



Université Mohamed Khider de Biskra  
Faculté des sciences et de la technologie  
Département de génie mécanique

## MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences et Techniques

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Énergétique

Réf. : Entrez la référence du document

---

Présenté et soutenu par :

**Mr. Imad Eddine BAAISSA**

Le : mercredi 17 juillet 2019

# **EVALUATION DU COEFFICIENT DE TRANSFERT CONVECTIF "h" ENTRE UNE SURFACE PLANE ET UN FLUIDE EN ECOULEMENT, CAS PLUSIEURS LIQUIDES ET GAZ.**

---

### Jury :

U	Abdelghani LAKROUNE	MAA	Université de Biskra	Président
Pr.	Rachid ATHMANI	Pr	Université de Biskra	Rapporteur
Dr.	Abdelouahad ALIOUALI	MCB	Université de Biskra	Examineur



## *Remerciements*

Tout d'abord, remercie Dieu qui m'a donné la santé et le pouvoir de commencer et de terminer ce mémoire. Je tiens à exprimer mes sincères remerciements au Prof. **ATMANI**

**R.** Directeur de ma recherche, pour la qualité de ses conseils, de sa vigilance et de sa disponibilité lors de la préparation du présent mémorandum, de ses conseils, de ses remarques et de sa patience, Mes profonds remerciements vont aussi à tous mes enseignants qui m'ont accompagné durant mon parcours scolaire et à toutes les personnes qui m'ont aidé et soutenu de près ou de loin. Je remercie également tous les membres du jury qui ont accepté de lire ce modeste travail de recherche afin de l'évaluer.

Ce mémoire n'aurait jamais pu voir le jour sans le soutien actif des membres de ma famille et surtout mes parents que je tiens vivement à remercier.

Baissa Imad Eddine

## *Dédicaces*

Je dédie ce modeste travail à ma fontaine de tendresse et de bonheur ma mère, à mon père le symbole d'amour et de sacrifice. Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler. Que dieu leur procure bonne santé et longue vie. Sans oublier mes grand - parents que j'aime. A mes chères sœurs, et mon cher frère SIF Eddine qui comptent beaucoup pour moi, ma fiancée. A toute ma chère famille, mes amis et mes beaux-frères avec Lesquels j'ai passé des beaux moments. A Mes collègues au travail et A toutes les personnes qui, par leur amour et leurs encouragements, m'ont ouvert la voie vers les cimes du savoir.

Baissa Imad Eddine

# Sommaire

D). Chapitre I : NOTIONS GENERALES SUR LES FLUIDES ET LE TRANSFERT DE CHALEUR	
I.1 Notion des fluides .....	4
I.2 Les types de l'Écoulement .....	4
I.2.1 Ecoulements laminaires et turbulents .....	4
I.2.1 La compressibilité de l'écoulement.....	5
I.2.2 Écoulement non stationnaire et écoulement stationnaire .....	6
I.3 Les types des fluides .....	7
I.3.1 Fluides parfaits .....	7
I.3.2 Fluide Réel .....	8
I.3.3 Fluides newtoniens .....	9
I.4 La viscosité .....	9
I.4.1 Viscosité dynamique .....	9
I.4.2 Viscosité cinématique .....	10
I.5 Mécanique des fluides et transfert de chaleur.....	10
I.6 Les modes de transfert de chaleur.....	11
I.6.1 La conduction.....	11
I.6.2 La convection.....	12
I.6.3 Le rayonnement .....	12
I.7 Les type de Convection.....	13
I.7.1 Convection Naturelle ou libre .....	13
I.7.2 Convection Forcée.....	13
I.7.3 Convection Mixte.....	14
I.8 Coefficient d'échange par convection .....	14
I.9 Généralités sur le transfert de chaleur.....	15
I.9.1 Champ de température .....	15
I.9.2 Gradient de température .....	15
I.9.3 Flux de chaleur .....	15
I.10 La conductivité thermique .....	16
I.11 Le nombre de Nusselt .....	16
I.12 Le nombre de Reynolds .....	16

I.13	Expérience de la plaque plane.....	17
II.)	Chapitre II :LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE SUR UNE PLAQUE PLANE	
II.1	La notion de couche limite .....	19
II.2	Description de l'écoulement au voisinage d'une paroi .....	19
II.3	Couche limite sur une plaque plane.....	19
II.4	Hypothèses de Prandtl .....	20
II.5	Les types des couches limites.....	21
II.5.1	Couche limite dynamique.....	21
II.5.2	La Couche limite thermique .....	22
II.6	Epaisseurs de couche limite.....	22
II.6.1	Epaisseur conventionnelle de couche limite thermique $\delta T$ .....	23
II.6.2	L'épaisseur de déplacement $\delta_1$ .....	24
II.6.3	Epaisseur conventionnelle de couche limite dynamique $\delta_2$ .....	25
II.7	Les équations de la Couche Limite sur plaque plane .....	25
II.7.1	Équation de continuité.....	26
II.7.2	Équations de Navier-Stokes .....	26
II.8	Champ des vitesses dans la couche limite .....	27
II.8.1	Solution de Blasius .....	27
II.8.2	Méthode de Runge Kutta.....	30
II.8.3	résolution Numérique .....	30
II.8.4	L'organigramme.....	32
II.8.5	Les résultats .....	34
II.9	Calcul de vitesse u et v .....	36
III )	Chapitre III : LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE THERMIQUE SUR UNE PLAQUE PLANE	
III.1	Introduction .....	41
III.2	La méthode de Blasius au cas thermique sur une plaque plan isotherme sans dissipation.....	41
III.3	Bilan thermique .....	41
III.4	Plaque plane isotherme sans dissipation ( $T_s = cte$ ).....	43
III.5	Evaluation du coefficient de convection h entre la plaque et le fluide .....	455
III.5.1	Transfert local .....	45
III.5.2	Transfert global .....	48
III.6	Le nombre de Prandtl .....	50

III.6.1 Cas de l'eau .....	50
III.6.2 Cas de l'huile.....	50
III.6.3 Cas de l'air .....	50
III.7 L'évolution du Coefficient d'échange par convection avec x .....	51
III.8 L'évolution du Coefficient d'échange par convection (h) avec le nombre de Reynolds .....	53
Conclusion générale .....	58

## Liste de figure

Fig. I.1 : Ecoulements laminaires et turbulents [4].....	4
--	---

Fig. I.2 : fluide compressible [6].	6
Fig. I. 3 : fluide incompressible [7]	6
Fig. I.4 : Force d'interaction au niveau de la surface élémentaire d'un fluide parfaits [9].	7
Fig. I.5 : Fluide Réel [10].	8
Fig. I.6 : Comparaison de l'écoulement d'un fluide parfait et réel sur une plaque plane [10].	8
Fig. I.7 : Schéma de l'écoulement de couette plan.	9
Fig. I.8: Les 3 modes de transfert thermique [1].	11
Fig. I.9: Principe de la conduction [15].	12
Fig. I.10 : la convection [16].	12
Fig. I.10: Le rayonnement solaire.	13
Fig. I.12: Echange thermique par convection entre une paroi solide et un fluide.	14
Fig.I.13: Régimes d'écoulement sur une plaque plane.	17
Fig.II.1 : Écoulement sur une assiette plaque plane [24].	20
Fig.II.2 : la couche limite sur un plaque plan [24].	21
fig.II.3 : Couche limite thermique sur plaque plane.	22
Fig.II.4 : Déficit de débit et épaisseur de déplacement [26].	24
Fig.II.5 : variation de la vitesse au niveau de la couche limite dynamique laminaire.	25
Fig.II.6 : La Solution de Blasius ( $u/U_0 = f(\eta)$ ).	35
Fig.II.7 : La Solution de Blasius ( $f'(\eta)$ ).	35
Fig.II.8 : La Solution de Blasius ( $f''(\eta)$ )	37
Fig.II.8 : vitesses dimensionnelles (u) et (v) en fonction de ( $\hat{\eta}$ ).	39
Fig.III.1 : Distribution de température sur une couche limite thermique laminaire le long d'une paroi isotherme.	41
Fig.III.2 : développement d'une couche limite dynamique sur une plaque plane.	45
Fig.III.3: développement d'une couche limite thermique sur une plaque plane.	46
Fig :III.4 : L'évolution du coefficient d'échange (h) en fonction de x pour l'eau.	53
Fig :III.5 : L'évolution du coefficient d'échange (h) en fonction de x pour l'eau.	54
Fig :III.6: L'évolution du coefficient d'échange (h) en fonction de x pour l'eau.	55
Fig.III.4: L'évolution du coefficient d'échange (h) en fonction de nombre de Reynolds pour l'eau.	54
Fig .III.7 : L'évolution du coefficient d'échange (h) en fonction de nombre de Reynolds pour l'huile.	54
Fig.III.8 : L'évolution du coefficient d'échange (h) en fonction de nombre de Reynolds pour l'air.	55
Fig.III.9: L'évolution du Le nombre de Nusselt en fonction de le nombre de Reynolds.	57

## Liste des Tableaux

Tableau. II.1 : Plages typiques des nombres de Prandtl pour les fluides courants [12].....	20
Tableau. II.2 : vitesses non dimensionnelles (u) et (v) en fonction de (eta).....	38
Tableau. III.1 : caractéristique de l'eau.....	50
Tableau. III.2 : caractéristique de l'huile.....	50
Tableau. III.3 caractéristique de l'air.....	50

## NOMENCLATURE

### Caractères usuels

$\alpha$	diffusivité thermique	$m^2 / s$
$f$	fonction de Blasius	
$F$	vecteur des forces appliquées au fluide	$kg\ m / s^2$
$g$	accélération de la pesanteur	$m / s^2$
$L$	longueur de la plaque	$m$
$l$	largeur de la plaque	$m$
$m$	la masse	$kg$
$p$	Pression	$kg / m\ s^2$
$q$	Vecteur densité de flux de chaleur	$m^2 / s^2$
$\dot{Q}$	Flux de chaleur	$w/m^2s$
$s$	surface	$m^2$
$ds$	élément de surface	$m^2$
$T$	Température	$^{\circ}k$
$T_s$	Température de la paroi	$^{\circ}k$
$T_f$	Température du fluide	$^{\circ}k$
$T_0$	Température dehors de la couche limite thermique.	$^{\circ}k$
$h$	coefficient de transfert de chaleur par convection	$w.k^{-1}.m^{-2}$
$t$	temps	$s$
$dt$	élément de temps	$s$
$C_p$	la capacité thermique massique	$J.kg^{-1} .K^{-1}$ .
$\lambda$	Conductivité thermique	$W.m^{-1} .K^{-1}$
$u,v$	Composantes vitesse	$m/s$
$U_0$	La vitesse initiale	$m/s$
$\partial$	Dérivée partielle	
$C$	vitesse de son	$m/s$
$\vec{n}$	Vecteur unitaire normal à un élément de surface	

**Caractères grecs**

$\delta$	épaisseur de la couche limite dynamique	m
$\delta_1$	épaisseur de déplacement	m
$\delta_2$	épaisseur de quantité de mouvement	m
$\delta_3$	épaisseur d'énergie cinétique	m
$\delta_T$	épaisseur de la couche limite thermique	m
$\lambda$	conductivité thermique	w/ m k s
$\mu$	viscosité dynamique	kg / m s
$\nu$	Viscosité cinématique	m <sup>2</sup> / s
$\eta$	coordonnée réduite	
$\theta$	température adimensionnelle	
$\rho$	masse volumique	kg / m <sup>3</sup>
$\Psi$	fonction de courant	m <sup>2</sup> / s

**Nombres sans dimensions**

$\alpha$	Diffusivité moléculaire de la chaleur	$\lambda/\rho C_p$
M	nombre de mach	$U/C$
Nu	nombre de Nusselt	$hL/\lambda$
Pr	nombre de Prandtl	$\mu C_p/\lambda$
Re	nombre de Reynolds	$\rho U_0 L/\mu$

# Introduction générale

# Introduction générale

Il est bien connu depuis plus d'un siècle, que les scientifiques se penchent sur l'étude des écoulements avec transfert de chaleur par différents modes de convection (naturelle, forcée et mixte). Celles-ci, s'impliquant dans de nombreux phénomènes naturels ou processus industriels. Parmi les différents domaines industriels où l'on trouve leurs applications on peut citer, par exemple, les processus de dépôt de vapeurs chimiques, ainsi que le refroidissement des réacteurs nucléaires et des systèmes électroniques [1] et Bien que le développement et la disponibilité de calculateurs aujourd'hui rendent indispensable qu'un ingénieur soit familier avec les méthodes numériques de résolution de problèmes de transfert de chaleur, la compréhension des mécanismes entraînant ce transfert restent la voie obligatoire emprunter afin d'arriver à ce but[2].

Ce travail concerne la simulation numérique et la visualisation de la couche limite Thermique au voisinage d'une plaque plane horizontale en convection libre dans l'air. Le modèle que nous avons développé est fondé sur la résolution des équations de Navier-Stokes couplées à l'équation de l'énergie pour décrire l'écoulement et le transfert de chaleur. Nous avons utilisé la méthode de Blasius pour résoudre numériquement les équations. On simule ainsi le champ de température et les lignes de courant dans le milieu. Les résultats mettent en évidence la présence de forts gradients de température entraînant l'établissement d'une mince couche limite thermique localisée de la plaque.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre, le but de situer notre travail, on présente propriété générale des fluides et modèles de l'écoulements et les types de de transfert de chaleur avec le problème posé.

- Le seconde chapitre est consacré à la formulation du problème, aux hypothèses simplificatrices et à l'établissement des équations de transfert de et de masse et de la couche limite dynamique laminaire et des conditions aux limites qui leurs sont associées. Enfin, nous définissons les grandeurs adimensionnelles caractérisant le modèle de ce travail.

- L'objet du troisième chapitre, nous calculons les propriétés essentielles de la couche limite thermique en utilisant la méthode de "Blasius" et la méthode "Range-Kutta" pour la résolution du modèle présenté au chapitre précédent ensuite, nous étudions l'influence d'évaluation du coefficient de Transfert convectif ' $h$ ' et le nombre de Nusselt entre une surface plane en ayant recours à quelques procédés tels que Changer le type de fluide et un nombre de Reynolds variée.

# **I) Chapitre I : Notions générales sur les fluides et le transfert**

## I.1 Notion des fluides

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formée d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Les forces de cohésion entre particules élémentaires sont très faibles de sorte que le fluide est un corps sans forme propre qui prend la forme du récipient qui le contient, par exemple : les métaux en fusion sont des fluides qui permettent par moulage d'obtenir des pièces brutes de formes complexes [3].

## I.2 Les types de l'Écoulement

### I.2.1 Écoulements laminaires et turbulents

Depuis longtemps, il existe deux types d'écoulements : le flux laminaire et le flux turbulent (Figure 1.1). Les flux de plaques sont caractérisés par un flux facile avec des lignes de flux parallèles, et dans un flux instable, les fluides ont un mouvement très irrégulier. Le nombre de Reynolds est la mesure permettant de déterminer le type de flux : il est généralement admis que, si  $Re < 2000$ , le flux est laminaire, sur le compteur si le  $Re > 3000$  est instable. Pour les valeurs comprises entre 2000 et 3000, nous devons examiner chaque situation. Les valeurs de Reynolds en aérodynamique sont à 106 obstacles et les débits sont instables.

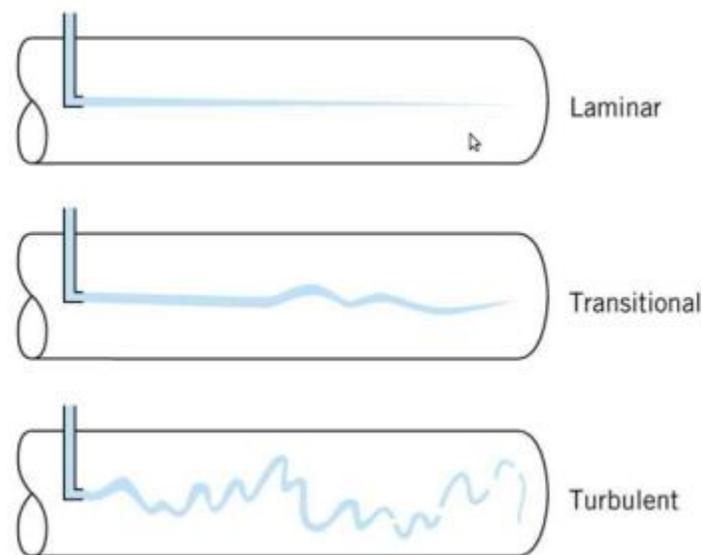


Fig. 1.1 : Écoulements laminaires et turbulents [4].

La principale caractéristique de l'écoulement turbulent est que la vitesse de vitesse modérée à côté de la paroi est supérieure à l'écoulement laminaire. Puisque la vitesse vers l'infini est la même dans les deux cas, la pente rapide de la paroi est plus élevée pour le flux turbulent. En 2D, l'intensité  $F$  occasionnelle appliquée au mur est donnée par :

$$F = \frac{dv}{dy} \mu$$

Avec  $\mu$  coefficient de viscosité dynamique et  $v$  la vitesse du fluide au point considère. Cela implique que les effets de frictions sont plus importants et que par conséquent la contrainte pariétale et l'échauffement cinétique le sont aussi. Etant l'intégrales sur la surface des contrainte, la trainée est donc plus importante en régime turbulent qu'en Régime laminaire. De plus les perturbations en régime turbulent ne sont habituellement pas amorties, à l'inverse d'un régime laminaire, mais grandissent et contribuent à la création d'autres perturbations.

Cependant un écoulement turbulent ne se décolle pas aussi vite qu'un flux laminaire, et si un décollement apparaît le point de séparation (i.e le point de décollement) est plus tardif et la zone de décollement est plus petite. Ce qui signifie que la trainée due à une séparation sera plus faible pour un écoulement turbulent.

