



Université Mohamed Khider de Biskra  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
DÉPARTEMENT DE GENIE MÉCANIQUE

# MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences et Techniques

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Réf. : ...

---

Présenté et soutenu par :  
**Bdirina Khaled**

Le : mardi 9 juillet 2019

## Analyse du comportement élastoplastique des structures par éléments finis 2D membranaires

---

### Jury :

Pr.	Mohamed Nadir Amrane	Pr	Université de Biskra	Président
Dr.	Meftah Kamel	MCA	Université de Biskra	Rapporteur
Pr.	Chebbah Mohamed-Saïd	Pr	Université de Biskra	Examineur

## *Remerciement*

*Mes remerciements à dieu tout puissant pour  
Pla volonté, la santé et la patience qu'il m'a donnée toujours.*

*Je tiens à remercier chaleureusement mon encadreur : **Dr Meftah Kamel**  
D'avoir accepté de diriger ce travail et de m'avoir prodigué des  
Conseils scientifiques, ont été précieux et des orientations pour la réalisation de  
ce travail.*

*Des remerciements aux membres du jury, pour l'intérêt et d'avoir accepté de  
juger ce travail.*

*A l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation ainsi que  
tout le personnel administratif qui, a participé au bon déroulement de ce travail,  
les enseignants du département de génie mécanique. Pour sa disponibilité, sa  
patience et ses conseils qu'ils ont prodigué.*

*Mes remerciements vont aussi à tous mes parents, mes enseignants, mes  
amis et mes collègues de la promotion 2018/2019.*

*A tous ceux qui, par leur encouragement ou leur amitié.*

## *Dédicace*

*Je dédie ce modeste travail :*

*Aux être que me sont les plus chères : Mon père et ma mère pour leur Soutine  
et leur encouragement permanent durant toutes mes études.*

*A mes sœurs et mon frère **Amar Bdirina**.*

*A tous les membres de ma famille.*

*A tous mes amis ainsi qu'à tous mes collègues*

# RESUME

L'objectif de ce travail est l'étude numérique du comportement non linéaire élastoplastique des structures membranaires utilisant la méthode des éléments finis 2D. A l'aide d'un programme algorithmique d'analyse non linéaire (l'élasto-plasticité) on considère dans cette simulation numérique l'influence des paramètres suivants : conditions aux limites, et le type d'élément ainsi que le type d'intégration numérique, le critère de plasticité et la méthode de résolution sur la propagation de la plasticité dans les structures 2D. Le programme contient une bibliothèque riche en des éléments membranaires Q4, Q8, T3 et des blocs ou sous programmes séparés qui exécutent les différentes opérations de l'analyse, de plus le programme permet de choisir le critère de plasticité et la méthode de résolution du système non linéaire.

## MOTS – CLES

Elément fini 2D, Plasticité, Critère de plasticité, Intégration numérique.

## ملخص

الهدف من هذا العمل هو الدراسة العددية للسلوك الغير خطي ( المرونة واللدانة ) للهياكل باستخدام العناصر المنتهية 2D. و ذلك بمساعدة برنامج حسابي للتحليل الغير خطي (المرونة واللدانة ) تتناول هذه المحاكاة العددية تأثير العوامل التالية : الشروط الابتدائية، نوع العنصر وكذلك نوع التكامل العددي، ومعيار اللدونة وطريقة تحليل انتشار اللدونة في الهياكل 2D. هذا البرنامج يتضمن مكتبة غنية بالعناصر المنتهية Q4، Q8، T3 وبرامج ملحقة تطبق مختلف مراحل التحليل، كما يسمح باختيار مختلف خصائص اللدانة وطريقة حل الجملة الغير خطية .

## الكلمات المفتاحية

العناصر المنتهية 2D، اللدانة، معيار اللدونة، التكامل العددي

---



---

# Sommaire

Remerciement	i
Dédicace	i
Résumé	ii
Sommaire	iii
Liste des Figures	vi
Notation	viii
Introduction Générale	1

## Chapitre 1 : Généralités sur la théorie d'élastoplastique

1. Introduction	3
1.1. Lois de comportement élasto-Plastique	3
1.2. Loi de comportement	3
2. Essai de traction	3
3. Limite d'élasticité ou seuil d'écoulement	4
4. Théorie incrémentale de plasticité uniaxiale	5
4.1. Modélisation du comportement élasto-Plastique	5
4.2. Critère d'épuisement	6
4.3. Phénomène d'écrouissage	6
4.3.1. Écrouissage isotrope	7
4.3.2. Écrouissage cinématique	8
4.3.3. Écrouissage mixte	8
4.4. Règle de chargement	9
5. Théorie incrémentale de plasticité multiaxiale	9
5.1. Surface de plasticité initiale	9
5.2. Différents critères élasto-Plastique	10
5.2.1. Critère de Tresca	10
5.2.2. Critère de Von-Mises	11
5.2.3. Critère de Mohr-Coulomb	12
5.2.4. Critère de Drucker et Prager	13
5.3. Ecrouissage	14

5.3.1. Ecrouissage isotrope	14
5.3.2. Ecrouissage cinématique	15
5.3.3. Ecrouissage mixte	17
5.4. Règle d'écoulement et potentiel plastique	17
6. Méthodes de résolution des systèmes non linéaires	18
6.1. Méthodes incrémentales	18
6.2. Méthode incrémentale itérative	19
6.2.1. Méthode de Newton-Raphson (Rigidité tangente)	20
6.2.2. Méthode de Newton-Raphson modifiée	20
6.2.3. Méthode de la rigidité initiale	22
7. Critères de convergence	23
8. Organigramme (non linéarité matérielle)	24

## **Chapitre 2 : Formulation éléments finis membranaires**

1. Généralité sur la Méthode des éléments finis (M.E.F)	25
1.1. Introduction	25
1.2. Modélisation et discrétisation	25
1.3. Concept de la méthode des éléments finis	25
1.4. Étapes de la méthode des éléments finis	26
1.5. Avantages de la Méthode des éléments finis	27
1.6. Classement d'éléments fini	27
1.6.1. Propriétés d'un élément fini	27
1.7. Condition d'équilibre	29
1.8. Condition de compatibilité	29
1.9. Loi de Hooke	30
1.10. Conditions aux limites	30
1.11. Choix des fonctions de déplacements et conditions de convergence	30
1.12. Modèles d'éléments finis	31
1.12.1. Modèle déplacement	31
1.12.2. Modèle en déformation	31
1.13. Théorèmes énergétiques en élasticité	31
1.13.1. Principe de travaux virtuels	32
1.13.2. Théorème de l'énergie potentielle totale	32

1.14. Application au Principe des travaux virtuels	33
2. Formulation éléments finis membranaires	35
2.1. Introduction	35
2.2. Formulation	35
2.3. Formulation de l'élément quadrilatérale Q4	36
2.3.1. Fonction d'interpolation	36
2.3.2. déformations	37
2.3.3. Contraintes	38
2.3.4. Matrice de la rigidité	39
2.4. Concept d'élément isoparamétrique	40
2.5. Élément triangulaire à trois nœuds (T3)	44
2.6. Élément triangulaire à six nœuds (T6)	44
2.7. Élément quadrangulaire à quatre nœuds (Q4)	45
2.8. Élément quadrangulaire à huit nœuds (Q8)	45
 <b>Chapitre 3 : Validation et Expérimentation numérique</b> 	
1. Introduction	46
2. Comportement plastique d'une poutre encastéré	46
2.1. Comparaison entre les types d'intégration	47
2.2. Comparaison entre les critères de plasticité	48
2.3. Comparaison entre les méthodes de résolution	49
3. Cylindre soumise à une pression intérieure	51
3.1. Comparaison entre les types d'intégration	52
3.2. Comparaison entre les critères de plasticité	53
3.3. Comparaison entre les méthodes de résolution	54
4. Etude plastique d'une plaque trouée	55
4.1. Comparaison entre les critères de plasticité	56
4.2. Comparaison entre les méthodes de résolution	57
Conclusion Générale	59
Bibliographie	ix

# Liste des Figures

## Chapitre 1 : Généralités sur la théorie d'élastoplastique

<b>Figure (1.1) :</b> <i>Courbe de repense (contrainte – déformation)</i>	4
<b>Figure (1.2) :</b> <i>Limite d'élasticité</i>	4
<b>Figure (1.3) :</b> <i>Modélisation du comportement élasto-Plastique</i>	6
<b>Figure (1.4) :</b> <i>Essai de traction Pour acier inoxydable nuance 316L composé de quatre phases charges – décharge</i>	7
<b>Figure (1.5) :</b> <i>Evolution de la limite</i>	7
<b>Figure (1.6) :</b> <i>a) écrouissage isotrope, b) écrouissage cinématique</i>	8
<b>Figure (1.7) :</b> <i>Courbe expérimentale de réponse d'un matériau écrouissable</i>	9
<b>Figure (1.8) :</b> <i>Courbe de résultants expérimentaux de l'essai Traction-Compression à 900C°</i>	9
<b>Figure (1.9) :</b> <i>Critère de Tresca (domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes principales)</i>	11
<b>Figure (1.10) :</b> <i>Critère de Von Mises (domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes principales)</i>	13
<b>Figure (1.11) :</b> <i>Critère de Mohr-Coulomb</i>	13
<b>Figure (1.12) :</b> <i>Critère de Drucker et Prager dans l'espace</i>	14
<b>Figure (1.13) :</b> <i>Ecrouissage isotrope</i>	15
<b>Figure (1.14) :</b> <i>Ecrouissage cinématique</i>	16
<b>Figure (1.15) :</b> <i>Représentation géométrique de la règle de normalité de la plasticité associée</i>	18
<b>Figure (1.16) :</b> <i>Méthodes incrémentales</i>	19
<b>Figure (1.17) :</b> <i>Méthode de Newton-Raphson</i>	20
<b>Figure (1.18) :</b> <i>Méthode de Newton-Raphson modifiée</i>	21
<b>Figure (1.19) :</b> <i>Méthode de la rigidité initiale</i>	22
<b>Figure (1.20) :</b> <i>Organigramme non linéarité matérielle</i>	24

## Chapitre 2 : Formulation éléments finis membranaires

<b>Figure (2.1) :</b> <i>Étape de l'analyse d'un problème aux limites</i>	25
<b>Figure (2.2) :</b> <i>Maillage du domaine en triangles à trois nœuds</i>	26
<b>Figure (2.3) :</b> <i>Eléments de membrane du premier degré a et du second b degré</i>	35
<b>Figure (2.4) :</b> <i>Changement de repère entre deux systèmes de coordonnées</i>	41
<b>Figure (2.5) :</b> <i>Elément de référence Q4</i>	41

<b>Figure (2.6) :</b> <i>Intégration de Gauss (<math>2 \times 2</math>) pour le quadrilatère</i>	44
<b>Figure (2.7) :</b> <i>Élément T3</i>	44
<b>Figure (2.8) :</b> <i>Élément T6</i>	44
<b>Figure (2.9) :</b> <i>Elément Q4</i>	45
<b>Figure (2.11) :</b> <i>Elément Q8</i>	45

### **Chapitre 3 : Validation et Expérimentation numérique**

<b>Figure (3.1) :</b> <i>Eléments de membrane en flexion dans le plan</i>	47
<b>Figure (3.2) :</b> <i>Courbe chargement-déplacement des éléments rectangulaire Q4, Q8 Avec l'intégration (réduite, exacte)</i>	48
<b>Figure (3.3) :</b> <i>Courbe chargement- déplacement pour l'élément rectangulaire Q8 IR Comparaison ente les critères de Von-mises et Tresca</i>	49
<b>Figure (3.4) :</b> <i>Courbe chargement-déplacement de l'élément Q8 avec des différentes méthodes de solution algorithmique</i>	50
<b>Figure (3.5) :</b> <i>Pression interne appliquée dans le cylindre</i>	51
<b>Figure (3.6) :</b> <i>maillage et discrétisation géométrique</i>	51
<b>Figure (3.7) :</b> <i>Courbe de pression-déplacement radial des éléments rectangulaires Q4, Q8 Avec différentes intégrations</i>	52
<b>Figure (3.8) :</b> <i>Courbe de pression-déplacement radial pour l'élément rectangulaire Q8 à cinq points Comparaison ente les critères de Tresca et Von-mises</i>	53
<b>Figure (3.9) :</b> <i>Courbe de pression-déplacement radial de l'élément Q8 à cinq points avec des différentes méthodes de solution algorithmique</i>	54
<b>Figure (3.10) :</b> <i>Géométrie du quart de la plaque trouée sollicitée en traction</i>	55
<b>Figure (3.11) :</b> <i>Courbe réaction- déplacement pour l'élément rectangulaire TR_3 Comparaison ente les critères de Von-Mises et Tresca</i>	56
<b>Figure (3.12) :</b> <i>Courbe réaction-déplacement de l'élément TR_3 avec des différentes méthodes de solution algorithmique</i>	57
<b>Figure (3.13) :</b> <i>niveau de déformation plastique accumulée <math>\epsilon^p</math></i>	58



# Notations

$\int$	Intégrale.
$\frac{\delta}{\delta x}$	Dérivée partielle par rapport à $x$ .
$[ ]$	Matrice.
$\{ \}$	Vecteur colonne.
$[ ]^T$	Matrice transposée.
$[ ]^{-1}$	Matrice inverse.
$x, y, z$	Coordonnées cartésiennes.
$u, v$	Déplacements suivant les directions $x$ et $y$ respectivement.
$\theta_z$	Rotation dans le plan.
$t$	Épaisseur pour les membranes.
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Déformations directes suivant $x$ et $y$ respectivement.
$\sigma_x, \sigma_y$	Contrainte normale suivant les directions $x, y$ .
$\delta x$	Variation.
$\nu$	Coefficient de Poisson.
$E$	Module de Young.
$a_1, a_2$	Paramètre des mouvements de corps rigide.
$U$	Energie de déformation interne.
$V$	Potentiel des forces appliquées.
$\{f_v\}$	Vecteur des forces volumiques.
$\{f_s\}$	Vecteur des forces surfaciques.
$[X]$	Matrice des fonctions de base de l'interpolation.
$[N]$	Matrice des fonctions de formes.
$\{q\}$	Vecteur de déplacement.
$[A]$	Matrice des coordonnées.
$[B]$	Matrice de déformation.
$[F]$	Vecteur des forces.
$[K]$	Matrice de rigidité.
$[H]$	Matrice de rigidité qui relie entre les contraintes et les déplacements.
${}^m\{U\}$	Déplacement à l'incrément $m$
${}^m\{\sigma\}$	Contrainte à l'incrément $m$
${}^m\{\varepsilon\}$	Déformation à l'incrément $m$
${}^m\{R\}$	Réaction à l'incrément $m$

# **Introduction**

## **Générale**

## **Introduction**

L'analyse élastoplastique d'une structure dont la géométrie est complexe, est une tâche ardue, nécessitant beaucoup d'expérience de la part de l'ingénieur lui permettant d'identifier les paramètres et les propriétés qui auront une influence marquante sur le comportement élasto-plastique de la structure. Il y a en général Différentes techniques ont été proposées pour l'analyse, mais la méthode qui s'est imposée comme l'outil numérique le plus puissant est la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis est une méthode générale pour résoudre les problèmes industriels en construisant très efficacement des modèles de simulation. Elle est actuellement appliquée dans les domaines très divers pour résoudre des problèmes de la mécanique des solides et/ou de mécanique des fluides, des problèmes thermiques, d'électricité, d'électromagnétisme etc. Cette méthode gagne encore du terrain, leur importance reste indispensable pour des situations non-linéaires délicates (évaluation du comportement au moment de la ruine de la structure), quelle dépend de deux facteurs principaux. Premièrement, en raison des opérations numériques accrues liées aux problèmes non linéaires, la puissance d'un calcul considérable est exigée. Les développements dans la dernière décennie ont assuré des calculateurs numériques qui satisfont ce besoin avec un coût de calcul réduit. Deuxièmement, avant que la méthode des éléments finis puisse être employée dans la conception, l'exactitude de n'importe quelle solution technique proposée doit être prouvée. Le développement des caractéristiques améliorées d'élément et des solutions algorithmiques non linéaires plus efficaces et l'expérience acquise dans les problèmes rencontrés ont assuré la réalisation des analyses non linéaires avec certaine fiabilité. Par conséquent des obstacles à l'exploitation de ces techniques sont rapidement enlevés et le processus sur le plan économique est acceptable pour des applications industrielles choisies.

## **Objectif de travail**

L'objectif de ce travail est la détermination numérique de la réponse statique des structures membranaires dans le domaine non linéaire (l'élasto-plasticité) sous l'action d'un trajet de chargement donné, utilisant la méthode des éléments finis 2D basée sur le modèle en déplacement. A l'aide d'un programme algorithmique d'analyse non linéaire (l'élasto-plasticité) on considère dans cette simulation numérique, l'influence des paramètres suivants : conditions aux limites, les critères de plasticité et le type d'élément ainsi que le type d'intégration numérique, le critère de plasticité et la méthode de résolution sur la propagation de la plasticité dans les structures 2D.

## **Plan de travail**

Pour aboutir à ces objectifs, on structure notre travail en trois chapitres :

- 1) Le premier chapitre présente une Généralités sur la théorie d'élastoplastique : La loi de comportement (élasticité et plasticité) ; Les critères de plasticité (Tresca, Von-Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager) ; La loi d'écouissage (écouissage isotrope, cinématique et mixte).
- 2) Le deuxième chapitre concerne la formulation en éléments finis des éléments membranaire et une présentation générale sur les éléments utilisés dans le programme (les éléments quadrangulaires Q4 et Q8 et triangulaire T3 et T6) et à la fin un bref aperçu a été cité sur la transformation isoparamétrique et l'intégration numérique.
- 3) Le troisième chapitre est consacré aux tests de validation numérique des éléments de types membranaire sur des structures de type poutres, cylindre et plaque troué. Les résultats obtenus sont représentés à partir l'utilisation d'un coude de calcule numérique (programme HYPLAS) par la méthode des éléments finis.

**Chapitre 1**  
Généralités sur la  
théorie  
d'élastoplastique

## 1. Introduction :

### 1.1. Lois de comportement élasto-Plastique <sup>[BOU08]</sup>

L'étude du comportement d'un corps solide est souvent basée sur la variation d'une grandeur mécanique  $Q$  (force, couple, pression, ...etc.) appliquée à ce corps en fonction d'une grandeur géométrique  $q$  (déplacement, rotation, variation de volume, ...etc.) à température constante. Cette étude permet de mettre en évidence les caractéristiques physiques intrinsèques du matériau. L'association des lois de conservation à des lois physiques traduisant le comportement des matériaux dans le cadre de la mécanique des milieux continus, produira les lois de comportement.

### 1.2. Loi de comportement <sup>[BOU08]</sup>

En principe, les lois de comportement peuvent se déduire de la connaissance de la distribution détaillée des particules et des interactions entre ces particules au sein d'un matériau donné, par une démarche de thermomécanique statistique. C'est ainsi que la loi des gaz parfaits et les lois d'élasticité des solides en petites déformations se déduisent de la mécanique statistique ou des potentiels d'interaction entre molécules. Dans la majorité des cas toutefois, cette démarche déductive se révèle inextricable et ne donne pas lieu à des lois de comportement explicites simples. On pourra toutefois les approcher par une démarche phénoménologique consistant à corréler contraintes aux déformations à partir de résultats expérimentaux suffisamment nombreux. C'est l'approche la plus efficace en sciences de l'ingénieur.

## 2. Essai de traction <sup>[BOU08]</sup>

L'essai de traction est le test le plus couramment utilisé pour caractériser le comportement mécanique d'un matériau, et donc établir sa "loi de comportement". Cet essai consiste le plus souvent à soumettre une éprouvette (ou plus exactement une partie dite "utile" de l'éprouvette) à un allongement  $\Delta l$  par déplacement relatif de ses extrémités, Intéressons-nous à l'aspect phénoménologique de l'essai dans le cadre de l'élasto-plasticité classique (quasi-statique, petites déformations, température constante).

Les courbes obtenues à l'aide de cet essai ont typiquement l'allure de la figure (1.1) Le comportement fait apparaître une partie linéaire (élasticité) suivie d'une partie non linéaire. Le changement de la courbe de charge peut présenter un palier horizontal. Comme pour l'acier doux ou le cuivre à température ambiante, comme il peut être sans palier, le cas du cuivre recuit, de l'aluminium et des aciers hautement alliés.

