d'un champ magnétique uniforme à trois dimensions dans le formalisme de la mécanique quantique de Snyder.

D'après l'équation du mouvement suivante:

$$\left((\vec{P} + \frac{q}{c}\vec{A})^2 + m^2\omega^2 r^2\right)\psi = 2mE\psi \qquad \text{(III.58)}$$

En utilisant la déformation (III.1), on obtient:

$$\left(P_x - \frac{qB}{C}y\right)^2 f = \left(\frac{p_x}{\sqrt{1-\beta^2 p^2}} - \frac{i\hbar qB}{c}\sqrt{1-\beta^2 p^2}\,\frac{\partial}{\partial P_y}\right)^2 f \tag{III.59}$$

$$= -\frac{\hbar^2 q^2 B^2}{c^2}(1-\beta^2 p^2)\frac{\partial^2 f}{\partial p_y^2} - \left(\frac{2i\hbar qB}{c}P_x - \frac{\hbar^2 q^2 B^2 \beta^2}{c^2}P_y\right)\frac{\partial f}{\partial P_y} + \left(\frac{P_x^2}{1-\beta^2 p^2} - \frac{i\hbar qB\beta^2}{c}\frac{P_x P_y}{1-\beta^2 p^2}\right)f \tag{III.60}$$

$$\left(P_y + \frac{qB}{c}x\right)^2 f = \left(\frac{p_y}{\sqrt{1-\beta^2 p^2}} + \frac{i\hbar qB}{c}\sqrt{1-\beta^2 p^2}\,\frac{\partial}{\partial P_x}\right)^2 f \tag{III.61}$$

$$= -\frac{\hbar^2 q^2 B^2}{c^2}(1-\beta^2 p^2)\frac{\partial^2 f}{\partial p_x^2} - \left(\frac{2i\hbar qB}{c}P_y - \frac{\hbar^2 q^2 B^2 \beta^2}{c^2}P_x\right)\frac{\partial f}{\partial P_x} - \left(\frac{P_y^2}{1-\beta^2 p^2} - \frac{i\hbar qB\beta^2}{c}\frac{P_y P_x}{1-\beta^2 p^2}\right)f \tag{III.62}$$

$$P_z^2 = \frac{p_z^2}{\sqrt{1-\beta^2 p^2}}f \tag{III.63}$$

Et:

$$r_D^2 f = -\hbar^2\left[(1-\beta^2 p^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_z^2}\right)f - \beta^2\left(p_x\frac{\partial f}{\partial p_x} + p_y\frac{\partial f}{\partial p_y} + p_z\frac{\partial f}{\partial p_z}\right)\right] \tag{III.64}$$

Après un simple calcul, on aura:

$$\Big\{-\hbar^2\left(m^2\omega^2 + \frac{q^2B^2}{c^2}\right)\left[(1-\beta^2 p^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2}\right) - \beta^2\left(p_x\frac{\partial}{\partial p_x} + p_y\frac{\partial}{\partial p_y}\right)\right] + \frac{p_x^2 + p_y^2}{(1-\beta^2 p^2)} +$$

$$\frac{2qB}{c}L_z - m^2\omega^2\hbar^2\left[(1-\beta^2 p^2)\frac{\partial^2}{\partial p_z^2} - \beta^2 P_z\frac{\partial}{\partial P_z}\right] + \frac{p_z^2}{(1-\beta^2 p^2)}\Big\}\psi(p) = 2mE\psi(p) \tag{III.65}$$

Etant donné la difficulté de résoudre ce type de problème à 3 Dim, nous limitons au cas de 2 Dim, à partir duquel l'équation différentielle (III.65) sera réécrite comme suit:

$$\Big\{-\hbar^2\left(m^2\omega^2 + \frac{q^2B^2}{c^2}\right)\left[(1-\beta^2 p^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2}\right) - \beta^2\left(p_x\frac{\partial}{\partial p_x} + p_y\frac{\partial}{\partial p_y}\right)\right] + \frac{p_x^2 + p_y^2}{(1-\beta^2 p^2)} +$$

$$\frac{2qB}{c}L_z - \Big\}\psi(p) = 2mE\psi(p) \tag{III.66}$$

En utilisant les coordonnées polaires, on trouve:

$$\left\{-\hbar^2\left(m^2\omega^2+\frac{q^2B^2}{c^2}\right)\left[(1-\beta^2\rho^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi}\right)-\beta^2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right]+\frac{\rho^2}{1-\beta^2\rho^2}+\frac{2qBi\hbar}{C}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}\psi(\rho)=2mE\psi(\rho) \quad \text{(III.67)}$$

