

جامعة محمد خيضر بسكرة

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم علوم المادة



مذكرة ماستر

ميدان علوم المادة

شعبة الفيزياء

إختصاص فيزياء طاوقية و الطاقات المتجددة

رقم :

إعداد الطالب :

قنفود صلاح الدين

يوم: 04/07/2019

موضوع المذكرة :

تأثير التشوهات الزمكانية على غاز الفرميونات في الأقسام البيضاء

لجنة المناقشة :

رئيسا	جامعة محمد خيضر بسكرة	أستاذة محاضرة - ب	حيماني نجاة
مقررا	جامعة محمد خيضر بسكرة	أستاذ - ب	مومني مصطفى
ممتحنا	جامعة محمد خيضر بسكرة	أستاذ محاضر - ب	عليان إدير

السنة الجامعية : 2018 - 2019

"وقتل اعملوا فسيرى الله عملكم

ورسوله والمؤمنون"

(التوبة - 105)

إهداء

إلى وطني الحبيب

إلى أمي وأبي

وإخوتي

إلى كل من ساندني وشد على يدي

اهدي إليهم جهدي المتواضع

شكر و تقدير

اللهم لك الحمد كله ولك الشكر كله واليك يرجع كله حمدا كثيرا مبارك فيه

بعد الله عز وجل على حسن توفيقه على اعداد هذه المذكرة و اعترافا بالفضل أتوجه بالشكر
الجزيل و بأسمى عبارات التقدير و الاحترام والامتنان للاستاذ القدير المشرف " **مومني مصطفى** "
أولا لطرحة لهذا الموضوع المحبب على قلبي وثانيا وبالدرجة الكبيرة لما أولته من اهتمام و مابذلته من
جهد وتصويب و ما قدمته من نصائح في سبيل أن يخرج هذا العمل على ما هو عليه اليوم
فجزاك الله خيرا و وفقك في حياتك العملية و العلمية و أقول لك بشراك قول الرسول صلى الله
عليه وسلم " أن الحوت و البحر و الطير في السماء ليصلون على معلم الناس الخير "
كما أتقدم بالشكر الجزيل لكل من زرعوا التفائل في دربي و قدموا لي المساعدات و الافكار لاتمام
هذا العمل المتواضع .

كما أتقدم بالشكر الى اللجنة الموقرة على قبولها المشاركة في تقديم هذا العمل وأشكر عائلتي و
زملائي و أصدقائي الاعزاء وكل من قدم لي معونة في مشواري الدراسي سواء من قريب أو
بعيد .

قائمة الأشكال

- الشكل 01: منحنى يوضح سلوك دالة فيرمي عند درجة حرارة صفر.....6
- الشكل 02 : منحنى يوضح سلوك دالة فيرمي عند درجة حرارة أكبر صفر.....8
- الشكل 03 : منحنى بياني يبين تغير دالة توزيع فيرمي عند درجات حرارة مختلفة9
- الشكل 04 : يوضح مستويات الطاقة مملوءة بالفرميونات إلى آخرها.....10
- الشكل 05 : صورة توضح مقارنة بين القزم الأبيض والنجم بيجازي أ.....14
- الشكل 06 : يوضح ثلاث منحنيات تمثل تغيرات الكتلة للقزم الأبيض بدلالة نصف القطر في غاز فيرمي
- المثالي والنسبي والفرق النسبي 18

الفهرس

1..... مقدمة عامة

الفصل الأول : غاز الفرميونات في الأقزام البيضاء .

3..... 1.I مقدمة

3..... 2.I التذكير بإحصاء فيرمي - ديراك

3..... 1.2.I إحصاء فيرمي ديراك

4..... 3.I غاز الفرميونات

5..... 1.3.I خصائص غاز الفرميونات

9..... 4.I غاز الفرميونات المنحل

10..... 1.4.I طاقة فيرمي

13..... 5.I غاز الفرميونات شديد الإنحلال في الأقزام البيضاء

13..... 1.5.I النجوم القزمة البيضاء

14..... 2.5.I سلوك الغاز المنحل في القزم الأبيض

17..... 1.5.I حد شاندراسيخار " Chandrasekhar "

19..... 6.I الخاتمة

الفصل الثاني : التشوهات الزمكانية

20..... 1.II مقدمة

20..... 2.II الحد الأدنى للطول

21..... 1.2.II مبدأ عدم اليقين لهايزنبرغ

23..... 3.II مختلف الطرق المعبرة عن الحد الأدنى للطول

23..... 1.3.II الحد الأدنى للطول من عدم اليقين

25..... 2.3.II الحد الأدنى للطول من عدم اليقين والحد الأقصى لكمية الحركة

28..... 4.II الحد الأدنى للطول والحد الأقصى لكمية الحركة من عدم اليقين

5.II. الخاتمة 29

الفصل الثالث : تأثير التشوهات الزمكانية على الأقسام البيضاء .

1.III. مقدمة 30

2.III. التذكير بحساب ثوابت فيرمي في الغاز المثالي للفرميونات 30

3.III. الطاقة الداخلية والضغط في الحالة الكلاسيكية والنسبية 32

1.3.III. حساب الطاقة الداخلية والضغط (الحالة الكلاسيكية) 32

2.3.III. علاقة نصف قطر القزم الأبيض بالكتلة (الحالة الكلاسيكية) 33

3.3.III. حساب الطاقة الداخلية والضغط (الحالة النسبية) 35

4.3.III. علاقة نصف قطر القزم الأبيض بالكتلة (الحالة النسبية) 37

4.III. تأثير التشوهات الزمكانية على القزم الأبيض 39

1.4.III. تأثير معامل التشوه على كمية حركة فيرمي 39

2.4.III. تأثير معامل التشوه على الطاقة الداخلية والضغط ونصف القطر في الحالة الكلاسيكية 40

3.4.III. تأثير معامل التشوه على الطاقة الداخلية والضغط ونصف القطر في الحالة النسبية 43

5.III. الخاتمة 47

مقدمة عامة :

النجوم على مر التاريخ كانت من الاشياء الرائعة للدراسة ، والتي بدأت من الحضارة الإغريقية القديمة إلى علماء الفلك في العصر الحديث والذين استمروا في البحث عن النجوم للكواكب والمجرات الاخرى ، والكون يتوسع باستمرار و يتغير ، وبالتالي فإن عالم الفلك كل مرة ينظر فيها الى التلسكوب عبر الفضاء يقول انه قد رأى اشياء لم تكن هناك قبل يوم واحد ، وكل مكان من الفضاء يمتلئ بالكثير من الاشياء التي تثير الدهشة وكثير من الاشياء المبهمة ، ولا عجب ان هناك ملايين من الحقائق حول النجوم.

يساهم الفيزيائيون المختصون بدراسة الجسيمات الأولية المتكونة منها المادة ، ويساهمون في علم الفلك لأن خواص الجسيمات الأولية تتحكم في نشأة وتطور ومصير الكون . ولا تكفي معرفتنا عن البروتونات و النيوترونات و الإلكترونات والجسيمات التي نعرفها لتفسير تطور الكون ، ولذلك يبحث الفيزيائيون في طرق التأثير بين هذه الجسيمات ، أي محاولة فهم القوى التي تتحكم في سلوكها مع بعضها البعض ، وهنا يتعاون الفيزيائيون من علماء الجسيمات مع الفيزيائيين من علماء الفلك .

تندثر النجوم في خلال العديد من مراحل الحياة ، مثل الكثير من الكائنات العضوية الاخرى ، حيث أن النجم يستهلك كل المواد الكيميائية اللازمة لتفاعلات الاندماج النووي الذي يحدث فيه متحولاً إلى قزم أبيض. كيف تحافظ هذه النجوم القزمة على إستقرارها ضد قوة الجاذبية بالرغم من نفاذ وقودها النووي ؟

نتطرق في هذه المذكرة ، إلى دراسة تأثير التشوهات الزمكانية على غاز الفرميونات المنحل في الأقزام البيضاء ، ولقد اعتمدت في تناول هذا الموضوع منهجية خاصة أردت من خلالها التدرج في إعطاء المعلومات اللازمة لفهم ماهية وخصائص الأقزام البيضاء و مصيرها في اخر المطاف ، فلا يمكن أن نبدأ دراستنا على النجوم القزمة البيضاء ، متجاهلين فهم سلوك الجسيمات الأولية وأقصد الفرميونات ولهذا حاولنا تقسيم المذكرة إلى ثلاثة فصول وفق التنظيم التالي :

الفصل الأول إبتدئته بإعطاء معلومات عامة حول غاز الفرميونات ثم إنتقلت بعدها لدراسة سلوك غاز الفرميونات المنحل ، وفي اخر عنصر قمنا بدراسة سلوك غاز الفرميونات شديدة الإنحلال في الأقزام البيضاء.

ثم أخذنا بعدا متخصصا نوعا ما ، وذلك بالتعريف بالأقزام البيضاء وفهم معنى حد شاندراسيخار الذي يحدد مصيرها . بعد معرفة سلوك غاز الفرميونات في الأقزام البيضاء ، وصل بي التدرج المنطقي إلى الفصل الثاني الذي تناول دراسة التشوهات الزمكانية ، فإبتدئته بالحديث عن سبب إدخال مفهوم الحد الأدنى للطول بعدها كان لابد من التعرّيج عن مختلف الطرق المعبرة عنه ، ثم إنتقلت في اخر عنصر إلى توضيح طريقة بيدرام التي إستخدمناها في دراستنا ، ليأتي الفصل الأخير وإبتدئته بالدراسات السابقة حول الأقزام البيضاء وإعطاء معادلات الطاقة الداخلية وضغط الإنحلال في الحالتين الكلاسيكية والنسبية وعلاقة نصف القطر بدلالة الكتلة ، بعد ذلك قمنا بتطبيق طريقة بيدرام على هذه المعادلات وذلك بإدخال معامل التشوه على عبارة كمية الحركة و الطاقة الداخلية ، بعد ذلك نستنتج ضغط الإنحلال وكذلك نصف القطر وكتلة الأقزام البيضاء وفي الأخير نستنتج التأثير بالتشوهات الزمكانية وذلك بمقارنة شاملة بين النتائج المتوصل إليها مع النتائج السابقة في غياب معامل التشوه ، كما ختمنا هذه المذكرة بخلاصة عامة ، حيث إستطعنا شرح وذكر أهم النتائج التي تحصلنا عليه

الفصل الأول

غاز الفرميونات في الأقرام

البيضاء

1.I. المقدمة (Introduction):

نتطرق في هذا الفصل الأول إلى دراسة الغازات الفرميونية ولهذا توجب علينا أن نبتدئه بالتذكير بإحصاء فيرمي - ديراك لأنه يصف لنا سلوك الفرميونات ، بعد ذلك ننتقل لدراسة الغازات الفرميونية بصفة عامة والتعرف على خصائصها ، ثم ننتقل إلى الجزء الرئيسي في هذا الفصل وهو غاز الفرميونات المنحل وشديد الإنحلال الذي يهمننا في معرفة خصائص وبنية الأقزام البيضاء . وفي الأخير نقدم بعض المعلومات التي تهمننا عن الأقزام البيضاء مثل كيفية إستقرارها والحد الأقصى للكتلة (كتلة شاندراسيخار) ومصيرها في آخر المطاف .

2.I. تذكير بإحصاء فيرمي- ديراك :**1.2.I. إحصاء فيرمي ديراك :**

تصف إحصائيات فيرمي-ديراك توزيع الجسيمات على حالات الطاقة في الأنظمة التي تتكون من العديد من الجزيئات المتماثلة التي تتبع "مبدأ استبعاد باولي" والذي يتضمن الشرط انه لا يمكن لجسمين أن يشغلا الحالة الكمية نفسها . تم تسميته على اسم إنريكو فيرمي وبول ديراك ، اكتشف كل منهم الطريقة بشكل مستقل [1] .

تم تطبيق إحصائيات فيرمي ديراك في عام 1926 بواسطة رالف فاوولر لوصف انهيار نجم إلى قزم أبيض في عام 1927 طبقها أرنولد سومرفيلد على الإلكترونات في المعادن وطور نموذج الإلكترون الحر ، وفي عام 1928 قام فاوولر ولوثار ولفجانج نوردهايم بتطبيقه على انبعاث الإلكترون الميداني من المعادن ، لا تزال إحصاءات فيرمي-ديراك تشكل جزءاً مهماً من الفيزياء [1] [2] .

يتم تطبيقه بشكل شائع على الإلكترونات والتي هي الفرميونات ، ولا يقتصر التوزيع على الإلكترونات بل سائر جسيمات الشق الأول من الأجسام المتماثلة وهن الفرميونات الخاضعة لمبدأ باولي للاستبعاد (أو نصفيات المغزل) ، أما الشق الثاني وهو البوزونات (صحيات المغزل) كالفوتونات فيخضعن لإحصاء بوز أينشتاين وهي جسيمات لا تتبع مبدأ استبعاد باولي [3].

3.I. غاز الفرميونات :

غاز فيرمي هو تجمع لعدد كبير من الفرميونات وهي جسيمات (الكترونات والبروتونات والنيوترونات) غير مميزة لها عزم مغزلي يساوي أنصاف أعداد صحيحة فردية من القيمة \hbar تخضع لإحصاء فيرمي ديراك الذي يحدد توزيع طاقة الفرميونات في غاز فيرمي عند التوازن الحراري وتتميز بكثافة عددية ودرجة حرارة ، ومجموعة من حالات الطاقة المتاحة ينص مبدأ باولي على أنه لا يمكن لأي حالة كمية أن تأخذ أكثر من فرميون واحد بخصائص متماثلة [3][4] . لذا فغاز فيرمي على العكس من غاز بوز لا يمكنه التكثف إلى تكاثف بوز وأينشتاين ، فالطاقة الاجمالية لغاز فيرمي في درجة الصفر المطلق هي أكبر من مجموع الحالات الأساسية لجسيم مفرد لأن مبدأ باولي يعرض نوعا من التفاعل أو الضغط الذي يحافظ على الفرميونات منفصلة ومتحركة . لهذا السبب فإن ضغط غاز فيرمي ليس معدوما حتى في درجة حرارة الصفر [5] ، على العكس من الغاز المثالي الكلاسيكي، ويسمى هذا بالضغط المنحط الذي يحافظ على استقرار النجم النيوتروني (غاز فيرمي من النيوترونات) أو نجم قزم أبيض (غاز فيرمي من الالكترونات) ضد ضغط الجاذبية إلى الداخل ، والتي تتسبب بإنهيار النجم الظاهري إلى ثقب أسود. إلا إذا كان حجم النجم هائلا بما يكفي للتغلب على ضغط الانحطاط [5][6]، من الممكن معرفة درجة الحرارة فيرمي تحت ما يمكن اعتباره غازا منحل (تقريبا يستمد الضغط حصريا مبدأ باولي) ، وتعتمد درجة الحرارة تلك على كتلة الفرميونات وكثافة طاقة

المستويات [4][5]. ففي المعادن تكون درجة حرارة فيرمي لغاز الإلكترون عدة آلاف كلفن، لذا تعتبر تلك منحلة في التطبيقات البشرية. ويطلق على الطاقة القصوى للفرميونات في درجة الصفر اسم طاقة فيرمي [7] .