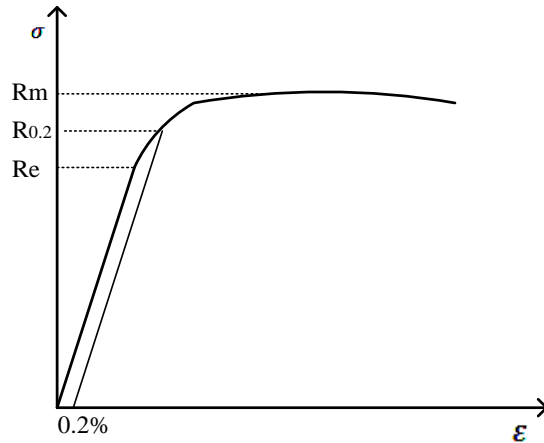


Figure (1.1) : Courbe de repense (contrainte – déformation) <sup>[BOU08]</sup>

### 3. Limite d'élasticité ou seuil d'écoulement <sup>[BOU08]</sup>

L'expérience montre qu'un grand nombre de matériaux solides présentent un comportement élastique (et donc en particulier réversible, l'échantillon revenant dans son état initial après un cycle charge -décharge).

La limite d'élasticité (ou de proportionnalité) est la contrainte au-dessus de laquelle apparaissent des déformations irréversibles. Le point correspondant à  $R_e$  figure (1.1) caractérisé par un changement net de la courbe de charge ( $F, \Delta l$ ) est difficile à situer.

Si on charge de O en passant de A jusqu'au B, Puis on décharge en B figure (1.2) lorsqu'on charge à partir de C, on aura une nouvelle limite d'élasticité  $B \sigma$  plus nette. (augmentation ou diminution) de l'amplitude de la contrainte. Il y a alors (durcissement ou adoucissement) du matériau.

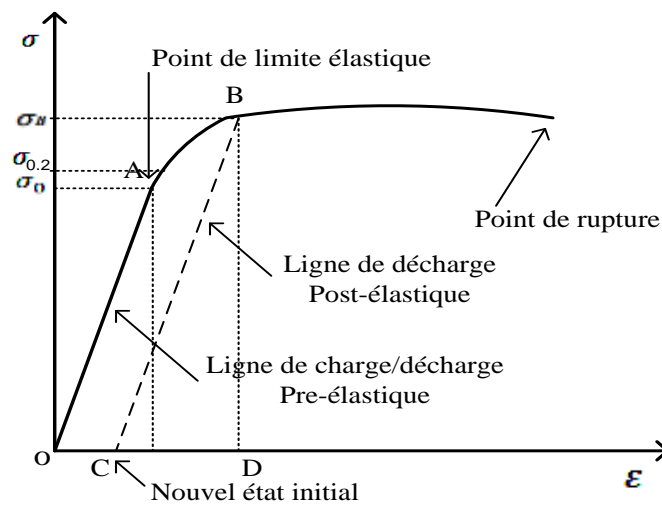


Figure (1.2): Limite d'élasticité <sup>[BOU08]</sup>

Sur la figure (1.2) on distingue les contraintes suivantes :

$\sigma_0$  : la limite d'élasticité "vraie", ou limite de proportionnalité;

$\sigma_{0,2}$  : la limite d'élasticité conventionnelle (apparente), correspond à une déformation inélastique de 0,2%, cette valeur classique étant relativement élevée, on utilise parfois  $\sigma_{0,02}$

$\sigma_B$  : la nouvelle limite d'élasticité apparaît après la décharge poste-élastique.

On distingue aussi les tronçons suivants :

OC : déformation plastique " permanente "

CD : déformation élastique " réversible "

OD : déformation total.

Lorsque la limite d'élasticité est atteinte, il est possible de poursuivre une augmentation de Chargement, le matériau se déformant alors plastiquement. En général, la valeur de la contrainte à un instant donné dépend de toutes les déformations subies auparavant par le matériau, de la vitesse et de l'ordre dans lequel ces déformations se sont produites, ainsi que de nombreux autres paramètres physiques tels que l'histoire des températures.

Il existe une multitude de lois de comportement permettant de décrire, totalement partiellement, la variété des matériaux qu'ils soient issus de la nature ou de l'industrie, elles ne suffisent cependant pas à déterminer complètement la loi de comportement d'un matériau.

Notre étude se limite au comportement élasto-Plastique classique.

#### 4. Théorie incrémentale de plasticité uniaxiale <sup>[BRI04]</sup> :

Dans un essai uniaxial, traction simple par exemple, seule  $\sigma_1$  est non nulle. Les différents phénomènes observés en pratique (figure 1.1) sont pris en compte en définissant trois notions importantes :

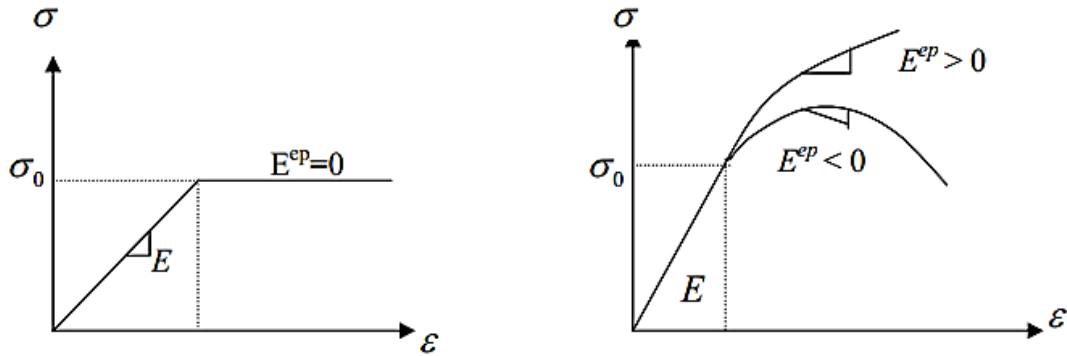
1. Critère de limite élastique ou d'épuisement : Donnant des contraintes au début de l'écoulement plastique.
2. Règle d'écrouissage : Décivant comment évolue la condition (critère) d'épuisement pendant l'écoulement plastique.
3. Règle d'écoulement : Liant l'incrément des déformations plastiques aux contraintes.

##### 4.1. Modélisation du comportement élasto-Plastique <sup>[BER87],[LEM91],[BEN03]</sup>

Le comportement réel est modélisé soit par la courbe élasto-Plastique parfaite (sans effet Baushinger, figure (1.3.a), soit par celle avec écrouissage (linéaire ou non) et donc un module élasto-Plastique tangent  $E^{ep}$  linéaire ou non (figure (1.3.b)). Ce dernier cas est plus général : Donc si  $E^{ep} = 0$  c'est le cas de l'élasto-plasticité parfaite, si  $E^{ep} > 0$  c'est le durcissement



(écrouissage positif) et si  $E^{ep} < 0$  c'est l'adoucissement (écrouissage négatif).



a. Elasto-plasticité parfaite

b. Elasto-plasticité avec écrouissage

**Figure (1.3):** Modélisation du comportement élasto-plastique [BER87]

#### 4.2. Critère d'épuisement [BRI04]

Le critère d'épuisement est atteint quand  $|\sigma|$  atteint  $\sigma_y$

On utilise les valeurs absolues pour accommoder la compression ou la traction ou les deux à la fois (charge inversée).

$\sigma_y$  : est la limite élastique initiale et est considérée positive.

$\sigma$  : est la contrainte courante comptée algébriquement.

Le critère s'exprime par :

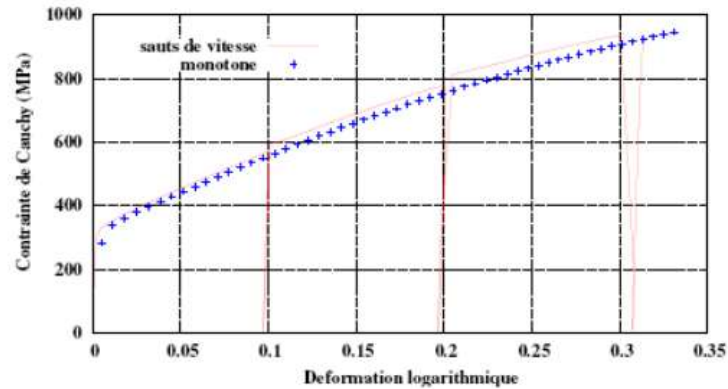
$$|\sigma| - \sigma_y = F(\sigma, \sigma_y) = 0 \quad (1.1)$$

#### 4.3. Phénomène d'écrouissage [BOU08]

Le problème de l'évolution du domaine d'élasticité est une des difficultés majeures de la plasticité, Lorsqu'on effectue une série de charges–décharges consécutives. L'allure de la courbe de réponse est représentée sur la figure (1.4). Nous observons une évolution de la limite d'élasticité en traction due à l'écrouissage.

Au cours du mouvement au-delà du seuil de plasticité (d'écoulement) résulte un durcissement du matériau par écrouissage (source de Frank-Read), Le cycle décharge charge n'est plus parfaitement élastique, Mais par simplification nous pouvons considérer que :

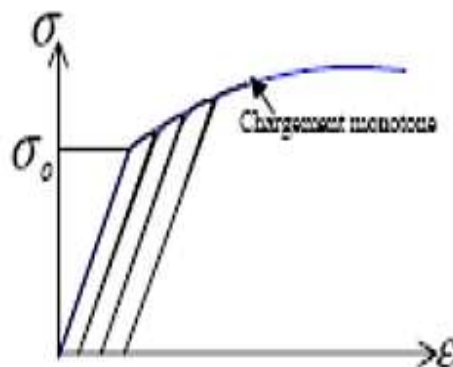
- lors des chargements consécutifs la limite d'élasticité suit la courbe du chargement monotone;
- l'écoulement plastique ne modifie pas le module d'élasticité.



**Figure (1.4) :** Essai de traction Pour acier inoxydable nuance 316L composé de quatre phases charges – décharge <sup>[GAL05]</sup>

Ces deux approximations figure (1.5) nous amènent à penser, que connaissant la déformation plastique, le seuil de plasticité actuel peut être défini à partir de la courbe d'écroutissage obtenue pour un chargement monotone.

Ce phénomène de plasticité engendre les différents mécanismes d'écroutissage notamment les écroutissages cinématique et isotrope.



**Figure (1.5) :** Evolution de la limite <sup>[BOU08]</sup>

#### 4.3.1. Écroutissage isotrope <sup>[BOU08]</sup>

Supposant que les conditions d'épuisement en traction et en compression s'effectuent de la même manière, La figure (1.6,a) représente l'historique d'un cycle de chargement qui suit le trajet : OA-AB-BC. Après décharge nous obtenons le point O', la déformation plastique est définie par OO'. On inverse la charge à partir du point O' l'écoulement plastique commencera au point B de contrainte  $\sigma_B = -\sigma_A$  (La limite d'élasticité en compression augmente comme celle de traction).

Dans ce cas la marge élastique  $2\sigma_y$  subit une expansion isotrope symétrique de centre O fixe, en plus l'isotropie est toujours conservée.

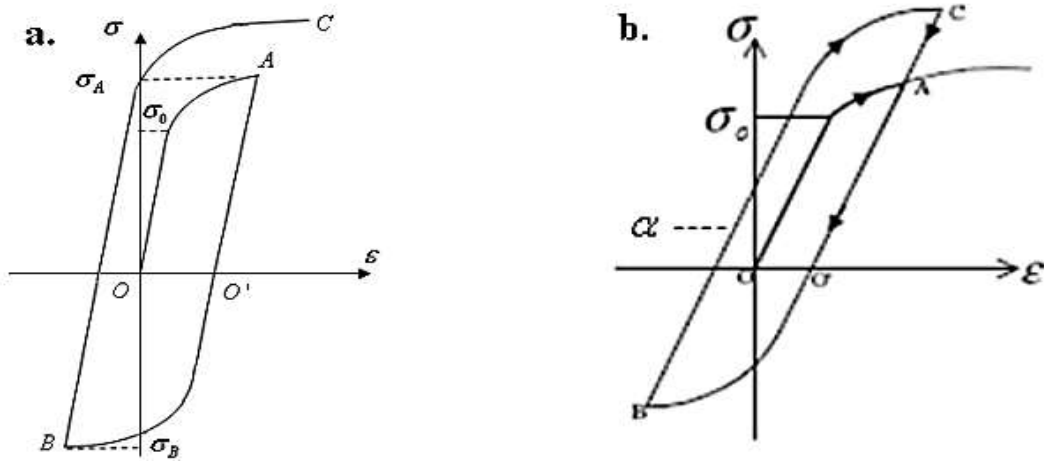


Figure (1,6) : a) écrouissage isotrope, b) écrouissage cinématique <sup>[BOU08]</sup>

#### 4.3.2. Écrouissage cinématique <sup>[BOU08]</sup>

L'effet BAUSCHINGER est la principale manifestation de l'écrouissage cinématique. Il se traduit par un abaissement de la limite d'élasticité en compression après une sollicitation préalable en traction et vice-versa. Sur la figure (1.6,b) lorsqu'on inverse la charge à partir du point O' l'écoulement plastique commencera au point B de contrainte

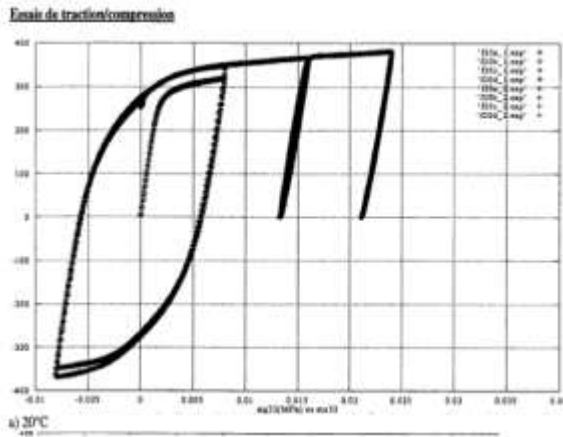
$$\sigma_B = \sigma_A - \alpha \quad (1.2)$$

Cela veut dire que la marge élastique de  $2\sigma_y$  garde la même dimension mais subit une translation et son centre se déplace d'une distance  $\alpha = \sigma_0 - \sigma_A$

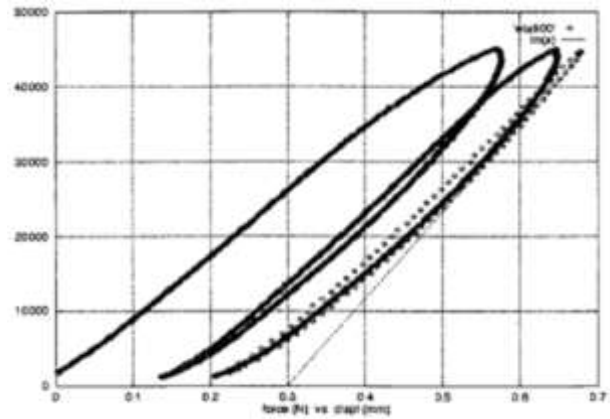
#### 4.3.3. Écrouissage mixte <sup>[BOU08]</sup>

L'effet de BAUSCHINGER est complètement ignoré dans l'écrouissage isotrope, et maximal dans l'écrouissage cinématique. Cela est en contradiction avec les observations expérimentales.

L'écrouissage mixte est une combinaison des deux, la marge élastique subit une expansion et une transformation au même temps. La figure (1.7) présente la courbe d'un essai de traction-compression sur un acier inoxydable à température ambiante, où l'effet de BAUSCHINGER est remarquable, comme en peut remarquer que la forme de la courbe de décharge n'est pas toujours linéaire, mais peut être de forme hystérésis figure (1.8), les deux essais sont relatifs à un acier inoxydable.



**Figure (1.7) :** Courbe expérimentale de réponse d'un matériau écrouissable [KER01]



**Figure (1.8) :** Courbe de résultants expérimentaux de l'essai Traction-Compression à 900C° [KER01]

**4.4. Règle de chargement** [BRI04]

Avec les règles d'écrouissage précédentes décrivant l'évolution du critère de plastification  $F$ , les règles de charge et décharge sont :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } F < 0 : \text{ domaine élastique} \\ \text{Si } F = 0 : \text{ plastification} \\ \text{Si } F > 0 : \text{ impossible} \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

Quand  $F=0$ , il y a chargement si  $dF>0$  et déchargement si  $dF<0$

**5. Théorie incrémentale de plasticité multiaxiale**

La théorie tridimensionnelle est une généralisation des notions définies précédemment dans le cas uniaxial avec utilisation de grandeurs vectorielles, matricielles et tensorielles.

**5.1. Surface de plasticité initiale** [GUE99]

Soit  $F_0(\sigma_{ij})$  cette surface, fonction des seules contraintes puisque aucune déformation plastique n'a encore eu lieu. En supposant :

- a- Le matériau isotrope dans sa configuration initiale.
- b- Cette surface (et les suivantes d'ailleurs) est indépendante d'un état de contraintes hydrostatique (hypothèse a).
- c- L'absence initiale d'effet Bauschinger (limites élastiques initiales égales en traction et compression, ou  $F_0(\sigma_{ij}) = F_0(-\sigma_{ij})$  plus généralement); alors cette surface peut s'écrire :

$$F_0(J_2, J_3) = 0 \quad (1.4)$$

Avec  $J_2$  et  $J_3$  sont les invariants du tenseur déviateur des contraintes  $s_{ij}$

Ou :  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ ,  $J_2 = \frac{1}{2}(S_{ij})^2$  et  $J_3 = \frac{1}{3}S_{ij}S_{jk}S_{ki}$

## 5.2. Différents critères élasto-Plastique <sup>[REM02], [GUE99], [GAR01], [MAR02], [CHE88]</sup>

Le critère d'écoulement détermine le niveau de contrainte auquel commence la déformation plastique.

Du point de vu physique, n'importe quel critère d'écoulement doit être indépendant de l'orientation du système de coordonnées employé et d'après le théorème de représentation (Wineman et Pipkin, 1964), il doit être une fonction de trois invariants de contraintes seulement :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1 = \sigma_{ij} \\ J_2 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ji} \\ J_3 = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Les observations expérimentales, notamment par Bridgeman, indiquent que la déformation plastique des métaux est essentiellement indépendante de la pression hydrostatique. Par conséquent, les critères d'écoulement dans le cas des métaux, sont définis en fonction des invariants déviateurs des contraintes.

Dans les matériaux sans traction tels que sols, roches, céramiques et béton, l'effet de la pression hydrostatique peut être pris en compte.

Dans ce but quatre critères d'écoulement ont été implémentés dans ce logiciel, qui sont : Von Mises, Tresca, Mohr-Coulomb et Drucker-Prager. Les deux premiers sont proposés pour les métaux et les deux derniers pour les matériaux sans traction.

En élasto-plasticité, il est commode d'exprimer les critères en fonction de l'angle  $\theta$  appelé angle de similitude défini comme suit :

$$\theta = \frac{1}{3} \text{Arcsin} \left[ -\frac{3J_3\sqrt{3}}{2(J_2)^{3/2}} \right] : \frac{-\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} \quad (1.6)$$

Ces critères étaient exprimés comme étant la condition de première plastification. On peut généraliser leurs expressions en introduisant les paramètres d'écrouissage.

### 5.2.1. Critère de Tresca

Les états d'écoulement commencent quand le maximum de contraintes de cisaillement atteint une valeur critique. Si les contraintes principales sont :

$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$  ou  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  alors l'écoulement commence quand

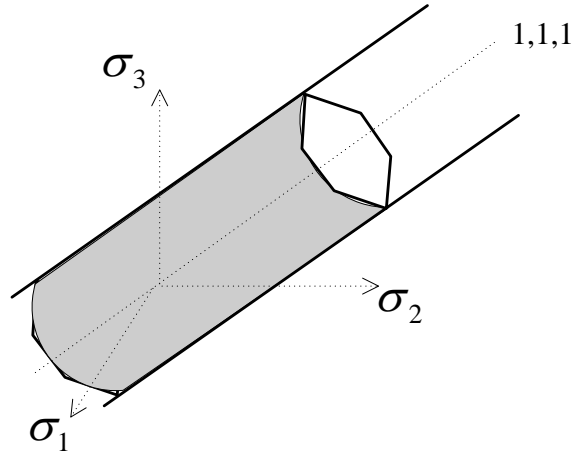
$$\text{Max} \left[ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \right] = \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} = \frac{Y}{2} \quad (1.7)$$

Y : est la contrainte d'épuisement courante en traction simple.

K : paramètre d'écrouissage.

En fonction des invariants, le critère s'exprime par :

$$F(J, \theta) = 2\sqrt{J_2} \cos\theta - Y(K) = 0 \quad (1.8)$$



**Figure (1.9) :** Critère de Tresca (domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes principales)<sup>[BR104]</sup>

La représentation graphique de ce critère dans l'espace des contraintes principales est un prisme hexagonal Figure (1.9).

Les axes du prisme coïncident avec l'espace diagonal défini par les points :  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  et depuis chaque section normale du prisme est identique, (une conséquence d'hypothèse qu'une contrainte hydrostatique n'aurait pas d'influence sur l'écoulement) il est commode de représenter la surface d'écoulement géométriquement par sa projection sur le plan  $\pi(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0)$ .