### I.2.1 La compressibilité de l'écoulement

On dit qu'un fluide est incompressible si sa masse spécifique varie faiblement avec la pression ou la température. Pour juger de l'effet de compressibilité dans un fluide en mouvement il faut faire intervenir à la fois la célérité du son et la vitesse de l'écoulement. Le rapport de ces deux grandeurs définit un paramètre adimensionnel appelé nombre de "Mach" :

$$M = \frac{v}{c}$$

Le nombre de Mach permet de distinguer les régimes subsoniques ( $M < 1$ ), supersonique ( $1 < M \lesssim 5$ ) et hypersonique ( $M \gtrsim 5$ ). En outre, pour des écoulements à nombre de Mach inférieur à 0.2 le résultat du calcul de la vitesse fait en considérant le fluide incompressible ne diffère pas de plus de 1% de la valeur trouvée en prenant en compte la compressibilité. C'est la raison pour laquelle on distingue au sein du régime subsonique, la plage des écoulements incompressibles et celle des écoulements où les effets de compressibilité dû au mouvement ne peuvent être négligés [5].

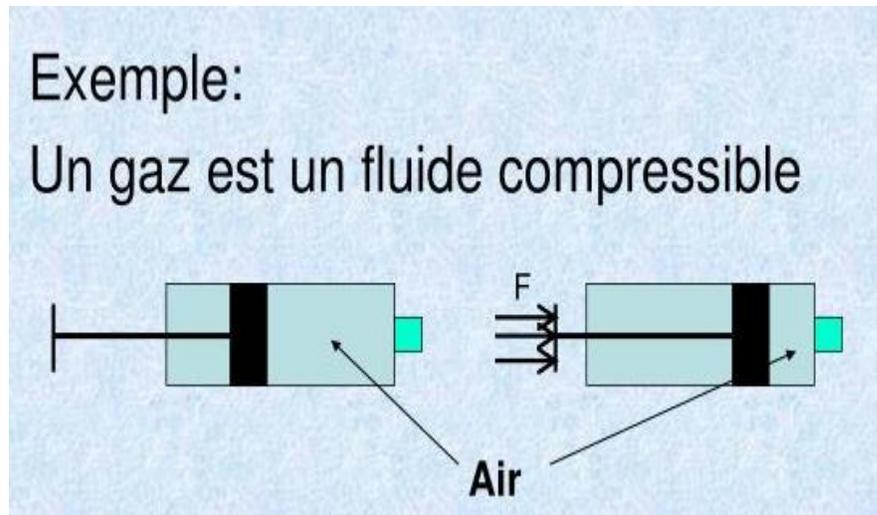


Fig. I.2 : fluide compressible [6].

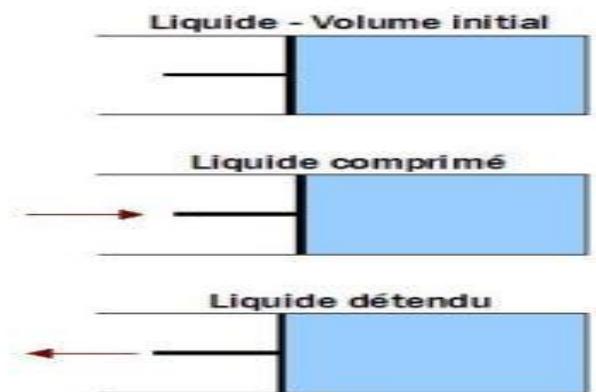


Fig. I. 3 : fluide compressible [7]

## I.2.2 Écoulement non stationnaire et écoulement stationnaire

### a) Écoulement non stationnaire

La vitesse d'une particule de fluide change en fonction du temps et de sa position. Des écoulements non stationnaires se forment lors de processus de vidange, de processus de démarrage et de mise à l'arrêt des turbomachines ou en cas de vibrations de liquide et de phénomènes du coup de bélier.

- Les processus d'écoulement non stationnaires sont pris en compte par exemple :
  - lors du dimensionnement des réservoirs d'eau
  - pour le dimensionnement des vidanges de fond des barrages

- sur le drain d'eau partant d'un lavabo en direction d'un conduit
- lors de la rencontre de deux fluides ayant des vitesses différentes

### b) *Écoulement stationnaire*

La vitesse d'une particule de fluide change en fonction de sa position et non du temps.

- Principes de base de l'écoulement stationnaire :

Dans le domaine de l'écoulement stationnaire, l'enseignement porte en particulier sur la détermination de l'évolution de l'écoulement, la distribution de la pression et celle de la vitesse.

## I.3 Les types des fluides

### I.3.1 Fluides parfaits

Soit un système fluide, c.à.d. un volume délimité par une surface fermée  $S$  fictive ou non. Considérons  $dF$  la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire  $dS$  de normale  $n$  entre le fluide et le milieu extérieur. On peut toujours décomposer  $dF$  en deux composantes :

- une composante  $dF_N$  normale à  $dS$ ,
- une composante  $dF_T$  tangentielle à  $dS$ .

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement, c'est à dire quand la composante T est nulle. Autrement dit, la force  $dF$  est normale à l'élément de surface  $dS$  [8].

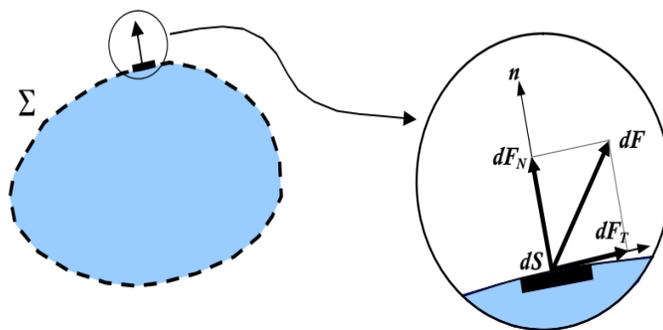


Fig. I.4 : Force d'interaction au niveau de la surface élémentaire d'un fluide parfaits [9].

### I.3.2 Fluide Réel

A l'inverse d'un fluide parfait, qui n'est qu'un modèle simplifiant les calculs, quasiment inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prises en considération.

Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide. C'est seulement au repos, qu'on accepte que le fluide réel se comporte comme un fluide parfait et on suppose que les forces de contact sont perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent. La statique des fluides réels se confond avec celle des fluides parfaits [8].

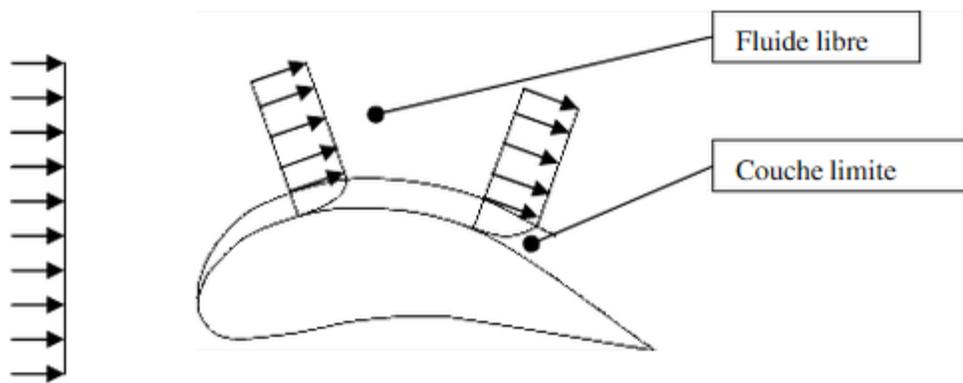


Fig. I.5 : Fluide Réel [10].

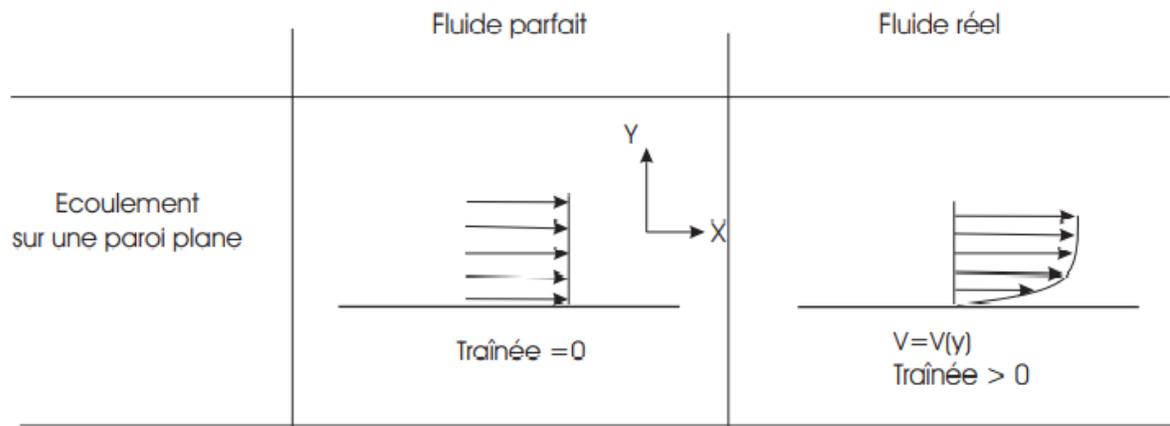


Fig. I.6 : Comparaison de l'écoulement d'un fluide parfait et réel sur une plaque plane [10].

### I.3.3 Fluides newtoniens

Les fluides "newtoniens" ont une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température. La deuxième famille est constituée des fluides "non newtoniens" qui ont la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent [11].

## I.4 La viscosité

La notion de viscosité est associée à la résistance qu'oppose tout fluide à sa mise en mouvement. Pour préciser cette propriété de façon plus quantitative, nous considérons l'expérience de "Couette" en écoulement plan. Telle qu'elle est schématisée à la figure Fig.1.7, cette expérience concerne un fluide visqueux disposé entre deux plans parallèles distants d'une hauteur  $S$ . Elle consiste à déplacer relativement à l'autre, l'une des deux parois d'un mouvement permanent de translation rectiligne dans son propre plan. Pour simplifier, on suppose la paroi inférieure fixe et la paroi supérieure mobile à la vitesse  $U_0$  [10].

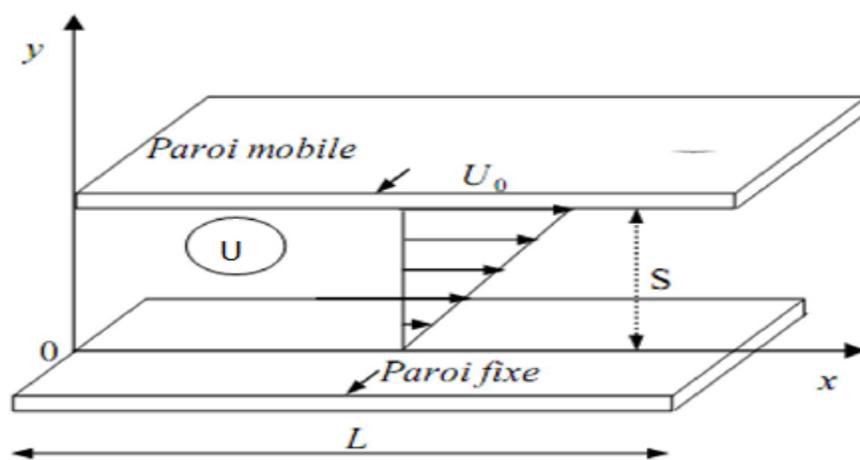


Fig. I.7 : Schéma de l'écoulement de couette plan.

### I.4.1 Viscosité dynamique

La relation précédente nous conduit à l'expression de la viscosité dynamique  $\mu$ : L'unité SI de viscosité dynamique est le pascal. Seconde (Pa. s). Selon la définition officielle, le Pascal-seconde est la viscosité dynamique

$$M = \frac{Fv}{ds} \frac{dn}{dv} \quad (1.1)$$

D'un fluide dans lequel le mouvement rectiligne et uniforme, dans son plan, d'une surface plane, solide, indéfinie, donne lieu à une force retardatrice de 1 N par mètre carré de la surface en contact avec le fluide homogène et isotherme en écoulement relatif devenu permanent, lorsque le gradient de la vitesse du fluide, à la surface du solide et par mètre d'écartement normal à ladite surface, est de 1 m/s. Si vous n'avez pas bien suivi, reportez-vous à la formule précédente.

#### I.4.2 Viscosité cinématique

Une deuxième définition est souvent utilisée, c'est celle de la viscosité cinématique  $\vartheta$ , rapport de la viscosité dynamique  $\mu$  à la masse volumique  $\rho$  du fluide :  $\vartheta = \frac{\mu}{\rho}$ . L'unité SI est le mètre carré par seconde ( $\text{m}^2/\text{s}$ ) qui est donc la viscosité cinématique d'un fluide dont la viscosité dynamique est de 1 pascal. Seconde et la masse volumique 1 kilogramme par mètre cube.

### I.5 Mécanique des fluides et transfert de chaleur

Nous savons tous par expérience qu'une boisson froide en conserve laissée dans une pièce se réchauffe et qu'une boisson chaude en conserve laissée dans un réfrigérateur refroidit. Ceci est accompli par le transfert d'énergie du milieu chaud au froid. Le transfert d'énergie se fait toujours du milieu à température la plus élevée au plus bas, et le transfert d'énergie s'arrête lorsque les deux milieux atteignent la même température.

Vous vous souviendrez de la thermodynamique que l'énergie existe sous différentes formes. Dans ce mémoire, nous nous intéressons principalement à la chaleur, forme d'énergie pouvant être transférée d'un système à l'autre en raison de la différence de température. La science qui traite de la détermination des taux de tels transferts d'énergie est le transfert de chaleur [12].

## I.6 Les modes de transfert de chaleur

Trois processus physiques permettent le transfert de chaleur d'un corps vers un autre dès

Lorsqu'ils ne sont pas en équilibre thermique (à température différente) : la conduction, la convection et le rayonnement [13].

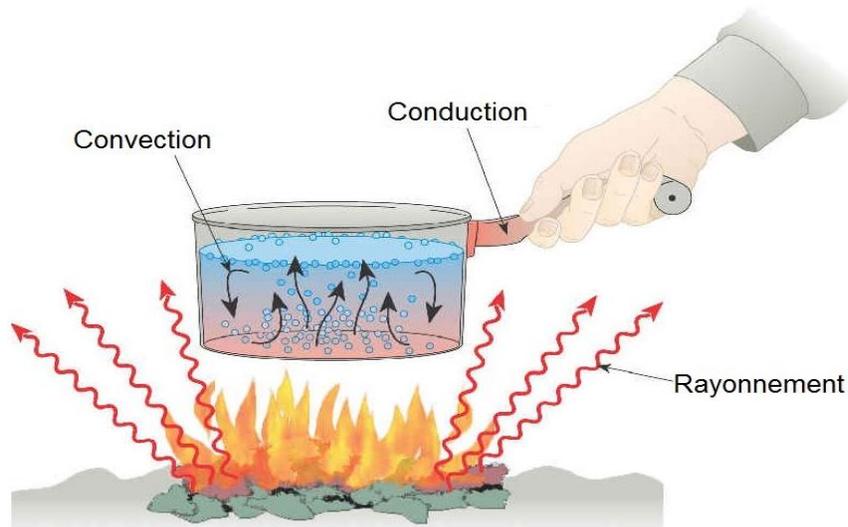


Fig. I.8: Les 3 modes de transfert thermique [1].

### I.6.1 La conduction

La conduction représente le processus de propagation de la chaleur par le contact direct entre les particules d'un corps ou entre des corps ayant des niveaux énergétiques (donc des températures différentes) suite au mouvement de ces particules élémentaires. Le flux thermique conductif qui traverse un composant dépend de sa géométrie, de son épaisseur, du matériau ainsi que de la différence de température au travers le composant. La transmission est provoquée par la différence de température entre deux régions d'un milieu en contact physique. Il n'y a pas de déplacement appréciable des atomes ou molécules [14].

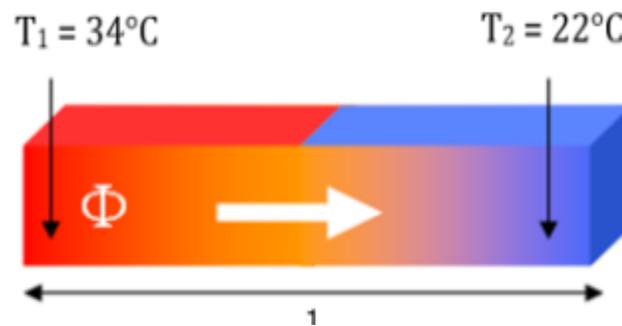


Fig. I.9: Principe de la conduction [15].

### I.6.2 La convection

Le phénomène de convection se réfère au transfert thermique qui a eu lieu dans les fluides liquides ou gaz en mouvement. La convection est le processus de transfert thermique déterminé par le mouvement des particules élémentaires d'un fluide entre des zones ayant des températures différentes. Ce mouvement entraîne un mélange intense des particules fluides, qui échangent de l'énergie (chaleur) et de la quantité de mouvement entre elles [7] (voir Fig.I.9).

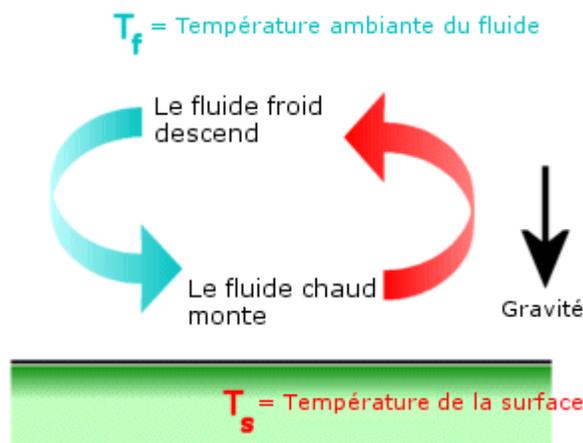


Fig. I.10 : la convection [16].

### I.6.3 Le rayonnement

Le rayonnement thermique est une émission de rayonnement électromagnétique par un corps chaud, le rayonnement a la particularité de se déplacer dans le vide (rayonnement solaire), l'énergie électromagnétique reçue par le système est absorbée et convertie en énergie thermique (chaleur) [13].