1.3.I. خصائص غاز الفرميونات :

يمكن دراسة هذه الخصائص بالاعتماد على غاز الإلكترونات في المعادن حيث الإلكترونات هي الفرميونات ، يمكن إهمال التفاعل المتبادل للإلكترونات الموصلة لأن هذا التفاعل محمي إلى حد بعيد بواسطة الذرات الثابتة وبالتالي يمكن التعامل مع الإلكترونات الموصلة كغاز مثالي ومع ذلك فإن تركيز هذه الإلكترونات في معدن يتجاوز بكثير تركيز الجسيمات في الغاز الكلاسيكي لذلك ليس من المستغرب أن لا يتم تحليل الإلكترونات الموصلة عادة باستخدام الإحصائيات الكلاسيكية في الواقع فهي تخضع لإحصائيات فيرمي - ديراك [6][7] .

ولدراسة خصائص غاز الفرميونات (الإلكتروني) نجد أنه يتبع توزيع فيرمي ديراك الأكثر احتمالا وهو

$$(1) \quad f(E_i) = \frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i - E_F}{KT}\right) + 1}$$

K: ثابت بولتزمان .

T: درجة الحرارة بالكلفن .

E_F : طاقة فارمي .

N_i : تمثل عدد الفرميونات التي لها طاقة E_i . [8]

g_i : تمثل درجة الإنتماء وهي تعبر عن عدد المستويات التي لها نفس الطاقة E_i .

ولدالة متصلة فإن المعادلة (1) تأخذ الصورة :

$$(2) \quad f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-E_F}{KT}\right)+1}$$

$f(E)$: تمثل دالة فيرمي وتعطينا احتمالية أن أي مستوي طاقة محدد بالقيمة E سوف يملأ

بجسيم واحد من الفرميونات مع وجود الشرط $0 < f(E) < 1$.

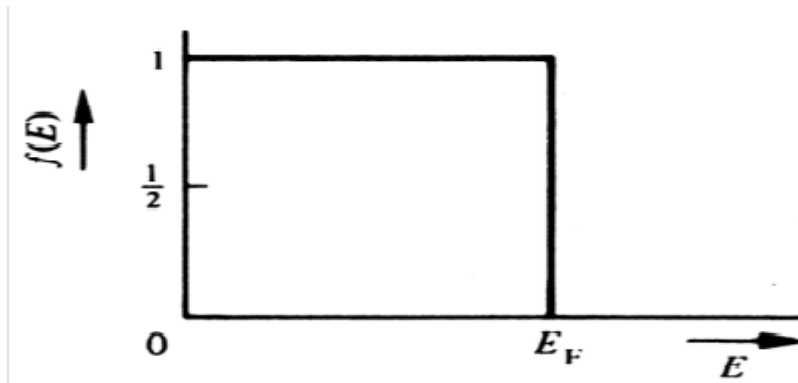
إذا كانت $E = E_F$ فإن دالة فيرمي تأخذ القيمة $\frac{1}{2}$ لأي درجة حرارة [8].

أ. سلوك دالة فيرمي عند (T=0K) :

عند الصفر المطلق يكون التوزيع على هيئة دالة خطوة [9] :

$$(3) \quad f(E) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < E < E_F \\ 0 & \text{if } E_F < E \end{cases}$$

معناه أن عند درجة الصفر المطلق تصبح المنطقة الانتقالية ضيقة للغاية ، أنظر الشكل (1) .



الشكل 1 : سلوك دالة فيرمي عند صفر المطلق [10].

ب. سلوك دالة فيرمي عندما تكون درجة الحرارة أكبر من صفر كلفن ($T > 0K$):

عند ارتفاع درجة الحرارة فوق الصفر لا تتزحج طاقة فيرمي عن مكانها على الإطلاق لأنها حد معين مميز للمادة ، ولكن الإلكترونات التي تكتسب طاقة تتعدى هذا الحد فهي تتوزع فوقه طبقاً لتوزيع بولتزمان الكلاسيكي وتصبح حرة يمكنها الحركة والتوصيل [10].

حيث عندما يكون : $E_F + KTE >$

$$(4) \quad e^{(E-E_F/KT)} \gg 1 \quad \text{ومنه :}$$

وبالتالي دالة فيرمي تأخذ الصورة :

$$(5) \quad f(E) = e^{(E_F-E/KT)}$$

أي أن معظم الحالات في الطاقات $E_F + 3KT$ فارغة .

و عندما يكون $E < E_F - KT$

$$(6) \quad e^{(E-E_F/KT)} \ll 1 \quad \text{ومنه :}$$

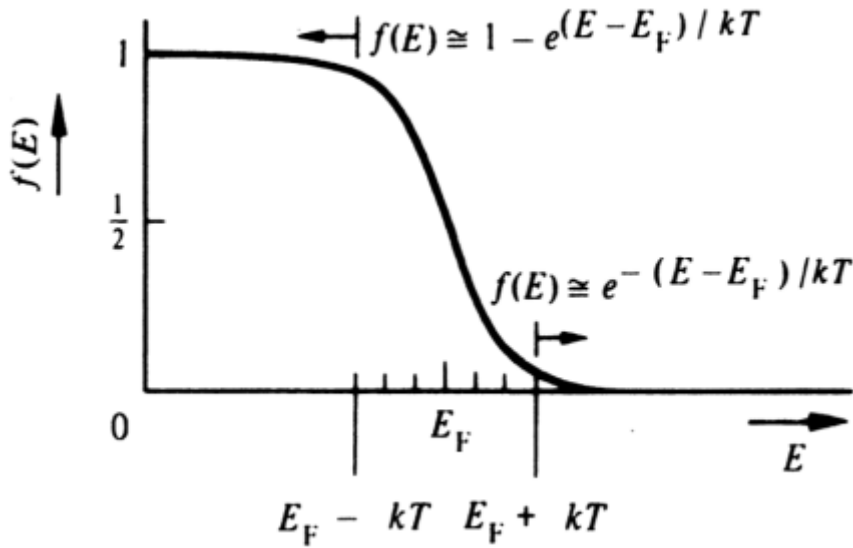
وبالتالي دالة فيرمي تأخذ الصورة :

$$(7) \quad f = 1 - e^{(E-E_F/KT)}(E)$$

احتمال أن تكون حالة المستوي فارغة تقوّل إلى الصفر لذلك ، وبالتالي سيتم شغل كل الحالات

الفارغة [11] [4] .

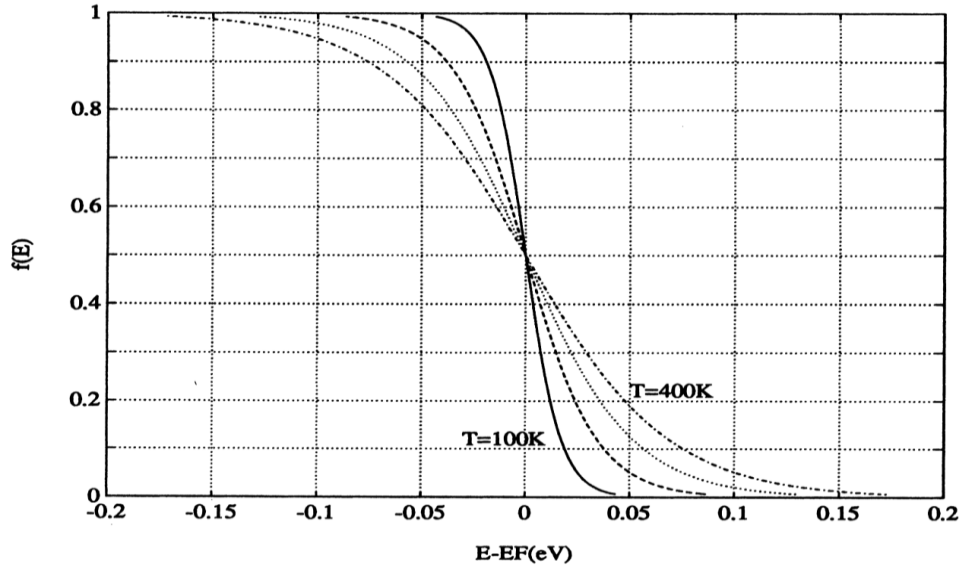
لتوضيح ذلك أنظر الشكل (2) .



الشكل 2 : سلوك دالة فيرمي عندما درجة الحرارة أكبر من صفر كلفن [10] .

كل هذه الاحتمالات تبعا لدرجة الحرارة حيث عندما ترتفع درجة حرارة النظام تثير الإلكترونات ويتغير شكل دالة التوزيع. في الحقيقة لا تتوزع الطاقة الحرارية على جميع الإلكترونات بالتساوي ، كما في المعالجة التقليدية وذلك لأن الإلكترونات التي تقع بعيدا أسفل مستوى فيرمي لا تمتص الطاقة وذلك لأنها لو فعلت فإنها ستنتقل إلى المستوى الأعلى والذي يكون مشغولا بالفعل وبالتالي فإنها لا تمتص الطاقة [6][7] . لهذا فإن الإلكترونات التي تمتص الطاقة الحرارية هي فقط الإلكترونات التي تقع قريبة أسفل مستوى فيرمي وبالتالي تتأثر وتنتقل إلى مستويات طاقة أعلى من مستوى فيرمي ، لكن ارتفاع درجة الحرارة يعود بطاقة حرارية للإلكترون تساعده على تجاوز خط فيرمي فيبدأ الرسم بالانحناء ليشير إلا أن احتمالية تواجد إلكترون فوق مستوى فيرمي باتت أعلى من الصفر ، وكلما زادت الحرارة زادت الإلكترونات المتخطية لخط فيرمي إزاء انحناء الرسم [12][6] . أنظر الشكل (3) نجد هذا الإحصاء تطبيقا في الحياة العملية في أشباه الموصلات . يكون عدد الإلكترونات المتخطية

لخط فيرمي صغيرا بالمقارنة بالعدد الكلي للإلكترونات ويكون هذا العدد هو الذي يشارك في السعة الحرارية [12] .

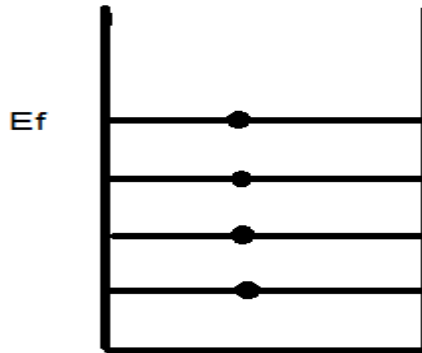


الشكل 3: منحنى تغير دالة توزيع فيرمي عند درجات حرارة مختلفة [10]

4.I. غاز الفرميونات المنحل :

الغاز المنحل في الفيزياء تكوين معين يتم الوصول إليه عادة بكثافة عالية ، يتكون من جسيمات دون ذرية وتسمى هذه الجسيمات الفرميونات ولفهم هذا أكثر ندرس سلوك غاز الفرميونات عند الصفر المطلق كما ذكرنا سابقا [9] ، في الحد $T \rightarrow 0$ تصبح المنطقة الانتقالية ضيقة للغاية في هذه الحالة $f(E) = 1$ لما $E < \mu$ و $f(E) = 0$ لما $E > \mu$ كما هو موضح في الشكل (1) عند درجة حرارة صفر كلفن (الصفر المطلق) لا تكتسب الفرميونات أي طاقة حرارية تساعدها على التحرك ، وبما أن مبدأ استبعاد باولي يتطلب عدم وجود أكثر من فرميون واحد لكل حالة كمومية مفردة الجسيم [8][9] ، يتم تراكم الفرميونات في أقل الحالات الغير المشغولة بملء مستويات الطاقة

الأدنى في "تجمعات الذرات" بشكل تدريجي الأدنى أولاً ثم الأعلى ، فالأعلى ، مشكلة بحرا من الفرميونات يدعى بحر فيرمي ، حتى يتم استخدام كل الفرميونات وبالتالي ملء جميع المستويات بالكامل أنظر الشكل (4) وبالتالي ، فإن آخر إلكترون يضاف إلى الكومة له طاقة كبيرة $\epsilon = \mu$ بما أن جميع الحالات الطاقة المنخفضة مشغولة سابقا [7] ، من الواضح من مبدأ باولي للاستبعاد أن غاز فيرمي يمتلك طاقة متوسطة كبيرة ، حتى عند الصفر المطلق . يُطلق على غاز الفرميونات الذي تمتلئ فيه جميع حالات الطاقة الأقل من القيمة الحرجة (طاقة فيرمي المعينة) بالغاز المنحل [9] ، يشكل غاز الإلكترون الموجود في المعادن العادية وفي داخل النجوم الأقزام البيضاء مثالين على غاز الفرميونات المنحل [13] .