Y(K) est l'actuelle contrainte de plastification uniaxiale liée au paramètre d'écrouissage k, pour les critères de Tresca et Von Mises.

### 5.2.2. Critère de Von-Mises

Le fait que le critère précédant ne prend pas en compte la contrainte principale intermédiaire est une faiblesse et pour la surmonter, Von-Mises [1913] proposa que, la plastification ne commence que quand le deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatorique  $J_2$  atteint une valeur limite, c'est-à-dire :

$$F = J_2 - K^2 = 0 \quad (1.9)$$

La plastification se produit quand :

$$\sqrt{3J_2} \geq \sigma_y \quad (1.10)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = \frac{1}{2}[s_x^2 + s_y^2 + s_z^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 \text{ avec } s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (1.11)$$

$$\text{Ou : } F = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - k^2 = 0 \quad (1.12)$$

$$\text{Ou: } F = \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) - k^2 = 0 \quad (1.13)$$

Où k: est une constante. On peut remarquer facilement que dans le cas du cisaillement simple plan, on a :

$$J_2 = \sigma_1^2 = k^2 \quad (1.14)$$

Donc la constante k représente la contrainte maximale admissible en cisaillement simple. Dans l'espace des contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  à 3 dimensions l'équation (1.10) devient :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_y \quad (1.15)$$

C'est l'équation d'un cylindre à base circulaire axé sur la trisectrice du repère  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  Figure (1.10). Sa section par le plan  $\pi(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0)$  est un cercle dont le rayon est  $K\sqrt{2}$

### 5.2.3. Critère de Mohr-Coulomb

Coulomb proposa en [1773] le premier critère de plasticité en mécanique des sols (applicable aux problèmes de roches et de sols), et ce critère est encore maintenant très couramment utilisé. Ce critère est une généralisation de celui de Tresca sauf que la contrainte critique de cisaillement n'est plus constante mais dépend de la contrainte normale.

$$|\tau| = c - \sigma_n \cdot \tan(\phi) \quad (1.16)$$

$|\tau|$  : la magnitude de la contrainte de cisaillement

$\sigma_n$  : la contrainte normale

c : la cohésion

$\phi$  : l'angle interne de frottement

Si les contraintes principales sont  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$  ou  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  le critère de Mohr-Coulomb peut être écrit comme suit :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 2c \cdot \cos\phi - (\sigma_1 + \sigma_3)\sin\phi \quad (1.17)$$

Dans l'espace des contraintes principales l'équation (1.16) représente un cône dont la section normale à chaque point est un hexagone irrégulier (figure (1.11)).

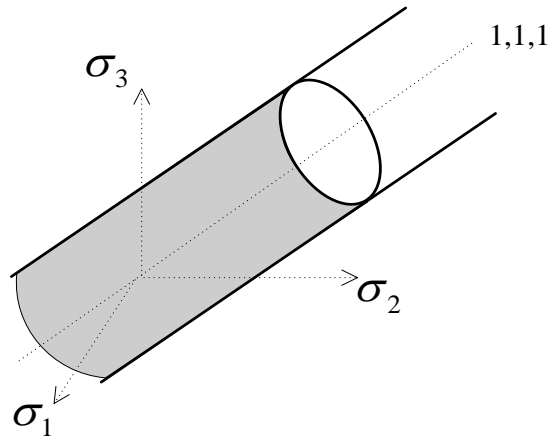


Figure (1.10): Critère de Von Mises (domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes principales <sup>[BRI04]</sup>)

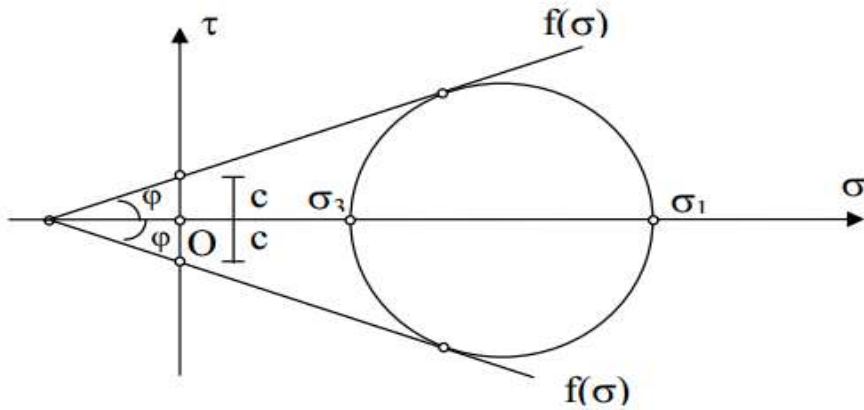


Figure (1.11) : Critère de Mohr-Coulomb <sup>[GUE99]</sup>

### 5.2.4. Critère de Drucker et Prager

Drucker et Prager [1952] ont présenté un critère qui prend en compte le premier invariant du tenseur des contraintes  $I_1$  et le deuxième invariant du tenseur déviatorique des contraintes ( $J_2$ ), ce critère est une extension de celui de Von-Mises et de celui de Mohr-Coulomb. Sa fonction de charge est donnée par l'expression :

$$F(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - K = 0 \tag{1.18}$$

$\alpha$  et  $k$  définit en fonction de la cohésion  $c$  et de l'angle de frottement interne  $\phi$  .

L'équation (1.18) représente graphiquement un cône circulaire :

- Pour coïncider le cercle de Drucker-Prager avec les sommets extérieurs de l'hexagone de Mohr-Coulomb à chaque section, on a :

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad \text{et} \quad K = \frac{6c \cdot \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}$$



- Pour faire coïncider avec les sommets intérieurs, on aura :

$$\alpha = \frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3 + \sin\phi)} \quad \text{et} \quad K = \frac{6c \cdot \cos\phi}{\sqrt{3}(3 + \sin\phi)}$$

La surface représentative du critère dans l'espace  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  est un cône dont le sommet se trouve sur l'axe  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Figure (1.14)

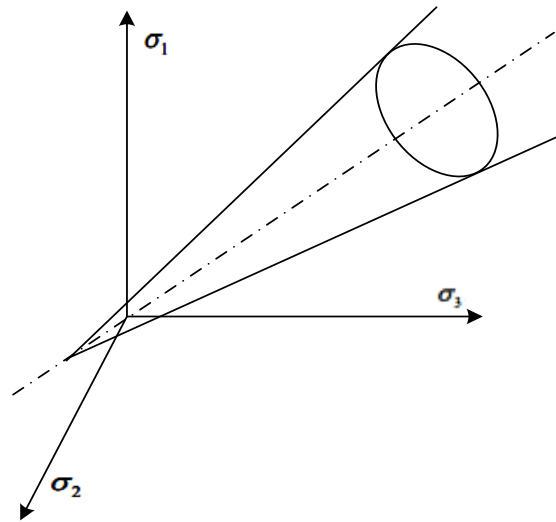


Figure (1.12) : Critère de Drucker et Prager dans l'espace <sup>[CHE88]</sup>

### 5.3. Ecouissage <sup>[BRI04]</sup>

Après l'écoulement initial, le niveau de contraintes auquel apparaissent des déformations plastiques additionnelles doit dépendre des degrés courants de déformabilité plastique. Un tel phénomène est appelé : écouissage.

De cette façon, la surface d'écoulement va varier à chaque étape de la déformation plastique, avec les surfaces d'écoulements ultérieurs devenant dépendantes des déformations plastiques en quelque sorte.

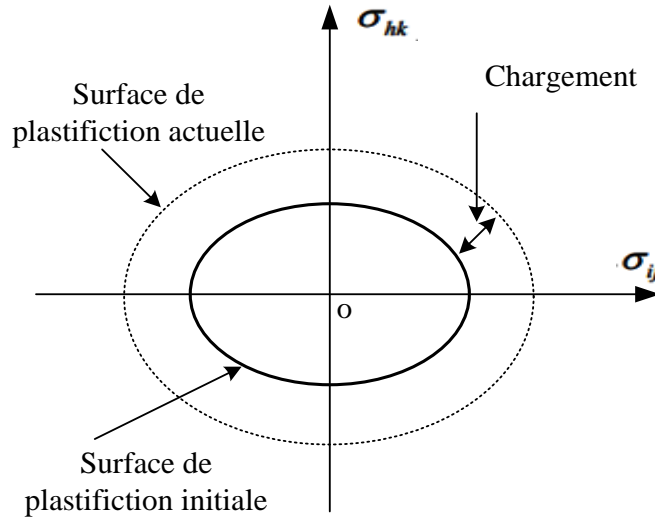
#### 5.3.1. Ecouissage isotrope

Il y a écouissage isotrope si les surfaces d'écoulement ultérieures ont une expansion uniforme de la courbe d'écoulement originale sans translation comme indiquée sur la figure (1.13). Cet écouissage est obtenu simplement en supposant que la surface de charge garde la même forme  $F$  s'étend sans translation ni distorsion de manière isotrope. Son centre  $O$  ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) reste fixe et seule sa dimension change.

L'équation de la surface de charge est :

$$F = (F, k) = 0 \quad (1.19)$$

Le paramètre d'écrouissage  $k$  est en général égal au travail plastique (W or k hardening) ou à la déformation plastique effective  $\varepsilon_{ef}^p$  (strain hardening) :



**Figure (1.13):** *Ecrouissage isotrope* <sup>[HIN80]</sup>

$$dK = dW^p = \sigma^T d\varepsilon^p \quad K = \int \sigma^T d\varepsilon^p \quad (1.20)$$

Ou bien

$$dK = \frac{2}{3} [\{d\varepsilon^p\}^T \{d\varepsilon^p\}]^{1/2} \quad (1.21)$$

La relation (1.20) du travail plastique est la plus utilisée.

La règle de chargement plastique  $df = 0$  donne alors :

$$dF = \sum \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} d\sigma_i + \frac{\partial F}{\partial k} dk = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad (1.22)$$

L'écrouissage isotrope est simple mais ne convient qu'au chargement monotone car il ne tient pas compte de l'effet Bauschinger observé en pratique.

### 5.3.2 Ecrouissage cinématique

Si les surfaces ultérieures des contraintes d'écrouissage préservent leurs forme et orientation mais translatent dans l'espace des contraintes comme un corps rigide comme indiqué sur figure (1.14), un écrouissage cinématique est appelé à prendre place. Tel modèle d'écrouissage donne une augmentation de l'effet Bauschinger observé expérimentalement en chargement cyclique.

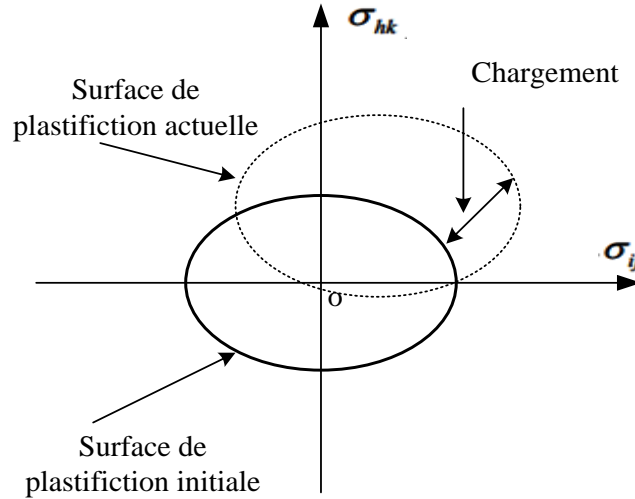


Figure (1.14): Ecrouissage cinématique <sup>[HIN80]</sup>

Donc le moyen le plus simple de prendre en compte l'effet Bauschinger est de considérer que la surface de charge se déplace par une translation de corps rigide.

L'équation de la surface de charge est dans ce cas :

$$F = (\sigma, \alpha, K) = F(\sigma - \alpha, K) = F(\bar{\sigma}, K) = 0 \tag{1.23}$$

$\bar{\sigma}$  : Vecteur des contraintes réduites.

$\alpha$  : Est de nature tensorielle ; elle indique la position de centre de la surface de charge, égale zéro dans l'état initial.

$K$  : est une constante

Les règles d'écrouissage cinématique consistent à déterminer les coordonnées.

La règle d'écrouissage de Prager définit les coordonnées  $\alpha$  par un déplacement linéaire du centre de la surface :

$$d\alpha = b d\varepsilon^p \quad \text{d'ou} \quad \alpha = \int b d\varepsilon^p \tag{1.24}$$

$b$  : Le facteur de la proportionnalité est constant lier directement du module de plasticité. Si  $b$  est négative : c'est l'adoucissement. Dans le cas uniaxial  $b = H$ .

Dans la règle d'écrouissage de Ziegler la translation de la surface de charge a lieu dans la direction du vecteur des contraintes réduites :

$$d\alpha = a(\sigma - \alpha) d\varepsilon_{ef}^p \tag{1.25}$$

la condition de consistance donne :

$$dF = \sum \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} d\sigma_i + \sum \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} d\alpha_i = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T d\alpha = 0 \tag{1.35}$$

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\} = - \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \quad (1.36)$$

Donc

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d(\sigma - \alpha) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T d\bar{\sigma} = 0 \quad (1.37)$$

$a$  est une caractéristique positive du matériau et  $\varepsilon_{ef}^p$  est la déformation plastique effective. Dans l'écroissage cinématique, l'effet Bauschinger est total et cela aussi est en contradiction avec l'expérience.

### 5.3.3 Ecroissage mixte

Il s'agit de superposer ou combinaison des écroissages cinématique et isotrope : le domaine donc se modifier par translation et par dilatation. Celui-ci s'exprime par :

$$F = (\sigma, \alpha, K) = F(\sigma - \alpha, K) = F(\bar{\sigma}, K) = 0 \quad (1.26)$$

Le centre de la surface subit une translation définie par les coordonnées  $\alpha$  et la surface de charge en gardant sa forme subit une expansion définie par  $k$ :

$$dk = (\sigma - \alpha) \cdot d\varepsilon^p = \bar{\sigma} \cdot d\varepsilon^p \quad \text{Donc : } k = \int \bar{\sigma} \cdot d\varepsilon^p \quad (1.27)$$

### 5.4. Règle d'écoulement et potentiel plastique <sup>[BRI04]</sup>

La notion dérivation des déformations élastiques à partir d'une fonction potentielle élastique a été étendue au domaine plastique.

L'incrément de déformation plastique est relié au gradient de  $G$  par une fonction scalaire des contraintes  $\sigma$  appelée potentiel plastique telle que :

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad (1.28)$$

Cette relation est appelée règle d'écoulement lie la fonction de charge à la loi constitutive  $\sigma$ - $\varepsilon$ .

$d\lambda$  : est un facteur scalaire de proportionnalité positif ou nul.

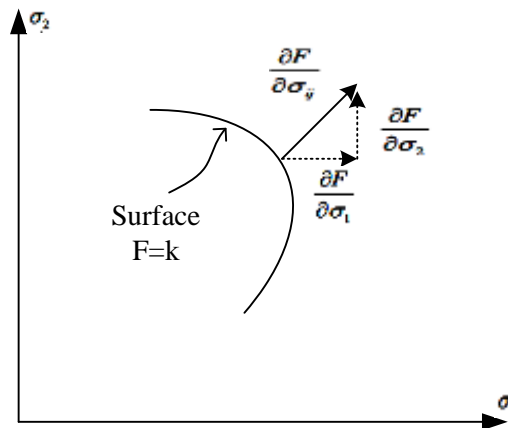
$d\lambda$  n'est positif qu'en présence d'écoulement plastique.

Les notions de plasticité associée sont attribuées à supposer  $G = F$  ou  $G \neq F$  respectivement.

Où  $F$  est la fonction de charge. Si :  $F = G$ .

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad (1.29)$$

L'équation (1.29) est appelée règle de plasticité associée ou règle de normalité car elle nécessite que le vecteur de déformation plastique  $\varepsilon_{ef}^p$  soit normal à la surface de charge.



**Figure (1.15):** Représentation géométrique de la règle de normalité de la plasticité associée <sup>[HIN80]</sup>

## 6. Méthodes de résolution des systèmes non linéaires <sup>[BOU08]</sup>

Vue la très grande variété des comportements non linéaires pouvant être impliqués dans les applications de la mécanique des solides et des structures, il existe également une très grande variété de méthodes de résolution numérique. Le point commun de la plupart des méthodes de résolution numérique de problèmes d'équilibre dans des conditions non linéaires réside dans leur caractère itératif basées sur la minimisation d'un résidu d'équilibre. Elles procèdent en effet, le plus souvent, par construction d'une suite de solutions approchées dont la limite est la solution exacte des équations issues de la modélisation par éléments finis.

Parmi les principales catégories des méthodes numériques de résolution des problèmes non linéaires, nous nous sommes intéressés à celles qui reposent sur les algorithmes incrémentaux. On peut citer :

### 6.1. Méthodes incrémentales

Le chargement est subdivisé en plusieurs incréments pas forcément égaux. Durant chaque incrément, les déplacements sont obtenus par la résolution d'un système linéaire

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (1.30)$$

Où  $[K]$  est déduite des résultats de l'incrément précédent, auquel sont ajoutés les déplacements cumulés précédemment. Le procédé est répété jusqu'à chargement final  
Figure (1.16)

Il n'y a aucune itération pour restaurer l'équilibre, l'inconvénient majeur réside dans le cumul des erreurs et dans l'impossibilité de prévoir la taille minimale des incréments pour satisfaire

une tolérance fixée. Une des variantes de la technique est la méthode médiane de Runge\_Kutta ou la matrice de rigidité  $K$  est évaluée au milieu de l'incrément

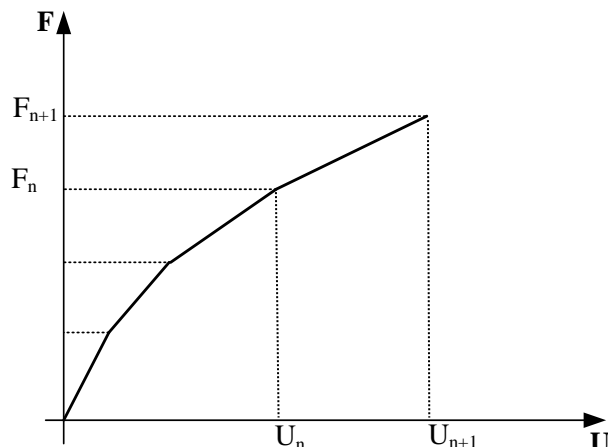


Figure (1.16) : Méthodes incrémentales [BRI04]

## 6.2. Méthode incrémentale itérative [CHR00], [QUO00], [CHE88]

La méthode incrémentale itérative utilise le même processus incrémental que la méthode précédant seulement, une correction de l'équilibre est introduite sur chaque incrément en utilisant un processus itératif. Cette correction peut se faire de plusieurs manières suivant le type de matrice de rigidité utilisée (initiale, tangente) définissant ainsi plusieurs méthodes incrémentales itératives dont la plus connue est celle de Newton-Raphson.

Dans l'analyse incrémental, la charge totale agissant sur une structure est appliquée incrémentalement par pas. à l'étape  $m+1$ , la charge peut être exprimée par :

$${}^{m+1}\{F\} = {}^m\{F\} + {}^{m+1}\{\Delta F\} \quad (1.31)$$

Là où l'indice supérieur gauche  $m$  a été employé pour indiquer le  $m^{eme}$  pas incrémental.

Supposant que les solutions au  $m^{eme}$  pas  ${}^m\{U\}$ ,  ${}^m\{\sigma\}$ ,  ${}^m\{\varepsilon\}$  sont connues, et à l'étape  $(m+1)$  nous avons correspondant à la charge incrémentale  $\{\Delta F\}$

$${}^{m+1}\{U\} = {}^m\{U\} + \{\Delta U\} \quad (1.32)$$

$${}^{m+1}\{\sigma\} = {}^m\{\sigma\} + \{\Delta \sigma\} \quad (1.33)$$

Nous avons :

$${}^{m+1}\{F\} = {}^{m+1}\{R\} \quad (1.34)$$

L'équation (1.34) représente l'équilibre des forces nodales extérieures  ${}^{m+1}\{F\}$  et des forces nodales internes  ${}^{m+1}\{R\}$ .

Mais généralement les deux systèmes de forces ne sont pas égaux et la différence entre les deux est appelée (Forces résiduelles)

$$\Delta F = {}^{m+1}\{F\} - {}^{m+1}\{R\} \quad (1.35)$$

Pour assurer l'équilibre, ces résidus doivent être minimisés.

### 6.2.1 Méthode de Newton-Raphson (Rigidité tangente) <sup>[CHE88], [COF01], [COF03]</sup>

La méthode de Newton-Raphson utilise la matrice de rigidité tangente recalculée à chaque itération pour la correction de l'équilibre, voir Figure (1.17).