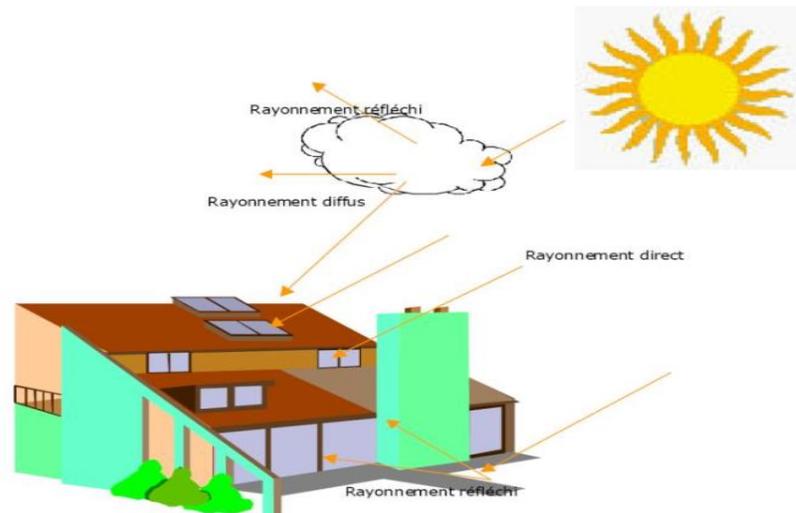


Fig. I.10 : Le rayonnement solaire.

## I.7 Les type de Convection

### I.7.1 Convection Naturelle ou libre

La convection naturelle apparaît spontanément. Elle se produit dans un fluide au sein duquel existe un gradient de température. C'est le cas, dans une pièce où l'air chaud produit au niveau du sol par un convecteur ou un radiateur va monter au plafond tandis que l'air froid va descendre. Le mouvement est dû au fait que l'air chaud est moins dense que l'air froid et monte donc sous l'effet d'une force dite poussée d'Archimède [17].

### I.7.2 Convection Forcée

La convection forcée est le processus de déplacement de fluide par des facteurs mécaniques (pompe, ventilateur, turbo, etc.) Indépendants sur les phénomènes thermiques, ainsi que le gradient de pression externe qui provoque le mouvement des molécules liquides. Par conséquent, l'étude du transfert de chaleur thermique est étroitement liée à la vitesse d'écoulement du liquide, La relation générale pour la convection forcée est  $Nu = f(Re, Pr)$ . En microélectronique, le transfert de chaleur obéit alors à l'expression suivant :

$$Nu = c. Re^n Pr^m \quad (1.2)$$

Où  $c$ ,  $n$  et  $m$  sont des constantes dépendant des caractéristiques du solide et du fluide [5].

### I.7.3 Convection Mixte

Les mouvements induits par une différence de pression sont des mouvements de convection forcée où l'écoulement persiste même en l'absence de gradient de température. Quand la convection est due aux effets couplés cités précédemment on parle alors de convection mixte [18].

## I.8 Coefficient d'échange par convection

Considérons sur la surface d'un corps solide un élément d'aire  $dS$  à la température  $T_p$ . Si le corps est au contact d'un milieu fluide en mouvement caractérisé par une température  $T_0$ , la quantité de chaleur  $dQ$  qui traverse  $dS$  pendant le temps  $dt$  peut s'écrire [19] :

$$\delta Q = h \cdot (T_p - T_0) \cdot ds \cdot dt \quad (1.3)$$

Le coefficient  $h$  est la conductance thermique de convection, ou coefficient d'échange thermique par convection. Il s'exprime en  $W / (m^2 \cdot K)$  ; quel que soit le type de convection (libre ou forcée) et quel que soit le régime d'écoulement du fluide (laminaire ou turbulent), le flux de chaleur transmis est donné par la relation dite Loi de Newton :

$$\dot{Q} = h \cdot s (t_p - t_0) \quad (1.4)$$

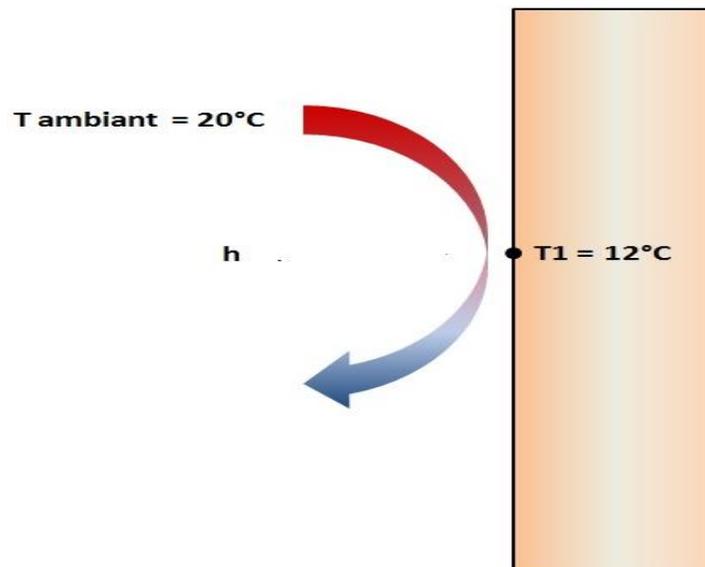


Fig. I.12 : Echange thermique par convection entre une paroi solide et un fluide.

Alors tout calcul d'échange thermique par convection nécessite la détermination du coefficient  $h$ , ce qui est toujours une affaire compliquée, car le transfert de chaleur par convection est complexe. Il résulte de la superposition de deux phénomènes différents : conduction entre les particules de fluide qui se rencontrent ; mélange de ces particules par suite du mouvement d'ensemble du fluide.

De plus, l'échange de chaleur peut être accompagné d'un changement de phase (condensation ou évaporation).

## I.9 Généralités sur le transfert de chaleur

### I.9.1 Champ de température

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température :  $T = f(x, y, z, t)$ . La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou transitoire.

### I.9.2 Gradient de température

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température [20] :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (1.5)$$

### I.9.3 Flux de chaleur

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur :

$$\Phi = \frac{1}{s} \frac{dQ}{dt} \quad (1.6)$$

On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface  $S$  par unité de temps

$$: \Phi = \frac{dQ}{dt} \quad (1.7)$$

### I.10 La conductivité thermique

La conductivité thermique  $\lambda$  des fluides varie également avec la pression. Lorsque la pression croît, les conductivités thermiques des gaz ou des liquides augmentent. Cette variation avec la pression est quasi linéaire dans quelques régions du diagramme de phase, par exemple pour le gaz peu dense au voisinage de la pression atmosphérique ou le liquide loin de la région critique. Dans le domaine critique d'un fluide, la conductivité thermique croît très rapidement et sa variation le long de l'isochore critique présente une divergence infinie à la température critique ; son comportement est analogue à celui de la capacité thermique à pression constante. Il existe peu de données expérimentales dans ce domaine et peu de méthodes de calcul pratique, aussi nous ne traiterons pas ce cas [1].

### I.11 Le nombre de Nusselt

Dans les études de convection, il est courant de ne pas dimensionner les équations de base et de combiner les variables, qui regroupent des nombres sans dimension afin de réduire le nombre de variables totales. Il est également courant de ne pas dimensionner le coefficient de transfert de chaleur  $h$  avec le nombre de Nusselt, défini par

$$Nu = \frac{h.L_x}{\lambda} \quad (1.8)$$

Où  $\lambda$  est la conductivité thermique du fluide et  $L_x$  la longueur caractéristique. Le nombre de Nusselt doit son nom à Wilhelm Nusselt, qui a largement contribué au transfert de chaleur par convection dans la première moitié du XXe siècle. Il est considéré comme le coefficient de transfert de chaleur par convection sans dimension.

### I.12 Le nombre de Reynolds

Imaginons que le liquide s'écoule à une vitesse moyenne  $v$ , sur plaque plane de longueur  $L$ . Si  $\rho$  est la masse volumique du fluide, l'énergie cinétique du fluide est en gros proportionnelle à :  $\rho v^2$ .

Pour la viscosité, elle fonctionne presque comme les frottements du skieur. Pour faire simple, on peut dire que la viscosité est ce qui fait que le liquide a tendance à coller à la paroi de la plaque. Les forces de viscosité sont d'autant plus importantes que la viscosité  $\mu$  du liquide

est élevée, que sa vitesse  $v$  est importante, Au final, l'énergie dissipée par les forces de viscosité est proportionnelle à la quantité  $\mu \cdot v/L$

Pour calculer le ratio inertie/frottement dans le liquide, on fait le rapport des deux formules que je viens de détailler, et on obtient cette quantité appelée le nombre de Reynolds de l'écoulement

$$Re = \frac{v \cdot l}{\nu} = \frac{\rho v L}{\mu} \quad (1.9)$$

Ce nombre va nous permettre de détecter l'apparition de la turbulence : plus il est élevé, plus l'inertie est importante et la viscosité faible, et plus les tourbillons pourront se développer [7].

### I.13 Expérience de la plaque plane

On peut se demander si certains aspects des observations précédentes ne sont pas liés au caractère particulier de la géométrie cylindrique ou à la nature du fluide (l'expérience est plus difficile à mettre en œuvre avec un gaz). Une série d'observations complémentaires réalisées en géométrie plane montre qu'il n'en est rien.

Une plaque plane de surface lisse est plongée dans un écoulement de fluide (gaz ou liquide) dont la vitesse  $U_0$  est uniforme ; elle est disposée parallèlement à la direction de  $U_0$ , et son bord d'attaque est biseauté pour éviter des phénomènes parasites [21].

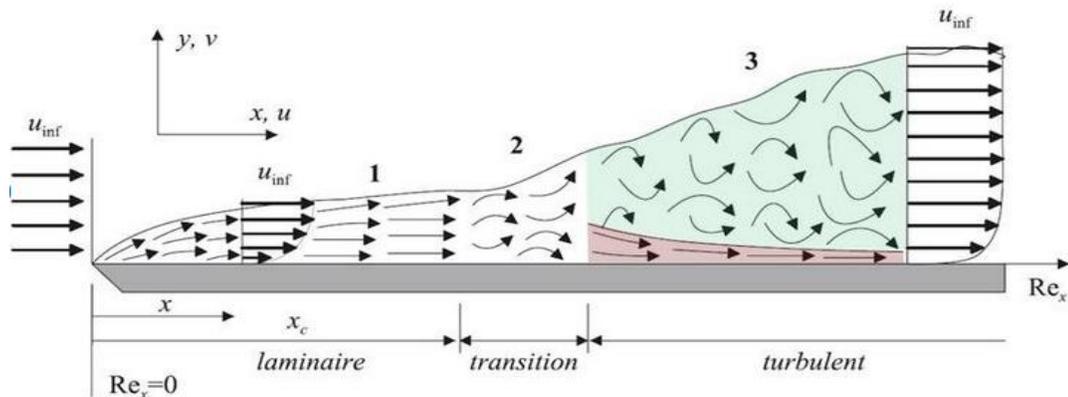


Fig.I.13 : Régimes d'écoulement sur une plaque plane.

# II ) Chapitre II :LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE SUR UNE PLAQUE PLANE

## II.1 La notion de couche limite

Les forces aérodynamiques dépendent de manière complexe de la viscosité du fluide. Lorsque le fluide passe au-delà de l'objet, les molécules situées juste à côté de la surface adhèrent à la surface. Les molécules juste au-dessus de la surface sont ralenties dans leurs collisions avec les molécules collées à la surface. Ces molécules à leur tour ralentissent le flux juste au-dessus d'elles. Plus on s'éloigne de la surface, moins le nombre de collisions affectées par la surface de l'objet est important. Cela crée une mince couche de fluide près de la surface dans laquelle la vitesse change de zéro à la surface à la valeur du flux libre loin de la surface. Les ingénieurs appellent cette couche la couche limite car elle se produit sur la limite du fluide [22].

## II.2 Description de l'écoulement au voisinage d'une paroi

L'approche pratique de la couche limite peut se faire de la façon suivante : on considère une plaque plane et l'écoulement d'un fluide visqueux parallèlement à cette plaque. Avant que le fluide n'atteigne la plaque, celui-ci est la vitesse uniforme  $U_0$ .

Lorsque le fluide atteint la plaque, la condition de vitesse nulle fait qu'il se crée de grands efforts tangentiels qui retardent une couche de plus en plus épaisse de fluide [10].

## II.3 Couche limite sur une plaque plane

Les particules de fluide à la surface de la plaque plate ont une vitesse nulle et agissent en tant que retardateur pour réduire la vitesse des particules adjacentes dans la direction verticale.

Des actions similaires continuent par d'autres particules jusqu'au bord de la couche limite, où la vitesse des particules est égale à 99% de la vitesse du flux libre. Les couches limites peuvent également être mesurées par des paramètres plus importants. Les principaux paramètres de la couche limite sont les suivants : L'épaisseur des déplacements,  $\delta_1$ , est définie comme la distance sur laquelle les lignes de courant externes sont décalées du fait de la présence de la couche limite [23].

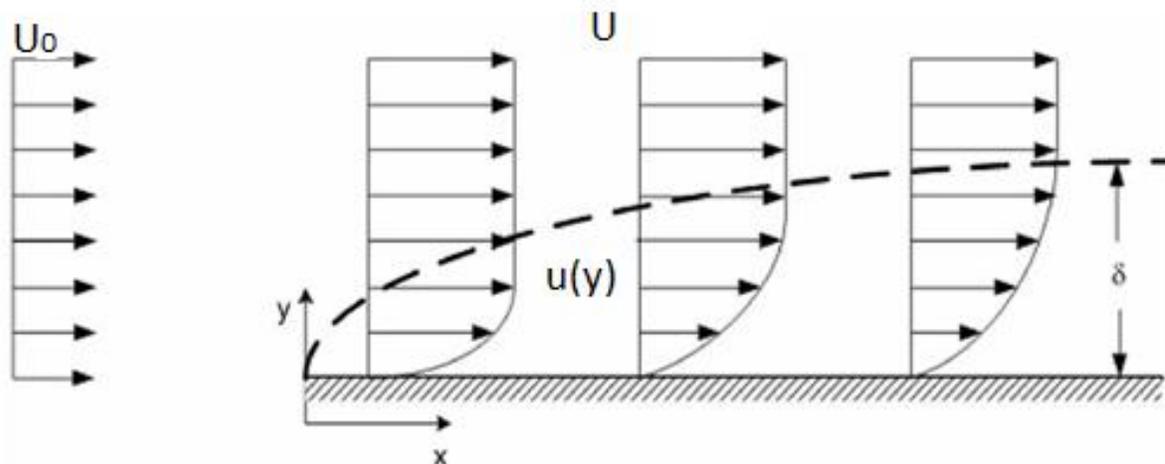


Fig. II.1 : Écoulement sur une assiette plaque plane [24].

## II.4 Hypothèses de Prandtl

L'épaisseur relative des couches limite de vitesse et thermique est mieux décrite par le paramètre sans dimension de Prandtl, défini par

$$Pr = \frac{\text{Diffusivité moléculaire de la quantité de mouvement}}{\text{Diffusivité moléculaire de la chaleur}} = \frac{\vartheta}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{\lambda}$$

$$\vartheta = \frac{\mu}{\rho} , \quad \alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p}$$

Il porte le nom de Ludwig Prandtl, qui a introduit le concept de couche limite en 1904 et apporté une contribution importante à la théorie de la couche limite. Le nombre de fluides de Prandtl varie de moins de 0,01 pour les métaux liquides à plus de 100 000 pour les huiles lourdes (tableau II.1) Notez que le nombre de Prandtl est de l'ordre de 10 pour l'eau, et d'environ de 1 pour les gaz [12].

<b>Fluide</b>	<b>Pr</b>
Métaux liquides	0,004-0,030
Gaz	0.7-1.0
Eau	1.7-13.7
Fluides organiques légers	5-50
Huiles	50-100,000

Tableau.II.1 : Plages typiques des nombres de Prandtl pour les fluides courants [12].

## II.5 Les types des couches limites

### II.5.1 Couche limite dynamique

Considérez l'écoulement parallèle d'un fluide sur une plaque plane, comme illustré à la Fig. II.2. Les surfaces légèrement profilées telles que les aubes de turbine peuvent également être approchées sous forme de plaques planes avec une précision raisonnable. La coordonnée  $x$  est mesurée le long de la surface de la plaque à partir du bord d'attaque de la plaque dans la direction de l'écoulement et  $y$  est mesurée à partir de la surface dans la direction normale. Le fluide s'approche de la plaque dans la direction  $x$  avec une vitesse amont uniforme de pratiquement identique à la vitesse d'écoulement libre  $u_0$  sur la plaque à l'opposé de la surface.

Aux fins de discussion, nous pouvons considérer que le fluide est constitué de couches adjacentes empilées les unes sur les autres. La vitesse des particules dans la première couche de fluide adjacente à la plaque devient nulle en raison de la condition antidérapante. Cette couche immobile ralentit les particules de la couche de fluide voisine en raison du frottement entre les particules de ces deux couches de fluide adjacentes à des vitesses différentes. Cette couche de fluide ralentit ensuite les molécules de la couche suivante, et ainsi de suite. Ainsi, la présence de la plaque est ressentie jusqu'à une certaine distance normale de la plaque au-delà de laquelle la vitesse du courant libre  $u_\infty$  reste essentiellement inchangée. En conséquence, la composante  $x$  de la vitesse du fluide,  $u$ , variera de 0 à  $y=0$  à presque  $u_\infty$  à  $y=\delta$  (Fig. 2-2).

