



Université Mohamed Khider de Biskra  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Mécanique

# MÉMOIRE DE MASTER

**Domaine : Sciences et Techniques**

**Filière : Génie Mécanique**

**Spécialité : Energétique**

Réf. : .....

---

Présenté et soutenu par :  
**ARBI abd elghani**

Le : mardi 9 juillet 2019

## **Etude de la conduction de la chaleur, application de la méthode de volumes finis à la conduction thermique dans le sol**

---

### **Jury :**

Mr	ADNANE LABED	Pr	Université de Biskra	Président
Mr	ABDELOUAHAD ALIOUALI	MCB	Université de Biskra	Encadreur
Mr	MOHAMED SAID CHABBAH	Pr	Université de Biskra	Examineur

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## *DEDICACES*

*Je Dédie la fruit de mes études à:*

- ✓ *Mes parents.*
- ✓ *Mon frère et masœur.*
- ✓ *Toute ma famille et à mes amis.*

*ABD EL GHANI ARBI*

# Remerciements

*Avant tout, je dois remercier Dieu le tout puissant qui m'a*

*Donné la force pour réaliser ce travail.*

*Le grand merci à mon encadreur Dr. **ABDELOUAHAD ALIOUALI** pour son aide durant la réalisation de ce travail.*

*Je tiens également à remercier les membres du jury*

*Dr. **HAMZA BENTARAH ET MOHAMED SAID CHABAH** pour*

*l'honneur Qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail.*

*Je remercie aussi l'ensemble des enseignants du département de*

*Génie Mécanique, de leur contribution dans ma formation.*

# sommaire

Liste des tableaux et des figures

Nomenclature

Introduction générale

## Chapitre I

I.1 Introduction	1
I.2 Analyses des travaux effectués	1

## Chapitre II

II.1 Introduction	9
II.2 Généralités de la conservation l'énergie	9
II.3 Les principaux modes de transfert de chaleur	9
II.3.1 conduction	9
II.3.2 Transfert de chaleur par convection	10
II.3.3 Transfert de chaleur par rayonnement	11
II.4 Equation de conservation de l'énergie cas d'un solide	11
II.5 Forme intégrale ou globale de la loi de conservation	12
II.6 Forme locale de l'équation de conservation de la chaleur	13
II.7 Cas générale de conduction en régime périodique et méthode de résolution analytique	14
II.8 Application au cas de la conduction thermique du sol	16
II.9 Détermination de la température de la surface du sol	18

## Chapitre III

III.1 Introduction	21
III.2 Présentation générale	21
III.2.1 Méthodologie d'application	21
III.2.2 Avantages	23
III.2.3 Inconvénient	23
III.3 Application à la conduction thermique 1D stationnaire	23
III.3.1 Discrétisation du domaine de calcul	23
III.3.2 Intégration de l'équation de conduction 1D sur le (VC) en un point P	24
III.3.3 Choix d'un profil de température (interpolation) entre les nœuds voisins de P	24
III.3.4 Écriture de l'équation de conduction thermique sous la forme algébrique	25
III.3.5 Généralisation	26
III.4 Traitement du terme source S	26
III.5 Les règles de base (règles de Patankar)	26
III.6 Algorithme de Thomas ou TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm)	27
III.7 Résumé de l'algorithme	29
III.8 Traitement des conditions aux limites	30
III.9 Généralisation à la conduction thermique dans un volume 3 D	31

## Chapitre IV

IV.1 Introduction	34
IV.2 Modélisation et formulation mathématique des échanges de chaleur sol-air	34
IV.3 Apport radiatif solaire net $R_n$	35
IV.4 Equation du flux de chaleur sensible H	36

IV.5 Flux de chaleur Latente $L_{\nu}E$	37
IV.6 Mise en équation du problème	38
IV.7 Conditions aux limites	39
IV.8 Discrétisation du domaine de calcul	40

## **Chapitre V**

V.1 La variation de la température du sol (Janvier – Juillet)	44
V.2 Interprétations des résultats	48
V.3 Variation des flux de chaleur dans le sol (Janvier et Juillet)	48
V.4 Interprétations des Résultats	50

## Liste des tableaux et des Figures

### I-Liste des tableaux

Tableau III.1	coefficients de l'équation discrétisée.	33
Tableau IV.1	Coefficients de l'équation discrétisée.	42
Tableau IV.2	Valeurs moyennes mensuelles pour l'année 2005.	43
Tableau IV.3	Caractéristiques du sol de la région de Biskra.	43

### II-Liste des Figures

Figure II. 1	volume de contrôle.	11
Figure II. 2	Représentation sur un élément de volume, du flux thermique. dans les trois directions.	12
Figure II.3	domaine de conduction de chaleur en 2 D.	14

### Chapitre III

Figure III. 1	volume de contrôle.	21
Figure III. 2	Maillage unidimensionnel.	23
Figure III. 3	Choix du profil de température. a) Profil constant. b) Profil linéaire.	25
Figure III. 4	représentation du maillage 1D en volumes finis.	27
Figure III. 5	Traitement d'une condition limite de type flux imposé (Neumann).	30
Figure III. 6	cas de volume de contrôle 3D.	31
Figure III. 7	Volume de contrôle en deux dimensions.	32

## Chapitre IV

Figure VI. 1	Différents types de flux.	34
Figure VI. 2	Domaine de calcul.	39
Figure VI. 3	Domaine de calcul.	40
Figure VI. 4	Volume de contrôle en deux dimensions.	40

## Chapitre V

Figure V.1	Variations des $T^{\circ}$ dans le sol du mois de Janvier de (01 à 06) heures.	44
Figure V.2	Variations des $T^{\circ}$ dans le sol du mois de Juillet de (01 à 06) heures.	44
Figure V.3	Variations des $T^{\circ}$ dans le sol du mois de Janvier de (07 à 12) heures.	45
Figure V.4	Variations des $T^{\circ}$ dans le sol du mois de Juillet de (07 à 12) heures.	45
Figure V.5	Variations des $T^{\circ}$ dans le sol du mois de Janvier de (13 à 18) heures.	46
Figure V.6	Variations des $T^{\circ}$ dans le sol du mois de Juillet de (13 à 18) heures.	46
Figure V.7	Variations des $T^{\circ}$ dans le sol du mois de Janvier de (19 à 24) heures.	47
Figure V.8	Variations des $T^{\circ}$ dans le sol du mois de Juillet de (19 à 24) heures.	47
Figure V.9	Variations des différents flux de chaleur du mois de Janvier.	48
Figure V.10	Variations des différents flux de chaleur du mois de Juillet.	49
Figure V.11	Variations du flux de chaleur de rayonnement net des mois. (Janvier- Juillet).	49
Figure V.12	Variations du flux de chaleur de Convection air/sol des mois. (Janvier - Juillet).	50

# Nomenclature

$\rho$	La masse volumique	(kg/m <sup>3</sup> )
$C_p$	La capacité thermique massique	(J/kg K)
$q^m$	La densité volumique du flux développé dans l'échantillon	(W/m <sup>3</sup> )
$\Phi$	Le flux de chaleur transmis par conduction	(W)
$S$	Aire de la section de passage du flux de chaleur	(m <sup>2</sup> )
$H$	Coefficient d'échange par convection	(W/m <sup>2</sup> C°)
$\theta_m - \theta$	Différence de la température de la paroi et du fluide	(K°)
$U_m$	Vitesse moyenne du fluide	(m/s)
$\mu$	Viscosité dynamique du fluide	(Kg/m .s)
$D$	Dimension caractéristique de la surface d'échange	(m)
$N_U$	Nombre de Nusselt	
$Re$	Nombre de Reynolds	
$Pr$	Nombre de Prandtl	
$T_s$	Température de la surface	(K°)
$\varepsilon_{ij}$	Facteur de forme entre les surfaces $i$ et $j$ .	
$\Sigma$	Constante de Stéphane Boltzmann. ( $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ )	(W/m <sup>2</sup> K <sup>4</sup> )
$S$	Superficie de la surface	( m <sup>2</sup> )
$Q_{ij}$	Flux de rayonnement à grande longueur d'onde entre les surfaces $i$ et $j$ .	(W/m <sup>2</sup> )
$X_i$	La teneur de sol en constituant	(m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> )
$C_i$	Capacité thermique	(kg/m <sup>3</sup> )
$R_n$	Rayonnement net	(j/k.m <sup>3</sup> )
$L_v$	Chaleur latente de vaporisation d'eau	(j. m <sup>-2</sup> .s <sup>-1</sup> )

H	Flux de chaleur du à la convection du vent	(j. m <sup>-2</sup> .s <sup>-1</sup> )
G	Flux de chaleur conductif dans le sol	(j. m <sup>-2</sup> .s <sup>-1</sup> )
J	Flux absorbé par la végétation (photosynthèse)	(j. m <sup>-2</sup> .s <sup>-1</sup> )
R <sub>g</sub>	Rayonnement solaire global	(j. m <sup>-2</sup> .s <sup>-1</sup> )
A	Albédo (coefficient donné suivant lieu géographique)	
R <sub>t</sub>	Flux de chaleur échangé par rayonnement entre la surface du sol et la coute céleste	(j. m <sup>-2</sup> .s <sup>-1</sup> )
ε <sub>sol</sub>	L'émissivité du sol	(W m <sup>-1</sup> °K <sup>-1</sup> )
T <sub>surfsol</sub>	Température de la surface du sol	(K <sup>0</sup> )
T <sub>ciel</sub>	Température de ciel	(K <sup>0</sup> )
V <sub>vent</sub>	Vitesse de vent	(m/s)
E	Flux massique de vapeur d'eau	(j. m <sup>-2</sup> .s <sup>-1</sup> )
K <sub>E</sub>	Coefficient de transfert de masse	
M <sub>W</sub>	Masse molaire de la vapeur d'eau	(Kg\ mole)
R	Constante des gaz parfaits	(J/mole. K)
P <sub>VS</sub>	Pression de vapeur saturante	(Pa)
P <sub>V</sub>	Pression de vapeur	(Pa)
HR	Humidité relative	(%)
λ	La Conductivité thermique	(W/K .m)

Introduction

Générale

## Introduction générale

Les combustibles fossiles et les équipements électriques à faible rendement sont encore utilisés pour le chauffage en hiver. Cependant, l'utilisation efficace de l'énergie devient très importante en raison de problèmes environnementaux et énergétiques tels que le réchauffement de la planète et l'épuisement des combustibles fossiles. En particulier après le choc pétrolier du début des années 70, la recherche et le développement technique ont porté sur des systèmes de pompe à chaleur plus petits, plus silencieux et à plus haut rendement. (Byuna JS, CD Jeonb, Jungc JH, Leea J.2006).