Cette méthode a une convergence très rapide, mais son inconvénient principal réside dans le temps de calcul de l'actualisation de la matrice de rigidité tangente à chaque itération.

#### Algorithme de la méthode de Newton-Raphson <sup>[CHE88]</sup>

$${}^{m+1}[K]^{(i-1)}\{\Delta U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{F\} - \{R\}^{(i-1)} \quad (1.36)$$

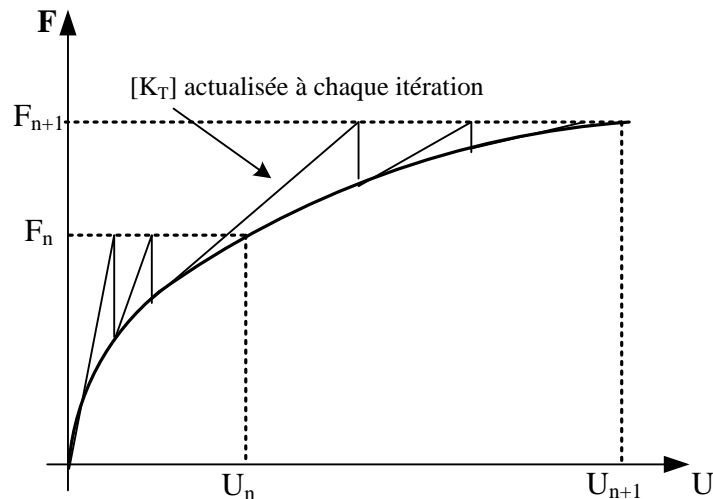
$${}^{m+1}\{U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{U\}^{(i-1)} + \{\Delta U\}^{(i)} \quad (1.37)$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(0)} = {}^m\{U\} \quad (1.38)$$

$${}^{m+1}[K]^{(0)} = {}^m[K] \quad (1.39)$$

$${}^{m+1}\{F\}^{(0)} = {}^m\{F\} \quad (1.40)$$

( $i=1,2,\dots$ )



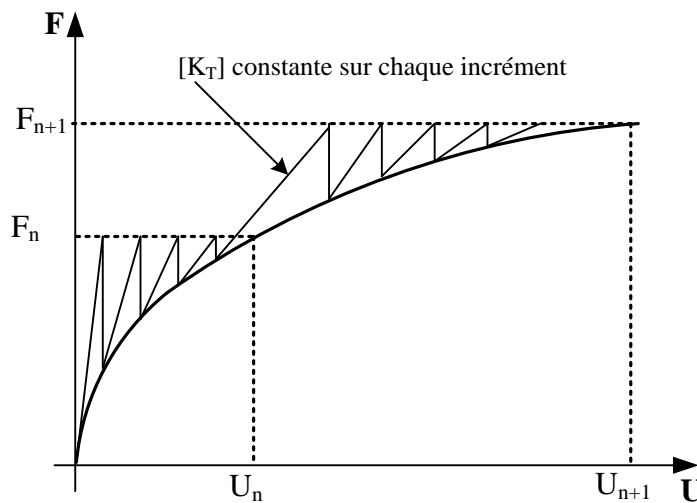
**Figure (1.17) :** Méthode de Newton-Raphson <sup>[CHE88]</sup>

### 6.2.2. Méthode de Newton-Raphson modifiée <sup>[CHE88], [COF01], [COF03], [ZIE77]</sup>

La méthode de Newton-Raphson modifiée est identique à la précédente mais, utilise la matrice de rigidité tangente recalculée au début de chaque incrément et gardée constante pour toutes les itérations pour la correction de l'équilibre, voir Figure (1.18). Cette méthode a une convergence moins rapide que la précédente, mais elle a l'avantage de garder la matrice de rigidité constante pour chaque incrément ce qui permet d'avoir un gain sensible dans le temps de calcul.

En effet, dans la méthode de résolution de Newton-Raphson modifiée, nous pouvons éviter au début le calcul systématique de la matrice de rigidité tangente, en le remplaçant par une matrice de rigidité initiale dans le but de vérifier la fiabilité des forces internes correspondant aux contraintes dans la structure. Ou bien, pour résoudre les problèmes de faible non-linéarité ou de non-linéarité matérielle. Cependant, la lenteur de convergence liée à cette méthode peut être améliorée en la couplant avec des méthodes d'accélération de convergence de type "line-search".

Actuellement, la méthode de résolution de Newton-Raphson standard constitue la base d'algorithmes de résolutions la plus répandue pour résoudre les problèmes de structures non linéaires. Signalons tout de même qu'on reste toujours gagnant en terme de nombre d'itérations par incrément avec l'utilisation de la méthode de résolution de Newton-Raphson. Par contre le temps de calcul reste coûteux, car pour une modélisation de taille importante et des degrés de liberté élevés, à cause de l'assemblage et de l'actualisation de sa matrice de rigidité tangente à chaque incrément.



**Figure (1.18) :** Méthode de Newton-Raphson modifiée <sup>[CHE88]</sup>

#### **Algorithme de la méthode de Newton-Raphson modifiée** <sup>[CHE88]</sup>

On remplace la matrice de rigidité tangente  ${}^{m+1}[K]^{(i-1)}$  de l'équation (1.36) par  ${}^n[K]$  la matrice de rigidité tangente évaluée à l'étape n de charge ( $n < m+1$ ).

Si  ${}^n[K]$  est évaluée seulement au début de la première étape de charge donc la matrice élastique initiale  ${}^n[K] = [K]_0$  est employée pour toutes les étapes de charge : Souvent, la matrice de la rigidité est évaluée au début de chaque pas de la charge ou pour le  $m+1$  pas, la matrice de rigidité utilisée est :



$${}^n[K] = {}^{m+1}[K]^{(0)} = {}^m[K] \quad (1.41)$$

Donc l'algorithme est :

$${}^n[K] \{\Delta U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{F\} - \{R\}^{(i-1)} \quad (1.42)$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{U\}^{(i-1)} + \{\Delta U\}^{(i)} \quad (1.43)$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(0)} = {}^m\{U\} \quad (1.44)$$

$${}^{m+1}\{F\}^{(0)} = {}^m\{F\} \quad (1.45)$$

( $i=1,2,\dots$ )

### 6.2.3. Méthode de la rigidité initiale

La méthode de la rigidité initiale utilise une matrice de rigidité élastique constante pour éviter les coûteuses actualisations de  $[K]$ , cette méthode assure toujours la convergence vers la solution désirée Figure (1.19).

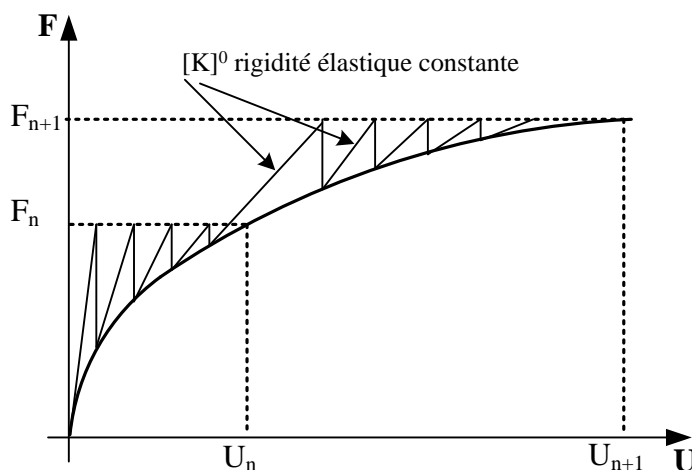


Figure (1.19) : Méthode de la rigidité initiale <sup>[CHE88]</sup>

Algorithme de la méthode de la rigidité initiale <sup>[CHE88]</sup>

$$[K]{}^0 \{\Delta U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{F\} - \{R\}^{(i-1)} \quad (1.46)$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{U\}^{(i-1)} + \{\Delta U\}^{(i)} \quad (1.47)$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(0)} = {}^m\{U\} \quad (1.48)$$

$${}^{m+1}\{F\}^{(0)} = {}^m\{F\} \quad (1.49)$$

( $i=1,2,\dots$ )

## 7. Critères de convergence <sup>[CHE88]</sup>

Un critère de convergence défini correctement pour terminer l'itération d'équilibre est une partie essentielle d'une stratégie incrémentale efficace de solution.

A la fin de chaque itération, la solution obtenue doit être vérifiée en utilisant une tolérance choisie, pour voir si la convergence a eu lieu. Pour une analyse par éléments finis en déplacement, le calcul du déplacement devrait approcher le déplacement exact, car le déplacement exact n'est pas connu à l'avance, une approximation de ce critère peut être exprimée comme suit :

$$\frac{\|\{\Delta U\}^{(i)}\|}{\|{}^{m+1}\{U\}^{(i)} - {}^m\{U\}\|_2} \leq \varepsilon_D \quad (1.50)$$

Avec :  $\{\Delta U\}^{(i)}$  le déplacement incrémental de  $i^{eme}$  itération

$\| \cdot \|_2$  : est utilisé pour dénoter la norme Euclidienne d'un vecteur.

$\varepsilon_D$  : est la tolérance prescrite pour le déplacement  $\{U\}$ .

Ce critère est donc appelé le critère du déplacement.

Pour une itération de l'équilibre, nous cherchons une solution  $\{U\}$  pour assurer la condition d'équilibre (1.34). A cette fin, un deuxième critère de la convergence est exigé pour les forces résiduelles, où la différence entre la force interne et la force externe  $\Delta F = {}^{m+1}\{F\} - {}^{m+1}\{R\}$  doit être nul.

Cependant, il est impossible et inutile que les forces résiduelles atteignent zéro dans un processus numérique. Donc, nous introduisons une approximation de la forme :

$$\frac{\|{}^{m+1}\{F\} - {}^{m+1}\{R\}^{(i)}\|_2}{\|{}^{m+1}\{F\} - {}^m\{R\}\|_2} \leq \varepsilon_F \quad (1.51)$$

Avec  $\varepsilon_F$  : est une tolérance prescrite pour la force.

Ce critère est donc appelé le critère de force.

Dans certains cas de discontinuité (fissuration par exemple) les forces peuvent augmenter alors que les déplacements diminuent donc un troisième critère doit fournir une mesure de la façon que les déplacements et les forces sont à leurs valeurs d'équilibre. Ce critère est appelé critère d'énergie interne.

$$\frac{\{\Delta U\}^{(i)T} ({}^{m+1}\{F\} - {}^{m+1}\{R\}^{(i)})}{\{\Delta U\}^{(i)T} ({}^{m+1}\{F\} - {}^m\{R\})} \leq \varepsilon_E \quad (1.52)$$

$\varepsilon_E$  : est une tolérance prescrite pour l'énergie interne.

N'importe quel critère de ces trois critères ou de leurs combinaisons peuvent être employé pour terminer une itération, mais la tolérance doit être soigneusement choisie. Une tolérance

trop grande mènera à un résultat imprécis, alors qu'une tolérance trop serrée peut mener à des calculs laborieux et inutiles.

**8. Organigramme (non linéarité matérielle)** <sup>[BRI04]</sup>

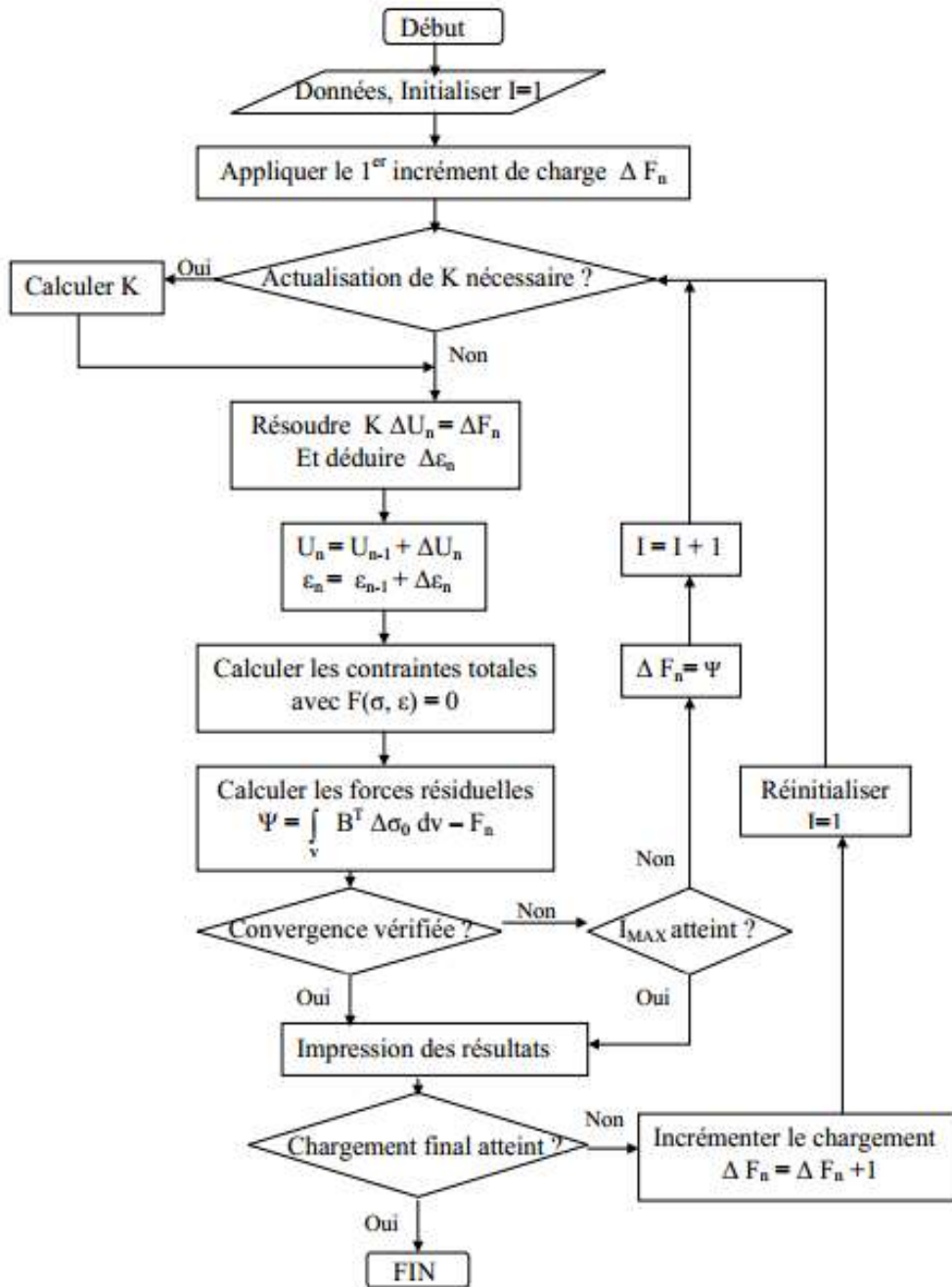


Figure (1.20) : Organigramme non linéarité matérielle

# **Chapitre 2**

## Formulation éléments finis membranaires

## 1. Généralité sur la Méthode des éléments finis (M.E.F)

### 1.1. Introduction

Depuis une cinquantaine d'années la mécanique des structures permet l'analyse des assemblages de barres et de poutres <sup>[HOF56]</sup>. Et ainsi les techniques de calcul des structures ont connu dernières années un développement considérable, motivé par les besoins des industries et soutenu par les progrès effectués dans le domaine des ordinateurs. Ainsi, la M.E.F est communément utilisée aujourd'hui pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie.

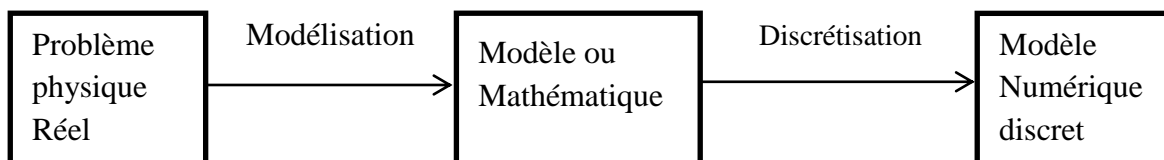
### 1.2. Modélisation et discrétisation <sup>[BES12]</sup>

La méthode des éléments finis est donc une procédure générale de discrétisation pour la résolution des problèmes des milieux continus. Donc pour avoir une analyse numérique qui simulera au mieux un problème, il faut effectuer deux opérations essentielles la modélisation et la discrétisation, ces opérations se font en deux temps Figure (2.1).

La modélisation.

La discrétisation ensuite et portent sur les deux aspects principaux du problème pratique.

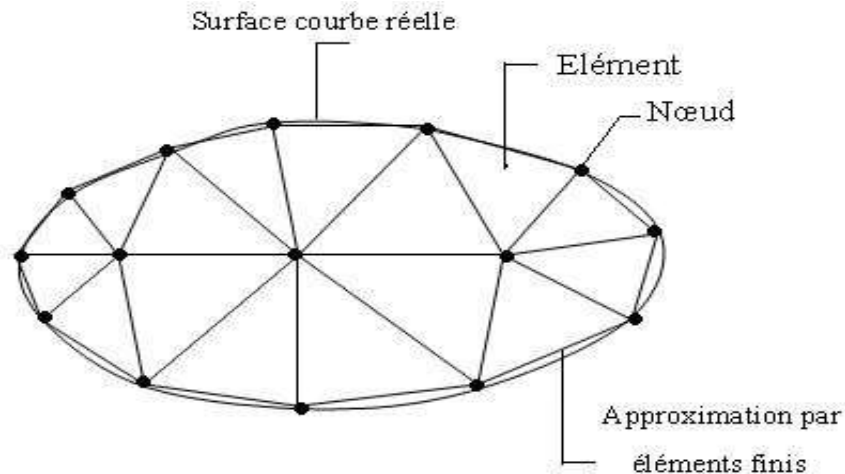
- Représentation de la géométrie, des charges, des conditions aux limites.
- Choix des éléments finis et du maillage.



**Figure (2.1) :** *Étape de l'analyse d'un problème aux limites* <sup>[BES12]</sup>

### 1.3. Concept de la méthode des éléments finis <sup>[ZIE 91]</sup>

Le concept de base de la méthode des éléments finis est la subdivision du modèle mathématique à des composants disjoints de géométrie simple appelés (Éléments finis), le comportement de chaque élément est exprimé en terme d'un nombre fini de degrés de liberté, le comportement (réponse) du modèle mathématique est considéré, approximativement, celui du modèle discret obtenu par connexion ou assemblage des éléments.



**Figure (2.2) :** Maillage du domaine en triangles à trois nœuds <sup>[BES12]</sup>

#### 1.4.Étapes de la méthode des éléments finis <sup>[ARN08],[BES12]</sup>

La méthode des éléments finis est considérée comme un outil de mathématiques appliquées destiné à résoudre les équations différentielles.

les étapes de l'étude d'un problème aux limites sont toujours les mêmes, on peut les résumer en sept étapes :

1. Définition de la géométrie de la structure étudiée
2. Maillage de la structure (discrétisation en éléments) - Génération de la table de connectivité entre les éléments figure (2.2)
3. Définition du modèle associé à la structure
4. Choix des paramètres du modèle
5. Construction de la matrice de raideur globale par assemblage des matrices de raideur locales des éléments en fonction de la table de connectivité
6. Construction du vecteur effort global par assemblage des vecteurs d'effort locaux suivant la table de connectivité
7. Prise en compte des conditions aux limites
8. Prise en compte du chargement
9. Résolution du système pour obtenir les déplacements nodaux des éléments
10. Traitement du résultat (calcul des déformations, calcul des contraintes)

### 1.5. Avantages de la Méthode des éléments finis <sup>[BES12]</sup>

La puissance de la méthode des éléments finis réside essentiellement dans sa souplesse. Elle peut être applicable à une variété de problèmes mécaniques ou bien physiques. La géométrie du domaine peut être quelconque, les forces et les conditions aux limites peuvent être aussi de natures quelconques.

Le maillage peut combiner autant de types d'éléments que l'on souhaite. Et toute cette généralité est contenue dans un programme unique qu'on peut faire tourner sur un ordinateur (sélection du de problème, de la géométrie, du type d'élément, des chargements et des conditions aux limites).

La méthode des éléments finis réside dans le fait que le modèle qu'elle utilise est très proche de la structure réelle.

### 1.6. Classement d'éléments fini <sup>[BES12]</sup>

Les différents types d'éléments finis suivant leur géométrie. Plusieurs classes d'éléments finis peuvent être distinguées :

- 1) Les éléments 1D : barres, poutres rectilignes ou courbes.
- 2) Les éléments 2D : élasticité plane (déformation ou contrainte plane), plaque en flexion coques courbes.
- 3) Les éléments 3D : éléments de volume ou coques épaisse

#### 1.6.1. Propriétés d'un élément fini <sup>[BES12]</sup>

Le découpage en éléments finis permet d'isoler un élément fini pour l'étudier tout en établissant les caractéristiques.