الشكل 04: يوضح الشكل مستويات فيرمي مملوءة تماما بالفرميونات [13]

1.4.I. طاقة فيرمي ديراك :

طاقة فيرمي أو مستوى فيرمي في فيزياء الجوامد وفيزياء المواد المكثفة تمثل أعلى مستوى طاقة يشغلها إلكترون عند درجة الصفر المطلق [14] ، لطاقة فيرمي أهمية كبرى في تعيين موصلية المادة

للكهرباء لأنها مسؤولة مباشرة عن تعيين عدد الإلكترونات التي تصعد لنطاق التوصيل ولذلك تكتسب أهمية أكبر في أشباه الموصلات . [13]

يمكن حساب طاقة فيرمي عندما تكون مستويات الطاقة متقاربة جدا وبالتالي يمكن كتابة المعادلة (7)

$$(8) \quad dN = \frac{dg}{e^{(E_i - E_F)/KT} + 1} \quad \text{كما يلي:}$$

و يمكن كتابة dg بدلالة الطاقة كما يلي :

$$(9) \quad dg = \frac{4\pi p^2 dp}{h^3}$$

$$(10) \quad E = \frac{p^2}{2m} \quad \text{و بما ان الطاقة الحركية تساوي :}$$

و بالتعويض نحصل المعادلة (10) في (9) على :

$$dg = \frac{2 * 4\pi V \sqrt{2m^3} E^{1/2} dE}{h^3}$$

نضرب المعادلة اعلاه في 2 و ذلك لأنه في حالة الإلكترونات فإن هنالك اتجاهين للبرم 1/2 و -1/2 و لهذا فإن عدد الحالات يتضاعف [13] .

$$dN = \frac{8\pi V \sqrt{2m^3} E^{1/2} dE}{(e^{(E_i - E_F)/KT} + 1)h^3} \quad \text{اذن المعادلة (8) تصبح :}$$

$$dN = \frac{F(E) * 8\pi V \sqrt{2m^3} E^{1/2} dE}{h^3}$$

$$\int_0^N dN = \int_0^{E_F} \frac{8\pi V \sqrt{2m^3} E^{1/2} dE}{h^3}$$

حيث ان $F(E)$ تساوي 1 في المجال (0 إلى E_F)

$$(11) \quad \therefore N = \frac{8\pi V \sqrt{2m^3} E_F^{3/2}}{h^3 \frac{3}{2}}$$

و بإعادة الترتيب فان نحصل على عبارة طاقة فارمي :

$$(12) \quad E_F = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{2/3}$$

وبتعويض $n = \frac{N}{V}$ الكثافة العددية وإدخال $\hbar = h/2\pi$ ، تصبح المعادلة [14][15] :

$$(13) \quad E_f = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

من المعادلة (13) يتضح ان طاقة فيرمي لا تعتمد على حجم العينة فقط او شكلها ولكن تعتمد على

كثافة الحجمية للفرميونات $n = \frac{N}{V}$ التي تدل على مدى تلاحم الجسيمات بجوار بعضها داخل المادة

ومن الملائم أيضا أن تعرف درجة حرارة فيرمي T_f وهي درجة الحرارة تفصل بين السلوك الكلاسيكي

لكميات الفيزيائية للفرميونات عند $T_f > T$ والسلوك الكمي عندما $T_f < T$ وتعطى بالعبارة التالية

: [16] [17]

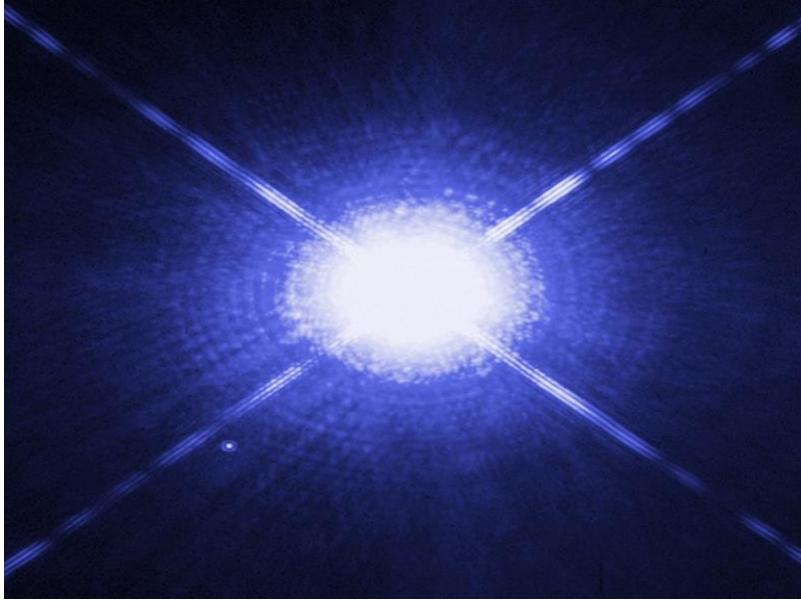
$$(14) \quad T_f = \frac{E_f}{k} = \frac{\hbar^2}{2km_e} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

5.I. غاز الفرميونات شديد الإنحلال في الأقزام البيضاء :

1.5.I. النجوم القزمة البيضاء :

القزم الأبيض هو ما ستؤول إليه النجوم كالشمس بعد أن ينفذ وقودها النووي ، فعندما تقترب هذه النجوم من مرحلة نفاذ وقودها النووي ، تقوم بسكب معظم موادها الموجودة في الطبقات الخارجية منها ما يؤدي إلى تشكل سديم كوكبي ، والقلب الساخن للنجم هو الناجي الوحيد في هذه العملية يُصبح هذا القلب قزماً أبيضاً ساخناً جداً ودرجة حرارة تزيد عن 100000 كلفن [18] .

تم اكتشاف العديد من الأقزام البيضاء الشابة والقريبة منا وهي مصدر لأشعة اكس منخفضة الطاقة ، ومؤخراً أصبحت المراقبات باستخدام الأشعة اكس الناعمة والأشعة فوق البنفسجية الشديدة أداة فعالة في دراسة تركيب وبنية الغلاف الجوي الرقيق لهذه النجوم ، تبلغ كتلة نجم قزم أبيض نموذجي حوالي نصف كتلة الشمس ، وهو أكبر حجماً من الأرض بقليل ، ويمتلك نجم قزم أبيض له حجم الأرض كثافة تصل إلى (1 طن / سنتيمتر مكعب) [19] ، علماً أن الكثافة الوسطية للأرض $5.3 \cdot 10^3$ يعني ذلك أن كثافة القزم الأبيض أكبر من كثافة الأرض بحوالي 200000 مرة ويجعله هذا الأمر واحداً من بين التجمعات الأكثر كثافة للمادة في الكون لا يتجاوزه في هذا الأمر إلا النجوم النيوتروني [18] أنظر الصورة (5) توضح مقارنة بين حجم القزم الأبيض والنجم بيغازي (أ)



الشكل (5) : صورة التقطها تلسكوب هابل للنجمين الشعري اليمانية أ والشعري اليمانية ب. ويُرى الشعري اليمانية (ب) الذي هو قزم أبيض كنقطة خافتة بجانب الشعري اليمانية (أ) الشديد اللمعان [20].

2.5.I. سلوك الغاز المنحل في القزم الأبيض :

الأقسام البيضاء غير قادرة على خلق الضغط الداخلي (على سبيل المثال ، عبر الطاقة الناجمة عن الاندماج النووي لأن الاندماج قد توقف) ، وبالتالي تقوم الجاذبية بضغط المادة نحو الداخل وصولاً إلى قيام حتى الالكترونات ، المؤلفة لذرات القزم الأبيض ، بالتصادم مع بعضها البعض [19] . وفي الظروف العادية ، إعتقاداً بمبدأ الاستبعاد لباولي لا يُمكن للالكترونات المتطابقة أن تحتل نفس الحالة الطاقية (الالكترونات التي تمتلك السبين نفسه) ، في الغاز العادي ، لا يُشكل هذا الأمر مشكلة بسبب عدم وجود عدد كافي من الالكترونات العائمة من أجل ملئ كل المستويات الطاقية المتاحة بشكلٍ كامل ، لكن في القزم الأبيض الكثافة أعلى بكثير والالكترونات موجودة عند مسافات قريبة جداً من بعضها البعض ويُشار إلى هذه الحالة بالغاز المنحل كما سبق ذكره [21] ، أي أن جميع المستويات

الطاقة الموجودة في الذرات ممتلئة بالالكترونات [7] ، من أجل أن تقوم الجاذبية بضغط القزم الأبيض بمقدار أكبر، يتوجب عليها إجبار الالكترونات على الذهاب إلى أماكن لا يُمكنها الذهاب إليها وحالما ينحل النجم ، لا تستطيع الجاذبية بعد ذلك القيام بممارسة أي ضغط زائد لأن ميكانيك الكم تقول حينها بعدم وجود أي فضاء متاح كي يتم استغلاله ، لذلك ينجو القزم الأبيض ولم يعتمد الأمر على الاندماج النووي الداخلي وإنما على مبادئ ميكانيك الكم التي منعت من الاستمرار في الانهيار [19] . لكن من أجل الحفاظ على صراعه ضد قوة الجاذبية المضادة ، مطلوب ضغط أعلى في هذه الحالة يجب أن تتحرك جسيمات الغاز الإلكتروني المنحل ، بشكل أسرع . عندما تصل الكثافة إلى هذه القيمة الكبيرة التي تقترب منها سرعة الجسيمات المطلوبة من سرعة الضوء ، فإن النجم يبدأ في حدوث مشكلات كبيرة . تؤسس نظرية النسبية لأينشتاين حدًا صارمًا على أي سرعة تصل إلى سرعة الضوء ، أي لا يمكن للجسيمات أن تتحرك بسرعة تفوق سرعة الضوء [15] . وبالتالي الجاذبية تهزم ضغط الغاز المنحل ، وتؤدي إلى انهيار كارثي ، مما يؤدي إلى انفجار نجم سوبرنوفا متحولًا بذلك إلى نجم نيتروني أكثر كثافة [20][21] . لنحقق في فيزياء الأقزام البيضاء بمزيد من التفصيل .

يمكن كتابة الطاقة الكلية لنجم قزم أبيض بالشكل التالي [20] :

$$(15) \quad E = U + E_g$$

U : هي الطاقة الحركية الإجمالية للإلكترونات المنحلة أما الطاقة الحركية للأيون لا تكاد تذكر .

E_g : هي طاقة الجاذبية الكامنة .

عندما أخذ النهاية $T \rightarrow 0$ ، في هذه الحالة يمكن كتابة كمية حركة فيرمي بالشكل التالي :

$$(16) \quad p_f = \hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3}$$

V هو حجم النجم ، و N هو العدد الإجمالي للإلكترونات الموجودة في النجم .

وبالتالي، يمكن كتابة الطاقة الحركية الإجمالية لغاز الإلكترون كما يلي :

$$(17) \quad U = \frac{V \hbar^2}{10\pi^2 \cdot m} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{5/3}$$

يتكون الجزء الداخلي لنجم قزم أبيض من ذرات مثل C^{12} و O^{16} التي تحتوي على أعداد متساوية من البروتونات والنيوترونات والإلكترونات [18] [9] . وهكذا

$$(18) \quad M = 2N \cdot m_p$$

m_p : هي كتلة البروتون .

ومنه تصبح الطاقة الحركية بعد تعويض ب $V = \frac{4\pi}{3} R^3$ و $N = \frac{M}{2m_p}$ نجد :

$$(19) \quad U = \frac{2 \hbar^2}{15\pi^2 \cdot m} \frac{1}{R^2} \cdot \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{5/3}$$

وبالتالي يمكن وصف قطر التوازن للنجم بالعلاقة التالية :

$$(20) \quad \frac{R^*}{R_\odot} = 0.010 \cdot \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^{1/3}$$

حيث $R_\odot = 7 \times 10^5 \text{ Km}$ هو نصف القطر الشمسي ، و $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ هي الكتلة الشمسية . يترتب على ذلك أن نصف قطر كتلة شمسية بيضاء نموذجية يبلغ حوالي 7000 كم

حوالي نصف قطر الأرض. أول قزم أبيض تم اكتشافه (في عام 1862) كان رفيق سيرْيوس و في الوقت الحاضر لوحظت الآلاف من الأقزام البيضاء [6][20].

3.5.I. حد شندارا سيخار " Chandrasekhar ":

الخاصية الغريبة للأقزام البيضاء لكي يكون لها حجم أكبر مع كتلة أصغر تثير سؤالاً آخر. ماذا يحدث عندما تنخفض كتلة المخلفات النجمية المتتالية؟

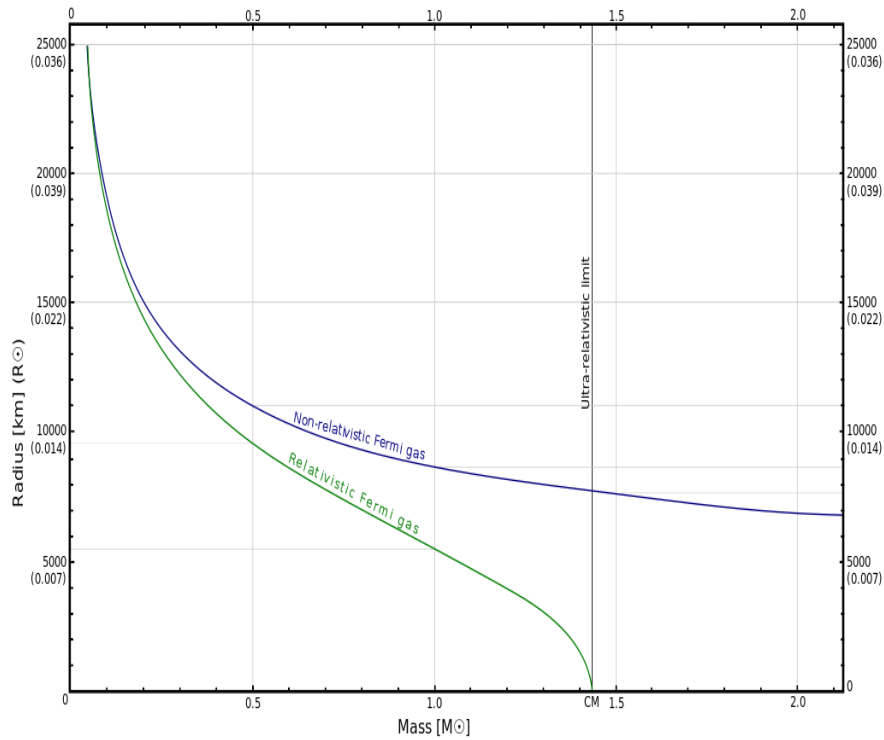
هناك حد معين للكتلة حيث كلما قلت الكتلة وزاد حجم النجم تنخفض كثافة المادة ، وبمجرد أن تنخفض الكثافة إلى ما دون مستوى حرج معين ، تصبح المادة في حالة إستقرار ، لكي يصبح النجم في حالة غير مستقرة يجب أن تكون له كتلة دنيا ، هذه الكتلة هي حوالي ألف جزء من كتلة الشمس التي تساوي تقريبا كتلة المشتري [22] ، الأجسام الخفيفة التي لا تزيد كتلتها عن ألف جزء من كتلة الشمس ، لا تُظهر خصائص المادة المنحلة يتصرفون مثل مادة عادية وتسمى الكواكب ، من ناحية أخرى ، لا يمكن للأقزام البيضاء أن تكون ضخمة للغاية قزم أبيض ثقيل جدا يتوقع أقوى انفجار مع تزايد الكتلة يصبح القزم الأبيض أصغر وأكثر كثافة بمعنى اخر إذا أصبحت M كبيرة بما يكفي تصبح الإلكترونات نسبية [23] ، والتحليل أعلاه يحتاج إلى تعديل بالمعنى الدقيق للكلمة فإن التحليل غير النسبي الموصوف في القسم السابق لا يصلح إلا في حدود الكتلة المنخفضة $M \ll M_{\odot}$ يكون ضغط الإنحلال للإلكترونات في هذه الحالة غير قادر على إيقاف انهيار النجم بفعل ضغط الجاذبية. المعيار الذي يجب أن يتوفر للمحافظة على النجم القزم الأبيض النسبي ضد الجاذبية هو $M < M_c$ و تكتب علاقة كتلة شاندراسيخار بالشكل الآتي [23] [24]:

$$(21) \quad = \frac{(9\pi)^{1/2}}{(8 m_p)^2} \left(\frac{5 ch}{G} \right)^{3/2} \simeq 1,5 M_{\odot} M_c$$

يجب أن يكون القزم الأبيض كتلة لا تتجاوز 1.5 مرة كتلة الشمس حتى يبقى في حالة إستقرار [24] أنظر الشكل (5) ، يسمى هذا النطاق الشامل الحيوي حد شاندراسيخار (Chandrasekhar).