Les systèmes basés sur des pompes à chaleur pour le chauffage et la climatisation de bâtiments résidentiels et commerciaux ne cessent de gagner en popularité, principalement en raison de leur coefficient de performance élevé. Ils utilisent pratiquement tous les types d'énergie stockée, l'air ambiant, les eaux de surface ou souterraines et les sols. (N.Kyriakis, A. Michopoulos, K. Pattas, 2006).

La température du sol est un paramètre important dans les applications à l'énergie solaire telles que le chauffage et le refroidissement passifs des bâtiments et des serres agricoles. Ces applications peuvent être développées par le contact direct avec le sol du bâtiment, qui implique la mise en contact partiel ou total de l'enveloppe du bâtiment avec le sol (K. Labs, 1990), ou par le contact indirect du bâtiment, qui implique l'utilisation d'un tuyau à travers lequel l'air provenant de l'intérieur ou de l'extérieur du bâtiment circule et est ensuite amené dans le bâtiment ou la serre agricole (A. Tombazis et al., 1990; G. Mihalakakou et al., 1995).

L'utilisation des techniques de couplage de la terre directes ou indirectes pour les bâtiments nécessite une connaissance de la distribution de la température du sol. Il est encore communément admis que la distribution de la température du sol à n'importe quelle profondeur en dessous de la surface de la Terre reste inchangée tout au long de l'année. Cependant, divers chercheurs ont montré que la température du sol à faible profondeur présentait des fluctuations importantes sur une base journalière et annuelle (E. Penrod et al, 1960, T. Kuusuda, 1975). Selon leurs études, le flux thermique à l'intérieur de la Terre est influencé par plusieurs paramètres, tels que le rayonnement solaire, la température de l'air, la vitesse du vent, le jour de l'année, l'ombrage, les propriétés du sol, etc., qui présentent une variation saisonnière ou irrégulière. Pour cette raison, il est plutôt difficile de prévoir et d'estimer la température du sol, en particulier près de la surface du sol, où les variations de température du sol sont les plus fortes.

Les mesures de la température du sol à la surface et à différentes profondeurs sont limitées dans le temps et dans l'espace. Dans les endroits où les mesures de la température du sol sont rares, des estimations théoriques peuvent être utilisées pour la prédire à partir d'autres données existantes, qui dépendent fortement des conditions météorologiques et climatiques locales et des propriétés du sol. (G.Mihalakakou, 2002).

En utilisant les données existantes, divers modèles mathématiques pour de prévision de la température du sol en fonction de la profondeur, de la saison et des propriétés du sol ont déjà été développés. Ces modèles sont basés sur l'analyse de mesures pluriannuelles (B. Givoni et al, 1985 ; G. Maliakakou et al, 1992) ou sur l'analyse de Fourier (P. Bloomfield, 1976, G. Maliakakou et al, 1996). Le développement et l'application de tels modèles facilitent la procédure d'estimation car ils fournissent un spectre continu de valeurs tout en pouvant fournir des informations sur des paramètres qui ne sont pas mesurés directement, tels que la température du sol à des profondeurs plus élevées où la variation de la température diurne de la surface du sol. Bien que ces modèles décrivent le profil de température à différentes profondeurs sous la surface du sol, (G.Mihalakakou, 2002) ils ne tiennent pas compte des conditions météorologiques décrites par plusieurs paramètres climatiques.

Un modèle analytique, basé sur l'équation différentielle à conduction thermique transitoire ainsi que sur l'équation du bilan énergétique à la surface du sol, est utilisé dans la présente étude pour estimer la température du sol. L'équation du bilan énergétique implique un échange d'énergie entre l'air et le sol, le rayonnement solaire absorbé par la surface du sol ainsi que le rayonnement à ondes longues. Le modèle ci-dessus a été choisi parce que, même s'il est basé sur une équation différentielle de conduction thermique, il prend également en compte les conditions météorologiques et les propriétés du sol, quel que soit le lieu. Son principal inconvénient est qu'il nécessite plusieurs paramètres d'entrée qui, bien souvent, ne sont pas disponibles, car le réseau de mesures climatiques dans les pays développés est en cours de développement et il existe de nombreux endroits où les données mesurées sont plutôt rares.

Dans cette étude, il nous paraît donc intéressant de contribuer à la connaissance des paramètres prépondérants sur l'évolution de la température du sol, non seulement à la surface du sol, mais également pour différentes profondeurs. Le modèle utilisé est bidimensionnel intégrant à la fois les phénomènes énergétique incluant la variation du rayonnement solaire, de la température de l'air (atmosphérique) à côté du flux de chaleur latent dû à l'évaporation. Tous les calculs sont effectués pour les variations journalières

L'étude est divisée en cinq chapitres :

Dans le chapitre I, qui est bibliographique, nous présentons l'évolution des études antérieures sur le sujet et de l'intérêt de ses diverses utilisations pratiques.

Dans le chapitre II, nous présentons le problème à résoudre, et établissons les équations mathématiques des différents phénomènes qui interviennent dans la conduction thermique dans le sol. Nous y discutons également des méthodes d'estimation utilisées dans la suite de l'étude, pour décrire l'évolution de la température du sol et sa dépendance aux différents paramètres considérés.

Dans le chapitre III, nous abordons la présentation de la méthode des volumes

Dans le chapitre IV, nous présentons la modélisation et formulations mathématique que de la conduction de la chaleur dans le sol. Pour la résolution nous avons utilisé la méthode de volume finis, ce qui nous permet d'intégrer directement les données tel que : La vitesse du vent, L'humidité relative de l'air, La température ambiante, Le taux d'évaporation, L'Insolation... .

Dans le chapitre V, nous exposons une analyse des influences sur la température ainsi que sur le flux échangé sol-air, du sol tel que l'influence des saisons comme l'hiver et l'été.

Enfin le mémoire se termine par une conclusion générale.

# Chapitre I

## **Bibliographie**

## I.1 Introduction :

Dans le but de situer notre travail nous présentons dans ce chapitre les travaux antérieurs en relation avec notre thème d'étude.

## I.2 Analyses des travaux effectués :

Les travaux déjà effectués, rencontrés dans la littérature en relation avec notre travail sont résumés comme suit :

### **G. Mihalakakou et al. (1992)[1] :**

Ont mis au point des modèles simples et précis pour la prévision de la variation annuelle de la température du sol à la surface de la Terre et à différentes profondeurs. Des algorithmes permettant de prédire la variation quotidienne à la surface du sol sont également proposés. Enfin, les résultats de l'analyse globale sont comparés aux données correspondantes d'autres ensembles de mesures connus. L'analyse globale est utile pour prédire la performance des bâtiments en contact direct avec le sol ainsi que pour la performance de l'efficacité des échangeurs de chaleur sol-air.

### **G. Mihalakakou et al. (1994)[2] :**

Ont présenté un nouveau modèle numérique complet pour la prévision de la performance thermique des échangeurs de chaleur terre-air. Le modèle décrit le transfert simultané de chaleur et de masse à l'intérieur du tube et dans le sol, en tenant compte de la stratification thermique naturelle du sol. Le modèle est validé par rapport à un vaste ensemble de données expérimentales et s'avère exact. Les algorithmes proposés conviennent au calcul de la variation de la température et de l'humidité de l'air en circulation et à la distribution de la température et de l'humidité dans le sol.

### **G. Mihalakakou et al. (1995)[3] :**

Ont présenté un modèle numérique transitoire pour la prédiction de la température du sol à différentes profondeurs sous les bâtiments. Le modèle proposé a été développé en calculant le flux de chaleur dans le sol d'un bâtiment, ce qui dépend du processus thermique tridimensionnel complexe dans le sol.

### **G. Mihalakakou et Al. (1997)[4] :**

Ont utilisé un modèle complet pour la prévision de la variation journalière et annuelle de la température du sol. Ce modèle est basé sur l'équation différentielle à conduction

thermique transitoire utilisant comme condition aux limites l'équation du bilan énergétique à la surface du sol. L'équation du bilan énergétique implique l'échange d'énergie par convection entre l'air et le sol ; le rayonnement solaire absorbé par la surface du sol, le flux de chaleur latent dû à l'évaporation à la surface du sol ainsi que le rayonnement à ondes longues. Une étude de sensibilité a été réalisée afin d'évaluer l'impact de divers facteurs impliqués dans l'équation du bilan énergétique à la surface du sol sur la distribution de la température du sol. L'analyse globale est utile pour la prévision de la performance thermique des bâtiments en contact direct avec le sol ainsi que pour la prévision de l'efficacité énergétique des échangeurs de chaleur sol-air.