Qui peut être réécrite comme:

$$\left\{-\hbar^2\left(m^2\omega^2+\frac{q^2B^2}{c^2}\right)\left[\left(\sqrt{1-\beta^2\rho^2}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2+\frac{(1-\beta^2\rho^2)}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{(1-\beta^2\rho^2)m_l^2}{\rho^2}\right]+\frac{2qB\hbar m_l}{C}+\frac{\rho^2}{1-\beta^2\rho^2}\right\}R(\rho)=2mER(\rho) \quad \text{(III.68)}$$

Où nous avons utilisé:

$$\psi(\rho,\varphi)=R(\rho)\emptyset(\varphi) \quad \text{(III.69)}$$

Avec: $$\emptyset(\varphi)=e^{-im_l\varphi} \quad \text{(III.70)}$$

Maintenant lorsqu'on introduit le changement de variable suivant:

$$\beta\rho=sin\beta\xi \quad \text{(III.71)}$$

La nouvelle forme de l'équation (III.68) sera réécrite comme:

$$\left\{-\hbar^2\left(m^2\omega^2+\frac{q^2B^2}{c^2}\right)\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\beta cot\beta\xi\frac{\partial}{\partial\xi}-m_l^2\beta^2cot^2\beta\xi\right]+\frac{tan^2\beta\xi}{\beta^2}+\frac{2qB\hbar m_l}{C}-2mE\right\}=0 \quad \text{(III.72)}$$

Lorsqu'on pose:

$$\varepsilon=-\frac{2qB\hbar m_l}{C}+2mE,\ s=\frac{\xi}{\hbar\sqrt{m^2\omega^2+\frac{q^2B^2}{c^2}}}\ ,\ k=\hbar\beta\sqrt{m^2\omega^2+\frac{q^2B^2}{c^2}} \quad \text{(III.73)}$$

On aura directement l'équation simplifiée suivante:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial s^2}-kcotks\frac{\partial}{\partial s}+m_l^2k^2cot^2ks+\frac{tan^2ks}{\beta^2}-\varepsilon\right)R(s)=0 \qquad \text{(III.74)}$$

Selon le changement de variable (III.25), on procède de la même manière que dans le cas du premier problème de ce chapitre, l'équation différentielle pour $R(s)$ se ramènera à:

$$\left\{u^2\frac{\partial^2}{\partial v^2}-\left[(2\lambda+1)v-\frac{u^2}{v}\right]\frac{\partial}{\partial v}+\left[\lambda(\lambda-1)-\frac{1}{\beta^2k^2}\right]\frac{v^2}{u^2}-m_l^2\frac{u^2}{v^2}-2\lambda+\frac{\varepsilon}{k^2}\right\}f(v)=0 \quad \text{(III.75)}$$

Qui peut être réécrite sous la forme :

$$\left\{(1-v^2)\frac{\partial^2}{\partial v^2}+\left[-2(\lambda+1)v+\frac{1}{v}\right]\frac{\partial}{\partial v}+\left[\lambda(\lambda-1)-\frac{1}{\beta^2k^2}\right]\frac{v^2}{u^2}+m_l^2-2\lambda+\frac{\varepsilon}{k^2}-\frac{m_l^2}{v^2}\right\}f(v)=0 \text{(III.76)}$$

A ce stade pour atteindre une équation différentielle connue, on omet le coefficient du terme$\left(\frac{v^2}{u^2}\right)$, par la condition suivante :

$$\lambda(\lambda-1)-\frac{1}{\beta^2k^2}=0 \qquad \text{(III.77)}$$

Qui nous donne la valeur acceptée de λ pour que la fonction d'onde doit être non-singulière à l'origine comme :

$$\lambda=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{\beta^2k^2}} \qquad \text{(III.78)}$$