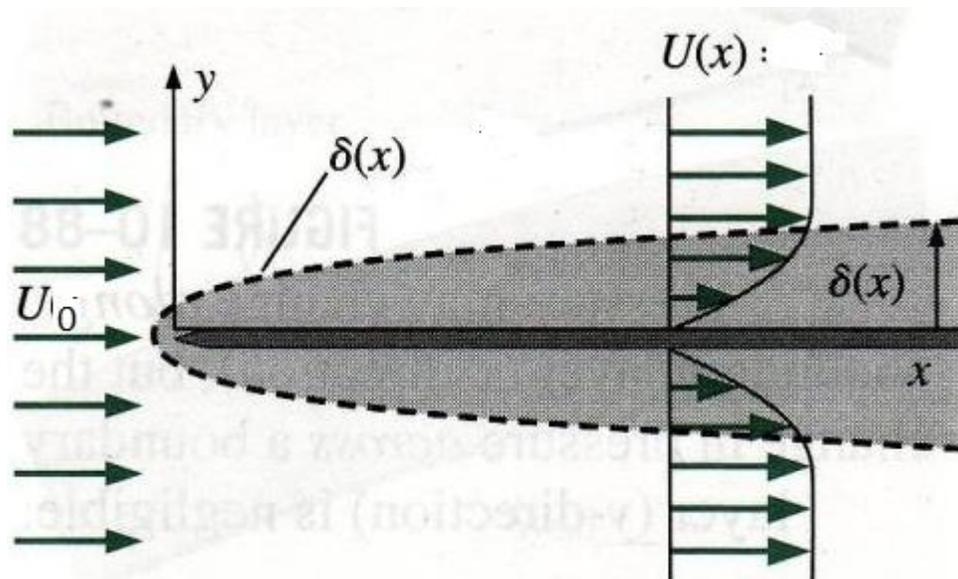


Fig. II.2 : la couche limite sur un plaque plan [24].

### II.5.2 La Couche limite thermique

La couche limite thermique ne se développe au sein d'un écoulement de fluide visqueux en contact avec un corps solide, que si ces derniers sont à des températures différentes.

Supposons par exemple que l'écoulement incident sur une plaque plane soit à une température uniforme  $T_0$ , et que la surface de cette dernière soit maintenue à une température  $T_s$  également uniforme mais différente de  $T_0$ . En explorant le champ de température  $T$  perpendiculairement à la plaque, selon l'ordonnée  $y$ , on observera une variation progressive de  $T_s$  à  $T_0$ , d'abord rapide puis de plus en plus lente à mesure qu'on pénètre dans l'écoulement.

L'épaisseur  $\delta_t$  de la couche limite thermique est conventionnellement définie comme étant la distance à la paroi pour laquelle le rapport [30].

$$\frac{T_s - T(\delta_t)}{T_s - T_0} = 0.99$$

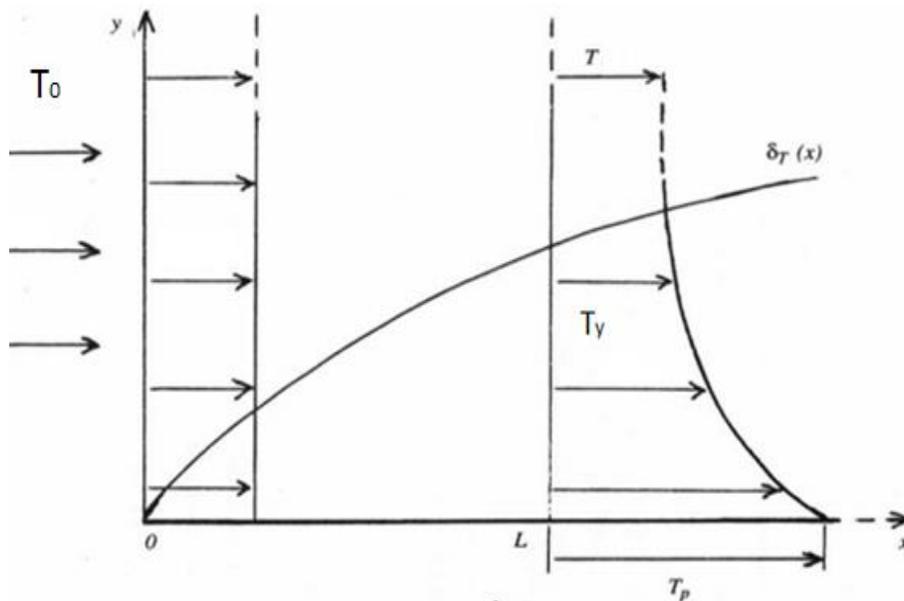


fig. II.3: Couche limite thermique sur plaque plane.

## II.6 Epaisseurs de couche limite

Dans le temps jadis où la notion de développements asymptotiques raccordés n'existait pas, les scientifiques tentaient de définir une épaisseur de couche limite en introduisant la distance à la paroi pour laquelle la vitesse tangentielle  $u$  était presque égale à  $u$  ( $u=0,99 U_0$ ). Ces

vagues définitions sont remplacées maintenant par des épaisseurs dont la valeur analytique exacte est très précise.

Epaisseur de déplacement. C'est le déplacement qu'il faudrait imposer à la paroi pour que dans une description de fluide parfait, le débit soit identique au débit exact obtenu en tenant compte de la couche limite sur la géométrie réelle.

### II.6.1 Epaisseur conventionnelle de couche limite thermique $\delta T$

D'une façon analogue à l'épaisseur de couche limite dynamique, on définit l'épaisseur de la couche limite thermique  $\delta T$  (fig :II.4 ). Soit le rapport adimensionnel :

$$\frac{T(x,y) - T_{s(x)}}{T_0 - T_{s(x)}}$$

$$0 < \frac{T(x,y) - T_{s(x)}}{T_0 - T_{s(x)}} < 1$$

C'est à dire à l'abscisse  $x=L$  la couche limite thermique possède une épaisseur  $\delta_T(x)$  tel que la relation précédente existe. Autrement dit, à l'ordonnée  $y=\delta_T$ , l'écart de température par rapport à la surface est égal à 99% de l'écart total ( $T_0 - T_s$ ).

L'expérience montre que  $\delta_T$  évolue le long de la paroi, s'épaissit quand on s'éloigne du bord d'attaque ce qui se traduit par l'apparition d'un gradient de température accompagné d'un flux de chaleur dirigé de la paroi vers le fluide ou de fluide vers la paroi selon Le signe de  $T_0 - T_s$ .

Où  $T(x, y)$  est la température au point courant de la couche limite,  $T_s(x)$  celle de la paroi et  $T_0$  celle de fluide au loin de la paroi. Par définition donc, l'épaisseur de couche limite thermique est la distance transversale au bout de laquelle l'écart de température atteint 99% de la différence ( $T_0 - T_s$ ). On a donc :

$$\frac{T(x,\delta_T) - T_{s(x)}}{T_0 - T_{s(x)}} = 0.99$$

### II.6.2 L'épaisseur de déplacement $\delta_1$

Cette propriété de couche limite fréquemment utilisée décrit la différence entre le cas d'un flux hypothétique sur une plaque plate sans couche limite et le flux réel avec une couche limite [25].

Une première définition est tirée de l'évolution asymptotique de la vitesse tangentielle dans la couche limite vers la vitesse externe. On peut ainsi identifier une épaisseur sensible  $\delta_0$  qui traduit la valeur de  $y$  pour laquelle la condition (337) est vérifiée avec une précision donnée. Soit, par exemple, la valeur pour laquelle  $u/U_0 = 0.99$ . Dans le cas de la plaque plane [25].

$$q_p - q_\vartheta = \int_0^\delta (\rho_0 \cdot U_0 - \rho U) dy = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

Par convention, on l'exprime à partir d'une épaisseur  $\delta_1$  telle que :

$$q_p - q_\vartheta = \rho_0 \cdot U_0 \cdot \delta_1$$

$$\delta_1(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_0 \cdot U_0}\right) dy$$

$\delta_1$  est l'épaisseur de déplacement. Comme l'illustre la figure ci-dessous, ce qualificatif fait référence à l'interprétation physique de cette grandeur qui correspond à la distance dont il conviendrait de déplacer la paroi pour conserver, en fluide parfait sur l'épaisseur  $(\delta - \delta_1)$  le même débit qu'en fluide visqueux sur toute la section de couche limite [5].

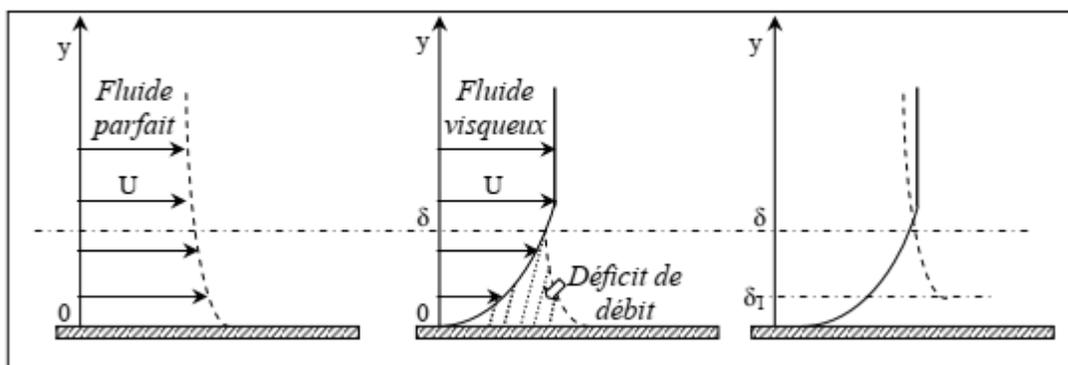


Fig. II.4: Déficit de débit et épaisseur de déplacement [26].

### II.6.3 Epaisseur conventionnelle de couche limite dynamique $\delta_2$

Nous désignerons désormais par  $U_E(x)$  la vitesse obtenue en fluide parfait au point d'abscisse  $x$  sur l'obstacle. L'épaisseur conventionnelle de couche limite est égale à la distance transversale où la composante longitudinale de la vitesse atteint 99% de  $U_0$ . Cette échelle varie en général avec l'abscisse le long de l'obstacle. En la désignant par  $\delta(x)$ , on a donc :

$$U[x, \delta(x)] = 0.99 U_0$$

## II.7 Les équations de la Couche Limite sur plaque plane

Avec ces hypothèses on peut déduire des équations de Navier-Stokes, les équations de la Couche Limite, écrites ici avec les dimensions), dans le cas d'une plaque plane (Schlichting 1987) : Consacrons-nous à présent à l'étude détaillée de la couche limite laminaire une définition conventionnelle de l'épaisseur de couche limite. Avec les conditions expérimentales retenues, il reste à préciser si dans cette partie de l'écoulement les équations de Navier-Stokes (qui expriment le bilan local de quantité de mouvement) peuvent faire l'objet de simplifications.

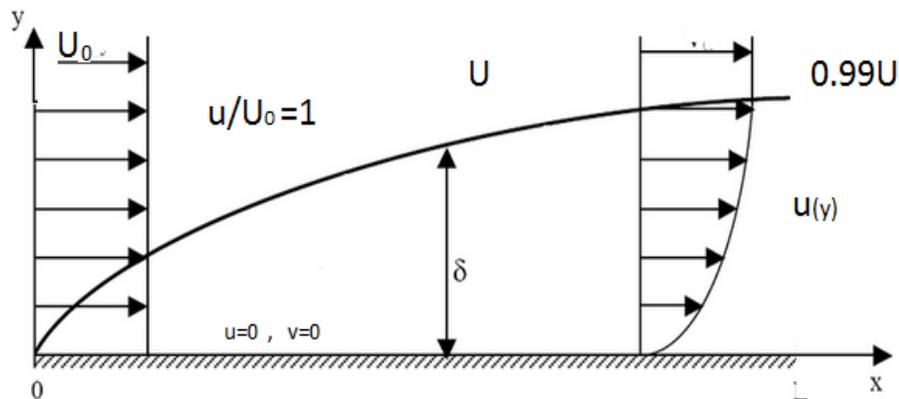


Fig. II.5 : variation de la vitesse au niveau de la couche limite dynamique laminaire.

A l'extérieur de la couche limite deux cas sont possible :

- 1)  $U=U_0$  car pas de gradient de pression  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$
- 2)  $U=U_x$  car pas de gradient de pression  $\frac{\partial p}{\partial x} \neq 0$  et  $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U \frac{\partial U}{\partial x}$

- Les données expérimentales stipulent que l'écoulement est :

- permanent:  $\frac{\partial}{\partial t}$
- bidimensionnel (dans le plan  $x, y$ )
- isochore :  $\rho = cte.$

### II.7.1 Équation de continuité

$$\text{div } \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ; v \text{ indépendant de } y \dots \dots \dots (2.1)$$

### II.7.2 Équations de Navier-Stokes

Le fait que l'épaisseur de la couche limite soit petite devant les autres dimensions caractéristiques de l'écoulement permet de faire des approximations dans l'équation de Navier-Stokes. Pour simplifier, considérons toujours le cas d'une plaque plane (placée en  $y = 0$ ) placée dans un écoulement uniforme à l'infini ( $u = U, v = 0$ ) et supposons que l'écoulement est bidimensionnel.

Sur  $ox$  :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.2)$$

Sur  $oy$  :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Comme  $v \Rightarrow 0$

Donc :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \text{ Pression constante} \quad (2.3)$$

Comme  $u \gg v$  :

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.4)$$

La couche limite a une épaisseur ( $\delta$ ) très faible le long de la paroi solide. Les différences grandeurs physiques varient très rapidement de la paroi à l'écoulement extérieur (en  $y$ ).

Donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{Et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (2.5)$$

L'écoulement est à infiniment petit près un écoulement unidirectionnel :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{2ème équation du mouvement} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \text{ Sont négligeables} \quad (2.7)$$

Donc les équations de la couche limite bidimensionnelle :

De (2.1) et (2.2) on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \text{et} \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \quad (2.8)$$

## II.8 Champ des vitesses dans la couche limite

### II.8.1 Solution de Blasius

Pour des choix spéciaux d' $U_0$ , il y a des solutions analytiques des équations de couche limite (Cousteix 1988). Ces solutions nous serviront par la suite pour établir les relations de fermeture.

L'écoulement sur une plaque plane, c'est-à-dire à vitesse extérieure constante, représente l'exemple de la couche limite le plus simple. C'est le cas de Blasius.

Du fait que  $u_0$  est constante, on a avec l'équation d'Euler  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  Donc dans les équations de couche limite le gradient de la pression va disparaître.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

Si nous pouvons résoudre l'équation de la continuité et de la quantité de mouvement pour  $u$  et  $v$ , nous pourrions déterminer le coefficient de frottement et l'épaisseur de la couche limite dont la définition sera donnée plus tard. Pour obtenir ces résultats, les équations différentielles partielles de la couche limite doivent être réduites à une seule équation différentielle ordinaire :

Avec ( $P$ =constante). Posons

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) \end{cases} : \text{vérifie la conservation de la masse} \quad (2.11)$$

Donc De (11) on a :  $\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}$  ;  $\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$  ;  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$

Alors L'équation (2.8b) est écrite sur la forme :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (2.12)$$

Blasius « 1908 », a proposé les variables suivantes :  $\psi = f(\eta) \cdot \sqrt{X \cdot \nu \cdot U_0}$  et  $\eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U_0}}}$

$$\psi = f(\eta) \cdot f(x), \quad g(x) = \sqrt{x \cdot U_0 \cdot \nu}$$

Donc :

$$\frac{\partial \eta}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U_0}}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2 \cdot x} \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U_0}}}$$

Poussons les transformations de l'équation  $\psi$  a une équation en  $f$  :

$$\begin{aligned} U &= \frac{\partial \psi}{\partial Y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Y} \\ &= \frac{\partial}{\partial Y} \left( \sqrt{\nu U_0 x} \cdot f(\eta) \right) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\vartheta U_0 x} \cdot \frac{\partial}{\partial Y} f \cdot \frac{\partial \eta}{\partial Y} = \sqrt{U_0} f' \cdot \frac{1}{\sqrt{U_0}} \quad (2.13)$$

- La composante longitudinale  $u$  de la vitesse :

$$u = U_0 f'(\eta) \quad (2.14a)$$

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x \cdot \vartheta \cdot U_0} f) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x \cdot \vartheta \cdot U_0}) \cdot f + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \sqrt{x \cdot \vartheta \cdot U_0} \end{aligned}$$

Comme  $[f^\eta]' = \eta f^{\eta-1} f'$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (\vartheta U_0 x)^{-\frac{1}{2}} \vartheta U_0 \cdot f + f' \sqrt{U_0} \cdot \left( \frac{1}{2} \frac{y}{x} \frac{1}{\sqrt{U_0}} \right) \\ &= -\left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\vartheta U_0}{x}} f - \frac{1}{2} \frac{y}{x} U_0 f' \right) \end{aligned}$$

- La composante longitudinale  $v$  de la vitesse :

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\vartheta U_0}{x}} (\eta f' - f) \quad (2.14b)$$

Si l'on représente le produit :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \eta} (u f') \frac{\partial \eta}{\partial x} = U_0 f'' \cdot \left( -\frac{1}{2} \frac{y}{x} \frac{1}{\sqrt{\frac{\vartheta U_0}{x}}} \right) = -\frac{1}{2} U_0 \frac{y}{x} \sqrt{\frac{U_0}{x \cdot \vartheta}} f'' \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \eta} (U_0 f') \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_0 \frac{1}{\sqrt{\frac{U_0}{x \cdot \vartheta}}} \cdot f'' = U_0 \sqrt{\frac{U_0}{x \cdot \vartheta}} f'' \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( U_0 \sqrt{\frac{U_0}{x \cdot \vartheta}} f'' \right) = U_0 \sqrt{\frac{U_0}{x \cdot \vartheta}} f'' \frac{\partial}{\partial \eta} (f'') \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \right. \quad (2.15)$$

$$= \frac{U_0^2}{x \cdot \vartheta} f'''(\eta) \quad (2.16)$$

En reportant les diverses grandeurs dans l'équation de quantité de mouvement (2.8b), et après avoir montré que la condition  $U_0 \text{ Constant entraîne } \frac{\partial P}{\partial x} = 0$  partout, on aboutit à l'équation de Blasius, qui fait seulement intervenir la variable adimensionnelle  $\eta$  :

$$f''' = -\frac{1}{2} f f'' \quad (2.17)$$

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad (2.18)$$

### II.8.2 Méthode de Runge-Kutta

Où le symbole (') représente la dérivation par rapport à  $\eta$ .