##### ➤ **Signalement d'un élément fini**

Le signalement d'un élément fini comprend les points suivants

– **Géométrie :**

Un élément fini peut être 1d, 2d ou 3d sa forme sont simples.

- segment d'une droite ou de courbe (plan ou courbe)
- Triangle ou quadrilatère
- Tétraèdre, prisme ou hexaèdre

– **Les frontières :**

Sont respectivement :

- les points (extrémités du segment)
- des segments de droite ou de courbe.
- des faces planent ou courbe

– **Matériau :**

Le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope) ce dernier a les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions (métaux)

Il est caractérisé par 02 constantes élastiques :  $E$  et  $\nu$

➤ **les nœuds**

Les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres, ils occupent des positions stratégiques comme les extrémités, les sommets, les milieux des arêtes et faces.

➤ **Les forces nodales**

À travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté, les unes sont les réactions internes, les autres les forces  $F$  dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température...)

➤ **Degrés de liberté**

Pour tout élément fini, on doit faire le choix d'une ou plusieurs fonctions (en général le champ des déplacements), elles sont exprimées en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds valeurs qui deviennent les inconnues nodales ; par leurs degrés de liberté nodaux communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer, la solution complète (ASSEMBLAGE), tout en veillant à respecter certaines règles, dites critères de convergence

➤ **Caractéristiques d'un élément fini**

Le signalement précédent permet de construire les deux caractéristiques d'un élément fini qui sont :

- sa matrice de rigidité  $K$
- son vecteur force  $F$



Elles interviennent dans l'équation d'équilibre de l'élément fini, en relation forces - déplacement.

$$F = K U \quad (2.1)$$

### 1.7. Condition d'équilibre <sup>[BES12]</sup>

Les forces agissant sur toute la structure ou sur chacun des éléments considérés comme un corps libre doivent être en équilibre.

### 1.8. Condition de compatibilité <sup>[BES12]</sup>

Les déplacements de l'ensemble de la structure ou de chacun de ses éléments doivent être compatibles, en d'autres termes les déplacements des extrémités des éléments qui sont connectés à un même point doivent être identiques.

On peut encore dire que si on effectue une section sur un élément, les déplacements d'élément à gauche et à droite de cette section doivent être égaux.

Pour que cette cohésion soit respectée (c.-à-d. pour que les volumes élémentaires ; auxquels ont été appliquées les déformations  $\varepsilon_{ij}$ , continuent de rester accolés), il faut que le champ de déformation  $\varepsilon_{ij}(M)$  dérive d'un champ de déplacement  $u_i(M)$ ,

Continûment dérivable, tel que  $\varepsilon_{ij}$  peut s'écrire :

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3)$$

Donc, connaissant le champ de déplacement  $u_i(M)$ , on en déduit par équation (2-3) le champ de déformation  $\varepsilon_{ij}(M)$ .

Réciproquement, si on connaît le champ des déformations  $\varepsilon_{ij}(M)$  peut-on calculer le champ de déplacements  $u_i(M)$ . Le premier problème est celui de la compatibilité des déformations, le second celui de l'intégration d'un champ de déplacement.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j^2 \partial x_i} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{jj}}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_i^2 \partial x_j} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jj}}{\partial x_i^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (2.7)$$

Cette équation (2-7) générale permet d'exprimer les équations de compatibilité en élasticité tridimensionnelle.

### 1.9. Loi de Hooke

Dans le cas de matériaux à comportement élastique linéaire, on a de façon générale par l'équation (2-1).

### 1.10. Conditions aux limites <sup>[BRI04]</sup>

Sur la surface externe  $S$  d'un solide ne peuvent exister que deux types de conditions aux limites : soit des déplacements imposés, nuls ou non nuls, soit des efforts.

Les conditions aux limites portant sur les déplacements sont dites cinématiques.

Les conditions aux limites portant sur les efforts sont dites statiques ou de type équilibre.

### 1.11. Choix des fonctions de déplacements et conditions de convergence <sup>[BES12]</sup>

Les différents champs de déplacement nécessitent un nombre total de constantes égales au nombre total des degrés de liberté de l'élément. Cependant, il convient de choisir les constantes proportionnellement aux différents champs de déplacement suivant la destination de l'élément et de la nature du problème à analyser.

Le choix des fonctions de forme limite, le nombre de degrés de liberté de système qui est en réalité infini, donc le minimum réel de l'énergie ne pourra jamais être atteint quelle que soit la finesse du maillage. Pour assurer la convergence de la solution vers la solution exacte, certaines conditions doivent être vérifiées. Ces conditions sont les suivantes :

- Critère 1: représente les mouvements des modes rigides où la fonction de déplacement doit être telle qu'il soit impossible qu'un élément se déforme quand les déplacements de ses nœuds sont causés par un mouvement de corps rigide.
- Critère 2: représente l'état de déformation constante dont la fonction représentative des déplacements doit être telle que, si les déplacements nodaux correspondent à des déformations constantes, on obtient effectivement ces déformations constantes.
- Critère 3: condition de compatibilité où les fonctions de déplacements doivent être choisies de telle sorte que les déformations aux interfaces des éléments soient infinies.

Les critères 1 et 2 se traduisent par le terme élément complet. Le critère 3 traduit par élément compatible, si les éléments finis satisfont les conditions de complétude et de compatibilité ; de tels éléments sont dits (éléments conformes), pour ce type d'élément la solution converge de

façon monotone vers la solution exacte.

Certains éléments ne satisfaisant pas toutes les conditions, de tels éléments sont dits (éléments non conformes), parmi ses éléments certains d'entre eux ne convergent pas, mais les autres convergent. Comme il y a des éléments non conformes qui présentent un taux de convergence supérieur à d'autres éléments conformes et qui sont très utilisés en pratique.

### **1.12. Modèles d'éléments finis** <sup>[BES12]</sup>

Le plus souvent, le champ interpolé est celui des déplacements, et il est rarement celui des déformations ou des contraintes. Ces interpolations portent sur tout l'élément ou une partie de celui-ci, à l'intérieur ou à la frontière. On peut créer divers types, dits « modèles » d'éléments finis selon la combinaison choisie comme :

#### **1.12.1. Modèle déplacement**

Ce modèle est le plus populaire, le plus connu et le plus développé. Dans cette catégorie, les éléments finis sont basés sur une interpolation du champ des déplacements, étendu à tout l'élément. Alors, les déplacements sont déterminés de manière détaillée et unique dans la structure, donc les contraintes ne peuvent être connues que par certaines moyennes et ne sont pas continues aux frontières.

#### **1.12.2. Modèle en déformation**

Ce modèle présente une approximation qui se fait sur le champ de déformation, puis on intègre pour retrouver le champ de déplacement de telle sorte que les équations d'équilibres et de compatibilité soient satisfaites à l'intérieur de l'élément.

### **1.13. Théorèmes énergétiques en élasticité** <sup>[IMB84], [GUE98]</sup>:

Pour effectuer un calcul de structure, il est nécessaire de connaître :

- L'expression des équations d'équilibre et les efforts appliqués.
- Les conditions aux limites.
- La loi de comportement.

Les différentes formulations énergétiques permettent de faire une synthèse de ces trois éléments constitutifs d'un problème de structure, et ainsi d'obtenir une formulation plus compacte et donc facile à discrétiser. Ce sont ces formulations qui sont à la base des méthodes par éléments finis.

**1.13.1. Principe de travaux virtuels :**

Pour un corps solide en équilibre sous l'action de forces de volume  $\mathbf{b}_i$  et des forces de surfaces  $\mathbf{f}_i^s$  et pour tous champs de déplacements virtuels cinématiquement admissible ( $\delta \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ ) Cette relation est l'expression générale du principe des travaux virtuels pour un corps solide déformable.

$$\int_v \sigma_{ij} \delta u_{ij} dV = \int_v b_i \delta u_i dV + \int_s f_i^s \delta u_i dS \quad (2.8)$$

Cette relation est l'expression générale du principe des travaux virtuels pour un corps solide déformable.

On peut la mettre sous la forme courante si l'on effectue les hypothèses suivantes :

H1: Petits déplacements et déformations :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji}) \quad (2.9)$$

H2: Existence d'un potentiel de déformation  $W$  tel que :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.10)$$

Donc :

$$\delta U = \delta \int_v W dV = \int_v b_i \delta u_i dV + \int_s f_i^s \delta u_i dS \quad (2.11)$$

L'accroissement virtuel de l'énergie de déformation ( $U = \int_v W dV$ ) est égal à la somme des travaux virtuels des forces de volume et de surface dans tout accroissement virtuel cinématique admissible du champ des déplacements.

**1.13.2. Théorème de l'énergie potentielle totale** <sup>[IMB84]</sup>

Le principe des déplacements virtuels et du minimum d'énergie potentielle totale jouent un rôle important dans les méthodes de calcul des structures élastiques. Les déplacements cinématiquement admissibles pour un état d'équilibre stable, qui satisfont les conditions d'équilibre, sont ceux qui minimisent l'énergie potentielle et réciproquement. Soit la première variation de l'énergie potentielle totale :

$$\delta U = \delta \int_v W dV = \int_v b_i \delta u_i dV + \int_s f_i^s \delta u_i dS \quad (2.12)$$

De plus, on a :

$$\delta \int_V W \, dV = \int_V \sigma_{ij} \delta u_{ij} \, dV = \int_V (\sigma_{ij} \delta u_{ij}) \, dV - \int_S \sigma_{ij} \delta u_i \, dV \quad (2.13)$$

d'où en applique le théorème de Gauss et on obtient donc finalement :

$$\delta U = - \delta \int_V (\sigma_{ij} + b_i) \delta u_i \, dV + \int_S (\sigma_{ij} n_j - f_i^s) \delta u_i \, dS \quad (2.14)$$

la stationnarité de  $V$  implique que :

$$\delta U = 0 + 0 \quad \forall \delta u_i \neq 0$$

Donc les conditions d'équilibre dans  $V$  et sur  $S_i$  constituent les conditions d'extremum de l'énergie potentielle totale pour toute variation cinématiquement admissible des déplacements.

#### 1.14. Application au Principe des travaux virtuels <sup>[GOU04], [MEF04]</sup>

Soit un corps solide en équilibre sous l'action de forces de : volume  $f_i^v$  de surface  $f_i^s$  et des forces concentrées. Considérons un champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible.

Le théorème des travaux virtuels exprime le bilan des travaux virtuels interne et externe, lorsque le corps est en équilibre :

$$\int_V \langle \delta \varepsilon \rangle \{ \sigma \} \, dV = \int_V \langle \delta u \rangle \{ f_v \} \, dV + \int_S \langle \delta u \rangle \{ f_s \} \, dS + \sum_i \langle \delta u \rangle \{ Q_i \} \quad (2.15)$$

$\langle \varepsilon \rangle$  : Vecteur des déformations, transposé

$\{ \sigma \}$  : Vecteur des contraintes

$\langle u \rangle$  : Vecteur des déplacements, transposé

$\{ f_v \}$  : Vecteur des forces volumiques

$\{ f_s \}$  : Vecteur des forces surfaciques

$\{ Q_i \}$  : Vecteur des forces concentrées

L'énergie potentielle totale  $\Pi$  est stationnaire de plus pour un équilibre stable elle est minimum :

$$\Pi = U + V \quad (2.16)$$

U: Energie de déformation interne

V: Potentiel des forces appliquées (opposé du travail des forces extérieures).

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \langle \varepsilon \rangle \{ \sigma \} \, dV - \int_V \langle u \rangle \{ f_v \} \, dV - \int_S \langle u \rangle \{ f_s \} \, dS - \sum_i \langle u_i \rangle \{ Q_i \} \quad (2.17)$$

**a. Interpolation de déplacement**

Elle permet d'exprimer le déplacement en tout point de l'élément en fonction du déplacement des nœuds.

$$\{u\} = [N_e]\{u_e\} \quad (2.18)$$

$[N_e]$  : Matrice ligne de fonction d'interpolation ou de forme.

**b. Interpolation de la déformation**

Les déformations de l'élément « e » sont obtenus par différentiation des déplacements :

$$\{\varepsilon\} = [L][N_e]\{u_e\} \quad (2.19)$$

$$\text{Donc} \quad \{\varepsilon\} = [B_e]\{u_e\} \quad (2.20)$$

Avec  $[B_e] = [L][N_e]$  ou  $[L]$ : Matrice Laplacienne

**c. Interpolation de la contrainte**

Les contraintes sont liées aux déformations par la relation :

$$\{\sigma_e\} = [D]\{\varepsilon_e\} + \{\sigma_0^e\} \quad (2.21)$$

ou  $\{\sigma_0^e\}$  : les contraintes initiales.

$[D]$  : matrice d'élasticité.

**d. Matrice de rigidité élémentaire**

D'après le théorème des travaux virtuels on a :

$$W_{int} = W_{ext} \quad (2.22)$$

Donc :

$$\int_{V_e} \{\varepsilon_e\}^T \{\sigma_e\} dV = \{\tilde{u}_e\}^T \{Q_e\} \quad (2.23)$$

$$\int_{V_e} ([B_e]\{u_e\})^T ([D][B_e]\{u_e\}) dV = \{\tilde{u}_e\}^T \{Q_e\} \quad (2.24)$$

$$\{\tilde{u}\}^T \left[ \int_{V_e} ([B]^T [D] [B]) dV \right] \{u_e\} = \{\tilde{u}_e\}^T \{Q_e\} \quad (2.25)$$

$$\left[ \int_{V_e} ([B]^T [D] [B]) dV \right] \{u_e\} = \{Q_e\} \quad (2.26)$$

$\{\tilde{u}_e\}^T$  : déplacement virtuel.

On aura finalement la matrice de rigidité élémentaire sous la forme :

$$[K_e] = \int_{V_e} [B_e]^T [D] [B_e] dV \quad (2.27)$$

## 2. Formulation éléments finis membranaires

### 2.1. Introduction

Les éléments membranes sont parmi les éléments les plus simples à se développer. Ces éléments sont employés pour analyser des structures soumises aux forces dans le plan. Dans cette section, nous considérons la formulation des éléments finis membranaires rectangulaires et un élément triangulaire pour l'étude d'élasticité plane. Ces éléments basés sur la formulation à champ de déplacement et à champ de déformation ont des différentes DDL par nœud.

### 2.2. Formulation <sup>[CRA08], [BES12]</sup>

L'élément fini de l'état plan le plus simple qui sont de forme triangulaire ou quadrangulaire. Schématisé sur la figure (2.3). Ces éléments sont conventionnellement définis dans le plan  $xOy$ . Au premier degré, ces éléments ont des bords rectilignes. Chaque nœud possède deux degrés de liberté de translation dans le plan, notés  $u$  et  $v$ , tous les deux alimentés en raideur. Le triangle est défini par 3 nœuds (T3), soit 6 degrés de liberté. Le quadrangle est défini par 4 nœuds (Q4), soit 8 degrés de liberté. Les éléments de membranes sont disponibles au second degré. Le degré du champ de déplacement est enrichi par l'adjonction d'un nœud supplémentaire au milieu de chaque bord. Ce nœud milieu qui possède lui aussi les deux degrés de liberté de translation dans le plan  $u$  et  $v$ . Il devient alors possible de prendre en compte la courbure géométrique des arêtes de l'élément. Le triangle est défini par 6 nœuds (T6), soit 12 degrés de liberté, le quadrangle par 8 nœuds (Q8), soit 16 degrés de liberté. Ces éléments sont plus souples que ceux du premier degré et le raffinement du maillage peut parfois sembler grossier bien que la solution soit numériquement satisfaisante.

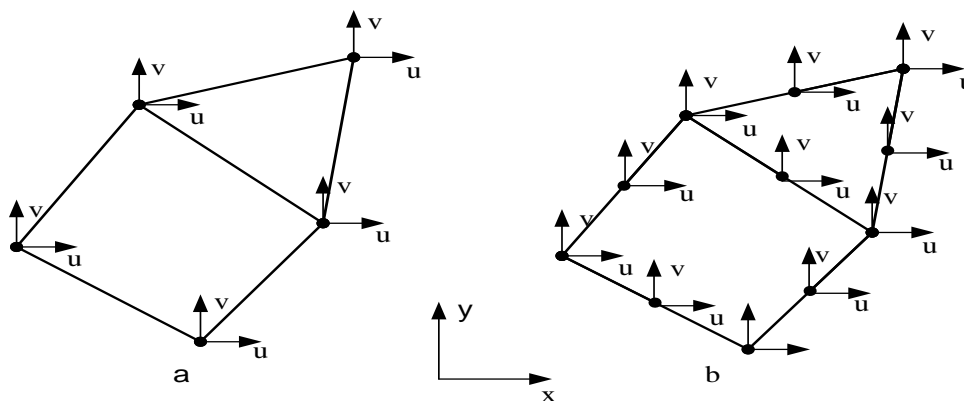


Figure (2.3) : Eléments de membrane du premier degré a et du second b degré <sup>[CRA08]</sup>

### 2.3. Formulation de l'élément quadrilatérale Q4 <sup>[BES12]</sup>

#### 2.3.1. Fonction d'interpolation

Pour représenter la déformation de l'élément rectangulaire à n'importe quel point défini par (x, y) sur la plaque, on choisit une simple fonction polynomiale pour définir les fonctions de déplacement comme suite.

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ v = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \end{cases} \quad (2.28)$$

Le choix de cette fonction assure la continuité des déplacements

L'équation (2.28) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

$$D'où : \quad \{u^e\} = [X^e]\{a^e\} \quad (2.30)$$

$[X^e]$ :Matrice des fonctions de base de l'interpolation

$\{a^e\}$ :Vecteur des coefficients inconnus des polynômes.

Exprimer l'état des déplacements  $\{u^e\}$  en chaque point de l'élément en fonction des déplacements nodaux  $[q^e]$ .cette étape consiste à remplacer les valeur des coordonnées nodales dans l'équation (2.30), puis à résoudre en $\{a^e\}$ , en introduisant les coordonnées des nœuds dans  $[X^e]$ ,

au nœud 1,  $x_1=0, y_1=0,$                       et nœud 2,  $x_2=0, y_2=b,$

et nœud 3,  $x_3=a, y_3=0,$                       et nœud 4,  $x_4=a, y_4=b,$

$$\begin{cases} u_1 = a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 + a_4x_1y_1 \\ u_2 = a_1 + a_2x_2 + a_3y_2 + a_4x_2y_2 \\ u_3 = a_1 + a_2x_3 + a_3y_3 + a_4x_3y_3 \\ u_4 = a_1 + a_2x_4 + a_3y_4 + a_4x_4y_4 \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\begin{cases} v_1 = a_5 + a_6x_1 + a_7y_1 + a_8x_1y_1 \\ v_2 = a_5 + a_6x_2 + a_7y_2 + a_8x_2y_2 \\ v_3 = a_5 + a_6x_3 + a_7y_3 + a_8x_3y_3 \\ v_4 = a_5 + a_6x_4 + a_7y_4 + a_8x_4y_4 \end{cases} \quad (2.32)$$

Alors, la substitution des huit constantes précédentes dans les fonctions de déplacement (2.28) et réarrangement des termes donne :



$$u(x, y) = N_1(x, y)u_1 + N_2(x, y)u_2 + N_3(x, y)u_3 + N_4(x, y)u_4 \quad (2.33)$$

$$v(x, y) = N_1(x, y)v_1 + N_2(x, y)v_2 + N_3(x, y)v_3 + N_4(x, y)v_4 \quad (2.34)$$

$$\{u^e\} = [N^e]\{q^e\} \quad (2.35)$$

$$\{u^e\} = [X^e][A^e]^{-1}\{q^e\} \quad (2.36)$$

$$\{q^e\} = [A^e]\{a^e\} \quad (2.37)$$

$[N^e]$ : L'ensemble des fonctions d'interpolation dites fonction de formes.

$\{q^e\}$ : Est le vecteur de déplacement nodal élémentaire.

$[A^e]^{-1}$ : matrice des coordonnées.

On remarque que tous les termes de la matrice  $[A^e]$  sont connus puis que ce sont simplement les Coordonnées des nœuds, la matrice résultante  $[A^e]$  n'est pas singulière, et inverse  $[A^e]^{-1}$  peut être calculé.