وجد شاندراسيخار وهو في السن الثامنة عشرة حساب هذا الحد من الكتلة ، أثناء رحلته في المحيط من الهند إلى المملكة المتحدة ، حتى قبل أن يبدأ دراساته العليا في جامعة كامبريدج في سنة 1930.

و في وقت لاحق حصل على جائزة نوبل في الفيزياء لمساهمته في الفيزياء الفلكية [25] .



الشكل (5) : يمثل علاقات نصف القطر بالكتلة لنموذج القزم الأبيض ، المنحني الأخضر يستخدم قانون الضغط

العام لغاز فيرمي المثالي ، في حين أن المنحني الأزرق لغاز فيرمي المثالي غير النسبي ، الخط الأسود يمثل الحد

فوق النسبي [20].

6.I. الخاتمة (Conclusion) :

يخضع غاز الفرميونات لإحصار فيرمي-ديراك ولمبدأ باولي للإستبعاد ، حيث يمكننا غاز الفرميونات من تسهيل دراسة وفهم أسرار الكون و خصائص البنيوية للمواد المتكونة منه وأفضل مثالا على ذلك الأقزام البيضاء حيث من خلال دراستنا لخواص غاز الفرميونات إستطعنا ان نفهم سر إستقرار هذه النجوم بالرغم من أن وقودها النووي قد نفذ ، وكذلك التنبأ بأن هناك حد معين للكتلة قد تصل إليها النجوم القزمة بعد مليارات السنين قد يؤدي إلى إنهيارها ، وبالتالي مصير هذه المواد الضخمة يرجع إلى سلوك هذه الجسيمات المجهرية (الفرميونات) .

الفصل الثاني

التشوهات الزمكانية

1.II. المقدمة :

في هذا الفصل تطرقنا إلى توضيح معنى التشوهات الزمكانية ، وذلك بشرح مفهوم الحد الأدنى للطول ومبدأ عدم اليقين لهايزنبرغ ، وكذلك مختلف الطرق المعبرة عن الحد الأدنى للأطوال والمتمثلة في مقاربات مبدأ عدم اليقين المعمم "generalized uncertainty principle" (GUP) ، أولاً الحد الأدنى للطول الخاصة بـ "Kempf, Mangano and Mann" (KMM) ، أما ثانياً الحد الأدنى للطول والحد الأقصى لكمية الحركة الخاصة بـ (ADV) Ali , Das ,Vagena ، أما آخرها وتعتبر الجانب الأساسي وهي الحد الأدنى للطول والحد الأقصى لكمية الحركة الخاصة بـ (بيدرام) لأنها الطريقة التي إختارناها في دراستنا ، وفي الأخير توصلنا إلي خاتمة تناولنا فيها ملخص حول مقارنة شاملة بين هذه المقاربات لمبدأ الشك المعمم (GUP) .

2.II. الحد الأدنى للطول :

أستنتج من الأساليب المختلفة المتعلقة بالجاذبية الكمومية مثل فيزياء الثقب الأسود [26] [27] ونظرية الأوتار [28] [29] ، التنبؤ بحد أدنى للطول [30] ، بحيث وجود الحد الأدنى للطول يؤدي إلى مبدأ عدم اليقين المعمم لهايزنبرغ عند مقياس بلانك (الطاقة) ، يصبح نصف قطر شوارزشيلد المقابل مشابهاً لطول موجة كومبتون . في وجود تأثيرات الجاذبية تؤدي الطاقات الأعلى (طاقة بلانك) إلى مزيد من الانخفاض في دائرة نصف قطرها شوارزشيلد Δx وبالتالي $\Delta x \approx l_{pl}^2 \Delta p / \hbar$ من هذه الملاحظة [30] ، اقترح أن مقارنة مبدأ عدم اليقين المعمم سيكون ضرورياً للغاية ، لا سيما في بعض المقاييس الملاحظة للطاقات والمسافات ، وفقاً لمبدأ عدم اليقين لهايزنبرغ ، والذي يمثل أحد الخصائص الأساسية للأنظمة الكمومية ، يجب أن يكون هناك حد أساسي لدقة القياس مع وجود أزواج معينة من المرآيات المادية ، مثل الموضع وكمية الحركة والطاقة والزمن لا يمكن قياسها في وقت واحد ، في

ميكانيكا الكم يتم وصف المرآتيات المادية بواسطة المؤثرات في فضاء هيلبرت بالنظر إلى الملاحظ A ، يتم تعريف المؤثر على أنه الانحراف المعياري لـ A ، حيث يقرأ قيمة التوقع $\langle A \rangle = \langle A \rangle$ ، $\Delta A = A - \langle A \rangle$ ، $\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$.

$$\langle \alpha | \beta \rangle \langle \alpha | \alpha \rangle \geq |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 \quad [31] \quad \text{باستخدام عدم المساواة شوارز}$$

$$|\beta\rangle = \Delta B |\beta\rangle \quad \text{و} \quad |\alpha\rangle = \Delta A |\alpha\rangle \quad \text{حيث :}$$

$$\text{بواسطة عدم المساواة كوشي شوارز نجد :} \quad (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle \Delta A | \Delta B \rangle|^2$$

$$\text{إذن :} \quad \Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle \Delta A | \Delta B \rangle| \quad (22)$$

1.2.II. مبدأ عدم اليقين لهايزنبرغ (HUP):

يعتبر مبدأ عدم التحديد أو مبدأ عدم التأكد أو مبدأ الريبة أو مبدأ الشك من أهم المبادئ في نظرية الكم بعد أن صاغه العالم الألماني هايزنبرغ عام 1927 وينص هذا المبدأ على أنه لا يمكن تحديد خاصيتين مقاستين من خواص جملة كمومية إلا ضمن حدود معينة من الدقة ، أي أن تحديد أحد الخاصيتين بدقة متناهية (ذات عدم تأكد ضئيل) يتتبع عدم تأكد كبير في قياس الخاصية الأخرى ويشيع تطبيق هذا المبدأ بكثرة على خاصيتي تحديد الموضع والسرعة لجسيم أولي . فهذا المبدأ معناه أن الإنسان ليس قادراً على معرفة كل شيء بدقة 100 % [32][33] . ولا يمكنه قياس كل شيء بدقة 100 % إنما هناك قدر لا يعرفه ولا يستطيع قياسه ، وهذه الحقيقة الطبيعية تخضع للمعادلة المكتوبة أدناه والتي يتحكم فيها h ثابت بلانك .

نتائج هذا المبدأ شيء هائل حقاً ، فإذا كانت القوانين الأساسية للفيزياء تمنع أي عالم مهما كانت له ظروفًا مثالية للحصول على معلومات مؤكدة تماماً. فما يقوم بقياسه يحتوي طبيعياً على قدر من عدم

الدقة لا يستطيع تخطيه ، لأنه قانون طبيعي . فهذا هو منطق مبدأ عدم التأكد. ومعنى ذلك أنه لا يستطيع أن يتنبأ بحالة الانظمة مستقبلاً بدقة متناهية ، بل تظل هناك نسبة ولو صغيرة من عدم التأكد ومعنى هذا المبدأ أنه مهما كان الإحكام وتطوير وسائلنا في القياس فلن يمكننا ذلك من التوصل إلى معرفة كاملة للطبيعة من حولنا [34] .

عبارة مبدأ عدم اليقين تعطى بالشكل الآتي :

$$(23) \quad \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

حيث ان Δx هي ارتياب الموضع و Δp هو ارتياب كمية الحركة و \hbar ثابت ديراك .

المعادلة (23) توضح أن حاصل ضرب عدم التأكد في تعيين موضع الجسم في عدم التأكد في تعيين كمية حركة لابد أن يكون يساوي أو أكبر من المقدار \hbar وعلى ذلك لا يمكن أن يكون حاصل ضرب عدم التأكد للموضع في عدم التأكد في كمية حركة الجسم صفرًا [32] .

وطبقاً إلى إحدى صيغ مبدأ عدم التأكد أن الطاقة والزمن تحكمهما العلاقة :

$$(24) \quad \Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

حيث ان ΔE هي ارتياب الطاقة و Δt هو ارتياب زمن القياس .

3.II. مختلف الطرق المعبرة عن الحد الأدنى للطول :

1.3.II. الحد الأدنى للطول :

بسبب مبدأ عدم اليقين لهايزنبرغ (HUP) ، لا يوجد أي قيود على دقة القياس لموضع الجسيمات ، Δx يمكن جعل هذا الحد الأدنى من عدم اليقين في الموضع صغيراً بشكل تعسفي حتى يصل إلى الصفر [35] . من الواضح أن النزول إلى هذا الحد لا يمثل أساساً إطار عمل مبدأ عدم اليقين المعمم ، نظراً لوجود الحد الأدنى في الطول ، والذي يعدّل بوضوح معادلات هاميلتون للنظام خاصة على مقياس بلانك في طيف الطاقة في النظام الكمي ، والذي بدوره يتنبأ بتصحيحات صغيرة في الكميات القابلة للقياس ، فقد لوحظ ذلك في تجارب المواد المكثفة والفيزياء الذرية ، وبالتالي ينشأ أمل في أن آثار الجاذبية الكمومية يمكن ملاحظتها في المختبر [36] [37] .

نراجع مقاربتين لـ (GUP) توحى بوجود حد أدنى من عدم اليقين في الطول . في العنصر (أ) نعرض اقتراح الحد الأدنى للطول مع تعديل كمية الحركة [37][38] . في العنصر (ب) ، ندرس السمات الرئيسية في التمثيل الفضائي لهيلبرت من أجل الحد الأدنى في الطول [39] .

أ. تعديل كمية الحركة :

إنطلاقاً من شكل جاكوبي (Jacobi) ، تعدل مقارنة (GUP) معادلات هايزنبرغ على النحو التالي :

$$(25) \quad [x_i, p_j] = i\hbar(\delta_{ij}(1 + \beta p^2 + 2\beta p_i p_j))$$

$$(26) \quad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad \text{بحيث :}$$

وهكذا يتم قراءة كل من مؤثري الموضع وكمية الحركة كما يلي [37]:

$$(27) \quad X_i = x_{0i} ,$$

$$(28) \quad P_i = p_{0i}(1 + \beta p_0^2) .$$

يؤدي إدخال الحد الأدنى للطول إلى تعديل العلاقات التبادلية المتعارف عليها ، في حين يجب أن يختلف فضاء الموضع في مقياس بلانك عن الموضع في النظام الأساسي ، لأن في الموضع الأصلي غياب الحالة الصفرية وبالتالي ، من المفيد تعديل فضاء الموضع بدلاً من السماح بالتعديل في فضاء كمية الحركة و هذا الأخير يؤدي إلى عدم تشتيت الفضاء $[x_i, x_j] \neq 0$. نستنتج من المعادلتين 27 و 28 ، أنه من المستحيل استخدام تمثيل هيلبرت لفضاء الموضع نظراً لعدم إنعدام الحد الأدنى للطول مع تعريف كمية الحركة المعدلة الموافقة لمستويات الطاقة المعادلة (28) ، والقيم غير التبادلية لكمية الحركة تنص على $[p_i, p_j] \neq 0$ [38] .