Maintenant, pour simplifier l'équation (III.76) nous utilisons la transformation suivant $f(v)=v^{m_l}g(v)$, et les dérivées suivant:

$$\frac{df}{dv}=\left[v^{m_l}\left(\frac{d}{dv}+\frac{m_l}{v}\right)\right]g \qquad \text{(III.79)}$$

$$\frac{d^2f}{dv^2}=v^{m_l}\left(\frac{d^2}{dv^2}+\frac{2m_l}{v}\frac{d}{dv}+\frac{m_l(m_l-1)}{v^2}\right)g \qquad \text{(III.80)}$$

Pour éliminer le terme barrière centrifuge $\frac{m_l^2}{v^2}$ et écrire l'équation pour $g(v)$, comme:

$$(1-v^2)\frac{d^2g}{dv^2}+\left[-2(m_l+\lambda+1)v+\frac{(2m_l+1)}{v}\right]\frac{dg}{dv}+\left[-m_l(2\lambda+1)-2\lambda+\frac{\varepsilon}{k^2}\right]g=0 \qquad \text{(III.81)}$$

Maintenant, selon le même changement de variable (III.42), l'équation (III.81) devient comme:

$$\left[4(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}+4\left(\left(m_l-\lambda+\frac{1}{2}\right)-\left(m_l+\lambda+\frac{3}{2}\right)z\right)\frac{d}{dz}-m_l(2\lambda+1)-2\lambda+\frac{\varepsilon}{k^2}\right]g=0 \qquad \text{(III.82)}$$

Ainsi que:

$$\left[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}+\left(\left(m_l-\lambda+\frac{1}{2}\right)-\left(m_l+\lambda+\frac{3}{2}\right)z\right)\frac{d}{dz}+\frac{\eta}{4}\right]g=0 \qquad \text{(III.83)}$$

Avec:

$$\eta=-m_l(2\lambda+1)-2\lambda+\frac{\varepsilon}{k^2} \qquad \text{(III.84)}$$

Maintenant, on impose la condition suivante:

$$\frac{1}{4}\left[-m_l(2\lambda+1)-2\lambda+\frac{\varepsilon}{k^2}\right]=n(n+a+b+1) \qquad \text{(III.85)}$$

Où n est un nombre entier non négatif, et a, b sont définis par :

$$\begin{cases} b-a=m_l-\lambda+\frac{1}{2} \\ a+b+2=m_l+\lambda+\frac{3}{2} \end{cases} \qquad \text{(III.86)}$$

Qui nous donne :

$$\begin{cases} 2b=2m_l \implies b=m_l \\ 2a=2\lambda-1 \implies a=\lambda-\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{(III.87)}$$

Pour que l'équation (III.83) se réduite à une classe d'équations différentielles connues avec une solution polynomiale de type :

$$(1-z^2)\frac{d^2g}{dz^2}+[(b-a)-(a+b+2)z]\frac{dg}{dz}+n(n+a+b+2)g=0 \qquad \text{(III.88)}$$

Dont la solution exacte est donnée par le polynôme de Jacobi:

$$g(z)=P_n^{(a,b)}(z) \qquad \text{(III.89)}$$

En substituant les équations (III.73) et (III.87) dans la condition (III.85), on obtient le spectre énergétique de l'oscillateur harmonique de Schrödinger en présence d'un champ magnétique uniforme à 2-dimensions dans le modèle de Snyder :

$$E_{n,m_l} = \hbar\omega\left[(2n + m_l + 1)\sqrt{1 + \frac{q^2B^2}{m^2\omega^2c^2}}\left(1 + \frac{m^2\omega^2\hbar^2\beta^4}{4}\left(1 + \frac{q^2B^2}{m^2\omega^2c^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right] +$$

$$m\omega^2\hbar^2\beta^2\left(1 + \frac{q^2B^2}{m^2\omega^2c^2}\right)(2n + 1)\left(n + m_l + \frac{1}{2}\right) + \frac{qB\hbar m_l}{mc} \qquad \text{(III.90)}$$

Il est remarquable ici que selon la modification de l'algèbre de Heisenberg standard, l'expression du spectre d'énergie de notre système contienne un terme de correction déformé supplémentaire et que ses valeurs augmentent avec le paramètre de déformation β. Dans ce résultat, il convient de noter qu'au moyen de la dépendance n^2 les niveaux d'énergie expliquent le phénomène de confinement au niveau de haute énergie et la forme du spectre d'énergie peut être testée comme suit: en utilisant la limite $\beta \to 0$ et en ignorant l'effet de champ magnétique B, on obtient le même résultat que dans le cas de l'oscillateur Schrödinger à deux dimensions dans l'espace ordinaire. Par contre, si nous étudions uniquement la limite $\beta \to 0$, on obtient le résultat exact de l'oscillateur de Schrödinger à 2-dim sous l'effet d'un champ magnétique uniforme et sans déformation qui se trouve dans la deuxième partie du chapitre précédent. Ensuite, lorsque les paramètres de déformation et de champ magnétique sont absents, le résultat est strictement conforme à la première partie du deuxième chapitre à deux dimensions.