**Gauthier C. et Al. (1997) [5] :**

Ont mené une étude numérique sur le comportement thermique des systèmes d'échangeur de chaleur du sol visant à réduire la consommation d'énergie des serres. Ces systèmes sont constitués de tuyaux enterrés qui font circuler l'air pour stocker et évacuer la chaleur du sol. Tout d'abord, un modèle transitoire de transfert de chaleur entièrement tridimensionnel reposant sur les équations de conservation couplées de l'énergie pour le sol et l'air en circulation est présenté. Le modèle est validé à l'aide de données expérimentales issues de systèmes d'échange de chaleur et d'échange de chaleur installés dans une serre de type commercial.

**Alvenas G. et al. (1997)[6] :**

Ont présenté une approche de modélisation permettant de prévoir la température de surface du sol et son évaporation. La procédure est basée sur les équations de flux de chaleur à la surface du sol et comprend la diffusion de vapeur et une fonction de correction semi-empirique de la pression de vapeur de surface. Les effets des modifications de trois paramètres de modèle importants ont été étudiés au moyen de simulations multiples.

**Best M. J. (1998) [7] :**

A décrit un modèle permettant de prédire la température de surface d'une variété de surfaces. Le modèle résout l'équation du bilan d'énergie de surface de manière itérative, en utilisant uniquement les données météorologiques standard. Il a été montré que, pour obtenir les taux de refroidissement corrects de la végétation pendant la nuit, il fallait soustraire l'influence directe du flux du sol à l'équation du bilan énergétique de la couche de

végétation. Un schéma couplant un couvert végétal au sol uniquement par rayonnement est décrit, donnant des vitesses de refroidissement satisfaisantes par rapport aux observations.

**Sedlak P. (1998)[8] :**

A étudié l'influence de la rugosité de surface, de la vitesse du vent géotrope et de la stratification initiale stable aux échelles de couche superficielle.

**Kishcha P. V. et al. (1998)[9] :**

Ont étudié la distribution globale de la variance de la température au sol et de ses variations à long terme sur la base des anomalies mensuelles de la température moyennes, obtenues à partir d'observations météorologiques au sol et en mer de 1896 à 1990. la structure à grande échelle de la variance de température a été trouvée.

**Wang J. et al. (1999) [10] :**

Ont présenté une nouvelle méthode permettant de calculer la variation diurne du flux de chaleur du sol à partir de la mesure chronologique correspondante de la température de surface du sol. La température du sol et le flux de chaleur du sol dans le temps à un endroit sont uniquement liés par un opérateur dérivé / intégral d'ordre intermédiaire lorsque le transfert de chaleur dans une matrice de sol est décrit par une équation de diffusion unidimensionnelle avec un paramètre de diffusivité constant. Des données simulées et observées ont été utilisées pour tester la méthode.

**Yu Qiu G. et al. (1999)[11] :**

Ont mis au point une nouvelle méthode permettant d'estimer l'évaporation quotidienne du sol à l'aide de mesures différentielles de la température. Un coefficient empirique a été déterminé à partir des flux d'énergie intégrés sur les heures de la journée et les températures moyennes de la journée. Cela conduit à un nouveau coefficient de transfert d'évaporation du sol qui peut remplacer la résistance aérodynamique pour calculer le flux de chaleur sensible.

**M.M. Salah El-Din (1999)[12] :**

A développé deux expressions pour prédire la variation périodique de la température du sol en fonction de la profondeur. Ils sont basés sur l'équation du bilan énergétique à la surface du sol et sur l'hypothèse selon laquelle la variation de température à la surface du sol se présente sous la forme d'une onde sinusoïdale ou d'une série de Fourier. L'équation du bilan énergétique implique la variation périodique du rayonnement solaire, de la température

atmosphérique et du flux de chaleur latent dû à l'évaporation. Le flux de chaleur dans le sol a été calculé et la profondeur d'amortissement et la température du sol correspondante ont été calculées.

**Mihailovic D. T. et al. (1999)[13] :**

Ont examiné la sensibilité du modèle «force-restore» pour la température de surface aux : a) variations du flux de chaleur du sol ; (b) les variations de la température du sol en profondeur et (c) les modifications de l'évaporation de l'eau du sol. De plus, l'impact des variations profondes de la température du sol sur la répartition de l'énergie de surface et de l'eau de surface est discuté. Enfin, une nouvelle procédure de calcul de la température du sol en profondeur basée sur des données climatologiques de la température du sol et de son atténuation exponentielle dans les couches profondes du sol est suggérée.

**S. Kang et al. (2000)[14] :**

Ont mis au point un modèle hybride de température du sol pour prédire les tendances spatiales quotidiennes de la température du sol dans un paysage forestier en intégrant les effets de la topographie, de la canopée et de la litière au sol. Le modèle repose à la fois sur la physique du transfert de chaleur et sur la relation empirique entre la température de l'air et du sol et utilise des variables d'entrée extraites d'un modèle altimétrique numérique, d'images satellitaires et d'enregistrements météorologiques standard. Les températures du sol prévues par le modèle correspondaient bien aux données mesurées à une profondeur de 10 cm sur trois sites : deux forêts de feuillus et une surface de sol nu.

**M. Karam (2000) [15] :**

A mis au point un nouveau modèle d'ondes thermiques pour étudier le transfert de chaleur dans des sols non uniformes. Le modèle, qui repose sur les caractéristiques du flux de chaleur périodique en forme de vague, discrétise le sol en sous-couches. Les coefficients de réflexion thermique et de transmission totaux aux interfaces de ces sous-couches sont formulés puis utilisés pour construire les profils de température et de flux de chaleur du sol à partir de leurs valeurs à l'interface air-sol. Des simulations numériques ont montré que le modèle à ondes thermiques pouvait prédire les prévisions de deux modèles analytiques exacts pour les profils de température et leurs dérivés.

**Beltrami H. (2001) [16] :**

A exploité une station climatologique expérimentale air-sol pour surveiller les températures météorologiques de l'air en surface à trois altitudes, la vitesse et la direction du vent, le rayonnement solaire entrant, les précipitations, la hauteur de neige et l'humidité relative. Et les variables thermiques du sol (températures du sol à des profondeurs de 0, 5, 10, 20, 50 et 100 cm). Les lectures sont effectuées toutes les 30 s et des moyennes sont mémorisées afin de caractériser les échanges d'énergie à l'interface air-sol.

**G. Mihalakakou (2002)[17] :**

A étudié deux méthodes de modélisation et d'estimation de la variation quotidienne et annuelle de la température du sol. La température du sol est un facteur important pour calculer les performances thermiques des bâtiments en contact direct avec le sol, ainsi que pour prévoir l'efficacité des échangeurs de chaleur sol-air. Les deux méthodes d'estimation sont un modèle déterministe et une approche par réseau neuronal. Enfin, la comparaison des deux modèles a montré que la technique intelligente proposée permet d'estimer de manière adéquate la distribution de la température du sol.

**P. Tessa Chacko et al. (2002)[18] :**

Ont étudié les caractéristiques du sol et de la température de l'air sur une période d'un an à Kariavattom, au Kerala. La diffusivité thermique du sol a été calculée à l'aide de méthodes d'intervalle et de décalage ainsi que d'amplitudes et d'angles de phase des premier et second harmoniques. Les deux méthodes conduisent à des résultats similaires. Les flux de chaleur diurnes du sol et les températures du sol à différentes profondeurs sont modélisés et jugés comparables aux observations.

**Plauborg F. (2002) [19] :**

A présenté des modèles empiriques et simples pour la température du sol à une profondeur de 10 cm dans des sols recouverts d'herbe. Le modèle global est basé sur des données sur 10 ans provenant de 13 stations météorologiques de différents sols au Danemark. Les prévisions des modèles spécifiques aux stations ont été comparées au modèle global et le potentiel d'utilisation du modèle global pour d'autres cultures a été brièvement discuté.

## **Timlin D.J. et al. (2002) [20] :**

Ont étudié l'incidence des erreurs d'estimation des valeurs horaires du rayonnement solaire et de la température de l'air sur la simulation de la température du sol à l'aide du modèle 2DSOIL. 2DSOIL est un modèle bidimensionnel d'éléments finis qui simule le flux d'eau, l'absorption de substances chimiques, d'eau et de soluté par les racines des plantes, les processus d'équilibre chimique et le transport de gaz et de chaleur dans le sol.

## **Qin Z. et al. (2002)[21] :**

Ont présenté un modèle complet de bilan énergétique de surface dont les relations internes sont citées dans différentes recherches. Le modèle couple les changements de température du sol simultanément avec le mouvement de l'humidité du sol, ce qui rend la solution du modèle difficile. Une méthodologie détaillée d'approximation numérique du modèle complet est présentée dans l'étude pour une utilisation pratique. La chaleur du sol et les flux de chaleur latente dans le modèle sont déterminés en fonction du changement de température du sol et du mouvement de l'humidité du sol, décrits comme deux équations différentielles. La méthode implicite de Crank – Nicolson est utilisée pour développer les équations différentielles en deux ensembles d'équations linéaires simultanées, qui sont ensuite résolus en appliquant la méthode d'élimination de Gauss. Le flux de chaleur latent est déterminé à la balance lorsque l'évaporation de la surface est égale à la perte d'eau du sol.