- Condition aux limites :

$$y=0 \quad \eta=0 \quad \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$y \Rightarrow \infty \quad \eta \Rightarrow \infty \quad f'(\infty) = 1$$

### II.8.3 résolution Numérique

- Pour solution l'équation (11), on pose : 
$$\begin{cases} f' = \frac{df}{d\eta} = p \\ p' = \frac{dp}{d\eta} = q \\ q' = \frac{dq}{d\eta} = -\frac{1}{2} f q \end{cases}$$

L'équation différentielle ordinaire du troisième ordre, non linéaire, obtenue ne peut pas être résolue analytiquement et doit être résolue numériquement. Une technique pouvant être utilisée est la méthode Runge-Kutta. La méthode s'intègre par petits pas dans la direction  $y$ , à partir du mur. Cependant, comme nous n'avons que deux des conditions aux limites à  $y = 0$  (la condition aux limites de  $f''(0)$  est manquante), nous devons prendre une valeur pour cette condition aux limites et vérifier si, dans le cas de  $\eta$  grand, la condition  $f'(\infty) = 1$  est satisfaite. Ce processus est répété jusqu'à ce que la solution soit congruente Prenons le cas d'une plaque plane mince dans un écoulement uniforme, ( $U=U_0=\text{cst}$  ;  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = 0$ ) à l'extérieur de la couche limite, et ( $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ ) dans la couche limite. Donc, les équations du mouvement se

réduisent en Appliquons les formules de Runge-kutta pour chacune des équations Précédentes, on obtient :

$$D_1 f_i = h p_i; D_1 p_i = h q_i; D_1 q_i = -0.5 h f_i q_i$$

Comme (h) est un pas choisi sur l'axe (n).

$$D_2 f_i = h(p_i + 0.5 D_1 p_i)$$

$$D_2 p_i = h(q_i + 0.5 D_1 q_i)$$

$$D_2 q_i = 0.5 h(f_i + 0.5 d_1 f_i) (q_i + 0.5 D_1 q_i)$$

.....

$$D_3 f_i = h(p_i + 0.5 D_2 p_i)$$

$$D_3 p_i = h(q_i + 0.5 D_2 q_i)$$

$$D_3 q_i = 0.5 h(f_i + 0.5 d_2 f_i) (q_i + 0.5 D_2 q_i)$$

.....

$$D_4 f_i = h(p_i + 0.5 D_3 p_i)$$

$$D_4 p_i = h(q_i + 0.5 D_3 q_i)$$

$$D_4 q_i = 0.5 h(f_i + 0.5 d_3 f_i) (q_i + 0.5 D_3 q_i)$$

.....

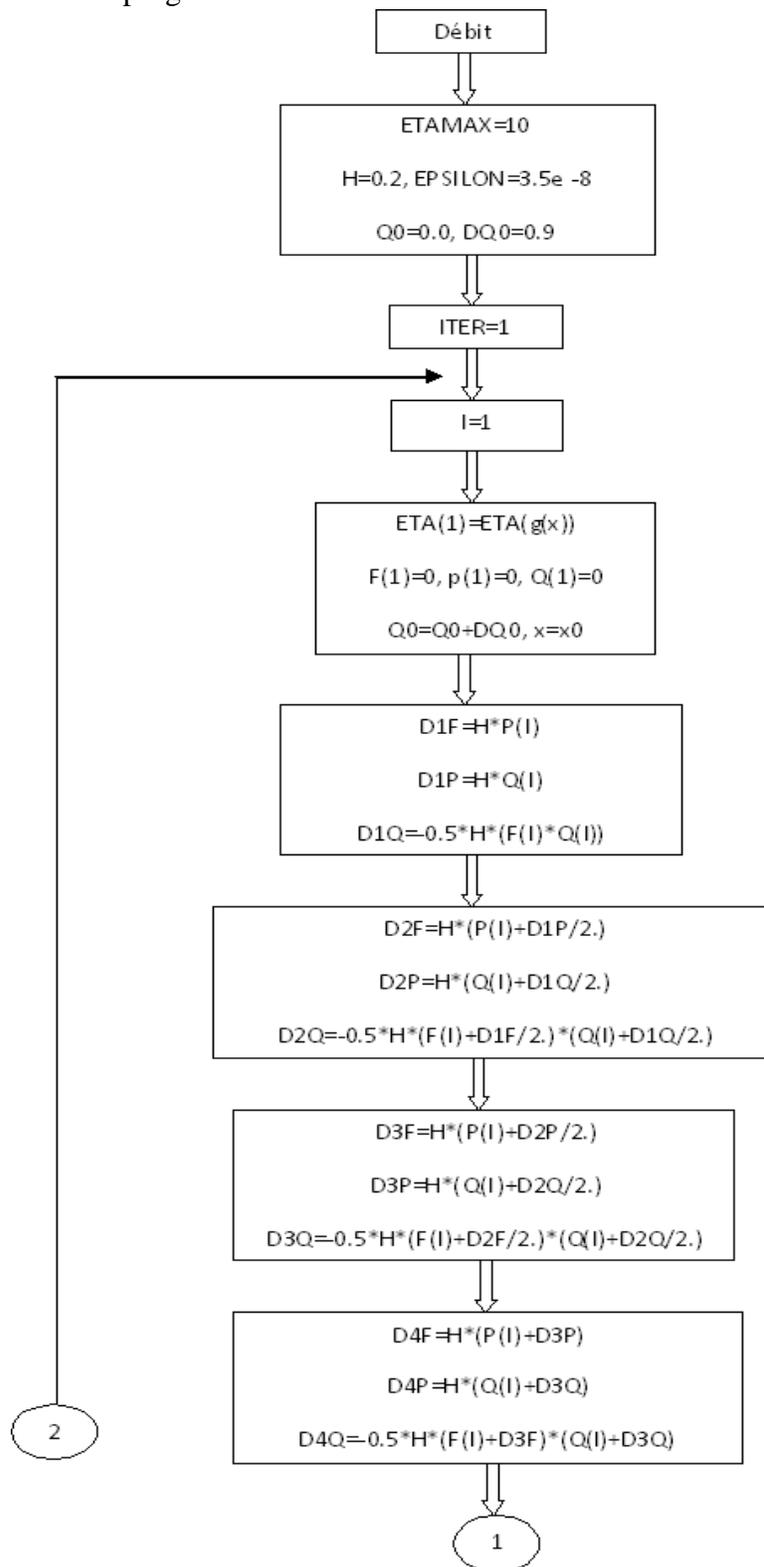
$$f_{i+1} = f_i + \frac{1}{6} (d_1 f_i + 2d_2 f_i + 2d_3 f_i + d_4 f_i)$$

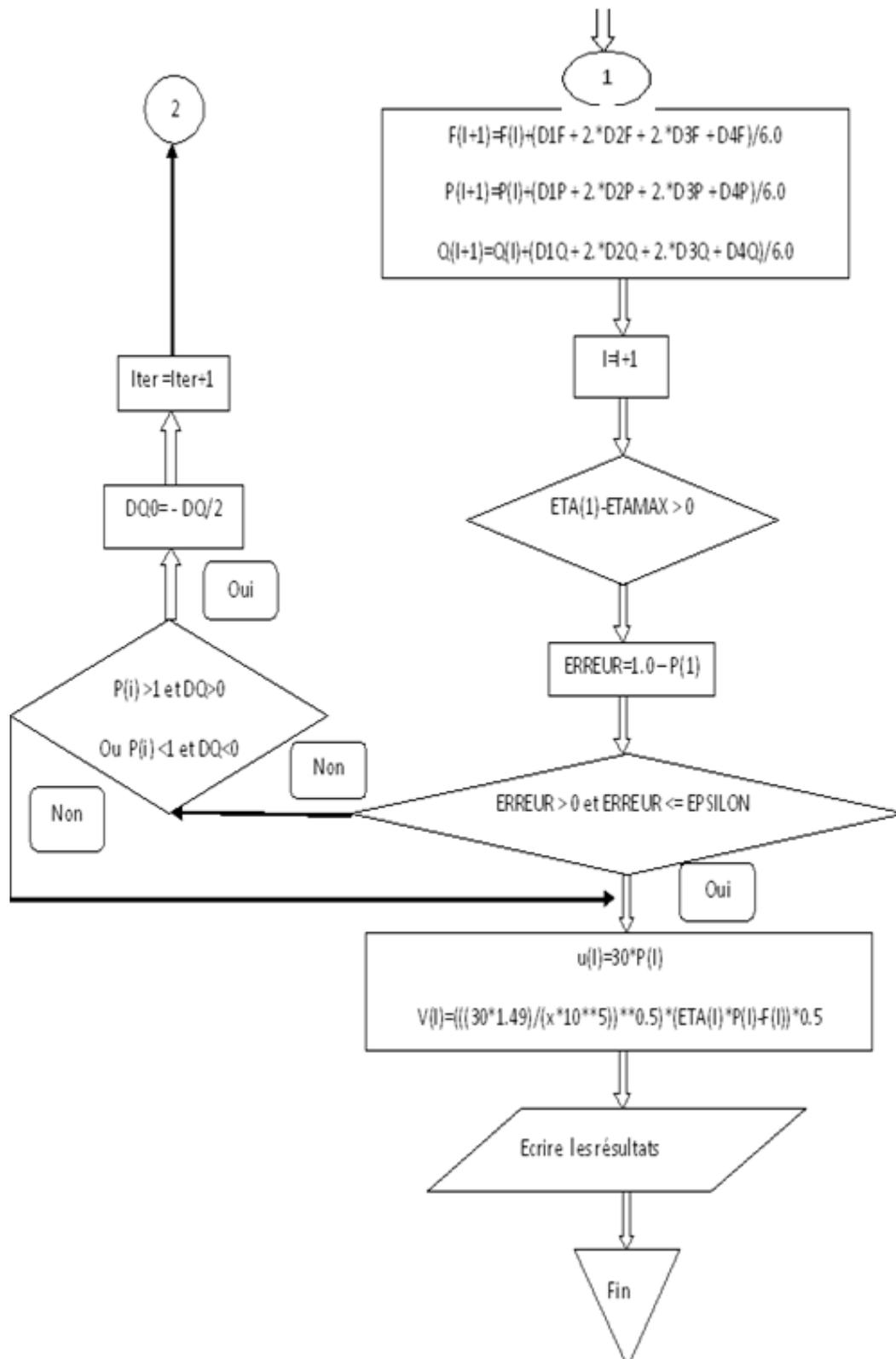
$$p_{i+1} = p_i + \frac{1}{6} (d_1 p_i + 2d_2 p_i + 2d_3 p_i + d_4 p_i)$$

$$q_{i+1} = q_i + \frac{1}{6} (d_1 q_i + 2d_2 q_i + 2d_3 q_i + d_4 q_i)$$

II.8.4 L'organigramme

On utilise pour l'obtenir des résultats Fortran, l'organigramme à dessous est expliquer les étapes de marche de programme.





## II.8.5 Les résultats

$X=0.1$  ; nombre de itérations = 51

$\eta$	$f$	$f'$	$f''$
.00	.0000000	.0000000	.3320574
.20	.0066411	.0664078	.3319840
.40	.0265602	.1327642	.3314700
.60	.0597351	.1989373	.3300793
.80	.1061088	.2647092	.3273894
1.00	.1655725	.3297801	.3230073
1.20	.2379496	.3937762	.3165893
1.40	.3229826	.4562618	.3078656
1.60	.4203219	.5167568	.2966636
1.80	.5295193	.5747581	.2829312
2.00	.6500257	.6297656	.2667518
2.20	.7811947	.6813102	.2483511
2.40	.9222916	.7289817	.2280920
2.60	1.0725074	.7724547	.2064549
2.80	1.2309788	.8115093	.1840069
3.00	1.3968098	.8460441	.1613606
3.20	1.5690965	.8760810	.1391284
3.40	1.7469517	.9017607	.1178767
3.60	1.9295269	.9233291	.0980869
3.80	2.1160316	.9411173	.0801267
4.00	2.3057483	.9555175	.0642350
4.20	2.4980417	.9669562	.0505209
4.40	2.6923630	.9758699	.0389739
4.60	2.8882502	.9826825	.0294853
4.80	3.0853229	.9877885	.0218729
5.00	3.2832759	.9915409	.0159086
5.20	3.4818699	.9942446	.0113436

Tableau. II.1 : Solutions de l'équation de Blasius.

A l'aide du logiciel Excel, et à partir des résultats précédents, nous traçons les courbes suivantes

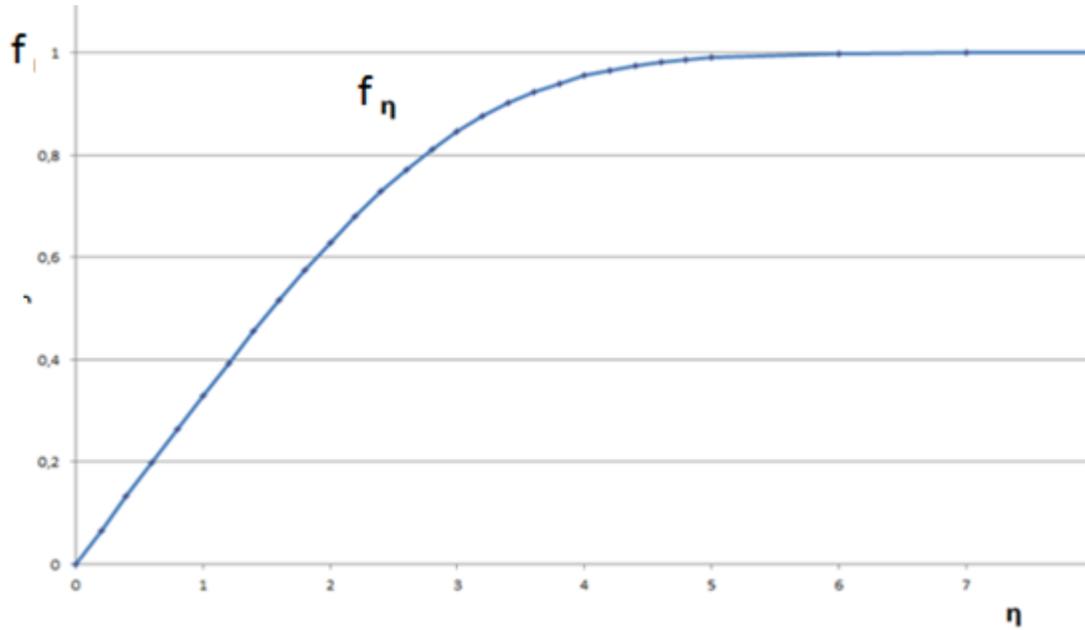


Fig. II.6 : La Solution de Blasius ( $u/U_0 = f(\eta)$ ).

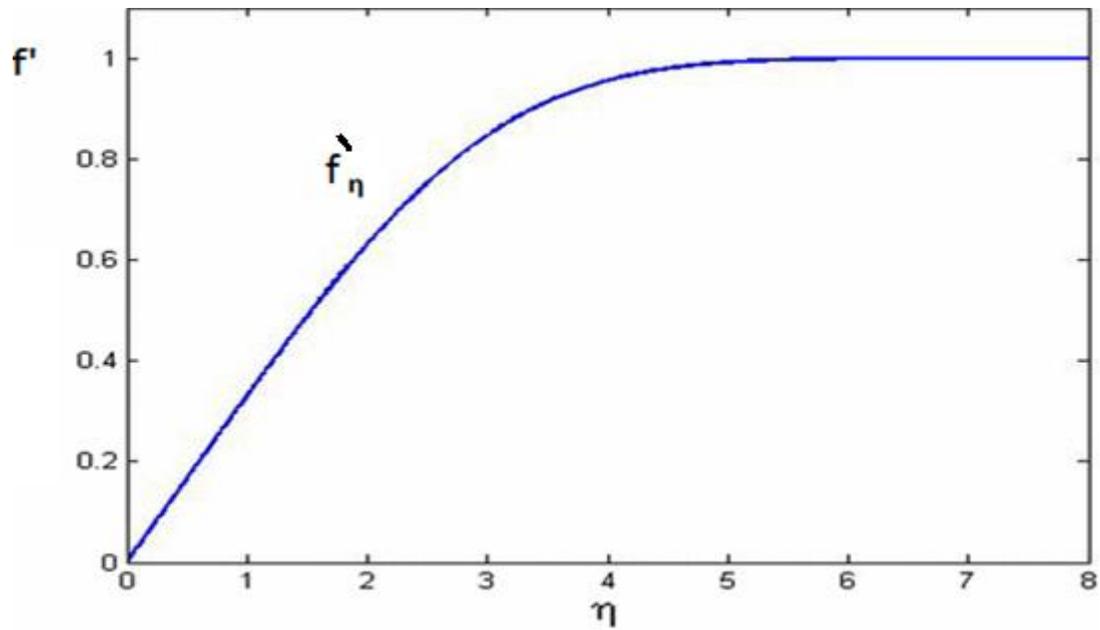


Fig. II.7 : La Solution de Blasius ( $\frac{df}{d\eta} = f'(\eta)$ ).