Maintenant, la solution exacte de l'équation (III.81) peut être exprimée par le polynôme de Jacobi comme :

$$g(v) = P_n^{(a,b)}(2v^2 - 1) \qquad \text{(III.91)}$$

Ainsi que:

$$f(v) = v^l P_n^{(a,b)}(2v^2 - 1) \qquad \text{(III.92)}$$

Par conséquent, l'expression de $R(\rho)$ devient:

$$R(\rho) = N(cos\beta\rho)^{\lambda}(sin\beta\rho)^{m_l}P_n^{(a,b)}(2(sin\beta\rho)^2 - 1) \qquad \text{(III.93)}$$

En retournant à l'ancienne variable p, la fonction d'onde radiale $R(p)$ est réécrite comme :

$$R(p) = N(1 - (\beta p)^2)^{\frac{\lambda}{2}}(\beta p)^{m_l}P_n^{(a,b)}(2(\beta p)^2 - 1) \qquad \text{(III.94)}$$

Donc l'expression finale de la fonction d'onde de notre système s'écrite comme suite :

$$\psi(p_x, p_y) = N\left(1-\beta^2\left({p_x}^2+{p_y}^2\right)\right)^{\frac{\lambda}{2}}\left(\beta^2\left({p_x}^2+{p_y}^2\right)\right)^{\frac{m_l}{2}} \times$$

$$P_n^{(a,b)}\left(2\beta^2\left({p_x}^2+{p_y}^2\right)-1\right) e^{-im_l arctan(\frac{p_y}{p_x})} \qquad \text{(III.95)}$$

Où N est une constante de normalisation.

Conclusion générale :

Dans ce mémoire, nous avons examiné l'influence de la déformation de l'espace sur la mécanique quantique non relativiste via une étude explicite de deux systèmes microscopiques très connus grâce à leurs diverses applications en différents domaines de la physique dans l'espace ordinaire de Minkowski et dans un espace déformé par le modèle de Snyder qui peut être considéré comme un exemple de géométrie non commutative basée sur une déformation de l'algèbre de Heisenberg.

En premier lieu, nous avons étudié l'oscillateur harmonique tridimensionnel de Schrödinger et le mouvement oscillatoire d'une particule non relativiste confinée et soumise à l'action d'un champ magnétique externe et uniforme dans le cadre de la mécanique quantique ordinaire, où le spectre d'énergie et la fonction d'onde correspondante ont été bien déterminés pour les deux systèmes. En second lieu, nous avons généralisé la même étude dans le contexte de la mécanique quantique déformée par le formalisme de Snyder. Dans ce cas, les solutions exactes sont obtenues en terme polynomial de Jacobi. Ainsi que leurs expressions de spectre d'énergie correspondantes pour chaque cas. Finalement, nous avons constaté que l'influence de la déformation de l'espace due à la modification de l'algèbre de Heisenberg standard a provoqué des changements considérables au niveau de nos résultats.

Références

Référence :

[1]- C. Cohen. Tannoudji, B. Diu, et F. Laloe, mécanique quantique Tome1, 480-486, 21octobre (1997).

[2]- M. Eshghi and H. Mehraban” Effective of the q-deformed pseudo scalar magnetic field on the charge carriers in graphene”, J. Math. Phys. 57, 082105 (2016)

[3]- C. Weishbuch and B. Vinter, Quantum Semiconductor Heterostructure (Academic Press, New York), (1993)

[4]- A. Arda and R. Sever” Exact solutions of the Schrödinger equation via Laplace transform approach: pseudo harmonic potential and Mie-type potentials”, J. Math. Chem, 50, 971 (2012).

[5]- H. S. Snyder” Quantized Space-Time”, Phys. Rev. 71, 38 (1947)

[6]- A. Kempf “Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry”, J. Math. Phys. 35, 4483 (1994).