ب. تمثيل فضاء هيلبرت :

نناقش موضوعاً عاماً لتنفيذ حالة عدم اليقين الذي لا يساوي الصفر في الموضع . يمكن أن تقتصر المناقشة على استكشاف تطبيقات الحد الأدنى من عدم اليقين في سياق غير نسبي ، كما تم تقديم ميزات مختلفة لتمثيل فضاء هيلبرت ، خاصة على مقياس بلانك . [39]

$$(29) \quad \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} + \beta_0 l_p^2 \frac{(\Delta p)^2}{\hbar^2}$$

الجزء الثاني $\beta_0 l_p^2 \frac{(\Delta p)^2}{\hbar^2}$ نجد أصله في طبيعة الزمكان في طاقة بلانك ($\epsilon_p = 10^{39}$ GeV) مبدأ عدم اليقين المعمم المبسط يتضمن ظهور عدم يقين أدنى لا يساوي صفر Δx_0 .

$$(30) \quad \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta (\Delta p)^2)$$

يتم إعطاء معادلة هايزنبرغ من مبدأ الشك المعمم كما يلي [40][41] :

$$(31) \quad [x, p] = i\hbar (1 + \beta p^2)$$

2.3.II. الحد الأدنى للطول من عدم اليقين و الحد الأقصى لكمية الحركة :

أ- تعديل كمية الحركة :

بناءً على نظرية النسبية الخاصة المعدلة " doubly special relativity " (DSR) ، تقترح مقارنة (GUP) تعديلات بحيث [47] :

$$(32) \quad [x_i, p_j] = i\hbar(\delta_{ij}(1 + \beta p^2 + 2\beta p_i p_j))$$

$$(33) \quad [x_i, p_j] = i\hbar \left[(\delta_{ij} + \alpha p \delta_{ij} + \alpha_2 \frac{p_i p_j}{p} + \beta_1 p^2 \delta_{ij} + \beta_2 p_i p_j) \right]$$

بعد تطبيق شكل جاكوبي على المعادلة (32) نجد :

$$(34) \quad [x_i, p_j] = i\hbar \left[(\delta_{ij} + \alpha p \delta_{ij} + \alpha_2 \frac{p_i p_j}{p} + \beta_1 p^2 \delta_{ij} + \beta_2 p_i p_j) \right]$$

$$(35) \quad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad \text{ومنه}$$

أين : $\alpha = \frac{l_{pl} \cdot \alpha_0}{\hbar} = \frac{\alpha_0}{c M_{pl}}$ وطول بلانك $l_{pl} = 10^{-34} \text{ m}$ والطاقة $\epsilon_{pl} = c^2 M_{pl}$.

تم صياغة مبدأ الشك المعمم في بعد واحد كما يلي [42][43] :

$$(36) \quad \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} (1 + 2\alpha \langle p \rangle + 2\alpha^2 \langle p^2 \rangle)$$

حيث أن : $(\Delta p) = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$

وبالتالي :

$$(37) \quad \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{\sqrt{\langle p^2 \rangle}} + 4\alpha^2 \right) (\Delta p)^2 + 4\alpha^2 \langle p \rangle^2 - 2\alpha \sqrt{\langle p^2 \rangle} \right]$$

وهذا يعني الحد الأدنى للطول وكمية الحركة الأقصى قابلين للقياس في وقت واحد .

$$(38) \quad \Delta x \geq (\Delta x)_{min} \approx \alpha \hbar \approx \alpha_0 l_{pl}$$

$$(39) \quad \Delta p \leq (\Delta p)_{min} \approx \frac{1}{\alpha} \approx \frac{M_{pl}}{\alpha_0}$$

ويحدد :

$$(40) \quad X_i = x_{0i}$$

$$(41) \quad P_i = p_{0i}(1 - \alpha p_0 + 2\alpha^2 p_0^2) .$$

أين تُعرَّف على أنها كمية الحركة في مقياس الطاقة المنخفضة ، والذي يمثله $p_{0j} = i\hbar \partial/\partial x_{0j}$ بينما يعتبر p_j كمية الحركة على نطاق الطاقة العالية ، من المفترض أن أبعاد المتغير α_0 لها قيمة قريبة جداً من الوحدة ، في هذه الحالة تكون المحددات المتعلقة ب α مهمة فقط عندما تكون الطاقات (العزم) قابلة للمقارنة مع طاقة بلانك (كمية الحركة) ، وتكون الأطوال ماثلة لطول بلانك. [44][45]

ب - تمثيل فضاء هيلبرت :

من المعادلة (36) ، والتي ترتبط بكمية الحركة (تشير إلى كمية الحركة الأقصى) ، يمكن أن تنشأ اختلافات بين تمثيل فضاء هيلبرت وعمل (KMM) [39] ، على إفتراض أن الحد الأدنى للطول الذي يمكن ملاحظته لديه عدم يقين غير متلازم ، ينبغي تمثيل فضاء هيلبرت جديد والذي يتوافق مع علاقة التشتت المصاحبة لمبدأ الشك المعمم .

$$(42) \quad [x_i , p_j] = i\hbar . \delta_{ij} (1 - \alpha p + \alpha^2 \vec{p})$$

لكن عند إهمال الحد الأدنى في كمية الحركة ، لا يزال هناك تمثيل مستمر لعزم كمية الحركة ، وهذا يعني أنه يمكن استكشاف التطبيقات المادية المختلفة ذات الحد الأدنى للطول من خلال تنفيذ تمثيل مناسب للعلاقات التشتت على كمية حركة الفضاء [46] .

4.II. الحد الأدنى للطول و الحد الأقصى لكمية الحركة من عدم اليقين :

تم اقتراح مقارنة (GUP) عالية المستوى بافتراض n بعد ، وضماً الحد الأدنى في الطول وكمية الحركة الأقصى الملحوظة [44] [45] .

$$(43) \quad [X_i, P_i] = \frac{i\hbar}{1-\beta p^2} \delta_{ij} \quad ,$$

أين $p^2 = \sum_j^3 p_j p_j$ ، إذا كانت مكونات مؤثر كمية حركة مفترضة $[P_i, P_j]$ ، يحدد شكل جاكوبي علاقات التبديل بين مكونات مؤثر الموضع .

$$(44) \quad [X_i, X_j] = \frac{2 i\hbar\beta}{(1-\beta p^2)^2} (P_i, X_j - P_j, X_i) \quad ,$$

مما يؤدي إلى تعميم هندسي غير تبديلي لفضاء الموضع ، من أجل تحقيق علاقات التشتت ينبغي كتابة مؤثري الموضع وكمية الحركة في تمثيل فضاء كمية الحركة على هذا النحو :

$$(45) \quad X_i = \frac{i\hbar}{1-\beta p^2} \partial_{p_i} \phi(p)$$

$$(46) \quad P_j \phi(p) = p_j \phi .$$

تتضمن حالة التماثل لمؤثر الموضع في البعد الواحد ، علاقة اكتمال معدلة بمجال يختلف

عن $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ إلى $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$.

$$(47) \quad \langle \emptyset | \Psi \rangle = \int_{\frac{1}{\sqrt{\beta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\beta}}} dp (1 - \beta p^2) \emptyset^*(p) \Psi(p) .$$

يبدو أن هذه النتيجة تختلف عن طريقة (KMM) .

سيتم تغيير المنتج العددي لعوامل توليد كمية الحركة إلى $\delta(p - p') / (1 - \beta p^2)$ ، أيضا ،
تحدد كمية حركة الجسيمات من فوق $p_{max} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$. وجود حد أعلى يتوافق مع (DSR) ، فإن
الملاحظات الفيزيائية مثل الطاقة وكمية الحركة ليست فقط غير مفردة ، ولكنها مُحددة من الأعلى أيضاً
[39] . أصغر عدم اليقين في الموضع يقرأ كما يلي :

$$(48) \quad \Delta X = \frac{3\sqrt{3}}{4} \hbar \sqrt{\beta}$$

وتقدر مقارنة (GUP) الجديد هذا الحد الأدنى في الطول وكمية الحركة الأقصى في وقت واحد ، و
يشمل مصطلحاً تربيعياً لكمية الحركة ويؤكد على الهندسة غير التبادلية [44] .

توافق كمية الحركة الأقصى التي يمكن ملاحظتها مع كمية الحركة المقدر في (DSR) [47] [48] .

إذا تم تطبيق نظرية ذات الحدين على مقارنة (GUP) ، يمكن استنتاج مقارنة (GUP) الذي تم التنبؤ
بها في نظرية الأوتار [49][50] و فيزياء الثقوب الأسود [51] . من ناحية أخرى ، تجدر الإشارة إلى أن

مقارنة (GUP) الجديدة هذه [44] لا تتفق مع علاقة العاكس التي تم التنبؤ بها في DSR [47] .

5.II. الخاتمة :

وفي الأخير نقدم ملخص لمقارنة شاملة بين مقاربات (GUP) الخاص بـ (KMM) ، وعلي وداس وفاجيناس (ADV) ، وبيدرام :

- يختلف الحد الأدنى في الموضع من $\hbar \alpha$ أو $\hbar \sqrt{\beta}$ و $\sqrt{27} \hbar \alpha/4$ على التوالي .
- يوجد حد أقصى في كمية الحركة بـ (ADV) على الرغم من أنه يطلق عليه خطأ كمية الحركة الأقصى .
- تتحول كمية الحركة الأقصى في (KMM) ، بينما تظل محدودة عند $1/4\alpha$ و $1/\sqrt{\beta}$ على التوالي ، في (ADV) و بيدرام .
- مؤثر كمية الحركة والهندسة الناتجة تبقى دون تغيير في جميع الطرق .
- مؤثر الموضع يصف المقاربات المختلفة .

الفصل الثالث

تأثير التشوهات الزمكانية

على الأقزام البيضاء

1.III. المقدمة :

نتطرق في هذا الفصل الثالث والأخير إلى حساب ثوابت فيرمي للغاز المثالي (كمية الحركة و درجة الحرارة وطاقة فيرمي) ، ثم ننتقل لحساب الطاقة الداخلية وضغط الإنحلال وإستخراج علاقة التي تربط بين الكتلة ونصف القطر في الحالتين النسبية والكلاسيكية وهذا في الحالة العادية أي قبل إضافة معامل التشوه ، بعد ذلك نضيف معامل التشوه والمتمثل في الطرف $(1 - \beta p^2)^3$ في جميع العلاقات السابقة ، ونعيد حساب كل من كمية الحركة والطاقة الداخلية وضغط الإنحلال وكذلك نصف القطر و في الأخير ندرس مدى تأثير معامل التشوه β على كل منها وذلك بالمقارنة مع النتائج المدروسة سابقا .

2.III. التذكير بحساب ثوابت فيرمي في الغاز المثالي للفرميونات :

عند درجة الحرارة 0 كلفن فإن دالة فيرمي هي دالة Heaviside $\Theta(\varepsilon - \varepsilon_f)$. وبالتالي يمكننا حساب عدد الجسيمات في الحد الديناميكي الحراري بالضبط [3] .

$$(49) \quad N = \sum n_i^{fd} (T = 0) \rightarrow \int_0^{\varepsilon_f} g(\varepsilon) d\varepsilon$$

كثافة الحالات تكتب من اجل الغاز المثالي كالتالي :

$$(50) \quad g(\varepsilon) d\varepsilon = g(p) dp$$

$$g(p) dp = g_s \frac{V}{h^3} 4\pi p^2$$

طاقة كل الكترون هي حركية بحت $(2m_e)^{-1/2} p$ [9] .

وبالتالي يمكننا تعريف كمية حركة فيرمي p_f بالعلاقة التالية :

$$(51) \quad p_f = (2m_e \varepsilon_f)^{1/2}$$

مع العلم أن من أجل إلكترونات الانحلال الداخلي هي مرتبطة بحالتين سبين $g_s = 2$ اذن :

$$(52) \quad N = 2 \times \frac{V}{h^3} 4\pi \int_0^{p_f} p^2 dp$$

$$(53) \quad N = \frac{8\pi V}{3h^3} p_f^3$$

من خلال عكس هذه العلاقة وإدخال $\hbar = h/2\pi$ ، نحصل على :

$$(54) \quad p_f = \hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3}$$

وبالتالي بالنسبة للطاقة فيرمي نكتب بالعلاقة الأتية [4] :

$$(55) \quad \varepsilon_f = \frac{p_f^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

ومنه عبارة الطاقة نستنتج عبارة درجة حرارة فيرمي :

$$(56) \quad \theta_f = \frac{\varepsilon_f}{k}$$

باستخدام العلاقة $N = \frac{M}{2m_p}$ وحقيقة أن النجم هو كروي نصف القطر R وبالتالي :

$$(57) \quad \varepsilon_f = \frac{p_f^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e R^2} \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{2/3}$$

$$\theta_f = 1,15 \times 10^9 \text{ K} \quad \text{و} \quad \varepsilon_f = 1,60 \times 10^{-14} \text{ J} = 99,6 \text{ Kev} \quad \text{: عدديا نجد}$$

بما أن درجة حرارة فيرمي في المعادن أكبر بكثير من درجة حرارة القزم الأبيض ، إذن يمكننا ضبط كل

الحسابات عند درجة حرارة الصفر المطلق [6].

3.III. الطاقة الداخلية والضغط في الحالة الكلاسيكية والنسبية :

1.3.III حساب الطاقة الداخلية والضغط (الحالة الكلاسيكية) :

يكون حساب الطاقة الداخلية عند $T = 0K$ دائماً في حدود الهيدروديناميكية .

$$(58) \quad U = \sum_i \varepsilon_i n_i^{fd} (T=0) \rightarrow \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_f} \varepsilon p^2 dp$$

مع $\varepsilon = p^2 / 2m_e$ نحصل على :

$$(59) \quad u = \frac{V}{\pi^2 2m_e \hbar^3} \int_0^{p_f} p^4 dp$$

$$(60) \quad u = \frac{V}{\pi^2 2m_e \hbar^3} p_f^5 \quad \text{ومنه}$$

بعد تعويض علاقة كمية الحركة (54) في العلاقة (60) نجد :

$$(61) \quad u = \frac{1}{10m_e \pi^2} \hbar^2 (3\pi^2 N)^{5/3} V^{-2/3}$$

عند درجة حرارة صفر الطاقة الداخلية U و $F = U - TS$ الدمج الحر المبدأ الثاني من الديناميكا الحرارية $dU = TdS - PdV$ يسمح لها [8] .

$$(62) \quad dF = dU - TdS - SdT$$

$$= -PdV - SdT$$

كذلك [21] :

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \quad \text{ومنه عند } T=0K, \text{ نجد :}$$

$$(63) \quad P = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T$$

وبالتالي :

$$(64) \quad P = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{5/3}$$

نأخذ دائما $N = \frac{M}{2m_e}$ و $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ نجد في النهاية [6] :

$$(65) \quad P = \frac{\hbar^2}{15m_e\pi^2} \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{5/3} \frac{1}{R^5}$$

III.2.3. علاقة نصف قطر القزم الأبيض بالكتلة (الحالة الكلاسيكية) :

يمكن تقييم ضغط الجاذبية P_G الذي يخضع لسطح القزم الأبيض بواسطة البرهان الحراري الديناميكي

للطاقة الكامنة للجاذبية لجسم متجانس الكتلة M ونصف قطره R تعطى بالشكل التالي : [52]

$$(66) \quad E_G = -\frac{3GM^2}{5R}$$

يمكننا تكملت العمل الجاذبي المرتبط بتقلص العنصر الكروي للسطح .

$$(67) \quad \delta W = dE_p = \frac{3GM^2}{5R^2} dR$$

عن طريق كتابة علاقة الديناميكية الحرارية $\delta W = -P_G dV$ في حالة كرة مع $dV = 4\pi \times R^2$

$$-P_G 4\pi \times R^2 = \frac{3GM^2}{5R^2}$$

إذن تكتب علاقة ضغط الجاذبية كما يلي [6] :

$$(68) \quad P_G = -\frac{3GM^2}{20\pi R^4}$$

هذا ما يمكن تحديده كضغط بسبب قوى الجاذبية على السطح النجم على افتراض أن ضغط الجاذبي هذا

يميل لضغط النجم يقابله الضغط الداخلي للنجم (ذلك من الإلكترونات المتولدة من أجل القزم الأبيض)

في حالة التوازن نحصل على [18]:

$$(69) \quad P_G + P = 0$$

بعد تعويض العلاقة (65) و(68) في علاقة التوازن (69) نجد :

$$\frac{3GM^2}{20\pi R^4} = \frac{\hbar^2}{15m_e\pi^2} \left(\frac{9\pi M}{8m_p}\right)^{5/3} \frac{1}{R^5}$$

$$(70) \quad PM^{1/3} = \frac{\hbar^2}{8Gm_em_p} \left(\frac{9\pi}{m_p}\right)^{2/3}$$

وبالتالي تكتب علاقة نصف القطر كما يلي :

$$(71) \quad R = \frac{\hbar^2}{8Gm_em_p} \left(\frac{9\pi}{m_p}\right)^{2/3} \frac{1}{M^{1/3}}$$

لكتلة معينة من النجم يكفي ضغطها بما فيه الكفاية للوصول إلى نصف القطر المتوقع من هذه المعادلة حتى أن الضغط الانحلال الإلكتروني يوازن الجاذبية [6].