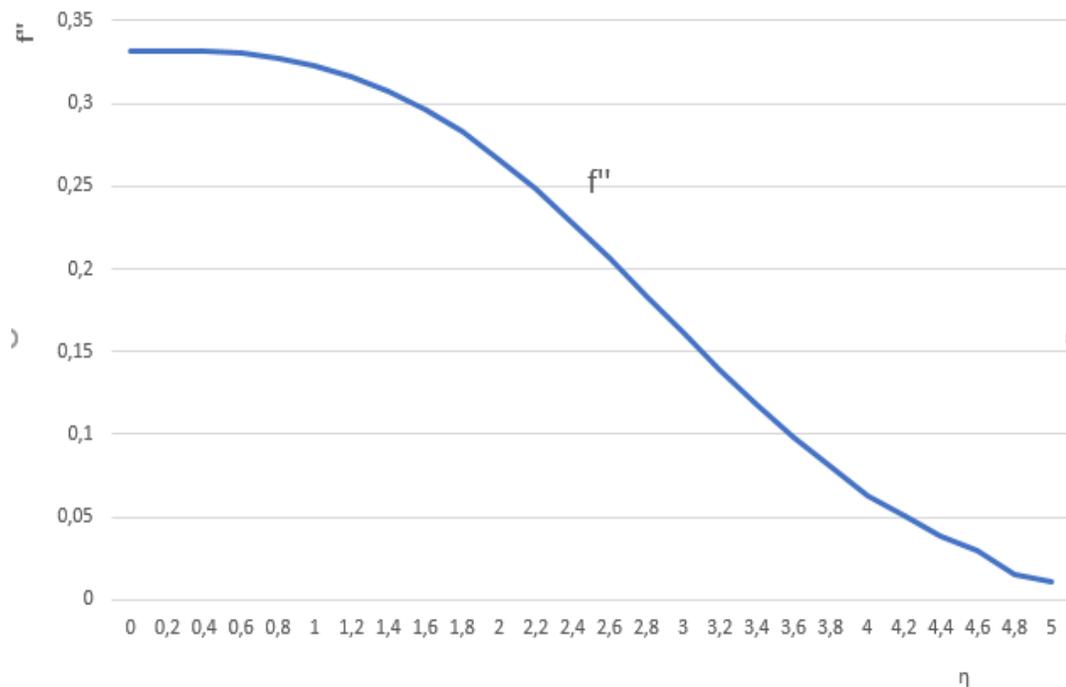


Fig. II.7 : La Solution de Blasius ( $\frac{d^2 f}{d\eta^2} = f''(\eta)$ ).

## II.9 Calcul de vitesse u et v

L'équation de Blasius (2.18) fournit une classe de solutions exactes des équations de la couche limite, mais ce ne sont pas des solutions analytiques. Il a donc fallu résoudre numériquement cette équation pour diverses valeurs de  $\eta$ . Un échantillon de résultats est présenté dans le tableau 2.2.

A partir des valeurs ci-dessus, on obtient :

- la composante longitudinale  $u$  de la vitesse, d'après (2.14) :

$$\frac{u}{U_0} = f'$$

- la composante transversale  $v$  (d'après 2.15) :

$$\frac{v}{U_0} = \frac{1}{2\sqrt{Re_x}} (\eta f' - f)$$

La plupart du temps, on ne parle pas beaucoup de cette composante  $v$  pour la simple raison qu'elle n'a pas un grand intérêt pratique, sauf si l'on veut aborder les écoulements sur

des surfaces poreuses (soufflage ou aspiration de la couche limite, séchage...) car alors on a  $V_p \neq 0$ .

Pourtant, l'examen de  $v$  est bien utile pour comprendre l'influence de la paroi sur la structure de l'écoulement, et pour apprécier la cohérence de la solution de Blasius. Cela mérite d'y consacrer quelques lignes.

La première chose visible sur l'expression (2.17) est que la propriété d'autosimilarité de  $u$  ne s'étend pas à la composante transversale de la vitesse, puisque  $v$  est une fonction de  $\eta$  et de  $x$ . Tant pis, c'est sans grande conséquence.

Ensuite, pour  $x$  fixé,  $v$  est une fonction monotone croissante de  $\eta$ . A la paroi, sa dérivée est nulle :  $\{(\eta f' - f)_{\eta=0}\} = 0$  Mais surtout,  $v$  tend vers une valeur finie  $V_0$  quand on s'éloigne de la plaque plane. Le calcul de (17) donne :

$$\frac{V_0}{U_0} = \frac{0.860}{\sqrt{Re_x}}$$

Ceci traduit une très légère déflexion de l'écoulement vers les  $y$  positifs, due au freinage imposé par la paroi. Cette déflexion s'estompe progressivement le long de la plaque puisque  $V$  varie comme  $1/\sqrt{x}$ .

Enfin, on vérifie l'approximation  $V \ll U$ , sauf au voisinage immédiat du bord d'attaque, où  $V \rightarrow \infty$ , ce qui signifie que la solution n'est pas valable à proximité de ce point singulier (comme les gradients sont beaucoup plus importants dans cette région, il faut utiliser les équations de Navier-Stokes sans approximation). Mais dès que le nombre de Reynolds local  $Re_x$  est supérieur à 2500 (ce qui est une valeur faible dans un écoulement externe), le rapport  $V_0/U_0$  devient inférieur à 2%.

- La vitesse  $U_0$  utilisée à cet exemple est 30 m/s

Numéro of itérations = 52

u	v
.0000000	.0000000
1.9922344	.4651902
3.9829260	.9304638
5.9681192	1.3948946
7.9412760	1.8569491
9.8934028	2.3145139
11.8132845	2.7649483
13.6878535	3.2051691
15.5027029	3.6317696
17.2427423	4.0411726
18.8929685	4.4298115
20.4393061	4.7943281
21.8694511	5.1317732
23.1736420	5.4397895
24.3452785	5.7167606
25.3813215	5.9619085
26.2824301	6.1753288
27.0528211	6.3579611
27.6998722	6.5114979
28.2335197	6.6382442
28.6655241	6.7409455
29.0086869	6.8226026
29.2760974	6.8862936
29.4804759	6.9350174
29.6336558	6.9715694
29.7462271	6.9984565

Tableau. II.2 : vitesses non dimensionnelles (u) et (v) en fonction de ( $\eta$ ).

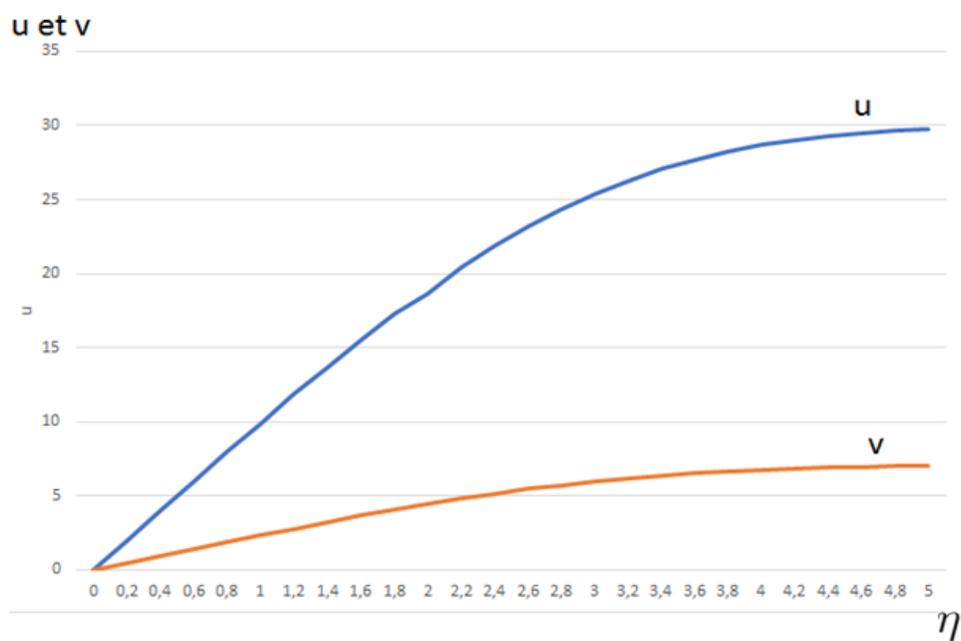


Fig.II.8 : vitesses dimensionnelles ( $u$ ) et ( $v$ ) en fonction de ( $\eta$ ).

III ) Chapitre III : LA COUCHE  
LIMITE LAMINAIR THERMIQUE  
SUR UNE PLAQUE PLANE

### III.1 Introduction

Le transfert thermique de chaleur est très important dans les processus à haute température, tels que les turbines à gaz, les centrales nucléaires et le stockage d'énergie thermique [27]. Plus récemment, le problème des couches limites d'eau et thermiques des fluides newtoniens a été discuté lorsque la surface de la plaque est chauffée par convection thermique. Des modèles ont été étudiés pour comparer les problèmes de transfert de chaleur [29] [28].

### III.2 La méthode de Balsius au cas thermique sur une plaque plan isotherme sans dissipation

On pose :  $\theta = \frac{(T-T_0)}{(T_s-T_0)}$

Dans ce cas, la plaque est maintenue en tout point à une température  $T_s$  (figure III.1). En utilisant les variables adimensionnelles  $\theta(\eta)$ .

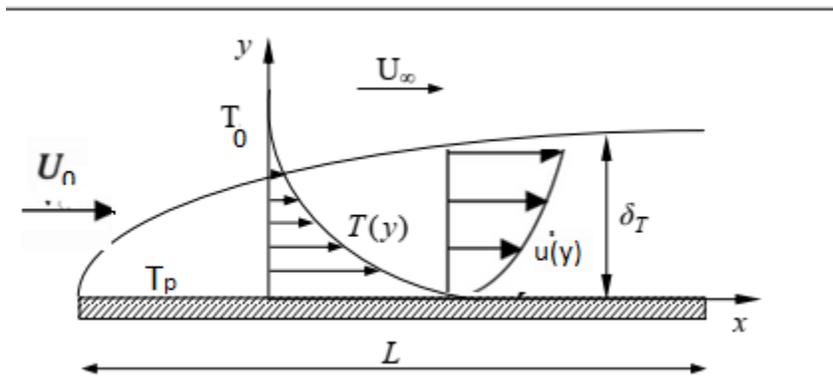


Fig. III.1 : Distribution de température sur une couche limite thermique laminaire le long d'une paroi isotherme.

### III.3 Bilan thermique

On se place dans les mêmes hypothèses que pour l'étude de la couche limite dynamique laminaire. L'équation du bilan énergétique est :

$$\rho \frac{DH}{Dt} = (\lambda T, i), i + \frac{Dp}{Dt} + \mathcal{Q} \quad (3.1)$$

Pour un fluide isovolume en écoulement bidimensionnel :

$$\Phi = \mu \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (3.2)$$

Or la couche limite dynamique on peut appliquer la formule de Bernoulli :  $\frac{Dp}{Dt} = -\frac{D}{Dt} \left( \rho \frac{U^2}{2} \right)$

Compte-tenu des hypothèses de couche limite, le terme prépondérant de  $\Phi$  est :

$$\Phi = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.3)$$

L'équation du bilan thermique s'écrit compte-tenu de la formule de Bernoulli :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( H + \frac{U^2}{2} \right) = (\lambda T, i), i + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.4)$$

Avec :  $H = Cp.T$

Faisons les hypothèses suivantes :

Fluides isovolume à propriétés physiques constants.

D'où :

$$\frac{D}{Dt} \left( T + \frac{U^2}{2Cp} \right) = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\mu}{\rho Cp} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.5)$$

$\alpha = \frac{\lambda}{\rho Cp}$  Étant la diffusivité thermique

$$\text{Or } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\frac{D}{Dt} \left( T + \frac{U^2}{2Cp} \right) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho Cp} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.6)$$

- Cette équation est valable pour un fluide isovolume à propriétés physiques constantes, même pour de grandes vitesses et un gradient longitudinal de pression.
- $\frac{\mu}{\rho Cp} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$  Est négligeable devant  $D \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$  pour un fluide peu visqueux ou des vitesses faibles. La conduction est prépondérante devant la dissipation. Souvent

$\frac{U^2}{2 c_p}$  est négligeable devant  $T$ . L'expérience montre alors qu'il en est de même pour les dérivés particuliers.

- Des deux premières remarques on en déduit que pour un fluide isovolume à propriétés physique constantes en mouvement permanent de vitesse modérée, l'équation du bilan énergétique s'écrit :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

### III.4 Plaque plane isotherme sans dissipation ( $T_s = cte$ )

La vitesse extérieure constante donc  $\frac{D}{Dt} \left( \frac{U^2}{2c_p} \right) = 0$  On suppose négligeable.

La température de fluide loin de la plaque plan est constante de mémé que celle de la plaque.  $U_0$  étant constant,  $u$  et  $v$  sont donnée par la solution de Blasius réduit à :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \dots \text{Est linéaire en } (T)$$

- Passons maintenant au problème thermique :

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_s - T_0}$$

$$T_s \leq T \leq T_0$$

L'équation devient :

$$u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \begin{cases} \Theta(y=0) == 0 \\ \Theta(y=\infty) == 1 \\ \frac{\partial \Theta}{\partial y} \Big|_{y=\infty} = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x} \Theta' \\ \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \Theta' \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \Theta' \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \right) = \Theta'' \frac{U_0}{\nu x} \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\text{de (2.14a et 2.14b) on a : } \begin{cases} u = U_0 f'(\eta) \\ v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\vartheta U_0}{x}} (\eta f' - f) \end{cases} \quad (3.9)$$

$$-U_0 f' \theta' \frac{1}{2x} \eta + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\vartheta U_0}{x}} (\eta f' - f) \cdot \theta' \sqrt{\frac{U_0}{x \vartheta}} = \alpha \cdot \theta'' \frac{U_0}{\vartheta x} \quad (3.10)$$

$$\text{Donc } \theta'' + \frac{1}{2} \frac{\vartheta}{\alpha} f \cdot \theta' = 0 \quad (3.11)$$

$$Pr = \frac{\vartheta}{\alpha} = \frac{Cp\mu}{\lambda}$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho \cdot Cp}$$

Alors :

$$\theta'' + \frac{1}{2} Pr \cdot f \theta' = 0 \quad (3.12)$$

On peut intégrer cette relation en remarquant que  $f f'' + 2f''' = 0$  (solution de Blasius)

$$\text{Et de cette relation on a : } f = -\frac{2f'''}{f''}$$

Alors :

$$\frac{\theta''}{\theta'} = Pr \frac{f'''}{f''} \quad (3.13)$$

La condition aux limites :

$$\text{Sur la plaque (y=0) : } \eta = 0 ; T = T_s \Rightarrow \theta = 1$$

$$\text{Loin de plaque (y=\infty) : } \eta \Rightarrow \infty , T \Rightarrow T_0 \Rightarrow \theta \Rightarrow 0$$

$$\theta(\eta) = \frac{\int_{\infty}^{\eta} [f''(\eta)]^{Pr} d\eta}{\int_{\infty}^0 [f''(\eta)]^{Pr} d\eta} \quad (3.14)$$

$$\theta(\eta) = \frac{[f''_0(\eta)]^{Pr}}{\int_{\infty}^0 [f''(\eta)]^{Pr} d\eta} \quad (3.15)$$

- $Pr > 1$  (liquides) l'épaisseur ( $\Delta$ ) de la couche limite thermique est inférieure à l'épaisseur ( $\delta$ ) de la couche limite dynamique.
- $Pr < 1$  l'épaisseur ( $\Delta$ ) de la couche limite thermique est supérieure à l'épaisseur ( $\delta$ ) de la couche limite dynamique.

Dans le cas de gaz les frontières des deux couches limites sont pratiquement confondues

La condition ( $0.6 < Pr < 15$ ) étant très peu restrictive, cette propriété s'applique à une grande majorité de fluides (en exceptant évidemment les fluides complexes).

La figure (III.2), présente développement d'une couche limite dynamique sur une plaque plane, en écoulement laminaire.

### III.5 Evaluation du coefficient de convection $h$ entre la plaque et le fluide

#### III.5.1 Transfert local

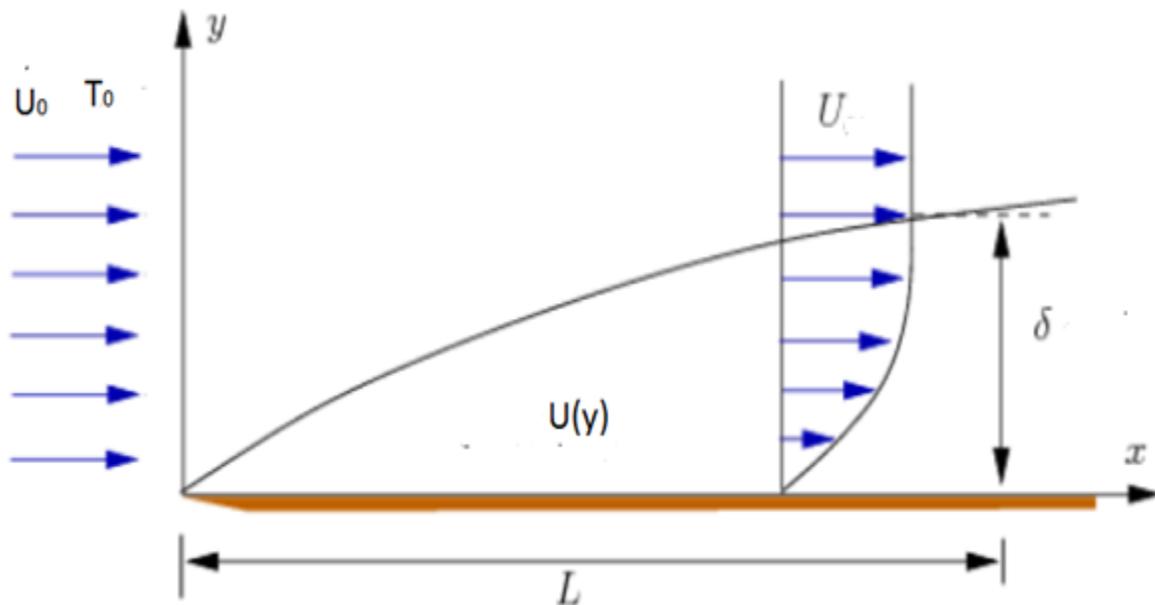


Fig : III.2: développement d'une couche limite dynamique sur une plaque plane.