## **M. A. Karam (2003) [22] :**

A réformé la version restauration de la force qui prédit les valeurs exactes de la température à la surface du sol. En développant une telle version, la température du sol est étendue à une série de Fourier.

## **C. Gulser et. Al. (2004) [23] :**

Ont estimé la fluctuation diurne de la température du sol sur une profondeur de sol argileux en fonction du temps à l'aide d'un ensemble de données mesurées dans une équation harmonique Co-sinusoïdale. Certaines propriétés, telles que la diffusivité thermique, la profondeur d'amortissement et le temps de retardement, ont également été déterminées à 0, 10, 20, 30, 40 et 50 cm de profondeur.

**Liebenthal C. et al. (2005) [24] :**

Ont analysé l'influence des erreurs de mesure sur les résultats de deux méthodes permettant de déterminer le flux de chaleur du sol : une combinaison de l'approche par plaque de flux de chaleur et colorimétrique et une combinaison de l'approche par gradient et colorimétrique.

**Yang W. B. et al. (2006) [25] :**

Ont procédé à une simulation numérique des performances d'un système de pompe à chaleur à source solaire fonctionnant en mode alterné ou combiné.

**Spichak V. V. (2006) [26] :**

A proposé une méthode de prévision de la distribution des températures dans les zones géothermiques en utilisant l'approche par neurones et, en particulier, les diagraphies de température en fond de trou. La méthode a été testée par rapport aux résultats d'un modèle analytique, montrant que les erreurs d'estimation de la température du réseau de neurones reposaient sur des données de diagraphie de puits dérivées de: (a) le «niveau d'éducation» du réseau de neurones (qui dépend de la quantité et de la structure des informations utilisées pour l'enseignement) et (b) la distance du point auquel l'estimation est faite à partir de la zone pour laquelle des données sont disponibles.

**Esen H. et al. (2007) [27] :**

Ont évalué un système de pompe à chaleur utilisant le sol comme source de chaleur. Un système de pompe à chaleur couplée au sol (GCHP) a été installé et testé dans la salle d'essai. Les résultats obtenus lors des tests expérimentaux sont présentés et discutés. Le coefficient de performance (COP<sub>sys</sub>) du système GCHP est déterminé à partir des données mesurées. Un modèle numérique de transfert de chaleur dans le sol a été mis au point pour déterminer la distribution de la température à proximité du tuyau. L'approximation par différences finies est utilisée pour l'analyse numérique. On observe que les résultats numériques concordent avec les résultats expérimentaux.

**Zhong Z. et al. (2007) [28] :**

Ont présenté une méthode simplifiée de calcul du transfert de chaleur transitoire dalle sur sol pouvant être intégrée aux programmes de simulation horaires. Le procédé suppose qu'il existe deux voies unidimensionnelles principales pour le transfert de chaleur d'une

dalle de plancher couplée au sol : (1) transfert de chaleur unidimensionnel du périmètre de la dalle à la température ambiante et (2) transfert de chaleur unidimensionnel entre surface intérieure de la dalle et une partie du sol sous la dalle.

# Chapitre II

**Equation de la Conduction Thermique**

**II.1 Introduction :**

Le transfert thermique est un processus complexe qui, dans le cas général, résulte de la superposition des trois modes fondamentaux de transfert : conduction, convection et rayonnement. Dans le cas où l'un de ces trois modes est prépondérant, les effets des autres sont faibles et ils peuvent être négligés, ce qui simplifie considérablement l'analyse du problème.

**II.2 Généralités de la conservation l'énergie :**

La conservation de l'énergie pour un système où le transfert de chaleur par conduction est prépondérant s'écrit sous la forme d'une équation aux dérivées partielles. Si cette équation est non-linéaire, c'est le cas quand la conductivité thermique du matériau varie avec la température, une méthode de résolution numérique est nécessaire. Les solutions obtenues par ces méthodes impliquent souvent la mise au point d'un code de calcul pour obtenir des valeurs numériques. Alors que pour les équations aux dérivées partielles linéaires, leur résolution peut être faite par des méthodes analytiques (transformées de Laplace, séparation des variables, méthodes variationnelles, etc.). Mais les géométries complexes échappent souvent au traitement analytique.

**II.3 Les principaux modes de transfert de chaleur [29] :**

Le thermique (ou thermocinétique) est la science qui permet de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final.

La chaleur retransmet sous l'influence d'un gradient de température par conduction des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur.

**II.3.1 conduction :**

Ce mode de transfert réside dans la propagation de la chaleur de molécule à molécule dans un ou plusieurs corps contigus, opaques et solides.

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier: la densité de flux est proportionnelle au gradient de température

En absence d'hypothèses simplificatrices, la propagation de la chaleur est un phénomène tridimensionnel qui répond à la loi de Fourier sous la forme générale :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \lambda \nabla^2 T + q_m \quad (\text{II.1})$$

Où :

$\rho$  : est la masse volumique (kg/m<sup>3</sup>),  $\lambda$  est la conductivité thermique du matériau (W/Km)

$C_p$  : est la capacité thermique massique (J/kgK)

$q_m$  : est la densité volumique du flux développé dans l'échantillon (W/m<sup>3</sup>)

En faisant les hypothèses :

- $\lambda = \text{constant}$
- Pas de puissance dissipée  $q_m = 0$
- Régime permanent  $\frac{dT}{dt} = 0$
- Flux monodimensionnel  $\frac{dT}{dy} = \frac{dT}{dx} = 0$

La forme simplifiée de telle loi qui dit que la valeur instantanée du débit calorifique est égal à:

$$\varphi = - \lambda S \text{ grad } (T) = - \lambda S \frac{dT}{dx} \quad (\text{II.2})$$

Avec :

$\varphi$  : Le flux de chaleur transmis par conduction (W)

$S$  : Aire de la section de passage du flux de chaleur (m<sup>2</sup>)

### II.3.2 Transfert de chaleur par convection [30] :

La convection caractérise la propagation de la chaleur dans un fluide gazeux ou liquide en mouvement. L'étude de la convection (naturelle ou forcée) est liée à l'écoulement des fluides.

**II.3.3 Transfert de chaleur par rayonnement :**

Le rayonnement thermique est un phénomène se caractérisant par un échange d'énergie électromagnétique, sans que le milieu intermédiaire ne participe nécessairement à cet échange.

Par exemple, le rayonnement solaire est capable d'échauffer la terre bien que le milieu traversé soit à une température plus basse que la terre.

**II.4 Equation de conservation de l'énergie cas d'un solide [31] :**

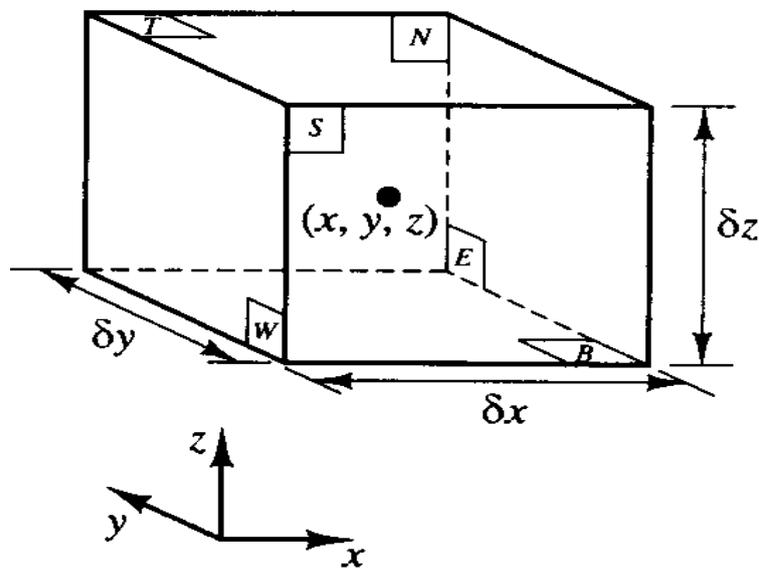


Figure II. 1 : volume de contrôle.

le taux net du flux de chaleur suivant la direction (x) est la difference des flux aux faces W et E:

$$\left[ \left( q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z = - \frac{\partial q_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \tag{II. 3}$$

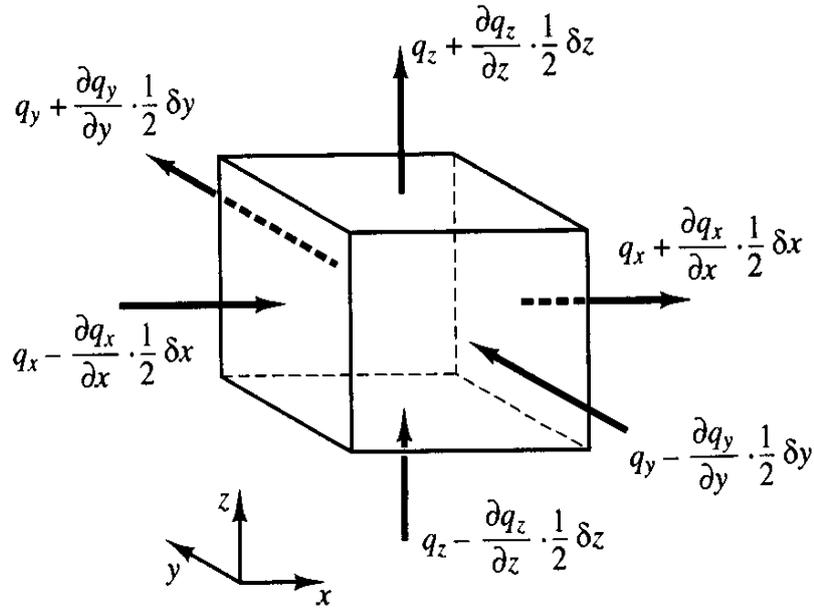


Figure II. 2 : Représentation sur un élément de volume, du flux thermique dans les trois directions.