من اجل القزم الأبيض الذي سنأخذ بعين الاعتبار ($M = 2.10^{30}$ kg و $R = 10^7$ m) ، نجد بعد التطبيق العددي :

$$PM^{1/3} = 1,23 \cdot 10^{17} \text{ m.kg}^{1/3}$$

$$\frac{\hbar^2}{8Gm_em_p} \left(\frac{9\pi}{m_p}\right)^{2/3} = 9,00 \cdot 10^{16} \text{ m.kg}^{1/3} \quad \text{في حين}$$

الاتفاق صحيح جدا لكن النظرية خاطئة من حيث المبدأ !

هذا الحساب الذي أدلى به فاوولر في عام 1925 تحت قيادة ايدنغتون طمأن في الاخير إلى الإستحالة المادية لوجود الثقوب السوداء [20][22] ، في عام 1916 تتنبأ النسبية العامة بوجود تأثير كتلة شمسية متكاملة داخل دائرة نصف قطرها بضعة كيلومترات يخلق منطقة من الفضاء الزمني ، مثل هذا القطر

غير قابل للوصول إلى هذه الكتلة وفقاً لنموذج فاوولر لأن ضغط انحلال الإلكترونات يمنع مثل هذا المستوى من الضغط ، عمل الشاب الهندي Chandrasekhar على أن يثبت العكس [6]

تكتب علاقة كمية حركة فيرمي :

$$p_f = \hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} = \frac{\hbar}{R} \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{1/3}$$

لدينا : $P = m_e v$ وبالتالي فإن السرعة المميزة للإلكترونات هي :

$$(72) \quad v = \frac{p_f}{m_e} = \frac{\hbar^2}{R m_e} \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{1/3}$$

عددياً نجد أن سرعة الإلكترونات (v) تساوي 63 % من سرعة الضوء مما يعني أن الإلكترونات لا يمكن تقديرها كلاسيكياً فهي نسبية [4] .

III.3.3 حساب الطاقة الداخلية والضغط (الحالة النسبية) :

عندما يصبح الإلكترون نسبياً فإن الطاقة الحركية لم تعد أكبر فقط بسبب سرعته و طاقة الكتلية يجب أن نحدث تغييراً بهذا الشكل [53] :

$$(73) \quad \varepsilon = \frac{p^2}{2m} \rightarrow \varepsilon^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

حساب الطاقة و الضغط عند $T = 0$ يتم تعديله في الحد الهيدروديناميكي ولكن كمية حركة فيرمي p_f تصبح في الحالة النسبية .

$$(74) \quad U = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_f} (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2} p^2 dp$$

بوضع $x = p / mc$ ، وهكذا $x_f = p_f / m_e c$ [53].

تصبح الطاقة بالشكل التالي :

$$(75) \quad u = \frac{Vm^4c^5}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{x_f} x^2 (x^2 + 1)^{1/2} x^2 dx$$

تطبيق رقمي صغير يعطي

$$x_f = p_f / m_e c = \frac{R_c}{R} = \frac{\hbar}{c m_e} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} = \frac{\hbar}{m_e c R} \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{1/3} = 0.626$$

وهكذا بعد تطبيق نشر تايلور و إجراء التكامل نجد:

$$(76) \quad U \approx \frac{Vm^4c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{x_f^5}{10} + \frac{x_f^3}{3} \right)$$

بعد تعويض x_f بما يساويها في عبارة الطاقة نجد :

$$(77) \quad u = \frac{Vm^4c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left[\frac{1}{10} \left(\frac{\hbar}{c m_e} \right)^5 \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{5/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\hbar}{c m_e} \right)^3 \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{3/3} \right]$$

يمكن إيجاد عبارة الضغط وذلك بإشتقاق الطاقة بالنسبة للحجم عند الصفر المطلق كما يلي : [23][53]

$$P = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \quad \text{ومنه}$$

بعد إشتقاق عبارة الطاقة (77) نجد :

$$(78) \quad P = \frac{m^4c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left[\frac{1}{15} \left(\frac{\hbar}{c m_e} \right)^5 \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{5/3} \right]$$

وفي الأخير نجد :

$$(79) \quad P = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{5/3}$$

نأخذ دائماً $N = \frac{M}{2m_e}$ و $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ ونعوضهما في العلاقة (78) و نجد :

$$(80) \quad P = \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{15} \left(\frac{\hbar}{c m_e} \right)^5 \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{\frac{5}{3}} \times \frac{1}{R^5} \right)$$

III.4.3 علاقة نصف القطر القزم الأبيض بالكتلة (الحالة النسبية):

بموازنة هذا الضغط مع ضغط الجاذبية نحصل على : $P_G + P = 0$

بعد تعويض علاقة الضغط الناتج (80) في عبارة التوازن نجد :

$$(81) \quad \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{15} \left(\frac{\hbar}{c m_e} \right)^5 \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{5/3} \times \frac{1}{R^5} \right) = \frac{3GM^2}{20\pi R^4}$$

حيث نضع :

$$(82) \quad R_c = \frac{\hbar}{m_e c} \left(\frac{9\pi M}{8 m_p} \right)^{1/3} \times \frac{1}{R}$$

بالتالي تكتب معادلة التوازن بالشكل التالي :

$$(83) \quad \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{15} \left(\frac{\hbar}{c m_e} \right)^4 \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{4/3} \right) \frac{R_c}{R^5} = \frac{3GM^2}{20\pi R^4}$$

$$(84) \quad \left(\frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{15} \left(\frac{\hbar}{c m_e} \right)^4 \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{4/3} \right) \right) \frac{R_c}{R} = \frac{3GM^2}{20\pi}$$

$$(85) \quad \frac{R}{R_c} = \left(\frac{20 \cdot \hbar c}{45\pi G M^2} \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{4/3} \right)$$

آخر الحساب يعطي

$$(86) \quad \frac{R}{R_c} = \left(\frac{20 \cdot \hbar c}{45\pi G} \left(\frac{9\pi}{8m_p} \right)^{4/3} \right) \frac{1}{M^{2/3}}$$

يمكن كتابة علاقة نصف بدلالة الكتلة كمايلي :

$$(87) \quad R = \left(\frac{20 \cdot h^2}{45 \pi m_e G} \left(\frac{9 \pi}{8 m_p} \right)^{4/3} \right) \frac{1}{M^{1/3}}$$

يقودنا هذا لتقديم كتلة Chandrasekhar [23] .

$$(88) \quad M_c^{2/3} = \frac{4 \cdot c \hbar (9 \pi)^{1/3}}{(8 m_p)^{4/3} G}$$

$$(89) \quad M_c = \frac{(9 \pi)^{1/2}}{(8 m_p)^2} \left(\frac{4 \cdot c \hbar}{G} \right)^{3/2} \simeq 3.42 \cdot 10^{30} \text{ kg} \simeq 1,5 M_{\odot}$$

وبالتالي نجد كتلة شاندراسيخار تساوي مرة ونصف كتلة الشمس :

$$M_c = 1,5 M_{\odot}$$

M_{\odot} : تمثل كتلة الشمس وتساوي $2 \times 10^{30} \text{ kg}$.

إذن يمكن كتابة العلاقة (86) بالشكل التالي :

$$(90) \quad \frac{R}{R_c} = \frac{M_c}{M}$$

من السهل أن ترى أن التوازن ممكن طالما $M < M_c$ إذا كانت كتلة القزم الأبيض أكبر من كتلة

شاندراسيخار لم يعد هناك توازن وبالتالي ينهار النجم إلى حالة جديدة ويصبح نجم نيوتروني بعد ذلك

يحتمل أن يكون جسماً أكثر تماسكاً ، نفهم أن إدينجتون المعارض العنيف لفكرة الثقب الأسود استقبل هذا

الحساب الذي أدلى به شاندراسيخار الشاب الهندي على متن القارب الذي أحضره من الهند إلى إنجلترا

[54][6].

4.III. تأثير التشوهات الزمكانية على القزم الأبيض :

لمعرفة مدى تأثير التشوهات الزمكانية على الغازات الكمية نكرر نفس الحساب السابق ولكن بإدخال

معامل التشوه كما سبق وذكرنا .

1.4.III. تأثير معامل التشوه على كمية حركة فيرمي :

يمكننا حساب عدد الجسيمات في الحد الديناميكي الحراري بالضبط .

نقوم بإدخال الطرف $(1 - \beta p^2)^3$ في علاقة عدد الجسيمات السابقة انظر المعادلة (49) ونحسب

التكامل كما يلي :

$$(91) \quad N = \frac{8\pi V}{h^3} \int_0^{p_f} p^2 (1 - \beta p^2)^3 dp$$

بعد حساب التكامل و استخدام نشر تايلور بالنسبة لمعامل التشوه على الناتج نجد في الاخير :

$$(92) \quad N = \frac{8\pi V}{h^3} \left(\frac{p_f^3}{3} - \frac{3\beta}{5} p_f^5 \right)$$

لإيجاد كمية حركة فيرمي (p_f) علينا ان نحسب معادلة من الدرجة الخامسة في الاخير نجد أن عبارة

كمية حركة فيرمي تعطى بالشكل التالي :

$$(93) \quad p_f = h \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} + h \left(\frac{\pi^2}{V} \right)^{1/3} \frac{9N\beta}{5}$$

وبالتالي يمكن تبسيطها كما يلي :

$$(94) \quad p_f = p_{f_1} + h \left(\frac{\pi^2}{V} \right)^{1/3} \frac{9N\beta}{5}$$

بحيث p_{f_1} هي كمية حركة فيرمي الحسوبة سابقا قبل اضافة معامل التشوه أنظر العلاقة (54) .

2.4.III. تأثير معامل التشوه على الطاقة الداخلية والضغط ونصف القطر في الحالة الكلاسيكية :

أ. الطاقة الداخلية :

يكون حساب الطاقة الداخلية عند $T = 0K$ دائماً في حدود الهيدروديناميكية .

ندخل الطرف $(1 - \beta p^2)^3$ في العلاقة (58) ونجري التكامل كما يلي :

$$(95) \quad u = \frac{V}{2m_e\pi^2\hbar^3} \int_0^{p_f} p^4 \cdot (1 - \beta p^2)^3 \cdot dp$$

بعد حساب التكامل نجد :

$$(96) \quad u = \frac{V}{2m_e\pi^2\hbar^3} \left(\frac{p_f^5}{5} - \frac{3\beta}{7} p_f^7 + \frac{\beta^2}{3} p_f^9 - \frac{\beta^3}{11} p_f^{11} \right)$$

نعوض العلاقة (93) لكمية حركة فيرمي في عبارة الطاقة الناتجة نجد :

$$(97) \quad u = \frac{V}{2m_e\pi^2\hbar^3} \left[\frac{1}{5} \left(\hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} + \hbar \left(\frac{\pi^2}{V} \right)^{1/3} \frac{9N\beta}{5} \right)^5 - \frac{3\beta}{7} \left(\hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} + \hbar \left(\frac{\pi^2}{V} \right)^{1/3} \frac{9N\beta}{5} \right)^7 + \frac{\beta^2}{3} \left(\hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} + \hbar \left(\frac{\pi^2}{V} \right)^{1/3} \frac{9N\beta}{5} \right)^9 - \frac{\beta^3}{11} \left(\hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} + \hbar \left(\frac{\pi^2}{V} \right)^{1/3} \frac{9N\beta}{5} \right)^{11} \right]$$

بعد النشر نحذف كل طرف يحتوي على β^2 فما فوق في الاخير نجد :

$$(98) \quad u = \frac{V}{2m_e\pi^2\hbar^3} \left[\frac{1}{5} \left(\hbar^5 \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{5/3} + 5\hbar^4 \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{4/3} \times \hbar \left(\frac{\pi^2}{V} \right)^{1/3} \frac{9N\beta}{5} \right) - \frac{3\beta}{7} \left(\hbar^7 \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{7/3} \right) \right]$$

$$u = \frac{1}{10m_e\pi^2} \hbar^2 (3\pi^2 N)^{5/3} V^{-2/3} + \frac{9\beta}{10m_e} \hbar^2 (3\pi)^{4/3} N^{7/3} \times V^{-2/3} - \frac{3\beta}{14m_e\pi^2} \hbar^4 (3\pi^2 N)^{7/3} V^{-4/3}$$

وبالتالي يمكن كتابة المعادلة كما يلي :

$$(100) u = u_1 + \frac{9\beta}{10m_e} \hbar^2 (3\pi)^{4/3} N^{7/3} \times V^{-2/3} - \frac{3\beta}{14m_e\pi^2} \hbar^4 (3\pi^2 N)^{7/3} V^{-4/3}$$

u_1 هي الطاقة الداخلية المحسوبة سابقا أنظر العلاقة (61) .