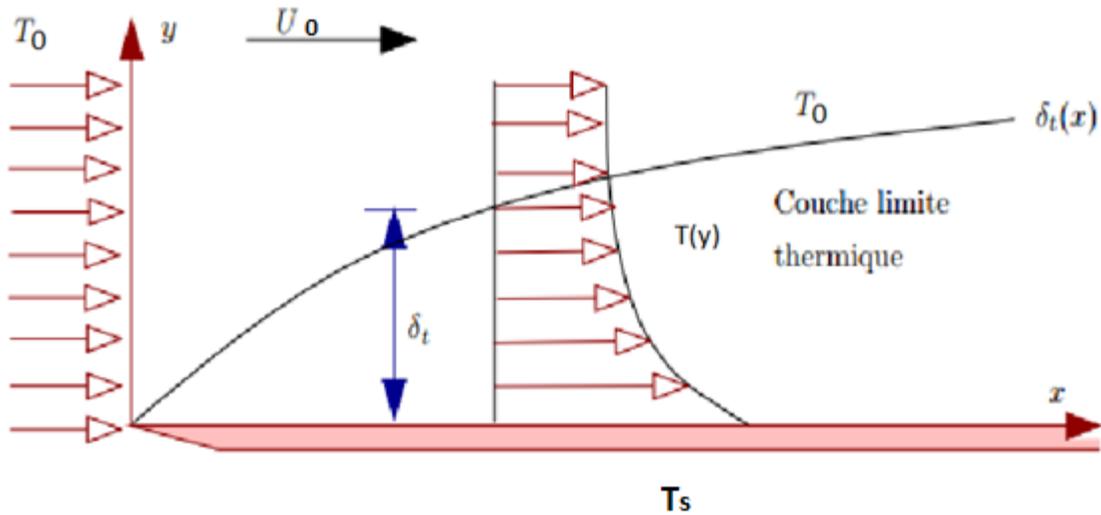


Fig : III.3 : développement d'une couche limite thermique sur une plaque plane.

Les point de La plaque  $M(x,y)$  avec  $y=0$ . Donc reste la cordonnée  $x$  et la largeur de la plaque  $\vec{oz}$ . La densité de flux  $q_0$  ( $w/m^2$ ) dirigé suivant  $\vec{oy}$  et donné par la loi :

$$q_0 = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Cette chaleur est échangée par condition car la vitesse du fluide sur la

plaque est nulle ( $u=v=0$ ) donc ya pas de convection.

Exprimons  $\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial T}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{3.16}$$

$$= (T_s - T_0) \cdot \theta'(0) \cdot \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \tag{3.17}$$

Donc :

$$q_0 = -\lambda_f \cdot (T_s - T_0) \cdot \theta'(0) \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \tag{3.18}$$

- Pour calculer  $\theta'(0)$  il faut remplacer dans  $\theta'(\eta)$  :

$$\text{De l'équation de : } \theta(\eta) = \frac{[f_0''(\eta)]^{Pr}}{\int_0^\infty [f''(\eta)]^{Pr} d\eta} \tag{3.20}$$

$$\text{On a : } \theta'(\eta) = a \cdot f''^{Pr}; \text{ si } Pr=1 \quad \theta'(\eta) = a f''(\eta) \text{ et } \theta'(0) = a f''(0) \tag{3.21}$$

$$\text{Or } \theta = \frac{T-T_0}{T_S-T_0} \quad \begin{cases} \theta(\infty) = 0 \\ \theta(0) = 1 \end{cases}$$

$$\theta'(\eta) = a \int f''^{Pr} d\eta ; \text{ Intégrer entre } \infty \text{ et } \eta$$

$$\theta(\eta) - \theta(\infty) = a \int_{\infty}^{\eta} f''^{Pr} d\eta \quad \text{Et comme } \theta(0) = 1$$

$$\text{Donc } a \int_{\infty}^{\eta} f''^{Pr} d\eta = 1 \quad (3.22)$$

$$\text{Car} \quad a = \frac{1}{\int_{\infty}^0 f''^{Pr} d\eta}$$

Si  $Pr=1$

$$a = \frac{1}{\int_{\infty}^0 f'' d\eta} = \frac{1}{[f']_{\infty}^0} = \frac{1}{f'(0)-f'(\infty)} = -1 \quad (3.23)$$

Revenons à :

$$\theta'(\eta) = a f''(\eta) = -f''(\eta) \quad (3.24)$$

$$\text{Pour } y = 0, \eta = 0 \quad \theta'(0) = -f''(0) = -0.332$$

Pour  $Pr \neq 1$  on donne l'approximation :

- pour  $(0.6 < Pr < 15) \rightarrow \theta'(0) = -0.332Pr^{1/3}$
- pour  $Pr \rightarrow 0 \rightarrow \theta'(0) = -0.564Pr^{1/2}$
- pour  $Pr \rightarrow \infty \rightarrow \theta'(0) = 0.339Pr^{1/3}$

$$\text{Pour les fluide utilisée } \begin{cases} \text{eau } Pr = 6.98 \\ \text{huile } Pr = 1.05 \\ \text{air } Pr = 0.725 \end{cases}$$

Ces fluides sont classés dans le premier cas :  $\theta'(0) = -0.332Pr^{1/3}$

Revenons a :  $q_0 = -\lambda_f \cdot (Ts - T_0) \cdot (-0.332Pr^{1/3} \sqrt{\frac{U_0}{\partial x}})$  c'est l'expression de la densité de flux en fonction de x. Supposant que ce flux est échangé par convection.

Alors cette densité sera équivalente à :

$$q_0 = h_x(Ts - T_0) \text{ Sans tenir compte de la surface car } q_0 \text{ est en } w/m^2.$$

Alors :

$$h_x = \frac{q_0}{(Ts - T_0)} = \lambda_f \cdot 0.332Pr^{1/3} \sqrt{\frac{U_0}{\partial x}} \quad (3.25)$$

En peut tracer  $hx$  en fonction de x pour les trois fluides (eau, huile et air).

En peut écrire aussi  $hx$  en fonction de  $Re_x$  pour les trois fluides :

$$hx = \frac{\lambda_f \cdot 0.332Pr^{1/3} Re_x^{1/2}}{x} \quad (3.26)$$

Et le nombre de Nusselt :

$$Nu_x = \frac{hx}{\lambda} = 0.332Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \quad (3.27)$$

### III.5.2 Transfert global pour toute la plaque

Pour tout la plaque ( $L \times l$ ) soit la quantité totale échangé  $Q = h_{moy}S(Ts - T_0)$  Avec S représente la surface perpendiculaire à l'axe  $\vec{oy}$  de la plaque.

$S=L \times l$  , si on prend la largeur l une unité, ( $s=1 \times L$ ) et :

$$h_{moy} = \frac{Q}{(Ts - T_0) \cdot L} \quad (3.28)$$

Calculons :

$$Q = \int_0^L q_0 dx = \int_0^L h_x(Ts - T_0) dx \quad (3.29)$$

Donc

$$\begin{aligned} h_{moy} &= \frac{1}{L} \cdot \int_0^L h_x dx = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L \lambda_f 0.332 Pr^{1/3} \sqrt{\frac{U_0}{\vartheta x}} dx \\ &= \frac{\lambda \cdot 0.332 Pr^{1/3} \sqrt{U_0}}{\sqrt{\vartheta}} \cdot \int_0^L x^{-1/2} dx \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$h_{moy} = \frac{0.664 \cdot \lambda \cdot Pr^{1/3}}{L} \cdot \sqrt{\frac{U_0 L}{\vartheta}} \quad (3.31)$$

$$\text{Ou en : } h_{moy} = 0.664 \cdot \lambda \cdot Pr^{1/3} \sqrt{\frac{U_0}{\vartheta L}} = 2hx \text{ (} x = L \text{)} \quad (3.32)$$

$$Nu_{moy} = h_{moy} \frac{\lambda}{L} = 2Nu \text{ (} x = L \text{)} \quad (3.33)$$

On peut présentons  $h_{moy}$  et  $Nu_{moy}$  en fonction de  $L$  ( $Pr_1$ .  $Pr_2$ .  $Pr_3$ ), ou en fonction de Reynolds.

$$h_{moy} = \frac{0.664 \cdot \lambda \cdot Pr^{1/3}}{L} \cdot Re_L^{1/2} \quad (3.34)$$

$$Nu_{moy} = 0.664 Pr^{1/3} Re_L^{1/2} \quad (3.35)$$

Une plaque de longueur  $L$ , on définit l'échange moyen : (par unité de largeur)

$$h_{moy} = \frac{Q}{(T_s - T_0)L} \quad \text{et} \quad Nu_{moy} = \frac{h_{moy} L}{\lambda}$$

D'où

$$Nu_{moy} = 0.664 Pr^{1/3} Re_L^{1/2}$$

$$\text{Avec } Re_L = \frac{U_0 L}{\vartheta}$$

Donc  $Nu_{moy}$  est le double de  $Nu$  local a la distance  $L$ .

$$Nu_{moy} = 2Nu(L) \quad (3.36)$$

$$\text{De (3.31) } h_{moy} = 0.664 \frac{\lambda}{L} Pr^{1/3} \quad (3.37)$$

$$\text{Alors : } h_{\text{moy}} = 2h_{(L)} \quad (3.38)$$

### III.6 Le nombre de Prandtl

- A partir des tables de données thermos physiques, on a :

#### III.6.1 Cas de l'eau

Temperature °k	$\mu$ [kg/m. s]	$\lambda$ [w/m. k]	Cp [j/kg. k]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}$
273	$1,793 \times 10^{-3}$	0.57	4217	1017	13.26
293	$1,002 \times 10^{-3}$	0.6	4182	998	6.98
373	$0,2818 \times 10^{-3}$	0.68	4216	883	1.74

Tableau. III.1 : caractéristique de l'eau.

#### III.6.2 Cas de l'huile

Temperature °k	$\mu$ [kg/m. s]	$\lambda$ [w/m. k] à:	Cp [j/kg. k]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}$
273	0.2	0.17	1977	920	0.68
293	0.18	0.167	2000	913	1.05
373	0.081	0.163	2010	898	6.95

Tableau. III.2 : caractéristique de l'huile.

#### III.6.3 Cas de l'air

Temperature °k	$\mu$ [kg/m. s]	$\lambda$ [w/m. k]	Cp [j/kg. k]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}$
273	$1.71 \cdot 10^{-5}$	0.023	1006	1.292	0.747
293	$1.8 \cdot 10^{-5}$	0.025	1007	1.204	0.725
373	$2.2 \cdot 10^{-5}$	0.03	1009	0.89	0.73

Tableau. III.3 : caractéristique de l'air.

- En pose

Pour l'eau :  $Pr_1, Nu_1$

Pour l'huile :  $Pr_2, Nu_2$

Pour l'air :  $Pr_3, Nu_3$

- Le cas standard de température (20°C) et de pression de (1 atm) les valeurs de Prandtl sont :

$$Pr_1 = 6.98$$

$$Pr_2 = 1.05$$

$$Pr_3 = 0.725$$

### III.7 L'évolution du Coefficient d'échange par convection (h) avec "x"

A l'aide du logiciel Matlab et l'origine, nous pouvons proposer à partir des résultats théoriquement, les deux corrélations suivantes :

$$De : hx = 0.664 \frac{\lambda}{L} Pr^{1/3}$$

Pour  $Re_x = 1000$

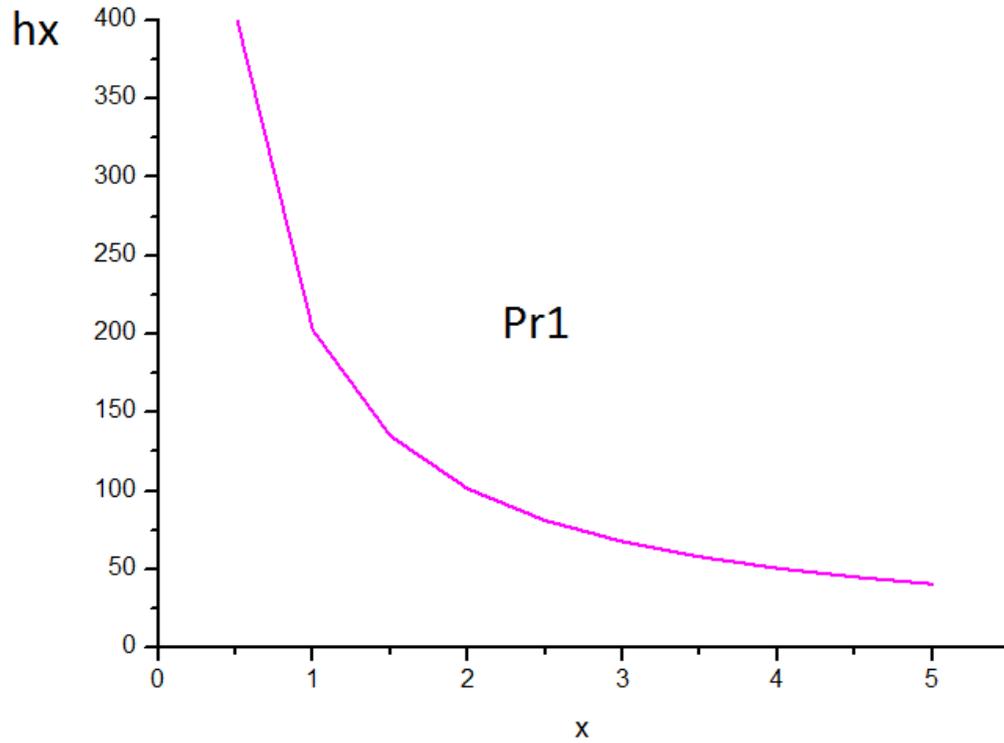


Fig :III.4 : L'évolution du coefficient d'échange ( $h$ ) en fonction de  $x$  pour l'eau.

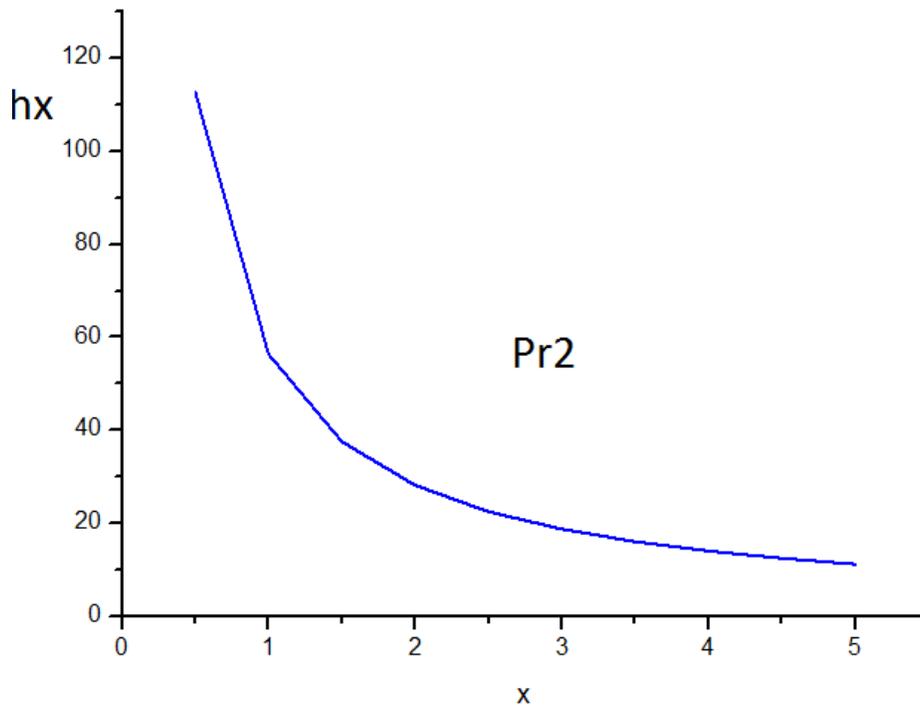


Fig :III.5 : L'évolution du coefficient d'échange ( $h$ ) en fonction de  $x$  pour l'huile.

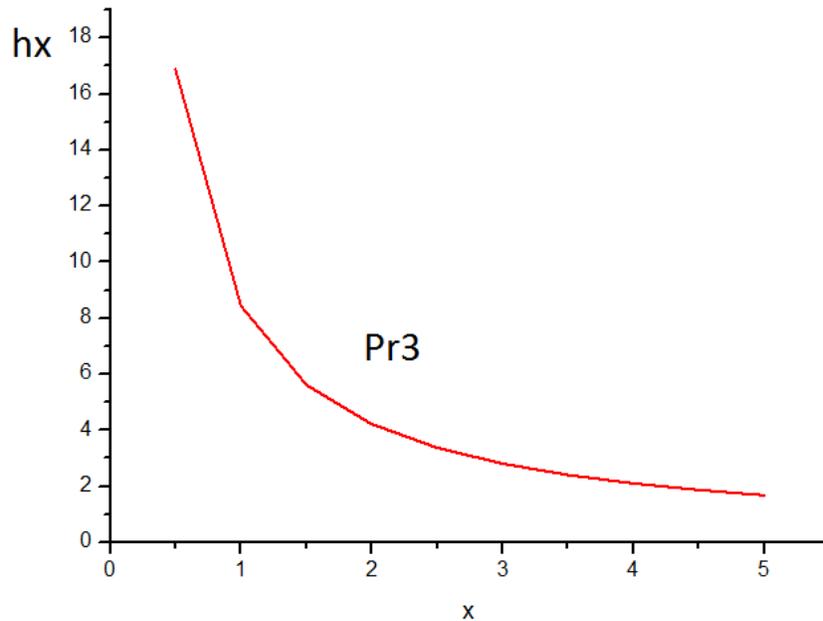


Fig :III.6 : L'évolution du coefficient d'échange ( $h$ ) en fonction de  $x$  pour l'air.