De manière similaire suivant la direction :

$$(y) : -\frac{\partial q_y}{\partial y} \delta x \delta y \delta z$$

Et

$$(z) : -\frac{\partial q_z}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$$

le taux net totale du flux de chaleur par unité de volume suivant les trois directions est la somme divisée par le volume élémentaire :  $(\delta x \delta y \delta z)$  et nous obtenons le taux net totale égale à :

$$\left( -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \tag{II.4}$$

### II.5 Forme intégrale ou globale de la loi de conservation :

En notant le volume élémentaire :

$$dV = (\delta x \delta y \delta z) \tag{II.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho c T dV + \iiint -\left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dV = \iiint S dV \tag{II.6}$$

Les termes qui interviennent dans l'équation (II.6) de conduction de chaleur sont les suivants :

-  $\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho c T dV$  qui représente le taux de variation de la chaleur dans le volume  $dV$

-  $\iiint -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dV$  qui est égale au flux de chaleur traversant les faces limitant le volume  $dV$

-  $\iiint S dV$  qui est la production (source) de la chaleur dans le volume  $dV$

La loi phénoménologique qui lie le vecteur flux de chaleur par conduction  $q$  au gradient thermique, a été formulée par J.B Fourier (1822). Cette loi précise que le flux de chaleur de conduction est proportionnel au gradient thermique. Pour un matériau isotrope, le flux de chaleur dans une direction cartésienne, par exemple  $q_x$  s'écrit :  $q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}$  où  $k$  est la conductivité thermique du matériau.

De même pour les autres directions  $y, z$  nous avons :

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{II. 7})$$

Et

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{II. 8})$$

## II.6 Forme locale de l'équation de conservation de la chaleur :

La forme locale s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) = S \quad (\text{II. 9})$$

En appliquant la loi de Fourier et remplaçant le flux thermique nous aurons :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right) = S \quad (\text{II. 10})$$

Dans le cas où les valeurs des propriétés thermo physique du matériau constituant le volume ( $\rho, c, k$ ) sont constantes et en absence de source chaleur ( $S$ ), l'équation (II. 10) de chaleur sera simplifiée de la manière suivante :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.11})$$

Où :

$\rho$  : Densité [ $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ].

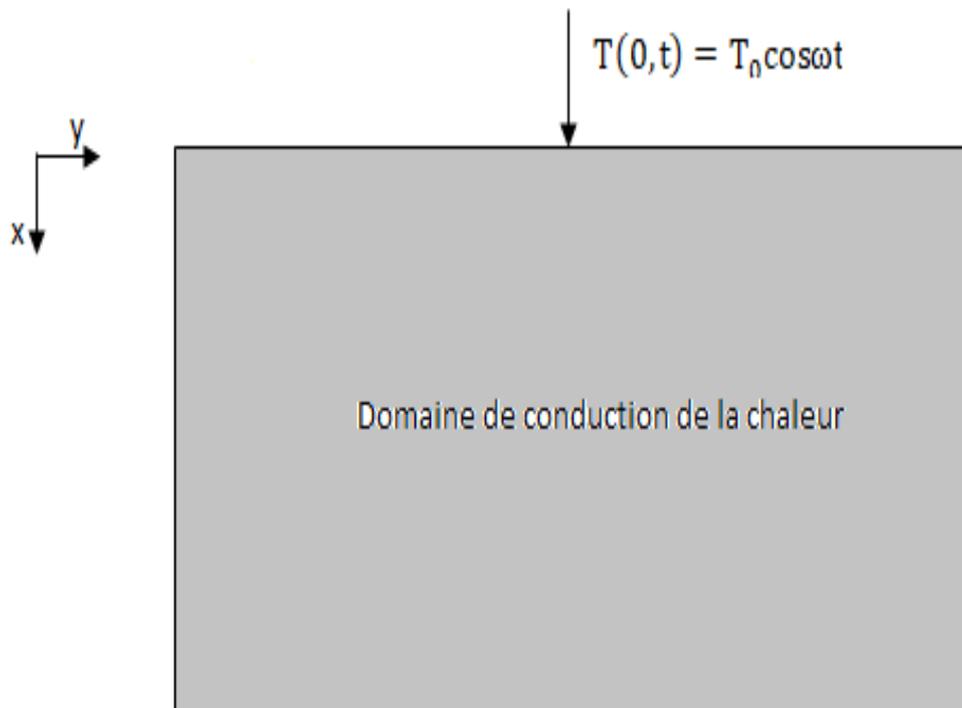
$c$  : Chaleur spécifique massique [ $\frac{\text{J}}{\text{kg } ^\circ\text{K}}$ ].

$k$  : Conductivité thermique [ $\frac{\text{W}}{\text{m } ^\circ\text{K}}$ ].

$T$  : Température [ $^\circ\text{K}$ ].

et  $x, y, z$  : les dimensions en [m].

### II.7 Cas générale de conduction en régime périodique et méthode de résolution analytique [32] :



**Figure II. 3** : domaine de conduction de chaleur en 2 D.

Quand un corps est soumis à une condition aux limites périodique, le profil de température en fonction du temps, voir la (figure II. 3) comporte trois étapes distinctes.

Une première phase de mise en régime périodique, une seconde phase de régime périodique stationnaire et, finalement, une phase de fin de régime périodique.

La résolution par la méthode analytique permet d'obtenir la solution lors de la seconde phase (régime périodique stationnaire) que nous présentons par la suite :

Considérons la diffusion de la chaleur unidirectionnelle dans un solide de très grande dimension. L'équation de diffusion en régime transitoire est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{II. 12})$$

Avec les conditions aux limites considérées :  $T(x, 0)=0$ , sur la face  $x=0$ ,

la température imposée varie

sinusoïdalement en fonction du temps avec  $T(0, t) = T_0 \cos \omega t$ , et  $T(\infty, t) = 0$ .

La température complexe s'écrit sous la forme :

$$\psi(x, t) = T(x, t) + i T^*(x, t) \quad (\text{II. 13})$$

Où  $T^*$  est le profil de température calculé en résolvant la même équation de diffusion mais avec une condition limite déphasée d'un angle  $(\pi/2)$ .

Dans ce cas, le problème à résoudre est formulé par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} \quad (\text{II. 14})$$

Avec les conditions aux limites qui s'écrivent :

$$T^*(x, 0) = 0, \quad T^*(0, t) = T_0 \sin \omega t, \quad T^*(\infty, t) = 0.$$

En multipliant l'équation  $\psi(x, t) = T(x, t) + i T^*(x, t)$  par  $i$  et en additionnant le produit à  $T$ , nous obtenons le profil de température recherché initialement en résolvant équation suivante :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (\text{II. 15})$$

Avec les conditions aux limites suivantes:  $\psi(x, 0)=0$ ,  $\psi(0, t) = T_0 e^{i\omega t}$ , et  $\psi(\infty, t) = 0$ .

Finalement nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{i\omega}{\alpha} \phi = 0 \quad (\text{II. 16})$$

Avec les conditions aux limites :  $\phi(0) = T_0$ ,  $\phi(\infty) = 0$

La résolution de cette équation nous permet alors de calculer la température complexe :  $\psi(x, t)$  dont la forme de l'équation peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\phi(x)}{T_0} = e^{(i\omega/\alpha)^{1/2}x} \quad (\text{II. 17})$$

Nous obtenons alors la température complexe de la forme suivante :

$$\frac{T(x, t)}{T_0} = e^{-(i\omega/2\alpha)^{1/2}x} \cos \omega t - \left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^{1/2} x \quad (\text{II. 18})$$

Il faut noter que la solution ci-dessus ne satisfait pas la condition initiale, elle n'est pas valable que pour les grandes valeurs de  $t$  uniquement (régime périodique stationnaire). Aussi nous remarquons que cette résolution aurait pu être déduite (avec plus de difficultés) en séparant les variables et en résolvant le problème initial.

## II.8 Application au cas de la conduction thermique du sol [33] :

Dans ce cas le sol est considéré comme un massif semi-infini, excité en surface par un signal de température sinusoïdal. L'équation de la conduction thermique du sol présente des solutions sinusoïdales de même période que l'excitation mais dont les amplitudes, valeurs moyennes et déphasages varient en fonction de la profondeur considérée dans le sol. Globalement, plus la profondeur est grande et plus le signal sinusoïdal est amorti et retardé.

La solution analytique de ce modèle est parfaitement établie. À la surface du sol, les échanges thermiques sont multiples. Le sol échange avec l'atmosphère (conduction, convection et chaleur latente) mais aussi avec le soleil et le ciel (par rayonnement). Le bilan thermique retenu nécessite donc la connaissance de la température de l'air extérieur et du flux de rayonnement solaire global incident à la surface du sol. Là encore, une approximation est nécessaire pour la solution analytique. Nous considérons dans ce cas que la sollicitation (exemple : la température de la surface du sol) peut être décomposée en somme de fonctions sinusoïdales. En conséquence, le bilan thermique doit lui-même être réalisé à partir de variables oscillant sinusoïdalement. Il sera donc nécessaire de réaliser une mise en forme, nécessairement simplificatrice, des courbes de température de l'air extérieur et du flux de rayonnement solaire global incident à la surface du sol. Dans le cas réel et pratique cette opération nous la présentons au chapitre suivant, elle se base sur les données des relevés de mesures météorologiques, où nous détaillerons la description détaillée du bilan thermique retenu.