Les quatre fonctions  $N(x, y)$  peuvent s'appeler les fonctions de forme et sont obtenues comme:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(x, y) = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{array} \right. \quad (2.38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_2(x, y) = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} \end{array} \right. \quad (2.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_3(x, y) = \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{array} \right. \quad (2.40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_4(x, y) = \frac{xy}{ab} \end{array} \right. \quad (2.41)$$

Les équations (2.42) et (2.43) donnent les vecteurs des déplacements et des forces complets pour l'élément :

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (2.42) \quad \{F^e\} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

Chacun d'eux contient huit termes de telle sorte que la matrice de rigidité de l'élément  $[K^e]$  est carrée d'ordre huit :  $\{F^e\} = [K^e] \{q^e\}$

### 2.3.2. déformations

Relier les déformations  $\{\varepsilon(x, y)\}$  en chaque point aux déplacements  $\{u(x, y)\}$  et aux déplacements nodaux  $\{q^e\}$ . il est évident que la relation entre les déformations et les

déplacements en tout point pour un problème d'élasticité plane est indépendante de la forme de l'élément choisi, on a ainsi

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q^e\} \quad (2.44)$$

[B] : est la matrice reliant les déformations aux variables nodales

$$[B] = [C][A^e]^{-1} \quad (2.45)$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (2.46)$$

En remplacement u et v par leur valeur à partir de l'équation (2.29), on obtient l'expression suivante pour les déformations en tout point de l'élément :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial(a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy)}{\partial x} = a_2 + a_4y \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial(a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy)}{\partial y} = a_7 + a_4x \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial(a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy)}{\partial y} + \frac{\partial(a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy)}{\partial x} = a_3 + a_4x + a_6 + a_8y \end{aligned} \quad (2.47)$$

En utilisant ces expressions des déformations dans l'équation (2.29), on obtient

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Donc 
$$\{\varepsilon\} = [C]\{a^e\} \quad (2.50)$$

### 2.3.3. Contraintes

Relier les contraintes internes  $\{\sigma(x, y)\}$  aux déformations  $\{\varepsilon(x, y)\}$  et aux déplacements nodaux  $\{q^e\}$ .

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \{\varepsilon(x, y)\} \quad (2.51)$$

### 2.3.4. Matrice de la rigidité

D'après le théorème des travaux virtuels on a :

$$\text{Donc :} \quad \int_{V_e} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \{\delta q^e\}^T \{F\} \quad (2.52)$$

Le travail des efforts internes s'écrit :

$$\delta w = \int_{V_e} \{\varepsilon\} [D] \{\delta \varepsilon\}^T dV \quad \text{Donc} \quad \delta w = \{\delta q^e\} [K^e] \{q^e\} \quad (2.53)$$

$$\text{Avec} \quad [K^e] = \left[ \int_V [B]^T [D] [B] dV \right]$$

$$\text{alors,} \quad [K_0] = \int_V [C]^T [D] [C] dV$$

La variation de l'énergie potentielle des forces extérieures.

$$\delta v = \{\delta q^e\}^T [F^e] \quad (2.54)$$

$\{\delta q^e\}$  : Déplacement virtuel.

Exprimons le principe des travaux virtuels.

$$\delta w + \delta v = 0$$

$$\{\delta q^e\}^T [F^e] - \{\delta q^e\} [K^e] \{q^e\} = 0$$

$$\{F^e\} = [K^e] \{q^e\} \quad (2.55)$$

Après avoir trouvé la matrice de rigidité  $[K^e]$  pour un élément, on cherchera celle globale.

$$\{F\} = [K^g] \{q\} \quad (2.56)$$

la matrice de rigidité élémentaire  $[K^e]$  est donnée par l'équation:

$$[K^e] = t \int_0^a \int_0^b [B]^T [D] [B] dx dy \quad (2.57)$$

Nous sommes maintenant prêts à construire la matrice de rigidité en remplaçant la matrice  $[D]$  donnée par l'équation (2.63), alors

$$[K^e] = t \int_0^a \int_0^b [[C][A^{-1}]]^T [D] [[C][A^{-1}]] dx dy \quad (2.58)$$

Qui pour un élément d'épaisseur constante devient :

$$[K^e] = t [A^{-1}]^T \left\{ \int \int \{[C]^T [D] [C]\} dx dy \right\} [A^{-1}] \quad (2.59)$$

$$\text{D'où :} \quad [K_0] = \left\{ \int \int \{[C]^T [D] [C]\} dx dy \right\} \quad (2.60)$$

$$[K^e] = [A^{-1}]^T [K_0] [A^{-1}] \quad (2.61)$$

Établir la matrice de rigidité qui relie entre les contraintes et les déplacements. D'après l'équation  $\{\sigma(x, y)\} = [D][B][q^e]$  on peut déduire la matrice  $[H]$ .

$$[H] = [D] [B] \quad (2.62)$$

Qui donne la relation entre les contraintes en tout point et les déplacements nodaux :

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Pour des contraintes planes :

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E}{(1-\nu^2)}, \quad d_{21} = d_{12} = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)}, \quad d_{33} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \quad (2.64)$$

Pour déformations plane :

$$d_{11} = d_{22} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu^2)}, \quad d_{21} = d_{12} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu^2)}, \quad d_{33} = \frac{E}{2(1-\nu)} \quad (2.65)$$

Pour obtenir les contraintes en un point donné, on remplace les ces ordonnées de ce point dans la matrice  $[H]$ . de cette façon, on peut déterminer les contraintes en chacun des quatre nœuds de l'élément. Elles peuvent être représentées par  $[\sigma^e]$  ou :

$$[\sigma^e] = \begin{bmatrix} [\sigma(x_1, y_1)] \\ [\sigma(x_2, y_2)] \\ [\sigma(x_3, y_3)] \\ [\sigma(x_4, y_4)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [H(x_1, y_1)] \\ [H(x_2, y_2)] \\ [H(x_3, y_3)] \\ [H(x_4, y_4)] \end{bmatrix} \{q^e\} \quad (2.66)$$

$$D'où : \quad [\sigma^e] = [H^e][q^e] \quad (2.67)$$

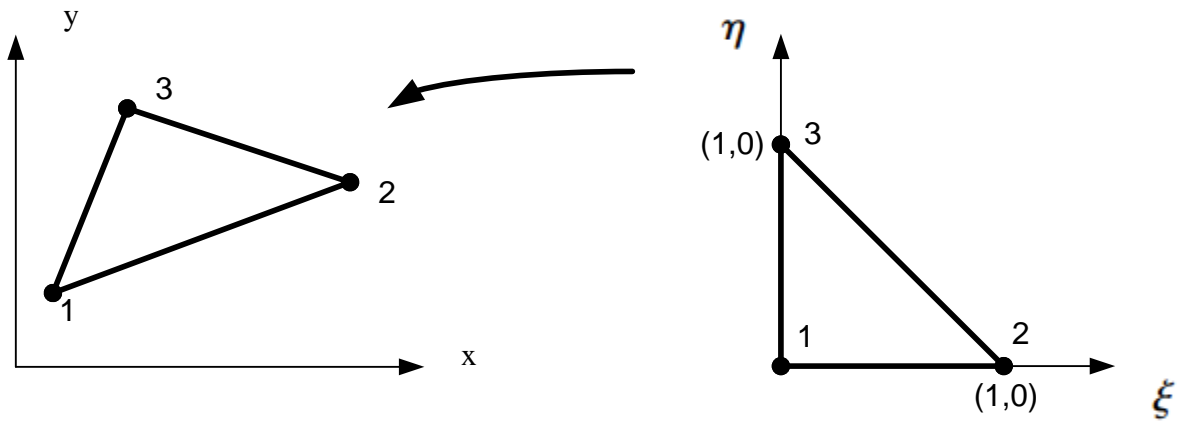
#### 2.4. Concept d'élément isoparamétrique <sup>[BRI04], [MEF04], [IMB84], [FRA01]</sup>

Dans la formulation isoparamétrique, les fonctions de forme sont définies pour quelques éléments principaux avec les coordonnées locales  $\xi, \eta \in [-1, 1]$ . L'élément principal est ensuite projeté en l'élément réel par une transformation isoparamétrique. Les caractéristiques principales de la transformation isoparamétrique sont telles que la même fonction de forme  $[N]$  est utilisée en déplacement et en géométrie.

On définit une transformation du domaine physique  $(x, y)$  de l'élément en un domaine géométrique Figure (2.4) simple sans dimension  $(\xi, \eta)$  par les relations

$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i \quad (2.68)$$

$$y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i \quad (2.69)$$



Repère physique

Repère naturel

Figure (2.4) : Changement de repère entre deux systèmes de coordonnées <sup>[ARN08]</sup>

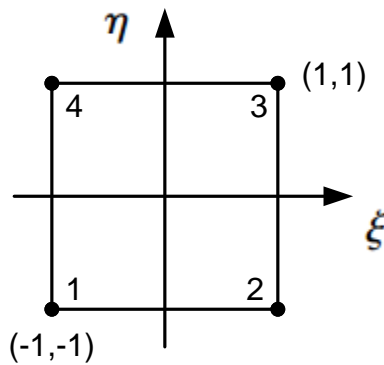


Figure (2.5): Élément de référence Q4

La première transformation est obtenue par la règle de dérivation des fonctions composées, on a :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

Où [ J ] la matrice Jacobienne ce qui peut s'écrire

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

On obtient finalement les dérivées des Ni par rapport à (x, y) en inversant l'équation (2.70) :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (2.72)$$

Avec:

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Posons:  $[j] = [J]^{-1}$ ;  $J = \det[J]$

$$\text{Donc:} \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [j] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [j] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

$$[j] = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

et :  $J = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$

Les déformations  $\{\varepsilon\}$  sont définies en fonction des variables nodales :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d_n\} \quad (2.76)$$

$$[B_f] = \begin{bmatrix} 0 & \langle -\frac{\partial N}{\partial x} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle -\frac{\partial N}{\partial x} \rangle \\ 0 & \langle -\frac{\partial N}{\partial x} \rangle & \langle -\frac{\partial N}{\partial x} \rangle \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

$$\text{ou } \{d_n\} = \{w_1 \dots w_n : \theta_{x1} \dots \theta_{xn} : \theta_{y1} \dots \theta_{yn}\}^T$$

Et les dérivées des fonctions de forme cartésiennes utilisées dans les matrices  $[B]$  peuvent être obtenues comme suit :

$$\langle \frac{\partial N}{\partial x} \rangle = j_{11} \langle \frac{\partial N}{\partial \xi} \rangle + j_{12} \frac{\partial N}{\partial \eta} \quad (2.78)$$

$$\langle \frac{\partial N}{\partial y} \rangle = j_{21} \langle \frac{\partial N}{\partial \xi} \rangle + j_{22} \frac{\partial N}{\partial \eta} \quad (2.79)$$

la discrétisation du volume (la surface de l'élément membranaire) est donnée par :

$$dA = dx \cdot dy = \text{Det}[J] \cdot d\xi \cdot d\eta = J \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (2.80)$$

La matrice de rigidité  $[K]$  est obtenue par intégration numérique de Gauss.

Donc:

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B^e]^T [D] [B^e] |J| \cdot d\xi \cdot d\eta \tag{2.81}$$

L'intégrale peut être évaluée en utilisant la formule :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi \cdot d\eta = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} W_i W_j f(\xi_i, \eta_j) \tag{2.82}$$

$\xi_i, \eta_j$ : Sont les coordonnées des points d'intégration.

$W_i W_j$ : Sont les coefficients de pondérations (ou poids) correspondants.

**Points d'intégrations**

Intégration exacte des polynômes de degré  $\leq$  à (2.m-1) tableau(2.1)

m	$\xi_i$	$\varpi_j$
1	0.0	2.0
3	0.0 $\pm \sqrt{(3/5)}$	8.0/9.0 5.0/9.0
4	$\pm 0.3399\ 81043\ 58485\ 6$ $\pm 0.86\ 11363\ 1159405\ 3$	0.652\ 145\ 154\ 86254 0.3478\ 54845\ 13745
5	0.0 $\pm 0.53846931010568\ 3$ $\pm 0.906\ 179845\ 93866\ 4$	128.0/225.0 0.47862867049936\ 6 0.2369\ 26885\ 056\ 18
6	$\pm 0.2386\ 19186\ 08319\ 7$ $\pm 0.66120938646626\ 5$ $\pm 0.9324\ 69514\ 20315\ 2$	0.4679\ 13934\ 57269\ 1 0.36076157304813\ 9 0.1713\ 24492\ 37917\ 0
8	$\pm 0.1834\ 34642\ 49565\ 0$ $\pm 0.5255\ 32409\ 91632\ 9$ $\pm 0.79666647741362$ $\pm 0.9602\ 89856\ 497536$	0.3626\ 83783\ 378362 0.3\ 137\ 06645\ 877887 0.3\ 137\ 06645\ 877887 0.10\ 12\ 28536\ 290376
9	0.0 $\pm 0.324253423403809$ $\pm 0.613371432700590$ $\pm 0.8360\ 31107\ 326636$ $\pm 0.9681\ 60239\ 507626$	0.33023935500126\ 0 0.312347077040003 0.260610696402935 0.1806\ 48\ 160\ 694857 0.0812\ 74388\ 361574

**Tableau (2.1):** Points d'intégration et coefficients de pondération de Gauss <sup>[SAB20]</sup>.

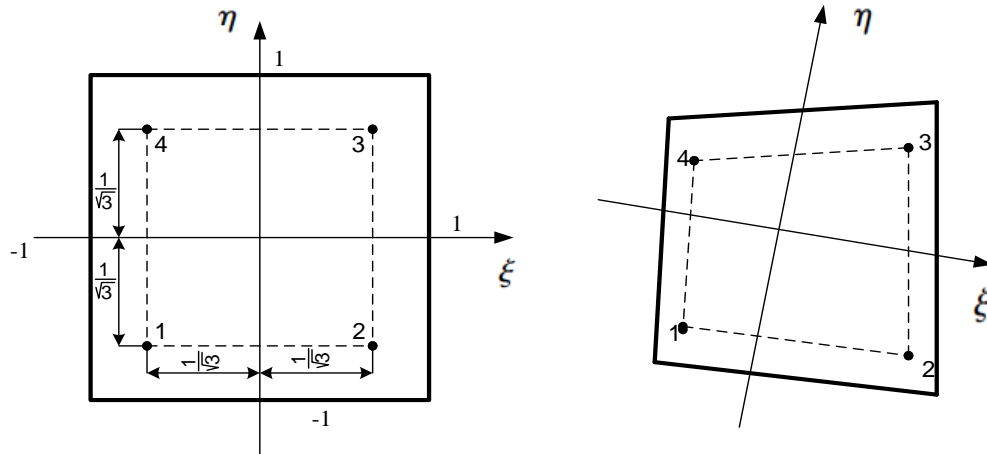
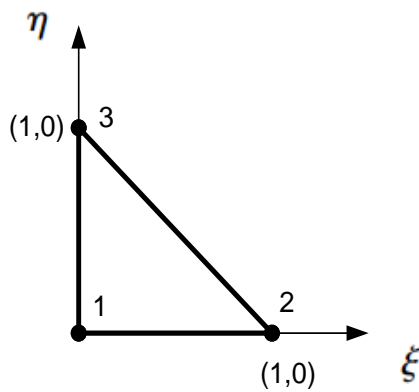


Figure (2.6): Intégration de Gauss (2 × 2) pour le quadrilatère. [GOU04]

2.5.Élément triangulaire à trois nœuds (T3) : [ARN08]

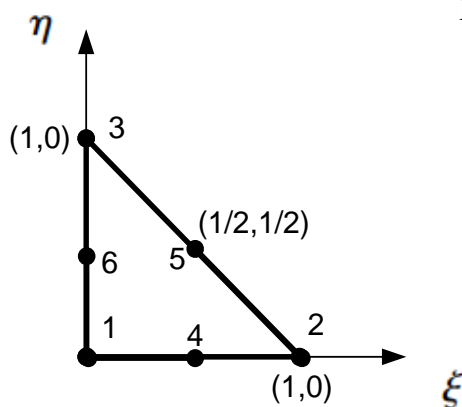


Et les fonctions de forme sont :

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \\ N_2(\xi, \eta) = \xi \\ N_3(\xi, \eta) = \eta \end{cases} \quad (2.83)$$

Figure (2.7) : Élément T3

2.6.Élément triangulaire à six nœuds (T6) : [ARN08]



Et les fonctions de forme sont :

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta) \\ N_2(\xi, \eta) = \xi(2\xi - 1) \\ N_3(\xi, \eta) = \eta(2\eta - 1) \\ N_4(\xi, \eta) = 4\xi(1 - \xi - \eta) \\ N_5(\xi, \eta) = 4\xi \cdot \eta \\ N_6(\xi, \eta) = 4\eta(1 - \xi - \eta) \end{cases} \quad (2.84)$$

Figure (2.8) : Élément T6



2.7.Élément quadrangulaire à quatre nœuds (Q4) :<sup>[ARN08]</sup>

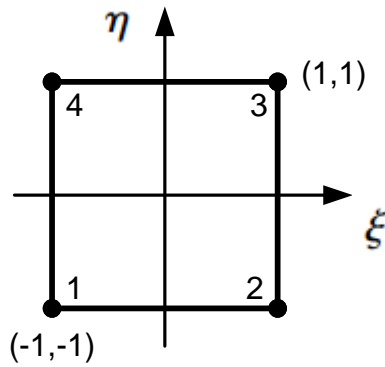


Figure (2.9): Élément Q4

Et les fonctions de forme sont :

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{cases} \quad (2.85)$$

2.8.Élément quadrangulaire à huit nœuds (Q8):<sup>[ARN08]</sup>

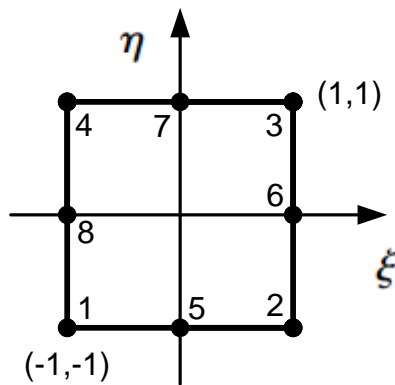


Figure (2.11): Élément Q8

Et les fonctions de forme sont :

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - \xi - \eta) \\ N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(-1 + \xi - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(-1 + \xi + \eta) \\ N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-1 - \xi + \eta) \\ N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\ N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \\ N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\ N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta^2) \end{cases} \quad (2.86)$$

# **Chapitre 3**

## Validation et Expérimentation numérique

## 1. Introduction

La validation théorique d'un programme de calcul par éléments finis consiste, pour un certain nombre de problèmes physiques, à comparer les résultats numériques avec des solutions réputées exactes. Ces vérifications permettent de contrôler le bon fonctionnement du programme et des algorithmes adoptés dans de multiples conditions d'utilisation (géométries, type d'éléments, type d'intégration, chargements, etc.).

Dans Ce chapitre nous présentons un ensemble sélectionné d'exemples numériques de référence impliquant la plasticité des contraintes planes.

Sachant que le programme fortran HYPLAS utilise une bibliothèque d'éléments finis de type membrane (Q4,Q8,T3) ainsi que Lors de l'expérimentation numérique, on abordera le cœur du sujet à savoir la réponse statique des problèmes (élastiques, plastiques) sous l'action d'un trajet de chargement donné, et la propagation de la plasticité au niveau des problèmes (poutre et plaque) et la charge ultime pour différents cas (on fera varier le type d'élément, le type de point d'intégration, le critère de plasticité et la méthode de résolution de système non linéaire), pour mieux illustrer le phénomène étudié .

## 2. Comportement plastique d'une poutre encastree

Dans cet exemple, nous étudions le problème de comportement plastique d'une poutre encastree à une extrémité et soumis à chargement sur l'extrémité opposée à celle qui est encastree avec une section rectangulaire.

La géométrie, les conditions aux limites, le modèle d'éléments finis et les propriétés des matériaux sont illustrées à la figure (3.1).