### III.8 L'évolution du Coefficient d'échange par convection ( $h$ ) avec le nombre de Reynolds

A l'aide du logiciel Matlab et l'origine, nous pouvons proposer à partir des résultats théoriquement, les deux corrélations suivantes :

$$h_{moy} = \lambda_f \cdot 0.332 Pr^{1/3} Re x^{1/2} \dots \dots \dots (3.15)$$

$$Nu_{moy} = \frac{h_{moy} L}{\lambda} = 0.332 Pr^{1/3} Re x^{1/2} \dots \dots \dots (3.16)$$

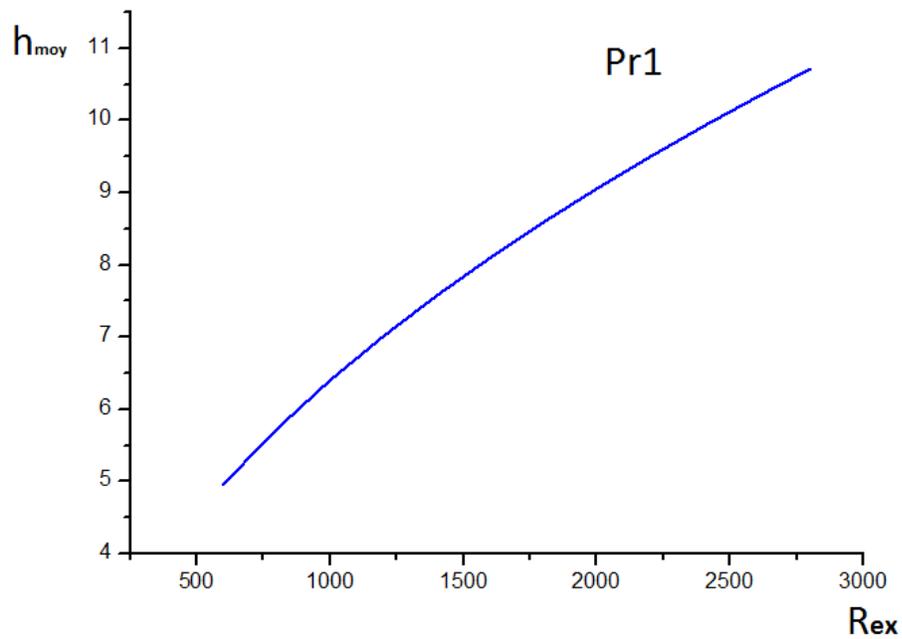


Fig :III.7 : L'évolution du coefficient d'échange ( $h$ ) en fonction de Reynolds pour l'eau.

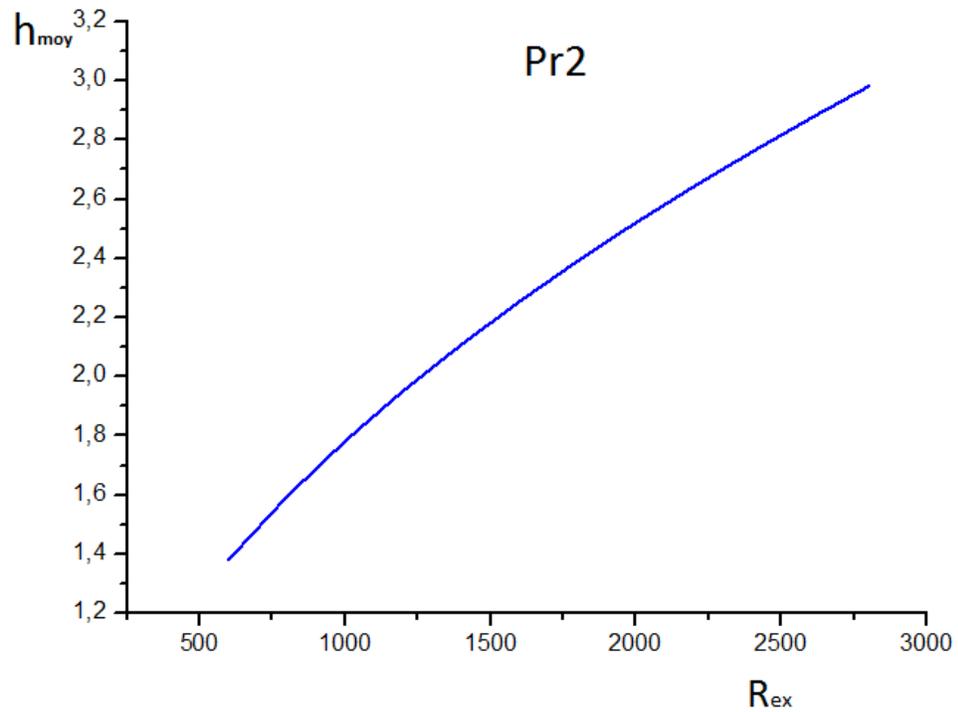


Fig : III.8 : L'évolution du coefficient d'échange ( $h$ ) en fonction de Reynolds pour l'huile.

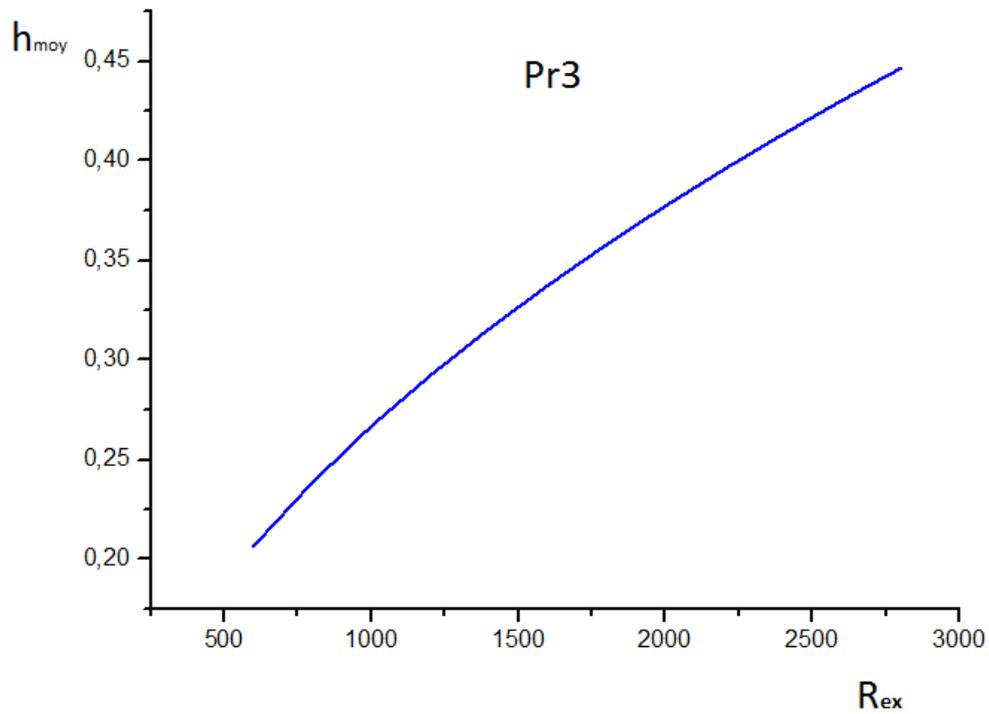


Fig :III.9 : L'évolution du coefficient d'échange ( $h$ ) en fonction de Reynolds pour l'air.

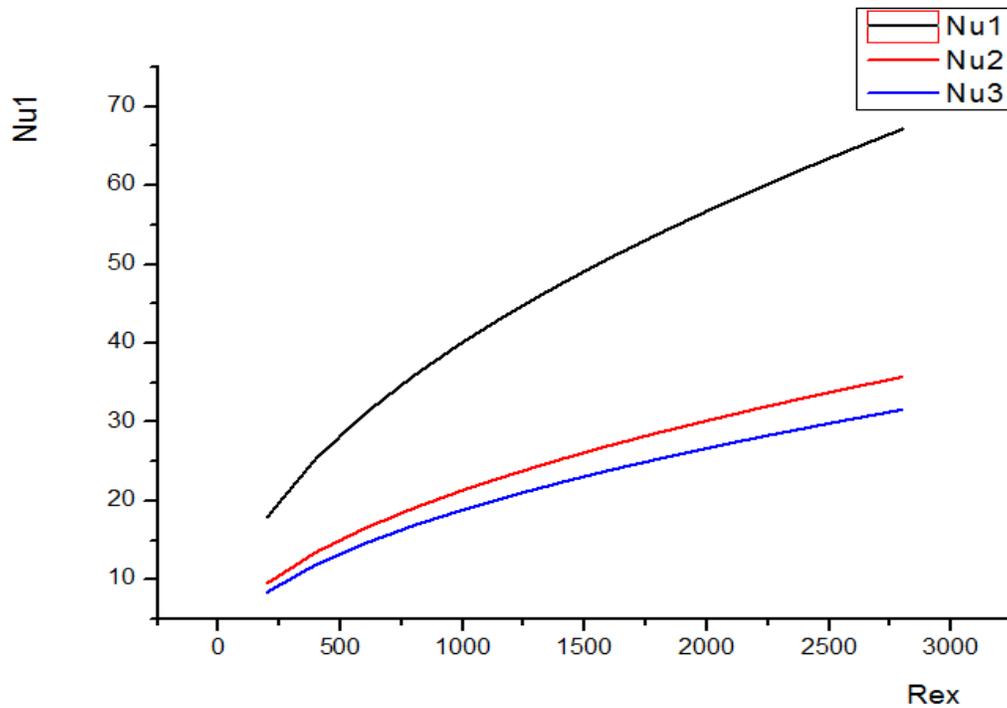


Fig :III.6 : L'évolution du Le nombre de Nusselt en fonction de Reynolds.

Il a été constaté que le coefficient de transfert convectif ‘h’ est augmentait pour les trois fluide (eau, huile, air) avec le nombre de Reynolds., aux mêmes temps nous remarquont augmentation du nombre de nusselt ave le nombre de Reynolds. Cette augmentation de h et de Nu est principalement liée à l'effet a caractéristiques des fluides (Pour, Rex).

# Conclusion générale

---

## Conclusion générale

Ce travail est consacré à une étude Théorique du phénomène de la convection en régime laminaire sur une plaque plane. Ce phénomène est très important car il peut avoir lieu dans plusieurs cas Dans nos vies quotidiennes. Tels que l'impact de l'air sur les murs de la maison et la surface du véhicule ... etc. est considérée dans ce travail afin de déterminer le coefficient d'échange thermique par convection  $h$ . Apprêt L'étude de la couche limite laminaire stable sur une plaque plane sous une condition limite de surface de convection est étudiée. Les transformations de similarité sont utilisées pour réduire les équations aux dérivées partielles en équations différentielles ordinaires. L'effet du nombre de Reynolds, du paramètre de convection et du paramètre de glissement sur le coefficient de convection  $h$  et le nombre de Nusselt présenté graphiquement et discuté. Une étude numérique a été réalisée pour résoudre le problème de l'écoulement d'une couche limite sur la plaque avec une condition limite de surface convective et un effet de glissement en utilisant une méthode de Blasius à l'aide de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. L'étude menée a abouti aux résultats suivants :

- 1- Le coefficient de convection  $h$  des fluides utilisés est toujours augmenté avec l'augmentation du nombre de Reynolds.
- 2- Il y a une différence significative dans le coefficient de cette augmentation en raison de la différence dans le nombre de Prandtl de ces fluides.
- 3- Le nombre de Nusselt augmente également avec le nombre de Reynold car il est lié au coefficient de convection  $h$ .
- 4 - Il existe une grande variation dans les courbes d'évolution du coefficient 'h'. Sous l'effet de la conductivité thermique. Sur le nombre de 'Prandtl'
- 5 - le coefficient de transfert convectif 'h' est diminué pour les trois fluide (eau, huile, air), en fonction de la longueur de la plaque X.

### Références

- [1] L. Bordja, "Transfert Thermique", Polycopié de Cours, UNIVERSITE L'ARBI BEN M'HIDI, 2013.
- [2] A. Haddad, "TRANSFERTS THERMIQUES", COURS DE BASE, Dar -EI- Djazairia, Alger, 2001.
- [3] R. Ben.Hamouda, "mécanique des fluides : introduction à la mécanique des fluides", université virtuelle de Tunis.
- [4] C. Ancey, "Chapitre 6 : écoulements laminaires et turbulents : Mécanique des fluides" école polytechnique fédérale de Lausanne.
- [5] H. Berkane, "influence de l'effet thermique sur les caractéristiques de la couche limite laminaire sur une paroi lisse", Mémoire de Magistère, Université Biskra, 2005.
- [6] <https://www.slideserve.com/elden/les-fluides>, site web, consulté le :26/05/2019.
- [7] <http://public.iutenligne.net/mecanique>, site web, consulté le :26/05/2019.
- [8] M. Elguerri, "MECANIQUE DES FLUIDES THEORIE ET APPLICATIONS", Polycopié de Cours destiné aux étudiants de 2ème année Licence, UNIVERSITE DE TIARET, 2014/15.
- [9] M. Beriache, "MECANIQUE DES FLUIDES", Cours 2ème année licence, Université de Chlef, 2016.
- [10] Ph. Marty, "MECANIQUE DES FLUIDES", Master 1 GDP, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2012/13.
- [11] A. Kebiche, "Fluides newtoniens et non newtoniens", Au profit des étudiants de Licence et Master en spécialité Physique, 2018.
- [12] Y.A.Çengel, R.H.Turner, J.M.Cimbala. "Fundamentals of thermal-fluid sciences", Vol. 703. New York : McGraw-Hill, 2001.

- [13] A. Zine, “Détermination du champ de températures dans une cavité pleine en utilisant la méthode mixte volumes finis – éléments finis”, Mémoire de Magistère, Université Ouargla ,2004.
- [14] K. Benoumessad, “Simulation des structures de vitesses dans un écoulement non permanent dans un canal non prismatique et non linéaire”, Mémoire de Magister, Université Hadj Lakhdar Batna ,2012.
- [15] H.T. Bui, ” Modélisation et optimisation de l’assise d’un fauteuil roulant pour handicapés afin d’améliorer le confort du point de vue médical”, THÈSE de doctorat, UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE,2018.
- [16] [help.solidworks.com](http://help.solidworks.com), site web , Consulté le 03.04.2019.
- [17] Z. Kebiche, ” Fluides newtoniens et non newtoniens”, Au profit des étudiants de Licence et Master en spécialité Physique, 2018.
- [18] R.B. Bird, E. Warren, E. Stewart, and N. Lightfoot, “Transport Phenomena”, 2nd Edition, John Wiley and Sons,2002.
- [19] O. Hamdi, “Etude de l’écoulement instationnaire d’un fluide Newtonien dans un domaine cartésien en présence d’un gradient de pression”, Mémoire de Magistère, Université de Biskra ,2012.
- [20] Y. Jannot, ”TRANSFERTS THERMIQUES”, 2ème année, Ecole des Mines Nancy,2012
- [21] Jacques Padet, ” FLUIDES EN ÉCOULEMENT Méthodes et modèles”, Seconde édition revue et augmentée.
- [22] [www.grc.nasa.gov](http://www.grc.nasa.gov), site web, consulté le :10.06.2019
- [23] K. Gemba, ” Measurement of Boundary Layer on a Flat Plate”, California State University, Long Beach, March 25, 2007.
- [24] C. Y. Chuen. "An Introduction to Computational Fluid Mechanics". Seminole Publishing Company Boulder, Colorado, 1983.

- [25] P.P. Puttkammer, "Boundary Layer over a Flat Plate" BSc Report, university of TWENTE, Enschede, 2013.
- [26] K. Vafai, "Handbook of Porous Media", 2nd edition, Taylor and Francis, New York, 2005.
- [27] R.C. Bataller "Radiation Effects for the Blasius and Sakiadis flows with a Convective Surface Boundary Condition", Appl. Math. Comput. 206, pp. 832-840, 2008.
- [28] E. Magyari, "The Moving Plate Thermometer", Int. J. Therm. Sci., 47, pp. 1436-1441, 2008.
- [29] A. Aziz, "A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition". vol 14, pp. 1064-1068, 2009.
- [30] F. Ayad, T. Mohamadi "Etude de l'influence des effets de flottabilité thermique et massique sur l'écoulement impactant sur une paroi chauffée", mémoire de Master, Université Abderrahmane Mira Bejaia, 2017.

### ملخص

- الهدف من هذه المذكرات هو دراسة تغيير معامل الحمل الحراري "h" عند تعديل خصائص سائل لزج في حقل ثنائي الأبعاد بسرعة ثابتة إلى ما لا نهاية.
- سمحت لنا التقديرات التحليلية والعديدية بالعثور على العلاقة بين عدد "Prandtl" من السائل ومعامل h. كذلك ، العلاقة بين عدد "Prandtl" وعدد "Nusselt".
  - هناك تباين كبير في منحنيات تطور المعامل 'h'. بسبب تأثير التوصيل الحراري. على عدد "Prandtl"
  - يتناقص معامل الحمل الحراري للسوائل الثلاثة (الماء ، الزيت ، الهواء) ، بدلالة طول اللوحة X.

### Résumé

L'objectif de cette mémoire est d'étudier le changement de coefficient de convection "h" lors de la modification des propriétés d'un liquide visqueux dans un champ 2D à vitesse constante à l'infini.

- Les estimations analytiques et numériques nous ont permis de trouver la relation entre le nombre Prandtl de fluide et le coefficient h. En outre, la relation entre le nombre de « Prandtl » et le nombre de "Nusselt".
- Il y a une grande variation dans les courbes d'évolution du coefficient 'h'. En raison de l'effet de conductivité thermique. Sur le nombre de 'Prandtl'
- le coefficient de transfert convectif 'h' est diminué pour les trois fluide (eau, huile, air), en fonction de la longueur de la plaque X.

### Abstract

The objective of this study is to determine the effect of the change of properties of the viscous fluid in a two-dimensional field at constant speed at infinity on the convection coefficient 'h'.

- Analytical and numerical approximations allowed us to find the relation between the Brant number and the coefficient 'h'. Also, the relation between the number of 'Prandtl' and 'Nusselt'.
- There is a large variation in the evolution curves of the coefficient 'h'. due to the effect of thermal conductivity. On the Numbers of 'Prandtl'
- the convective transfer coefficient "h" is reduced for the three fluids (water, oil, air), as a function of the length of the plate X.