Lorsque la température en surface du sol est sinusoïdale alors la solution analytique est celle proposée au problème de propagation de la chaleur par conduction dans un massif semi-infini. En conséquence, toutes les sollicitations du problème seront considérées des constantes ou des fonctions sinusoïdales du temps.

Comme exemple la température de l'air extérieur,  $T_e$ , sera idéalement exprimée sous la forme :

$$T_e(t) = \bar{T}_e + A_e \sin(\omega t - \varphi_e) \quad (\text{II. 19})$$

Où la pulsation  $\omega$  représente la pulsation annuelle.

Les paramètres constants à évaluer sont :

La température moyenne ( $\bar{T}_e$ ), l'amplitude ( $A_e$ ) et le déphasage ( $\varphi_e$ ).

Différentes méthodes peuvent être utilisées (moindres carrés, identification, analyse spectrale), cependant, l'objectif étant ici d'extraire le fondamental d'un signal réel bruité (les températures mesurées), la plus adaptée reste l'analyse spectrale de type Fourier.

Cette méthode permet d'exprimer  $T_e(t)$  sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales :

$$T_e(t) = \bar{T}_e + \sum_{n=1}^N a_n \sin(n\omega t) + \sum_{n=1}^N b_n \cos(n\omega t) \quad (\text{II. 20})$$

Soit, en se limitant au fondamental (N=1) :  $T_e(t) = \bar{T}_e + a_1 \sin(n\omega t) + b_1 \cos(n\omega t)$

La température moyenne  $\bar{T}_e$ , est identifiée à la température moyenne de l'air extérieur par simple intégration des données de température fournies par la base de données météorologique sur une année.

$$\bar{T}_e = \frac{1}{1 \text{ an}} \int_0^{1 \text{ an}} T_e(t) dt \quad (\text{II. 21})$$

La température de l'air extérieur est ainsi exprimée comme une fonction sinusoïdale. Le même type de calcul est réalisé à partir des données brutes de rayonnement global incident. Le flux résultant est donc de la forme :

$$\Phi(t) = \bar{\Phi} + A_\Phi \sin(\omega t - \varphi_\Phi) \quad (\text{II. 22})$$

## II.9 Détermination de la température de la surface du sol :

La température du sol à sa surface constitue la sollicitation qui sera imposée comme condition à la limite supérieure du sol considéré comme un massif semi-infini. Son évaluation est donc particulièrement déterminante, est conditionne les résultats du calcul de la température du sol à toute profondeur.

La détermination de cette température est réalisée à partir du bilan de puissance, exprimé à la surface du sol comme suit :

$$0 = CE_{eq} + SR - LE \quad (\text{II. 23})$$

Avec :

$CE_{eq}$  : Le flux d'échange global.

$SR$  : le flux de rayonnement incident absorbé et

$LE$  : le flux de chaleur latente cédé à l'atmosphère.

Le membre de gauche représente le flux de chaleur transmis à l'intérieur du sol. En réalité, ce flux est très faible par rapport aux trois autres, c'est pourquoi il est ici considéré comme nul.

Ce bilan est fortement inspiré de celui de Mihalakakou al. [2]. il prend en compte :

- outre la température de l'air extérieur et le flux de rayonnement global incident
- l'humidité du sol, la couverture du sol par la végétation, le vent, et l'humidité relative moyenne de l'atmosphère. Ce bilan est ainsi le seul qui prenne en compte toutes les spécificités du lieu d'implantation étudié.

Les échanges convectifs et émission radiative du sol sont regroupés ici sous la forme d'un flux :  $CE_{eq}$  égale à l'échange global, caractérisé par un coefficient d'échange global avec l'atmosphère :  $h_{eq}$ .

Tous ces paramètres sont tous considérés comme des valeurs moyennes annuelles, et sont considérés alors constantes et ne variant pas durant l'année.

La température à la surface du sol résultant de ce bilan se présente finalement sous la forme :

$$T_{sol}(0, t) = \bar{T}_s + A_1 \sin(\omega t - \varphi_\Phi) + A_2 \sin(\omega t - \varphi_\Phi) \quad (\text{II. 24})$$

Où la température :  $T_{sol}(x, t)$  est celle du sol, au temps  $t$  et à la profondeur  $x$ , qui peut être écrite sous autre forme :

$$T_{sol}(x, t) = \bar{T}_e + A_e \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \varphi_e - \frac{x}{\delta}\right) \quad (\text{II. 25})$$

Avec  $\delta$  représentant la profondeur de pénétration du signal. Cette dernière est liée à la diffusivité thermique du sol :  $\left(a_{sol} = \frac{\lambda_{sol}}{c_{sol} \rho_{sol}}\right)$  et à la période du signal d'entrée  $\omega$ , par

la relation  $\delta = \sqrt{\frac{2 a_{sol}}{\omega}}$

Physiquement, cette profondeur de pénétration indique le lieu où l'amplitude du signal de température surfacique est périodique, de pulsation  $\omega$ , elle est atténuée d'un facteur  $e^{-1} \approx 0,367$ . À partir de la température en surface du sol (2), la température dans tout le sol prend la forme :

$$T(x, t) = \bar{T}_s + A_1 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \varphi_a - \frac{x}{\delta}\right) + A_2 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \varphi_\Phi - \frac{x}{\delta}\right) \quad (\text{II. 26})$$

Normalement un terme  $G_{\text{geo}}(x)$  est ajouté à cette solution afin de représenter le réchauffement géothermique du sol. Beaucoup d'auteurs considèrent en pratique que l'effet géothermique peut être représenté par une fonction linéaire, indépendante du sol :  $G_{\text{geo}}(x) = g \cdot x$  avec  $g$  le vecteur de la pesanteur.

En raison de la faible profondeur considérée dans notre cas d'étude, ce terme aura un effet assez réduit sur la température du sol (quelques dixièmes de degré tout au plus) donc on le négligera par la suite.

Ainsi, cette modélisation rend possible le calcul analytiquement de la température du sol pour toute profondeur, à toute heure de l'année.

Nous pouvons conclure que l'approximation sinusoïdale proposée plus haut suppose que le climat à l'endroit où se situe le bâtiment modélisé présente une saisonnalité marquée (climat tempéré). Dans les autres cas (climats tropicaux, équatoriaux, etc.), ce modèle risque de n'être plus valable. Cependant, il faut noter que pour ces climats-ci, dans le domaine où la profondeur du sol n'est pas élevée est en général par pertinent, en raison de la valeur élevée de la température moyenne du sol. De plus, ce modèle est utilisé dans de nombreux cas dans la littérature, ce qui laisse à penser qu'il demeure satisfaisant pour les besoins de la modélisation (géothermie).

# Chapitre III

**Présentation de la Méthode de Volume Fini**

### III.1 Introduction :

La méthode a été décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar (Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, [34]).

La méthode des volumes finis est une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. La technique des volumes de contrôle consiste dans l'intégration des équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle (VC) comme illustré par la figure( III. 1):

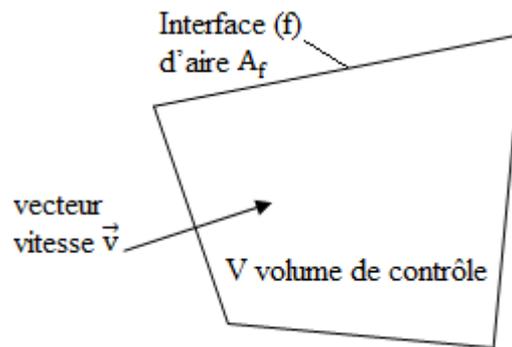


Figure III. 1 : volume de contrôle.

### III.2 Présentation générale [34] :

Dans le cas générale, l'équation de transport pour une grandeur scalaire  $\Phi$ , valable pour toutes les équations de conservation, en régime stationnaire est de la forme:

$$\oint_A (\rho \Phi \vec{v}) \cdot d\vec{A} = \oint_A (\Gamma_\Phi \text{grad } \Phi) \cdot d\vec{A} + \oint_{VC} S_\Phi dV \quad (\text{III. 1})$$

Où :

$\rho$  : La densité du flux.

$\vec{v}$  : Le vecteur vitesse  $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$ .

$\vec{A}$  : Le vecteur l'aire de la surface.

$\Gamma_{\Phi}$  : le coefficient de diffusion de la grandeur  $\Phi$ .

$\text{grad } \Phi$  : le gradient de  $\Phi$ , ( $\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j}$  en 2D).

$S_{\Phi}$  : le terme source (la source de  $\Phi$  par unité de volume).

L'équation (III. 1) est appliquée sur chaque volume de contrôle du domaine de calcul (domaine d'étude ou d'analyse). La discrétisation de cette équation donne :

$$\sum_f^{N \text{ faces}} \rho_f v_f \Phi_f A_f = \sum_f^{N \text{ faces}} \Gamma_{\Phi} (\nabla \Phi)_n A_f + S_{\Phi} V \quad (\text{III. 2})$$

Où :

$N \text{ faces}$  : Le nombre de faces (interfaces) du volume de contrôle.

$\Phi_f$  : La valeur de  $\Phi$  transférée par convection à travers l'interface  $f$ .

$A_f$  : L'aire de l'interface  $f$  ( $|\vec{A}| = |A_x \vec{i} + A_y \vec{j}|$  en 2D).