ب. ضغط الإنحلال :

$$P = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \quad : \quad \text{إنطلاقا من مبدأ الديناميك الحرارية وعند } T = 0 \text{ نجد}$$

بعد إشتقاق عبارة الطاقة الداخلية نجد :

$$(101) \quad P = - \left(\frac{\partial U_1}{\partial V} \right)_T - \frac{9N\beta}{10m_e} \hbar^2 (3\pi N)^{4/3} \times \frac{\partial V^{-2/3}}{\partial V} \\ + \frac{3\beta}{14m_e\pi^2} \hbar^4 (3\pi^2 N)^{7/3} \times \frac{\partial V^{-4/3}}{\partial V}$$

(102) وفي الاخير نجد :

$$p = \frac{\hbar^2}{15m_e\pi^2} \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{5/3} \frac{1}{R^5} + \frac{6\beta}{10m_e} \hbar^2 (3\pi)^{4/3} N^{7/3} \times V^{-5/3} - \frac{2\beta}{7m_e} \hbar^4 \pi^{2/3} (3N)^{7/3} \\ \times V^{-7/3}$$

$$P = P_1 + \frac{6\beta}{10m_e} \hbar^2 (3\pi)^{4/3} N^{7/3} \times V^{-5/3} - \frac{2\beta}{7m_e} \hbar^4 \pi^{2/3} (3N)^{7/3} \times V^{-7/3}$$

حيث P_1 هو الضغط المحسوب سابقا أنظر العلاقة (65) .

(103) نعوض $N=M/(2m_p)$ و $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ في العلاقة (100) الضغط فنجد :

$$P = \frac{\hbar^2}{15m_e\pi^2} \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{5/3} \frac{1}{R^5} + \frac{81\beta}{10m_e} \hbar^2 \pi^{-1/3} \left(\frac{M}{4m_p} \right)^{7/3} \times \frac{1}{R^5} \\ - \frac{2\beta}{7m_e\pi^2} \hbar^4 \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{7/3} \times \frac{1}{R^7}$$

ت. علاقة نصف القطر بدلالة الكتلة :

بموازنة هذا الضغط مع ضغط الجاذبية نحصل على : $P_G + P = 0$

بعد تعويض بعلاقة الضغط الناتج (101) والعلاقة (68) في عبارة التوازن نجد :

$$(104) \quad \frac{3GM^2}{20\pi R^4} = \frac{\hbar^2}{15m_e\pi^2} \left(\frac{9\pi M}{8m_p}\right)^{5/3} \frac{1}{R^5} + \frac{81\beta}{10m_e} \hbar^2 \pi^{-1/3} \left(\frac{M}{4m_p}\right)^{7/3} \times \frac{1}{R^5} - \frac{2\beta}{7m_e\pi^2} \hbar^4 \left(\frac{9\pi M}{8m_p}\right)^{7/3} \times \frac{1}{R^7}$$

(105) يمكن كتابة هذه العلاقة على شكل معادلة من الدرجة الثالثة كما يلي :

$$R^3 - \left(\frac{20\hbar^2}{45\pi G m_e} \left(\frac{9\pi}{8m_p}\right)^{5/3} M^{-1/3} + \frac{54\beta}{G m_e} \hbar^2 \pi^{2/3} \left(\frac{1}{4m_p}\right)^{7/3} M^{1/3} \right) \cdot R^2 + \frac{40\beta}{21\pi G m_e} \hbar^4 \left(\frac{9\pi}{8m_p}\right)^{7/3} M^{1/3} = 0$$

بعد حل المعادلة نجد :

$$(106) \quad R = \left(\frac{\hbar^2}{8G m_p m_e} \left(\frac{9\pi}{m_p}\right)^{2/3} M^{-1/3} + \frac{36\beta}{G m_e} \hbar^2 \pi^{2/3} \left(\frac{1}{4m_p}\right)^{7/3} M^{1/3} \right)$$

يمكن كتابة علاقة نصف القطر كما يلي :

$$(107) \quad R = \left(R_1 + \frac{36\beta}{G m_e} \hbar^2 \pi^{2/3} \left(\frac{1}{4m_p}\right)^{7/3} M^{1/3} \right)$$

R_1 : هو نصف القطر المحسوب في الحالة الكلاسيكية أنظر المعادلة (71) .

3.4.III. تأثير معامل التشوه على الطاقة والضغط ونصف القطر في الحالة النسبية :

أ. حساب الطاقة الداخلية :

بنفس الطريقة المستخدمة في الحالة الكلاسيكية نضيف الطرف $(1 - \beta p^2)^3$ إلى العلاقة (74)

ونجري التكامل كما يلي :

$$(108) \quad u = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \cdot \int_0^{p_f} p^2 \sqrt{(p^2 c^2 + m^2 c^4)} \cdot (1 - \beta p^2)^3 \cdot dp$$

نضع $x=p/m.c$ ومنه تصبح العبارة بالشكل التالي :

$$(109) \quad u = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} m^4 c^5 \int_0^{x_f} x^2 \sqrt{(x^2 + 1)} (1 - \beta (mcx)^2)^3 \cdot dp$$

(110) بعد إجراء التكامل نجد :

$$u = \frac{Vm^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{x_f^3}{3} + \frac{x_f^5}{10} - \frac{6\beta c^2 m^2}{10} x_f^5 + \left(\frac{24\beta^2 c^4 m^4}{56} - \frac{12\beta c^2 m^2}{56} - \frac{1}{56} \right) x_f^7 \right)$$

نعوض x_f في عبارة الطاقة بحيث :

$$(111) \quad x_f = \frac{p_f}{m_e c} = \frac{\hbar}{m_e c} \left(\left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} + \left(\frac{\pi^2}{V} \right)^{1/3} \frac{9N\beta}{5} \right)$$

(112) بعد التعويض نجد :

$$u = \frac{Vm^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left[\left(\frac{1}{3(m_e c)^3} \left(\hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} + \hbar \left(\frac{\pi^2}{V} \right)^{1/3} \frac{9N\beta}{5} \right)^3 + \frac{1}{10(m_e c)^5} \left(\hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} + \hbar \left(\frac{\pi^2}{V} \right)^{1/3} \frac{9N\beta}{5} \right)^5 - \frac{6\beta}{10(m_e c)^3} \left(\hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} + \hbar \left(\frac{\pi^2}{V} \right)^{1/3} \frac{9N\beta}{5} \right)^5 + \left(\frac{24\beta^2 c^4 m^4}{56} - \frac{12\beta c^2 m^2}{56} - \frac{1}{56} \right) \frac{1}{(m_e c)^7} \left(\hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} + \hbar \left(\frac{\pi^2}{V} \right)^{1/3} \frac{9N\beta}{5} \right)^7 \right]$$

(113) بعد النشر نحذف كل طرف يحتوي على β^2 فما فوق فنجد :

$$u = \frac{Vm^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{\hbar^3}{3(m_e c)^3} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right) + \frac{\hbar^5}{10(m_e c)^5} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{5/3} \right) + \frac{Vm^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left[\left(\frac{\hbar^3}{(m_e c)^3} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3} \times \left(\frac{\pi^2}{V} \right)^{1/3} \frac{9N\beta}{5} + \frac{\hbar^5}{2(m_e c)^5} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{4/3} \times \left(\frac{\pi^2}{V} \right)^{1/3} \frac{9N\beta}{5} \right) - \left(\frac{6\beta \hbar^5}{10(m_e c)^3} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{5/3} \right) - \left(\frac{12\beta}{56(m_e c)^5} + \frac{1}{56(m_e c)^7} \right) \hbar^7 \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{7/3} - \left(\frac{7\hbar^7}{56(m_e c)^7} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{6/3} \times \left(\frac{\pi^2}{V} \right)^{1/3} \frac{9N\beta}{5} \right) \right]$$

يمكن كتابتها كما يلي :

(114)

$$u = u_1 + \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left[\left(\frac{3\beta \hbar^5 \pi^{5/3}}{10(m_e c)^5} \right) (3N)^{7/3} V^{-2/3} - \frac{6\beta \hbar^5}{10(m_e c)^3} \times ((3\pi^2 N)^{5/3}) V^{-2/3} + \left(-\frac{12\beta}{56(m_e c)^5} - \frac{1}{56(m_e c)^7} \right) \hbar^7 (3\pi^2 N)^{7/3} V^{-4/3} + \left(-\frac{7\hbar^7}{56(m_e c)^7} (3\pi^2 N)^2 \times (\pi^2)^{1/3} \frac{9N\beta}{5} \right) V^{-4/3} \right]$$

حيث u_1 هي الطاقة الداخلية المحسوبة سابقا في الحالة النسبية أنظر العلاقة (77) .

حتى نعرف تأثير معامل التشوه على عبارة الطاقة يجب نعرف اشارة الطرف الإضافي .

$$\frac{1}{56(m_e c)^7} \hbar^7 (3\pi^2 N)^{7/3} V^{-4/3} \gg \frac{3\beta \hbar^5 \pi^{5/3}}{10(m_e c)^5} (3N)^{7/3} V^{-2/3} : \text{ بما أن } \beta \text{ صغير جدا إذن :}$$

إذن نستنتج أن الطاقة تناقصت بمقدار كبير.

ب. حساب الضغط :

إنطلاقا من عبارة الطاقة (113) نحسب الضغط كما يلي :

نطبق القانون الثاني للديناميك الحرارية عند $T=0K$.

(115)

$$P = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = - \left(\frac{\partial U_1}{\partial V} \right)_T - \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left[\left(\frac{3\beta \hbar^5 \pi^{5/3}}{10(m_e c)^5} \right) (3N)^{7/3} \times \frac{\partial V^{-2/3}}{\partial V} - \frac{6\beta \hbar^5}{10(m_e c)^3} \times ((3\pi^2 N)^{5/3}) \times \frac{\partial V^{-2/3}}{\partial V} + \left(-\frac{12\beta}{56(m_e c)^5} - \frac{1}{56(m_e c)^7} \right) \hbar^7 (3\pi^2 N)^{7/3} \times \frac{\partial V^{-4/3}}{\partial V} - \left(\frac{7\hbar^7}{56(m_e c)^7} (3\pi^2 N)^2 \times (\pi^2)^{1/3} \frac{9N\beta}{5} \right) \times \frac{\partial V^{-4/3}}{\partial V} \right]$$

(116)

بعد إجراء التكامل نجد :

$$P = P_1 + \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left[\left(\frac{\hbar^5 \beta}{5(m_e c)^5} (3N)^{7/3} \right) \times \left(\frac{\pi^2}{V} \right)^{7/3} - \frac{4\beta \hbar^5}{10(m_e c)^3} \times \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{5/3} - \left(\frac{2\hbar^7 \beta}{7(m_e c)^5} + \frac{4\hbar^7}{42(m_e c)^7} \right) \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{7/3} - \left(\frac{\hbar^7 \beta}{10(m_e c)^7} (3N)^{1/3} \left(\frac{\pi^2}{V} \right)^{7/3} \right) \right]$$

حيث P_1 هو ضغط إنحلال الإلكترونات المحسوب في الحالة النسبية أنظر العلاقة (79)

بما أن β صغير جدا إذن :

$$\frac{4\hbar^7}{42(m_e c)^7} \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{7/3} \gg \left(\frac{\hbar^5 \beta}{5(m_e c)^5} (3N)^{7/3} \right) \cdot \left(\frac{\pi^2}{V} \right)^{5/3}$$

بعد المقارنة نجد ضغط انحلال الالكترونات يتناقص بمقدار كبير .

ت- العلاقة التي تربط نصف القطر بالكتلة :

$$P_G + P = 0 \quad \text{بموازنة هذا الضغط مع ضغط الجاذبية نحصل على :}$$

(117) بعد تعويض ضغط الإنحلال وضغط الجاذبية في علاقة التوازن نجد :

$$\begin{aligned} \frac{3GM^2}{20\pi R^4} = \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} & \left[\frac{\hbar^5}{15(m_e c)^5} \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{5/3} \frac{1}{R^5} + \left(\frac{\hbar^5 \beta}{5(m_e c)^5} \left(\frac{3M}{2m_p} \right)^{7/3} \left(\frac{3\pi}{4} \right)^{5/3} \right) \frac{1}{R^5} \right. \\ & - \frac{4\beta \hbar^5}{10(m_e c)^3} \times \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{5/3} \frac{1}{R^5} + \left(-\frac{2\beta \hbar^7}{7(m_e c)^5} - \frac{\hbar^7}{42(m_e c)^7} \right) \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{7/3} \frac{1}{R^7} \\ & \left. - \left(\frac{\hbar^7 \beta}{10(m_e c)^7} \left(\frac{3M}{2m_p} \right)^3 \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{7/3} \right) \frac{1}{R^7} \right] \end{aligned}$$

(118) ومنه :

$$\begin{aligned} R^3 = \frac{20m^4 c^5}{3GM^2 \pi \hbar^3} & \left[\left(\frac{\hbar^5}{15(m_e c)^5} \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{5/3} + \left(\frac{\hbar^5 \beta}{5(m_e c)^5} \left(\frac{3M}{2m_p} \right)^{7/3} \left(\frac{3\pi}{4} \right)^{5/3} \right) - \frac{4\beta \hbar^5}{10(m_e c)^3} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{5/3} \right) R^2 + \left(\left(-\frac{2\beta \hbar^7}{7(m_e c)^5} - \frac{\hbar^7}{42(m_e c)^7} \right) \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{7/3} - \left(\frac{\hbar^7 \beta}{10(m_e c)^7} \left(\frac{3M}{2m_p} \right)^3 \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{7/3} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

(119) لإيجاد R نصف القطر علينا بحل معادلة من درجة الثالثة كما يلي :

$$\begin{aligned} R^3 - \left(\frac{20\hbar^2}{45GM^3 \pi m_e} \left(\frac{9\pi}{8m_p} \right)^{5/3} + \frac{20\hbar^2 \beta M^{1/3}}{15G\pi m_e} \left(\frac{3}{2m_p} \right)^{7/3} \left(\frac{3\pi}{4} \right)^{5/3} - \frac{8\beta m_e c^2 \hbar^2}{3\pi GM^{1/3}} \times \left(\frac{9\pi}{8m_p} \right)^{5/3} \right) R^2 + \\ \left(\left(\frac{40\beta \hbar^4 M^{1/3}}{21GM^2 m_e} + \frac{10\hbar^4 M^{1/3}}{63GM^2 \pi m_e^3 c^2} \right) \left(\frac{9\pi}{8m_p} \right)^{7/3} + \left(\frac{81\hbar^4 \beta M}{16G m_e^3 m_p^3 c^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{4/3} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

(120) بعد حل المعادلة نجد علاقة نصف القطر بدلالة الكتلة كما يلي :

$$\begin{aligned} R = \left(\frac{10\hbar^2}{15GM^{1/3} \pi m_e} \left(\frac{9\pi}{8m_p} \right)^{5/3} + \frac{10\hbar^2 \beta M^{1/3}}{5G\pi m_e} \left(\frac{3}{2m_p} \right)^{7/3} \left(\frac{3\pi}{4} \right)^{5/3} - \frac{4\beta m_e c^2 \hbar^2}{\pi GM^{1/3}} \right. \\ \left. \times \left(\frac{9\pi}{8m_p} \right)^{5/3} \right) \end{aligned}$$

$$(121) \quad R = \left(\frac{2}{3} \times R_1 + \frac{10 \hbar^2 \beta M^{1/3}}{5 G \pi m_e} \left(\frac{3}{2 m_p} \right)^{7/3} \left(\frac{3\pi}{4} \right)^{5/3} - \frac{4 \beta m_e c^2 \hbar^2}{\pi G M^{1/3}} \times \left(\frac{9\pi}{8 m_p} \right)^{5/3} \right)$$

حيث R_1 هو نصف القطر المحسوب سابقا في الحالة النسبية أنظر العلاقة (87) .