Le problème peut être modélisé utilisant deux éléments Q4 et Q8 avec l'intégration de Gauss  $2 \times 2$  points (réduite) et  $3 \times 3$  (exacte) et un nombre total de 100 élément. La charge limite analytique pour ce problème est donné par :

$$F_{lim} = \frac{\sigma_y b h^2}{4L} \quad (3.1)$$

Pour la géométrie actuelle et les propriétés des matériaux, la charge limite analytique est

$$F_{lim} = 30 \text{ KN}. \quad (3.2)$$

La solution numérique est obtenue ici en appliquant six incréments de charge au nœud chargé montré à la figure (3.1). La déviation verticale résultante du nœud chargé est tracée par rapport à la force appliquée pour chaque incrément. Le niveau de charge à la fin du dernier incrément est :

$$F = 30.3594 \text{ KN.}$$

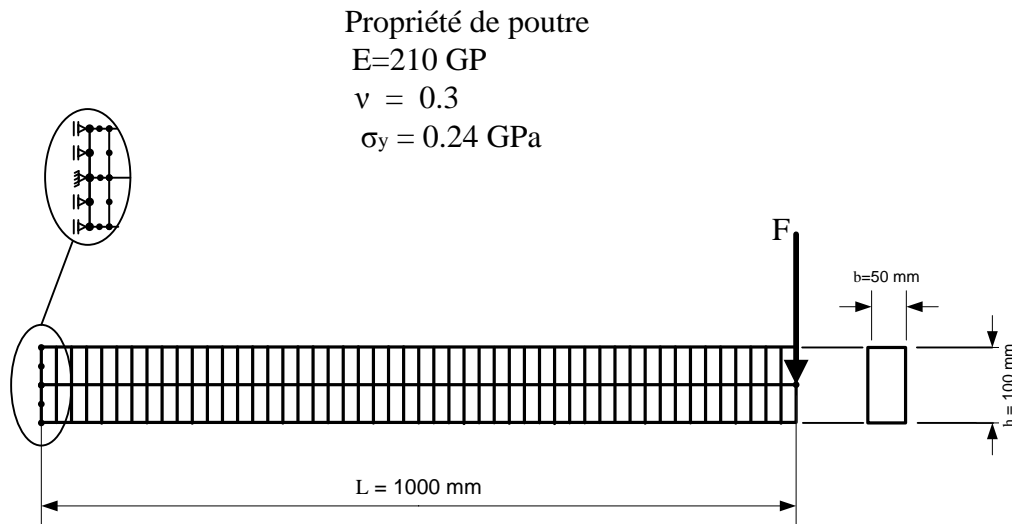
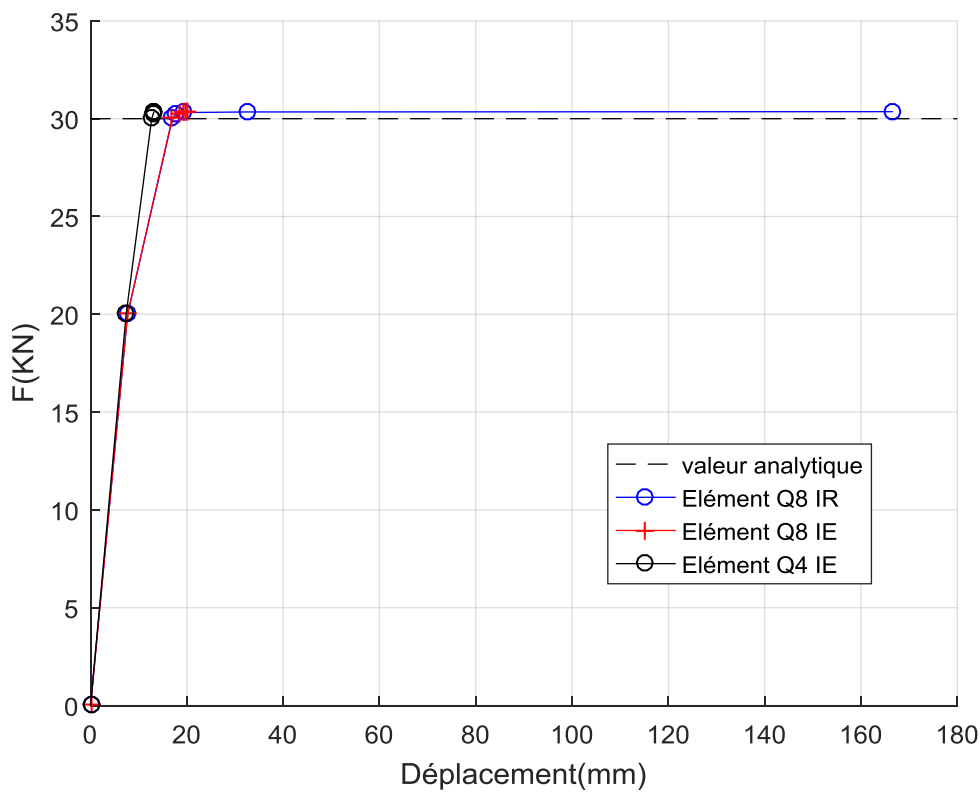


Figure (3.1): *Eléments de membrane en flexion dans le plan*

## 2.1. Comparaison entre les types d'intégration

Les mêmes propriétés matérielles et on fait varier le type d'intégration de Gauss pour l'élément Q8 (réduite  $2 \times 2$  (IR) et exacte  $3 \times 3$  (IE)) et aussi l'élément Q4 (IE).



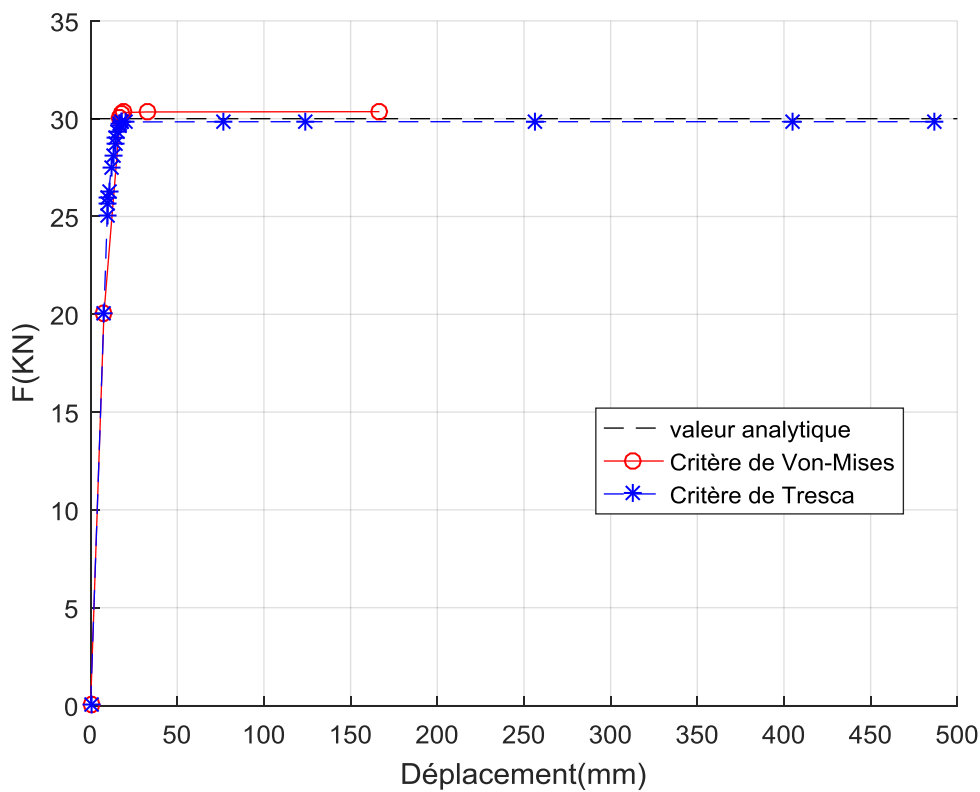
**Figure (3.2):** Courbe chargement-déplacement des éléments rectangulaire Q4, Q8 Avec l'intégration (réduite, exacte)

### Analyse et interprétation

La figure (3.2) représente le déplacement du nœud chargé en fonction du chargement appliqué, On remarque que les deux courbes pour (Q8\_IE et Q4\_IE) restent encore dans le domaine élastique au dernier incrément de charge appliqué mais l'élément Q8 \_ IR donne le meilleur résultat et sont les plus performants.

### 2.2. Comparaison entre les critères de plasticité

On reprend l'exemple précédent (2.1) avec l'élément Q8 IR et en utilisant la méthode de résolution de Newton-Raphson : (méthode de rigidité tangente) et les deux critères de plasticité Von-Mises et Tresca.



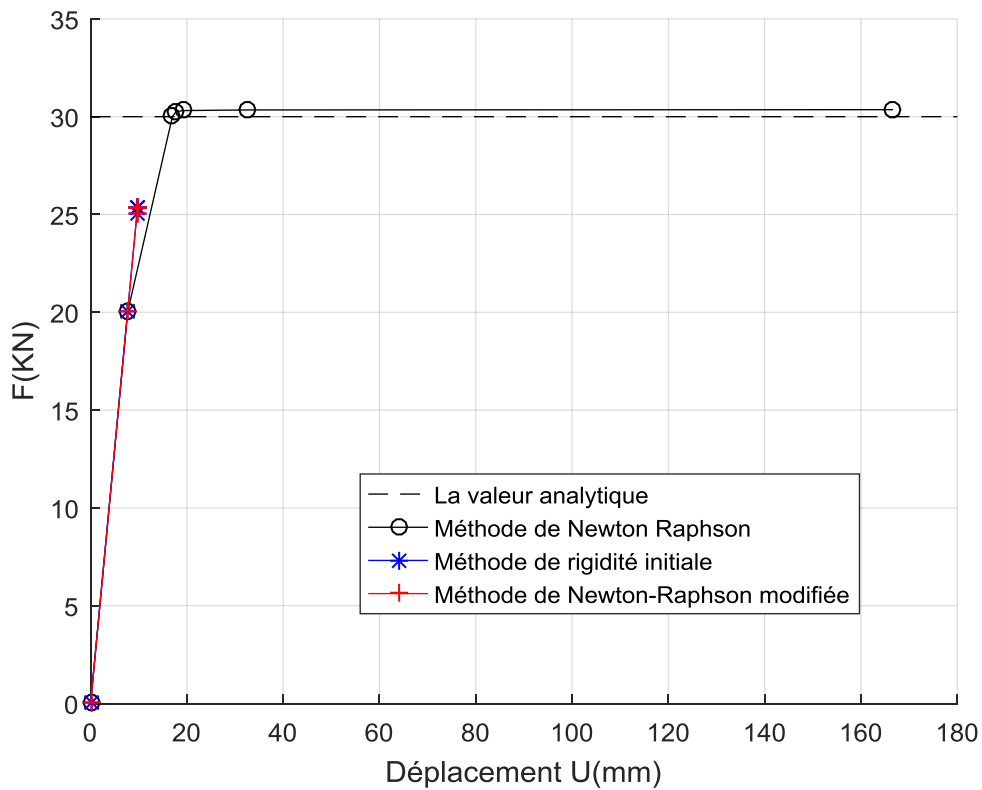
**Figure (3.3):** Courbe chargement- déplacement pour l'élément rectangulaire Q8 IR  
Comparaison entre les critères de Von-mises et Tresca

### Analyse et interprétation

La figure (3.3) montre l'influence du critère de plasticité sur la limite élastique et la charge ultime. On remarque que la plastification se déclenche d'abord pour le cas du critère de Tresca puis, après l'augmentation de charge, pour celui de Von-Mises. Par ailleurs, pour la plupart des métaux, le critère de Von-Mises donne des résultats plus proches de l'expérimentation que celui de Tresca.

### 2.3. Comparaison entre les méthodes de résolution

On reprend le même exemple précédent (2.2) avec le critère de von\_Mises pour trois méthodes de résolution différentes. Méthode de Newton Raphson (rigidité tangentielle) et Méthode de rigidité initiale, et la Méthode de Newton-Raphson modifiée.



**Figure (3.4):** Courbe chargement-déplacement de l'élément Q8 avec des différentes méthodes de solution algorithmique

### Analyse et interprétation

La figure (3.4) donne le déplacement du nœud chargé en fonction du chargement avec différentes méthodes de résolution de système non linéaire. On remarque que les deux résultats pour Méthode de rigidité initiale, et la Méthode de Newton-Raphson modifiée reste dans le domaine élastique mais la Méthode de Newton-Raphson donne des résultats à proche la solution analytique et plus performants à la plastification.

### 3. Cylindre soumise à une pression intérieure

Le problème considéré dans cet exemple numérique consiste à un cylindre soumis à une pression intérieure (de rayon intérieur  $a=10\text{ mm}$ , de rayon extérieur  $b=100\text{ mm}$ ) qui est dilaté par l'action d'une pression radiale uniforme augmentant progressivement sur son bord figure (3.5). Le cylindre est réalisé dans un matériau parfaitement plastique avec le critère de Von-Mises.

La solution analytique à ce problème, où le cylindre est considéré comme un milieu infini en état de contrainte dans le plan est  $P_{lim}=0.2772\text{ GPa}$

Ici, le problème est résolu en utilisant le maillage illustré à la figure (3.6). Dans le modèle à éléments finis, le cylindre a un grand rayon  $b$  (par rapport au rayon du trou  $a$ ) pour imiter le milieu plan infini. En raison de la symétrie du problème autour du centre du trou, seule une découpe de la géométrie est discrétisée. Un nombre total de 11 quadrilatères à quatre nœuds et huit nœuds (élément de type Q4, Q8 de HYPLAS). La solution numérique est obtenue ici en appliquant sept incréments de pression ont augmenté progressivement jusqu'à la fin du dernier incrément est  $P = 0,2853\text{ GPa}$  et le déplacement radial du nœud du côté chargé, est représentée en fonction de la pression appliquée.

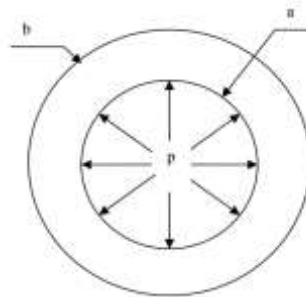


Figure (3.5) : Pression interne appliquée dans le cylindre

Propriétés matérielles

$$E = 210\text{ GPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\sigma_y = 0.24\text{ GPa}$$

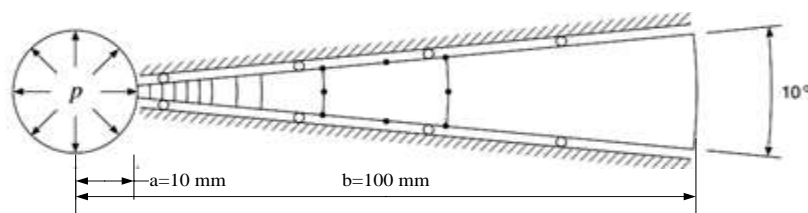
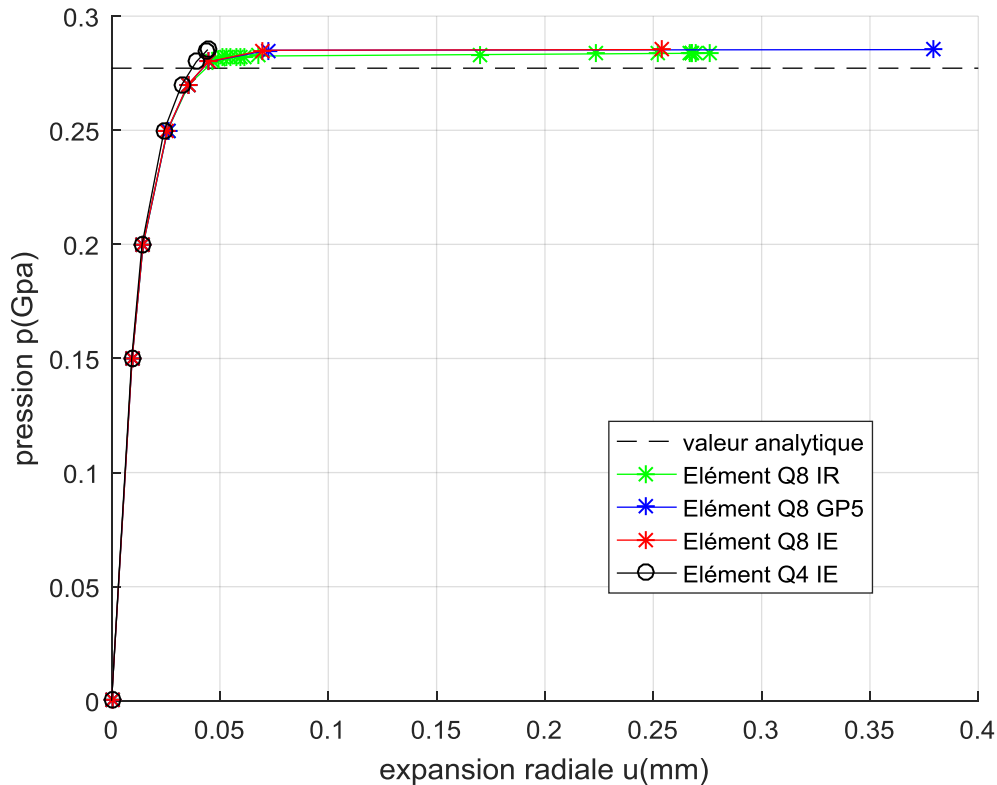


Figure (3.6) : maillage et discrétisation géométrique



### 3.1. Comparaison entre le type d'intégration

A partir des mêmes propriétés matérielles de l'exemple précédent on fait varier le type d'intégration numérique de Gauss pour l'élément Q8 (réduite 2×2, exacte 3×3, et à cinq points) et aussi l'élément Q4 (exacte 2×2).



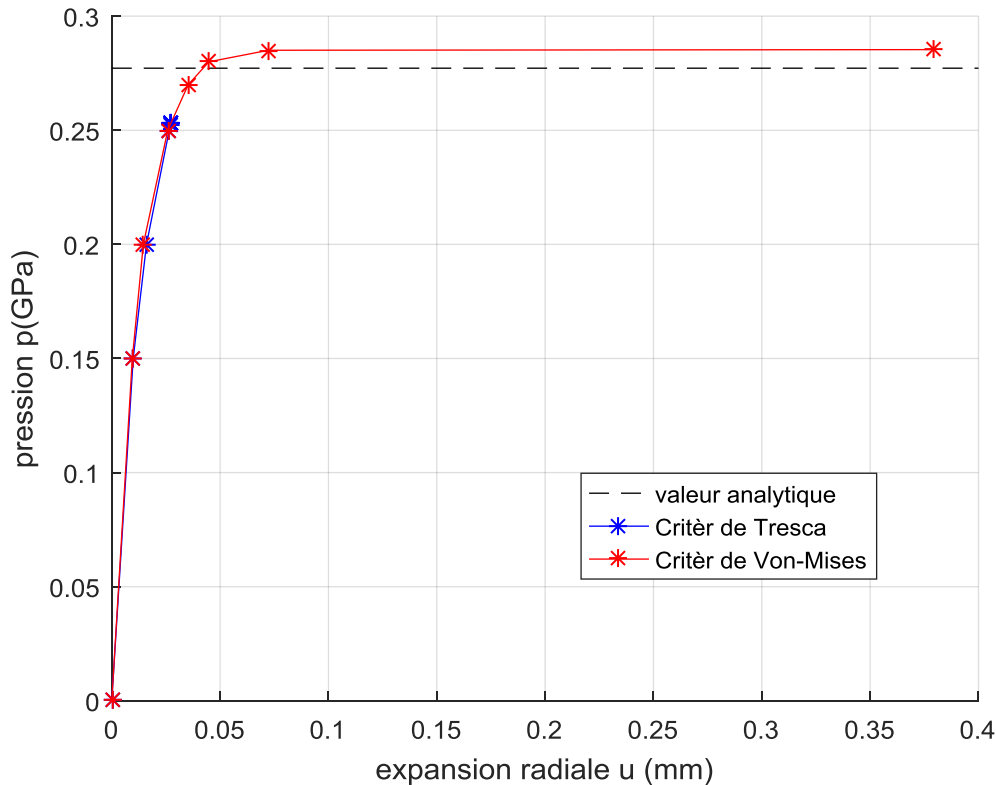
**Figure (3.7) :** Courbe de pression-déplacement radial des éléments rectangulaires Q4, Q8 Avec différentes intégrations

#### Analyse et interprétation

La figure (3.7) représente le déplacement radial en fonction de la pression appliquée avec variation du type d'intégration. On remarque que ce sont les éléments de Q8 qui sont les plus performants surtout l'élément Q8\_GP5 donne le meilleur résultat, et pour l'élément Q4\_IE reste encore dans le domaine élastique non linéaire pendant l'augmentation de la pression.