[7]- A. Kempf, G. Mangano, and R. B. Mann “Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation ”, Phys. Rev. D 52, 1108 (1995).

[8]- T. K. Rebane” Two-dimensional oscillator in a magnetic field”, J. Exp. Theor. Phys. 114(2), 220 (2012).

[9]- G. Goldstein, techniques de résolution numérique de l’équation de Schrödinger dépendant du temps, Université libre de Bruxelles, (2003).

[10]- H. Saidi : introduction de la méthode quadratique différentielle généralisée dans le traitement du potentiel coulombien ‘écranté’, mémoire de magister, université Mohamed Khider -Biskra, (2004)

[11]- M. R. Douglas and N. A. Nekrasov “No commutative field theory”, Rev. Mod. Phys. 73, 977 (2001)

[12]- A. Kempf, G. Mangano and R.B. Mann” Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation”, Phys. Rev. D52, 1108 (1995).

Références

[13]- T. K. Rebane” Two-dimensional oscillator in a magnetic field”, J. Exp. Theor. Phys. 114(2), 220 (2012).

[14]- M. Eshghi and H. Mehraban” Effective of the q-deformed pseudoscalar magnetic field on the charge carriers in grapheme”, J. Math. Phys. 57, 082105 (2016)

[15]- A. Arda and R. Sever “Exact solutions of the Schrödinger equation via Laplace transform approach: pseudoharmonic potential and Mie-type potentials ”, J. Math. Chem. 50, 971 (2012).

[16]- B. Mohamed, Calcul des éléments de matrice dipolaires dans une géométrie non commutative, mémoire de magister, université D’El-oued, (2013).

[17]- S. Mignemi” Classical and quantum mechanics of the no relativistic Snyder model”,Phys. Rev. D 84.025021), (2011)

[18]- L. Lu and A. Stern” Snyder space revisited”, Nucl. Phys. B 854 894 (2012).

[19]- I. S. Gradstein and I. M. Ryzhik, Tables of Integrals, Series and Products (Academic, New York), (1980)

Résumé :

Dans ce travail, on a étudié deux systèmes microscopiques différents, à savoir, l'oscillateur harmonique tridimensionnel de Schrödinger et le mouvement oscillatoire d'une particule non relativiste confinée et soumise à l'action d'un champ magnétique externe et uniforme dans le cadre de la mécanique quantique non relativiste ordinaire et déformée. Nous avons d'abord traité analytiquement les deux systèmes en question dans l'espace ordinaire et déformé, où l'on a bien déterminé le spectre d'énergie et la fonction d'onde correspondante dans chaque cas. Finalement nous avons examiné l'influence de la déformation spatiale due au modèle quantique de Snyder sur nos résultats physiques.

Mots Clés: Mécanique quantique non relativiste, Equation de Schrödinger, Oscillateur harmonique, Modèle quantique de Snyder.

Abstract

In this work, we studied two different microscopic systems, namely, the three-dimensional harmonic oscillator Schrödinger and the oscillatory motion of a non relativistic particle confined and subjected to the action of an external and uniform magnetic field in the frame of ordinary and deformed non relativistic quantum mechanics. We have first analyzed analytically the two systems in question in ordinary and deformed space, where the energy spectrum and the corresponding wave function have been determined in each case. Finally, we examined the influence of spatial deformation due to the Snyder quantum model on our physical results.

Key Words: Non relativistic quantum mechanics, Schrödinger equation, Harmonic oscillator, Snyder quantum model.

ملخص

في هذا العمل درسنا نظامين مجهرين متخلفين هما الهزاز التوافقي ثلاثي الأبعاد والحركة التذبذبية لجسيمة غير نسبية خاضعة لفعل مجال مغناطيسي خارجي وثابت في إطار ميكانيكا الكم النسبية المشوهة و الغير مشوهة. أولاً قمنا بمعالجة تحليلية للنظامين المقصودين في الفضاء الاعتيادي والفضاء المشوه، حيث تم تحديد طيف الطاقة ودالة الموجة الموافقة له في كل حالة. أخيرًا، درسنا تأثير التشوه الفضائي الناتج عن النموذج الكموني لسنا يدر على نتائجنا الفيزيائية.

كلمات مفتاحية: مكانيك الكم غير النسبية ، معادلة شرود نغر، هزاز توافقي ، نموذج سنا يدر الكموني.