$v_f$  : Le flux de masse à travers l'interface  $f$ .

$(\vec{\nabla} \Phi)_n$  : la valeur de  $\vec{\nabla} \Phi$  normal (perpendiculaire) à l'interface  $f$ .

$V$  : le volume du volume de contrôle.

### III.2.1 Méthodologie d'application :

Les différentes étapes de la mise en application de la méthode de volume fini sont :

- La discrétisation du domaine de calcul en un nombre fini de points (les nœuds du maillage), autour desquels on définit des volumes élémentaires (appelés volumes de contrôle) contigus, non juxtaposés et sans discontinuités aux interfaces.
- Les équations modèles, sous forme conservative, sont intégrées sur chaque volume de contrôle (VC). Les intégrales sur un volume de contrôle en un nœud donné sont évaluées en approchant la variation de  $\Phi$  par des profils ou des lois d'interpolation entre les nœuds voisins du point considéré.
- Écriture des équations algébriques en fonction des valeurs de  $\Phi$  aux nœuds du maillage. Résolution du système algébrique linéaire obtenu.

### III.2.2 Avantages :

- Préservation du caractère conservatif des équations sur chaque volume de contrôle (continuité des flux aux interfaces), valable pour n'importe quelle finesse du maillage.
- Mise en œuvre relativement facile.
- Applicable aux géométries complexes.
- Temps de calcul et stockage mémoire raisonnable (matrice de type bande).

### III.2.3 Inconvénient :

- Moins précis que les méthodes spectrales.

## III.3 Application à la conduction thermique 1D stationnaire :

Supposons l'équation de conduction thermique stationnaire unidimensionnelle :

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) + S = 0 \quad (\text{III. 3})$$

Les étapes qui doivent être parcourues, pour obtenir le système d'équations algébriques, sont les suivantes :

### III.3.1 Discrétisation du domaine de calcul :

La façon de discrétisation est présentée dans la figure (III. 2).

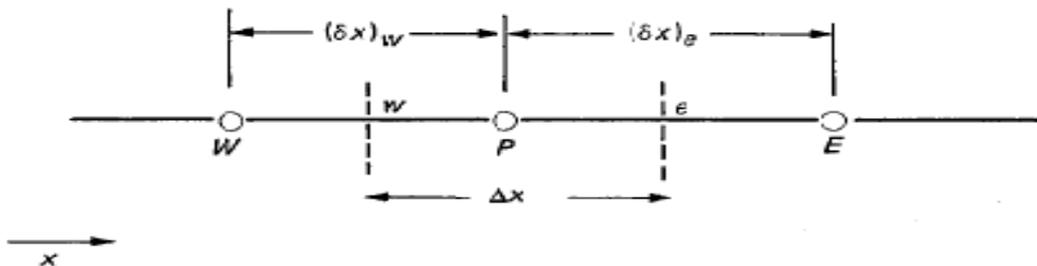


Figure III. 2 : Maillage unidimensionnel.

Où :

P : Nœud considéré.

W : Nœud "West".

E : Nœud “East”.

W : interface “West” du volume de contrôle (VC).

w, e : interfaces “West” et “East” du (VC).

$\Delta x$  : largeur du (VC) étudié.

### III.3.2 Intégration de l'équation de conduction 1D sur le (VC) en un point P :

En intégrant l'équation (III.3) sur le volume de contrôle (figure III. 2) on obtient successivement :

$$\int_w^e \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_w^e S dx = 0 \quad (\text{III. 4})$$

$$\left[ \lambda \frac{dT}{dx} \right]_w^e + \int_w^e S dx = 0 \quad (\text{III. 5})$$

$$\lambda_e \left( \frac{dT}{dx} \right)_e - \lambda_w \left( \frac{dT}{dx} \right)_w + \bar{S} [x]_w^e = 0 \quad (\text{III. 6})$$

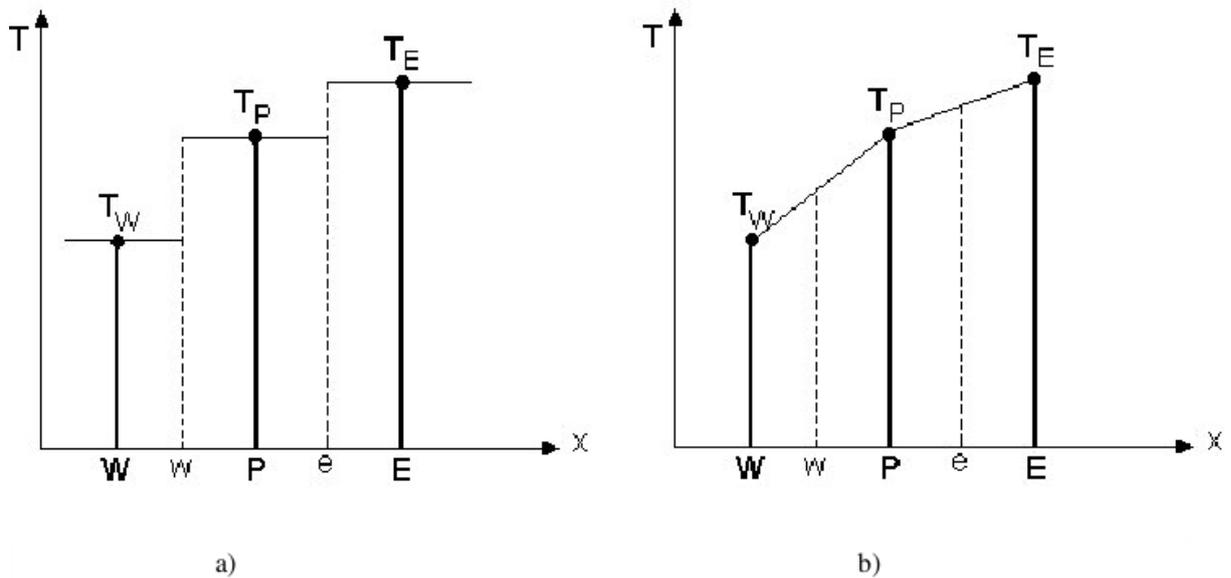
Où  $\bar{S}$  est une valeur moyenne du terme source S sur le volume de contrôle. En tenant compte de la loi de Fourier ( $\vec{q} = -\lambda \text{grad}T$ ),  $\vec{q}$  étant la densité du flux thermique, l'équation (III. 6) peut-être réécrite ainsi :

$$-q_e + q_w + \bar{S}\Delta x = 0 \quad (\text{III. 7})$$

Où  $q_e$  et  $q_w$  sont les densités du flux thermique aux interfaces du volume de contrôle.

### III.3.3 Choix d'un profil de température (interpolation) entre les nœuds voisins de P :

Il y a deux types de profils qu'on peut envisager, l'un étant le profil constant (voir figure. III. 3 (a)) et l'autre le profil linéaire (figure. III. 3 (b)).



**Figure III. 3 :** Choix du profil de température. a) Profil constant. b) Profil linéaire.

Dans le cas d'un profil constant de température (figure. III. 3 (a)), sur le volume de contrôle, on a une discontinuité de la température  $T$  aux interfaces  $w$  et  $e$  du volume de contrôle. De plus, la dérivée  $(dT/dx)$  n'est pas définie et donc ce profil de température ne convient pas.

Dans le cas d'un profil linéaire de température (figure. III. 3 (b)), entre les nœuds du maillage, la discontinuité de  $T$  n'existe plus et les dérivées aux interfaces sont définies :

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_e = \frac{T_E - T_P}{x_E - x_P} = \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} \quad (\text{III. 8})$$

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_w = \frac{T_P - T_W}{x_P - x_W} = \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \quad (\text{III. 9})$$

### III.3.4 Écriture de l'équation de conduction thermique sous la forme algébrique :

L'équation (III. 6) s'écrit ainsi :

$$\lambda_e \frac{(T_E - T_P)}{\delta x_e} - \lambda_w \frac{(T_P - T_W)}{\delta x_w} + \bar{S} \Delta x = 0 \quad (\text{III. 10})$$

Où le facteur  $(\bar{S})$  est la valeur moyenne de  $S$  sur le volume de contrôle.

Finalement, après le regroupement des termes, l'équation algébrique s'écrit ainsi :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b \quad (\text{III. 11})$$

Avec :

$$a_E = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e} \quad a_W = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w} \quad a_P = a_E + a_W \quad b = \bar{S} \Delta x$$

### III.3.5 Généralisation :

1. La forme générale des équations discrétisées est la suivante :

$$a_P T_P = \sum a_{VS} T_{VS} + b \quad (\text{III. 12})$$

L'indice vs = indique les nœuds voisins.

2. La dérivée  $dT/dx$  aurait pu être évaluée avec d'autres fonctions d'interpolation.
3. Toutes les quantités ne doivent pas forcément être évaluées avec les mêmes fonctions d'interpolation.
4. Pour une même variable, les mêmes fonctions d'interpolation ne doivent pas être forcément utilisées pour tous les termes dans l'équation modèle.

Les principes à respecter sont :

1. les variations des quantités  $\Phi$  aient un comportement physique réaliste.
2. le bilan global soit conservatif.

### III.4 Traitement du terme source S :

Si le terme source S varie de façon non linéaire,  $S = S(T)$ , on écrit :

$$\bar{S} = S_C + S_P T_P \quad (\text{III. 13})$$

où  $S_C$  est un terme constant (indépendant de la température), Il faut linéariser en fonction de T pour obtenir un système d'équations algébriques linéaires.