### 3.2. Comparaison entre les critères de plasticité

On reprend l'exemple (3.1) avec l'élément Q8 avec 5 points d'intégration en utilisant la méthode de résolution de Newton-Raphson : (méthode de rigidité tangente) et les deux critères de plasticité Von-Mises et Tresca



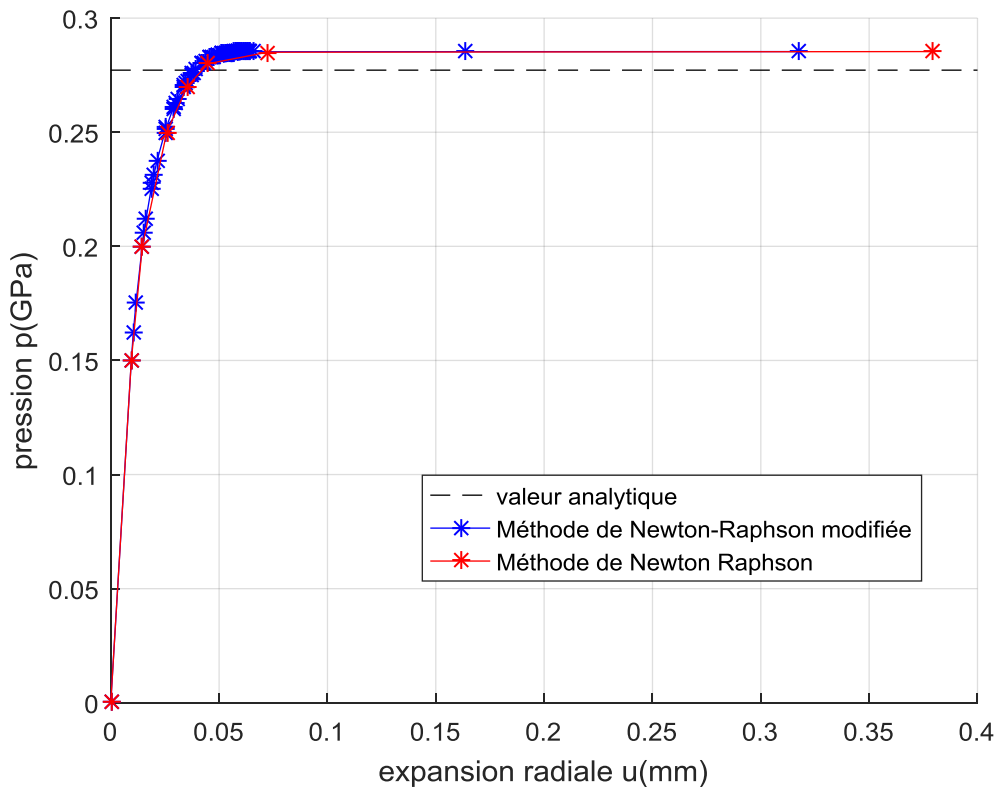
**Figure (3.8) :** Courbe de pression-déplacement radial pour l'élément rectangulaire Q8 à cinq points. Comparaison entre les critères de Tresca et Von-mises

#### Analyse et interprétation

La figure (3.8) indique que l'utilisation du critère de plasticité de Von-Mises donne de meilleurs résultats puisque la courbe est légèrement plus inclinée. On voit que la plastification des nœuds se déclenche d'abord pour le cas du critère de Von-Mises puis, après l'augmentation de charge, pour celui de Tresca.

### 3.3. Comparaison entre les méthodes de résolution

On reprend le même exemple (3.2) avec critère de von Mises pour deux méthodes de résolution différentes. Méthode de Newton Raphson (rigidité tangentielle) et la Méthode de Newton-Raphson modifiée



**Figure (3.9) :** Courbe de pression-déplacement radial de l'élément Q8 à cinq points avec des différentes méthodes de solution algorithmique

#### Analyse et interprétation

La figure (3.9) donne le déplacement radial en fonction de la pression appliquée avec deux méthodes de résolution. On remarque que les résultats de la méthode de rigidité tangentielle sont plus précis que ceux de la Méthode de Newton-Raphson modifiée mais il faut à chaque incrément ou itération calculer la matrice de rigidité alors que pour la méthode de Méthode de Newton-Raphson modifiée, la matrice de rigidité reste invariable.

#### 4. Etude plastique d'une plaque trouée

Cet exemple présente la simulation numérique d'une plaque trouée mince sous contrainte plane soumise à un état de traction simple. Cet exemple classique est fréquemment utilisé comme référence pour la mise en œuvre de contraintes de planéité dans les modèles de plasticité. On peut donc modéliser uniquement un quart du problème. La géométrie, les conditions aux limites et les propriétés des matériaux sont illustrées à la figure (3.10). Le maillage d'éléments finis utilisé contient 576 triangles à trois nœuds (type élément TRI\_3 de HYPLAS) avec un nombre total de 325 nœuds.

Pour étudier ce problème Nous avons varié le niveau de déformation plastique accumulée, pour obtenir la contrainte maximale sur le bord du trou.

Donc en appliquant sept incréments  $\Delta u = 0.02$  de déplacement vertical sur Les nœuds du bord supérieur (sauf celui de la ligne de symétrie) sont libres de se déplacer horizontalement. La force de réaction obtenue sur tout le bord est représentée en fonction du déplacement. Sachant que le déplacement total  $\Delta u = 0.14$  mm

On considère un matériau isotrope, homogène et non linéaire Les données du problème sont les suivantes :

##### Géométrie

$$l = 36 \text{ mm}$$

$$w = 20 \text{ mm}$$

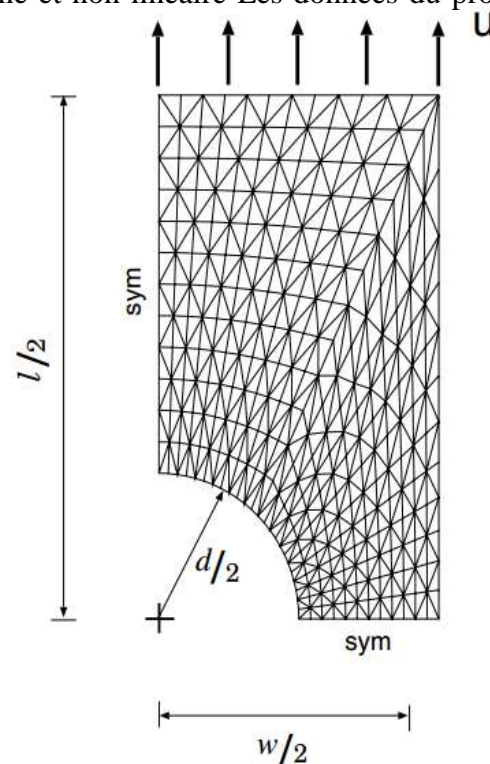
$$d = 10 \text{ mm}$$

$$\text{l'épaisseur} = 1 \text{ mm}$$

##### Propriétés matérielles (von\_Mises)

$$E = 70 \text{ GPa}$$

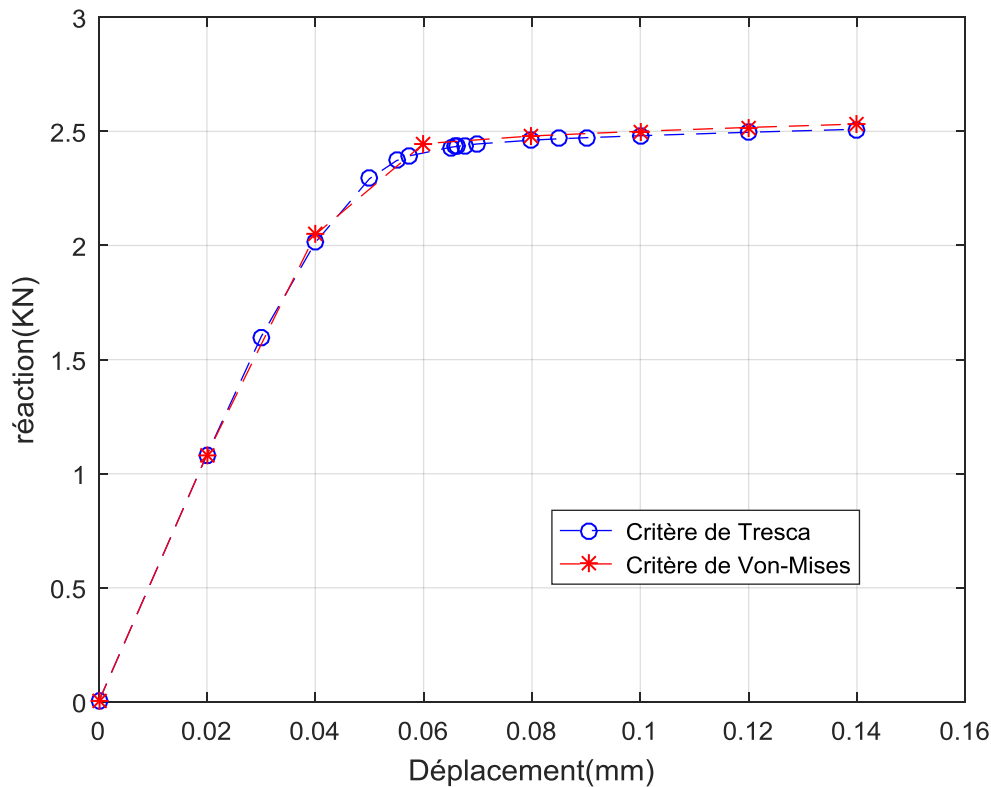
$$\nu = 0.2$$



**Figure (3.10) :** Géométrie du quart de la plaque trouée sollicitée en traction

### 4.1. Comparaison entre les critères de plasticité

Dans cet exemple On garde les mêmes propriétés matérielles et dimensions de l'exemple précédent et en utilisant la méthode de résolution de Newton-Raphson : (méthode de rigidité tangentielle) et les deux critères de plasticité Von-Mises et Tresca figure (3.11)



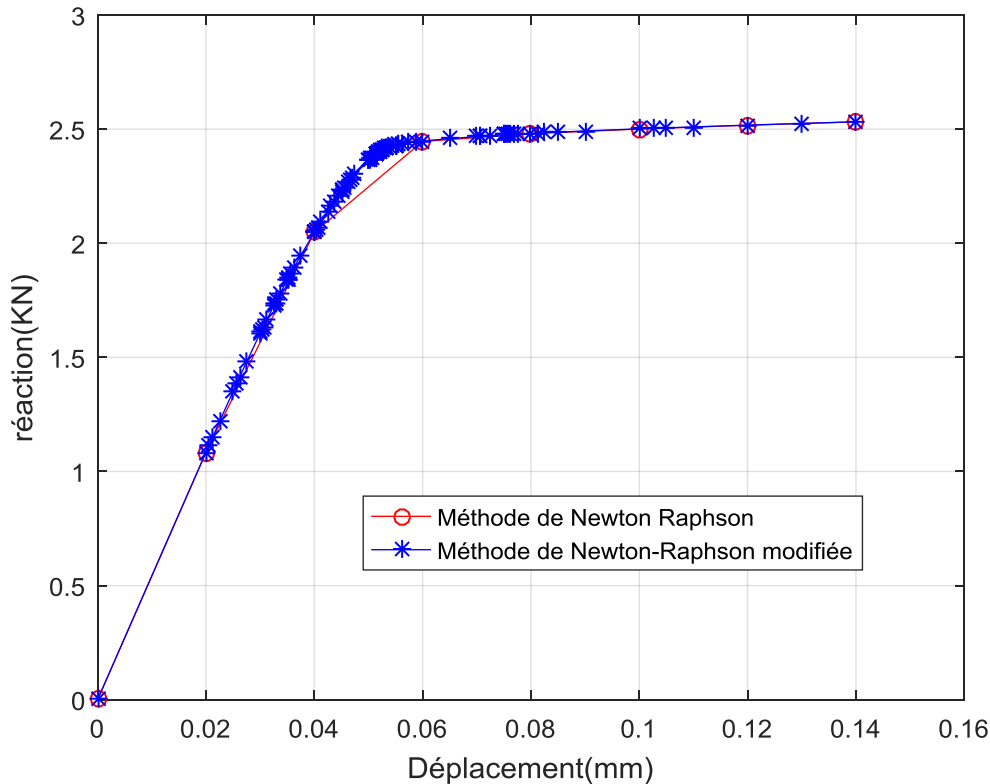
**Figure (3.11):** Courbe réaction- déplacement pour l'élément rectangulaire TR\_3  
Comparaison ente les critères de Von-Mises et Tresca

#### Analyse et interprétation

La figure (3.11) représente la réaction en fonction du déplacement. On remarque que la plasticité presque commence d'abord de même niveau pour les deux critères Pendant l'augmentation de la charge, mais il y a multiplication des points pour le critère de Tresca ça il est diminuer leur performance

## 4.2. Comparaison entre les méthodes de résolution

On reprend l'exemple (4.1) avec le critère de von\_Mises et deux méthodes de résolution différentes. la Méthode de rigidité tangentielle et la Méthode de Newton-Raphson modifiée



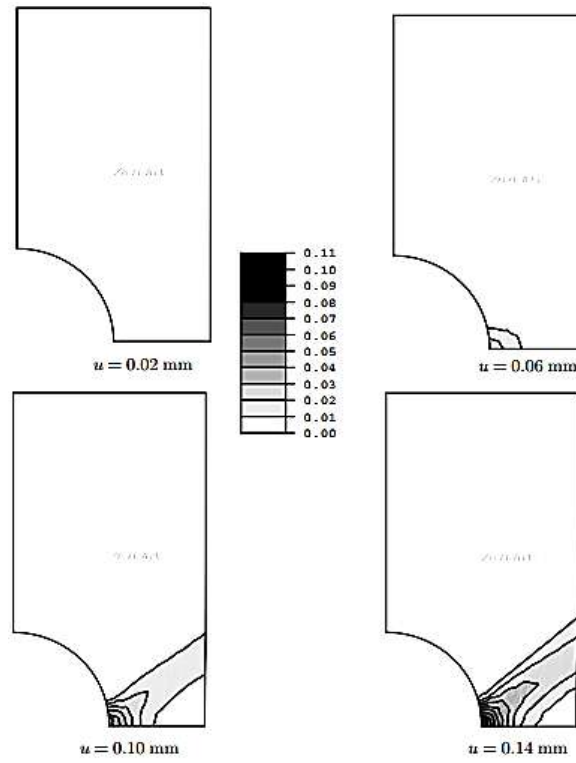
**Figure (3.12):** Courbe réaction-déplacement de l'élément TR\_3 avec des différentes méthodes de solution algorithmique

### Analyse et interprétation

La figure (3.12) représente la réaction en fonction du déplacement avec deux méthodes de résolution différentes. On remarque que la courbe pour la Méthode de Newton-Raphson modifiée l'Accumulation des itérations pour chaque incrément et cela prend long temps de calcule alors que pour la Méthode de rigidité tangentielle sont plus précis et prendre moins de temps.

Dans ce problème, la déformation plastique commence à l'intersection de la ligne de symétrie inférieure et du bord du trou et s'étend sur un front oblique jusqu'à ce que toute la section devienne plastique. L'évolution du front plastique est illustrée à la figure (3.13), qui présente

des tracés de contour de déformation plastique accumulée à différentes étapes du processus de chargement.



**Figure (3.13) :** niveau de déformation plastique accumulée  $\varepsilon^p$  [SOU08]

# **Conclusion**

## **Générale**



## **Conclusions Générale**

Le présent travail a porté sur l'analyse non linéaire (comportement élasto-plastique) des structures par les éléments finis 2D. L'étude a été faite pour des structures homogènes (isotropes) et les éléments choisis sont de type déplacement basés.

L'expérimentation est réalisée par un programme comportant une bibliothèque d'éléments et des blocs ou sous programmes séparés qui exécutent les différentes opérations de l'analyse. Cette approche permet de faire des modifications éventuelles suivant le problème traité au niveau de chaque module. De plus le programme donne l'option de choisir le critère de plasticité (Von-Mises, Tresca, Mohr-Coulomb) et la méthode de résolution de système non-linéaire (Newton Raphson, Newton Raphson modifiée, Rigidité initiale).

Les conditions aux limites et l'épaisseur de la plaque influent considérablement sur la limite élastique et la charge ultime de la structure, où la valeur prédite pour les structures encastées est plus grande que celle obtenue dans les structures simplement appuyées. Ce qui montre l'effet des conditions aux limites sur le phénomène de la plastification.

L'intégration numérique (points de Gauss) offre un avantage supplémentaire dans l'analyse non linéaire des structures.

# **Bibliographie**

# Bibliographies

- [ARN08] Arnaud D. Fabrice G et Frédéric R, " Aide-Mémoire –Mécanique des structures, Résistance des matériaux", Dunod, Paris, 2008.
- [BEN03] Benghezal A : « Analyse élasto-Plastique par éléments finis multicouches des plaques de Mindlin », Thèse de Magistère en génie mécanique, Batna, 2003.
- [BER87] Bernard H, Salençon J : « Elasto-Plasticité », Presses de l'école nationale des ponts et chaussées, Paris, 1987.
- [BRI04] Briki L : «Analyse elasto-plastique des plaques minces et épaisses par L'éléments finis », Thèse de Magistère en génie Civil, Annaba 2004.
- [BES12] Bessais L : « Analyse des structures par la M.E.F basée sur l'approche en Déformation » Thèse de Magistère en Génie Mécanique, Biskra 2012.
- [BOU08] Boutagouga D : « analyse non linéaire géométrique et matérielle des coques par un élément quadrilatère avec ddl rotationnel dit " drilling rotation " », Thèse de Magistère en génie Civil, Annaba 2008.
- [CHE88] Chen W, Han D : « Plasticity for structuralengineers », Springer-Verlag, New York, 1988.
- [CHR00] Christophe B, Ponjet J : « Mécanique des solides déformables », Hermès Science Publications, Paris, 2000.
- [COF01] Coffignal G : « Mécanique non-Linéaire et éléments finis », Fiscicule 5, Méthode des éléments finis en HPP pour les milieux continus solides. LMSP, ENSAM, Version électronique e.1.0b, Paris, 30 janvier 2001.
- [COF03] Coffignal G. « Mécanique non-Linéaire et éléments finis », Fiscicule 8, Méthode des éléments finis en grandes transformations pour les milieux continus solides : non linéarités matérielles et géométriques. LMSP, ENSAM, Version électronique e.2, Paris, 31 janvier 2003.
- [CRA08] Craveur J. " modélisation des éléments finis" Version 3, DUNOD 2008.
- [FRA01] François F, Jaroslav J : « Analyse des structures et milieux Continus», Volume 6 – Méthode des éléments finis – Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 2001.
- [GAL05] Gallee S. "Caractérisation expérimentale et simulation numérique des procédés D'emboutissage profond " : application aux aciers inoxydables austénitiques. 2005.Thèse de doctorat. Ecole doctorale pluridisciplinaire. Laboratoire de Génie Mécanique et Matériaux. UNIVERSITE DE BRETAGNE-SUD, p 184.
- [GAR01] Garrigues J : « Statique des solides élastiques en petites déformations », Ecole Supérieure de mécanique de Marseille, novembre 2001.
- [GOU04] Goudjl F : « analyse de la réponse dynamique des plaques orthotropes par la Méthode des éléments finis » Thèse de Magistère en génie Civil, Constantine 2004.
- [GUE98] Guenfoud M. : « Introduction à la mécanique des milieux continus », Application à la mécanique des solides – Collection : le livre de Génie Civil, Centre Universitaire de Guelma, 1998-1999.
- [GUE99] Guenfoud M. : « Introduction à la théorie non linéaire géométrique de la mécanique

des structures », Collection : le livre de Génie civil, Centre Universitaire de Guelma, 1999-2000.

**[HOF56]** HOFF N, Analysis of Structures, Wiley, New York, 1956.

**[HIN80]** Hinton E., Owen D. : « Finite elements in plasticity – Theory and practice », Pineridge Press Limited. SWANSEA, U.K, 1980.

**[IMB84]** Imbert J. : « Analyse des structures par éléments finis », Cepadues Editions, 1984.

**[KAM04]** Meftah K : « influence du type d'élément sur l'analyse non-linéaire des plaques» Thèse de Magistère en Génie Mécanique.

**[KER01]** Kerrouault N. Fissuration à chaud en soudage d'un acier inoxydable austénitique. 2001. Thèse doctorat. Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux/ECP (UMR CNRS 8579). Laboratoire Moderne de Soudage / CEA Saclay –CEREM.

**[LEM91]** Lemaitre J, Chaboche J. : « Mécanique des matériaux solides », Dunod, deuxième édition, 1991.

**[MAR02]** Martin-Pérez B., Nofal M : « UMAR – Theory and User Manual », IRC, NRC – CNRC, Version 1.0, May 2002.

**[QUO00]** Quoc-Son N : « Stabilité et mécanique non linéaire », Hermès Science Publications, Paris, 2000.

**[REM02]** Remacle J.F “Mécanique des structures” Université catholique de Louvain Faculté des Sciences Appliquées Unité de Génie Civil et Environnemental Version provisoire – 25 Novembre 2002.

**[SAB00]** Sabourin F. Salle E, ” Calculs des Structures par Eléments Finis, barres-Poutres Elasticité plane Axisymétrie Plaques- coques Non-linéarités “ Universit de Lyon, 2000.

**[SOU08]** Souza N. Peric D. Owens D, « Computational methods for plasticity : theory and applications » Wiley 2008.

**[ZIE77]** Zienkiewicz O. : « The finite élément méthode », Mcgraw-Hill Book Company, UK limited, 1977.

**[ZIE91]** Zienkiewicz O , Taylor R, ”The Finite élément Method”, McGraw-Hill,London 1991.