بما أن β صغير جدا يمكن تبسيط علاقة نصف القطر كما يلي :

$$(122) \quad R = \frac{2}{3} \times R_1$$

نستنتج من هذه العلاقة أن نصف القطر يتناقص ، ومن العلاقة (90) نستنتج كذلك أن كتلة

شاندراسيخار تتناقص أيضا

5.III. الخاتمة :

نقدم في هذه الخاتمة ملخص عن النتائج النهائية المتوصل إليها بعد إضافة معامل التشوه

ومقارنتها مع النتائج الأولية ، حيث في الحالة الكلاسيكية وجدنا تقريبا نفس النتائج السابقة بالنسبة للطاقة

الداخلية والضغط وزيادة طفيفة في نصف القطر ، بينما في الحالة النسبية وجدنا تغير في النتائج ، وذلك

بنقصان كل من الطاقة الداخلية والضغط ونصف قطر القزم الأبيض وكذلك كتلة شاندراسيخار ، وبالتالي

نستنتج أن تأثير التشوهات الزمكانية يحدث تغيير على خصائص القزم الأبيض وهذا في الحالة النسبية

الخاتمة العامة :

أخيرا نكون قد وصلنا إلى نهاية هذا البحث ، حيث كان موضوعنا حول معرفة مدى تأثير التشوهات الزمكانية على الغازات الفرميونية في النجوم القزمة البيضاء ، لقد نال هذا الموضوع إهتمام من طرف علماء الفلك لما يحتويه من أهمية بالغة حول معرفة الخصائص والبنية الداخلية للأقزام البيضاء وكيفية إستقرارها وكذلك مصيرها في اخر المطاف ، وحتى نتعرف على الخصائص الأقزام البيضاء توجب علينا أن ندرس سلوك غاز الفرميونات بصفة عامة ومن خلال دراستنا لسلوك غاز الفرميونات توصلنا في الأخير أن سلوك غاز الفرميونات في الأقزام البيضاء يختلف عن بقية المواد لأن غاز الفرميونات داخل هذه النجوم يكون منحل بالكامل ، وهذا ما يفسر إستقرار الأقزام البيضاء حيث سلوك الغاز المنحل يولد ضغط الإنحلال يفوق ضغط الجاذبية و يعاكسه ، وبما أن ضغط الجاذبية يعمل على ضغط القزم الأبيض نحو الداخل فإن ضغط الإنحلال المتولد يمنعه من ذلك، لكن إلى متى والقزم الابيض في حالة إستقرار ؟ وهذا ما أجاب عنه العالم الهندي شاندراسيخار، وذلك عند توصله إلى أن هناك حد معين للكتلة حيث من السهل أن ترى أن التوازن ممكن طالما $M < M_c$ حيث إذا كانت كتلة القزم الأبيض أكبر من كتلة شاندراسيخار لم يعد هناك توازن وبالتالي ينهار النجم القزم الأبيض إلى حالة جديدة ويصبح نجم نيوتروني .

أما الجانب الأساسي الذي تطرقنا إليه هو تأثير التشوهات الزمكانية على غاز الفرميونات في الأقزام البيضاء ، حيث حاولنا شرح مفهوم الحد الأدنى للطول ومبدأ عدم اليقين لهايزنبرغ ومختلف الطرق المعبرة عنه وتوصلنا في الأخير إلى مقارنة شاملة بين مقاربات مبدأ عدم اليقين المعمم ، فكانت المقاربة التي إختارناها في دراستنا هي طريقة بيدرام والتي طبقت في الفصل الأخير ، ومن هنا يبدأ العمل الذي قمت به وهو إعادة حساب كمية حركة فيرمي والطاقة الداخلية وضغط الإنحلال وإستنتاج علاقة نصف القطر بدلالة الكتلة في الحالتين الكلاسيكية والنسبية بإستعمال طريقة بيدرام ، وذلك بإدخال معامل التشوه β ،

ومقارنة النتائج المتوصل إليها مع النتائج السابقة (في غياب معامل التشوه) ، وبعد إجرائنا الحساب وتوصلنا إلى النتائج النهائية وجدنا أنها تحتوي على نفس النتائج السابقة مع إضافة طرف آخر مضروب في معامل التشوه β مما جعلنا ندرك أن نتائجنا صحيحة وبعد مقارنة هذه النتائج مع النتائج السابقة وجدنا أن كمية حركة فيرمي تزداد بمقدار صغير، أما الطاقة الداخلية والضغط ونصف القطر لا تتغير و إنما تبقى نفس النتائج تقريبا في الحالة الكلاسيكية مما يعني أن النتائج النهائية تساوي بالتقريب النتائج الأولية ، أما بالنسبة للحالة النسبية حدث تغير في النتائج حيث وجدنا أن الطاقة الداخلية وضغط الإنحلال ونصف قطر القزم الأبيض كلها تتناقص بعد إضافة معامل التشوه ، وفي الأخير يمكننا القول أننا توصلنا إلى معرفة مدى تأثير التشوهات الزمكانية على غاز الفرميونات في الأفرام البيضاء .

المراجع

- [1].Dirac . Paul A.M. "On the Theory of Quantum Mechanics", Proceedings of the Royal Society A , (1926).
- [2].Fowler, Ralph H , "On dense matter", Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,(1926)
- [3] G. Kaniadaki , P. Quarati. Classical model of bosons and fermions, Unitd del Politecnico di Torino, March 10, 1994
- [4] Kelly, James J , "Statistical Mechanics of Ideal Fermi Systems", Universidad Autónoma de Madrid ,1996.
- [5] Weiner, Richard . M , "The Mysteries of Fermions", International Journal of Theoretical Physics , 2010 .
- [6] Richard Fitzpatrick, Thermodynamics and Statistical Mechanics, The University of Texas at Austin, 2006.
- [7] Yosry Moustafa ,Free Electron Theory in Metals, Umm Al-Qura University & Mansoura University ,2015
- [8] R. L. Jaffe , Quantum Theory II 2006; Massachusetts Institute of Technology, 1996
- [9] Nicholas Rowell , White Dwarf Properties and the Degenerate Electron Gas , 2008.
- [10] Harleen Kaur , Lecturer in Physics ,Fermi-Dirac Statistics, Government College for Girls, Sector-11,Chandigarh .
- [11] M. Wolf , Introduction to solid state physics, p5 , 2005.
- [12] Charles P. Poole Jr.Richard J. Creswick, in Superconductivity (Third Edition), 2014 .
- [13] Elie BELORIZKY et Wladimir GORECKI , INTRODUCTION A LA MECANIQUE STATISTIQUE , Presses Universitaires de Grenoble , p13 .1992.

- [14] Glyde , Henry "Fermi Systems" , University of Delaware PHYS 825: Intermediate Condensed Matter Physics , 2014 .
- [15] Kittel , Charles. "Ch. 6: Free electron gas". Introduction to solid state physics, 1986.
- [16] Leticia TARRUEL , Thèse de doctorat , Super_uidité dans un gaz de fermions ultrafroids , l'UNIVERSITÉ PARIS 6 , Soutenue le 30 Juin 2008
- [17] Torre, Charles "PHYS 3700: Introduction to Quantum Statistical Thermodynamics" , Utah State University, 2015 .
- [18] Johnson . J , "Extreme Stars White Dwarfs & Neutron Stars". Lecture notes, Astronomy 162. Ohio State University. (2007).
- [19] Marko Shuntov , HIGH-ENERGY ASTROPHYSICS WHITE DWARFS, NEUTRONSTARS AND BLACK HOLES, Aix Marseille Université Master SPACE Program , (2018) .
- [20] Farley V. Ferrante, White Dwarf and Electron Degeneracy, Southern Methodist University ,(2016) .
- [21] Detlev Koester and Ganesar Chanmugam , Physics of white dwarf stars, , Louisiana State University, Printed in the UK. 53 (1990) 837-915 .
- [22] Chandrasekha . S, "The Density of White Dwarf Stars" , Philosophical Magazine. 592–596 ,(1931)
- [23] S. Chandrasekhar. An Introduction to the Study of Stellar Structure. Chicago, Ill., The University of Chicago press (1939) .
- [24] S Chandrasekhar 'The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs' Astrophysical Journal 74 81-82. (1931)
- [25] *Mon. Not. R. Astron* ,Fowler R H 1926. *Soc.* **87** 114
- [26] M. Maggiore, Phys. Lett. B 304, 65 (1993).
- [27] D. J. Gross and P. F. Mende, Phys. Lett. B 197, 129 (1987) ; Nucl. Phys. B 303 , 407 (1988).

- [28] D. Amati, M. Ciafaloni and G. Veneziano , Phys. Lett. B 216, 41 (1989).
- [29] K. Konishi, G. Paffuti and P. Provero, Phys. Lett. B 234, 276 (1990).
- [30] Abdel Nasser Tawfik and Abdel Magied Diab, Int. J. Mod. Phys. D,2004
- [31] Hui-Hua Wu and Shanhe Wu , Mathematics Subject classification D 15, (2000).
- [32] Mr. ZIADI Abdelkader, Sur les principes d'incertitude, UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF 1. 2013.
- [33] W. Heisenberg, Ann. Phys. 5, 32 (1938).
- [34] W. Heisenberg, "*Werner Heisenberg. Gesammelte Werk*", edited by W. Blum, H. P. D'urr, H. Rechenberg , (Springer Verlag, Berlin, 1984).
- [35] F. Scardigli, Phys. Lett. B 452, 39 (1999).
- [36] A. Camacho and A. Camacho-Galvan, Rep. Prog. Phys. 70, 1 (2007).
- [37] S. Das, and E. C. Vagenas, Phys. Rev. Lett. 101, 221301 (2008).
- [38] S. Das, and E. C. Vagenas, Can. J. Phys. 87, 233 (2009).
- [39] A. Kempf , G. Mangano , and R. B. Mann, Phys. Rev. D 52, 1108 (1995).
- [40] A. Kempf, J. Math. Phys. 38 , 1347 (1997).
- [41] F. Scardigli, Phys. Lett. B 452, 39 (1999).
- [42] A . F. Ali, S. Das, and E. C. Vagenas, Phys. Lett. B 678, 497 (2009).
- [43] S. Das, E. C. Vagenas, and A. F. Ali, "*Discreteness of Space from GUP II: Relativistic Wave Equations*", Phys. Lett. B 690, 407 (2010)
- [44] P. Pedram, Phys. Lett. B 714, 317 (2012).
- [45] P. Pedram, Phys. Lett. B 718, 638 (2012).
- [46] K. Nozari , and A. Etemadi , Phys. Rev. D 85, 104029 (2012).
- [47] J. Cortes, and J. Gamboa , Phys. Rev . D 71 , 065015 (2005).
- [48] L. Smolin, and J. Magueijo, Phys. Rev. D 67, 044017 (2003).
- [49] G. Veneziano, Europhys. Lett. 2, 199 (1986).
- [50] D. Amati, M. Ciafaloni, and G. Veneziano, Phys. Lett. B 216, 41 (1989).
- [51] M. Maggiore, Phys. Lett. B 304, 65 (1993).

ملخص :

لقد تطرقنا في هذه المذكرة إلى دراسة تأثير التشوهات الزمكانية على الغازات الفرميونية في الأقزام البيضاء ، حيث قمنا بإدخال معامل التشوه للتأثير على كمية الحركة والطاقة الداخلية وكذلك إستنتاج التأثير على ضغط الإنحلال ونصف قطر القزم الأبيض وفي الأخير بمقارنة النتائج المتوصل إليها بعد التأثير مع النتائج السابقة بدون تأثير ، وجدنا نتائج متقاربة في الحالة الكلاسيكية وتغير في النتائج بالنسبة للحالة النسبية .

الكلمات المفتاحية : الأقزام البيضاء - الفرميونات - الغازات المنحلة - حد شاندراسيخار .

Résumé

Nous avons étudié dans le présent mémoire les effets des déformations espace-temps sur les gaz des fermions dans les nains blancs, en introduisant le facteur de déformation afin d'influencer la quantité de mouvement et d'énergie interne, ainsi que l'effet sur la pression de décomposition et le rayon du nain blanc, Et enfin, comparer les résultats obtenus après effet avec les résultats précédents sans effet, nous avons trouvé des résultats convergents dans le cas classique et une modification des résultats par rapport au cas relatif.

Mots clés: nain blanc - Fermions - Gaz dégénérés - Limite Chandrasekhar