### III.5 Les règles de base (règles de Patankar) [34] :

Les suivantes règles ont été énoncées par Patankar :

**Règle 1 :** Consistance du flux aux interfaces des volumes de contrôle. Si une interface est commune à deux volumes de contrôle, dans les équations discrétisées, l'expression du

flux à travers elle, doit être la même pour les deux volumes de contrôle voisins considérés.

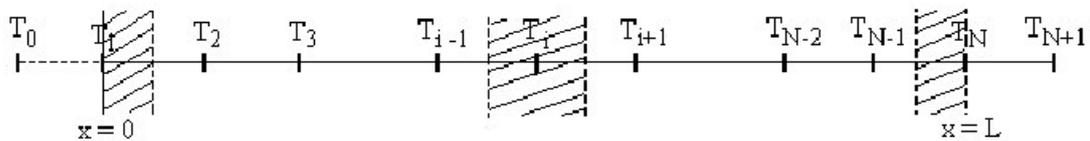
**Règle 2 :** Tous les coefficients  $a_p$  et  $a_{vs}$  doivent avoir le même signe dans l'équation discrétisée.

**Règle 3 :** Pente négative dans le terme source linéarisé. Lors de la linéarisation du terme source  $\bar{S} = S_C + S_P T_P$  la pente  $S_P$  doit être  $\leq 0$  car sinon on peut avoir contradiction à la règle 2).

**Règle 4 :** Les équations discrétisées doivent rester valables quand la valeur d'une variable dépendante augmente avec une valeur constante.

### III.6 Algorithme de Thomas ou TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) :

Cet algorithme permet de calculer la solution d'un système linéaire lorsque la matrice est tridiagonale. Le maillage dans le cas 1D est présenté dans la figure III. 4



**Figure III. 4 :** représentation du maillage 1D en volumes finis.

Par application de cet algorithme (TDMA), les équations discrétisées dans le système linéaire sont obtenues par intégration de l'équation (III.12) sur un volume de contrôle (VC). Nous avons les équations discrétisées en considérant un nœud intérieur (i) qui s'écrivent dans notre cas :

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i \quad \text{(III. 14)}$$

Où  $1 \leq i \leq N$

La température  $T_i$  est exprimée en fonction des températures voisines  $T_{i-1}$  et  $T_{i+1}$ . Pour prendre en compte la forme spéciale des équations pour les points de frontière (1) et (N) il faut que :  $c_1 = 0$  et  $b_N = 0$ .

Pour ( $i = 1$ ), si la température  $T_1$  est connue on a  $a_1 = 0, b_1 = 0, c_1 = 0$  et  $d_1 = T_1$ .

Dans l'équation (III. 14) pour  $(i = 2)$ , est une relation entre  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$ , en effet  $T_1$  est exprimée en fonction de  $T_2$  connue, la relation entre  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$ , est réduite à une relation entre  $T_2$  et  $T_3$ , c'est-à-dire  $T_2$  peut être exprimée en fonction de  $T_3$ .

Le processus de substitution continue jusqu'à  $T_N$  qui est exprimée en fonction de  $T_{N+1}$  qui ne joue aucun rôle puisque  $(b_N = 0)$ , donc on obtient, dans cette étape, la valeur de la  $T_N$ .

On commence ensuite le processus inverse où l'on détermine  $T_{N-1}$  en fonction de  $T_N$ ,  $T_{N-2}$  en fonction de  $T_{N-1}$  et ainsi de suite jusqu'à  $T_2$  écrit en fonction de  $T_3$  alors que  $T_1$  est en fonction de  $T_2$ . Le processus de substitution continue en avant selon les étapes comme suit :

$$a_1 T_1 = b_1 T_2 + 0 + d_1 \rightarrow T_1 = f(T_2) = \frac{b_1}{a_1} T_2 + \frac{d_1}{a_1} \quad \text{(III. 15)}$$

$$a_2 T_2 = b_2 T_3 + c_2 T_1 + d_2 \rightarrow T_2 = f(T_3) \quad \text{(III. 16)}$$

$$a_3 T_3 = b_3 T_4 + c_3 T_2 + d_3 \rightarrow T_3 = f(T_4) \quad \text{(III. 17)}$$

.....

$$a_{N-1} T_{N-1} = b_{N-1} T_N + c_{N-1} T_{N-2} + d_{N-1} \rightarrow T_{N-1} = f(T_N) \quad \text{(III. 18)}$$

$$a_N T_N = 0 + c_N T_{N-1} + d_N \rightarrow T_N = Q_N \quad \text{(III. 19)}$$

Dans cette étape on cherche les relations de type  $T_i = f(T_{i+1})$  sous la forme,

$$T_i = P_i T_{i+1} + Q_i \quad \text{(III. 20)}$$

Mais on peut écrire également la relation suivante :

$$T_{i-1} = P_{i-1} T_{i+1} + Q_{i-1} \quad \text{(III. 21)}$$

En remplaçant l'équation (III. 20) dans (III. 14) on obtient :

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i \quad \text{(III. 22)}$$

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} (P_{i-1} T_i + Q_{i-1}) + d_i \quad \text{(III. 23)}$$

En regroupant les termes dans l'équation (III. 21) sous la forme générale (III. 20) on obtient les coefficients  $P_i$  et  $Q_i$  en fonction des coefficients  $P_{i-1}$  et  $Q_{i-1}$ :

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (\text{III. 24})$$

Et

$$Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (\text{III. 25})$$

Pour démarrer le processus de récurrence on constate que pour  $i = 1$  l'équation (III. 23) est déjà sous la forme (III. 22) et les valeurs de  $P_1$  et  $Q_1$  sont données par les formules suivantes :

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad \text{Et} \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1}$$

Il est bien de préciser que les relations de  $P_i$  et  $Q_i$  sont obtenues si l'on remplace  $c_1 = 0$  dans les relations (III. 24) et (III. 25).

À la fin du processus de récurrence on constate que  $b_N = 0$  et donc  $P_N = 0$  et de l'équation (III. 23) on obtient finalement:

$$T_N = Q_N \quad (\text{III. 26})$$

À ce point, on est dans la situation de démarrer le processus de substitution en arrière en utilisant la relation (III. 23).

### III.7 Résumé de l'algorithme :

1. Calculer  $P_1$  et  $Q_1$  en utilisant leurs relations
2. Calculer  $P_i$  et  $Q_i$ , pour  $i = 2 \div N$ , avec les relations de récurrence (III. 23)
3. Poser  $T_N = Q_N$
4. Utiliser l'équation  $T_i = P_i T_{i+1} + Q_i$  pour variant de  $i = N - 1$  à 1 pour obtenir  $T_{N-1}, T_{N-2}, \dots, T_1$ .

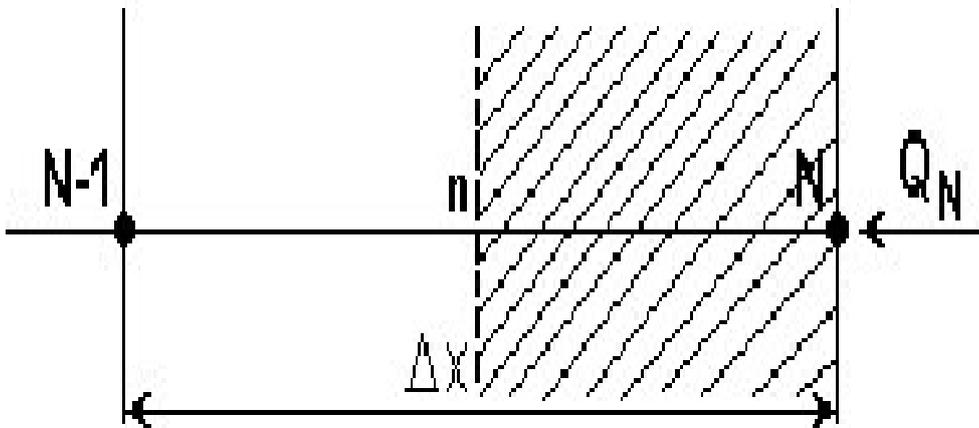
### III.8 Traitement des conditions aux limites :

On considère l'équation de conservation de l'énergie (III. 1) dans le domaine  $0 < x < L$ , le maillage unidimensionnel est présenté à la figure III. 4.

Pour les points 1 et N situés aux frontières du domaine de calcul on intègre l'équation (III. 1) sur un demi-volume de contrôle.

Les trois cas typiques de conditions aux limites rencontrées pour les problèmes de conduction thermique sont :

1. Température imposée (connue) à la frontière (condition de type Dirichlet), dans ce cas, la température  $T_1$  ou/et  $T_N$  est connue, il n'est pas nécessaire d'écrire une équation discrétisée supplémentaire au nœud 1 ou/et N.
2. Densité du flux thermique imposée, donc  $(dT / dx)$  connue (condition de type Neumann), on intègre l'équation (III. 1) sur le demi-volume de contrôle (VC) illustré à la figure (III. 5).



**Figure III. 5 :** Traitement d'une condition limite de type flux imposé (Neumann).

3. Densité du flux thermique spécifiée par un coefficient d'échange ( $h$ ) et une température du fluide environnant ( $T_f$ ) ou par un flux radiatif (condition mixte ou de type Fourier).

### III.9 Généralisation à la conduction thermique dans un volume 3 D :

La méthodologie qu'on utilise pour la discrétisation de l'équation dans le cas du domaine tridimensionnel reste la même que celle utilisée dans le cas unidimensionnel. Dans ce cas le volume de contrôle représenté par de la figure (III. 5)

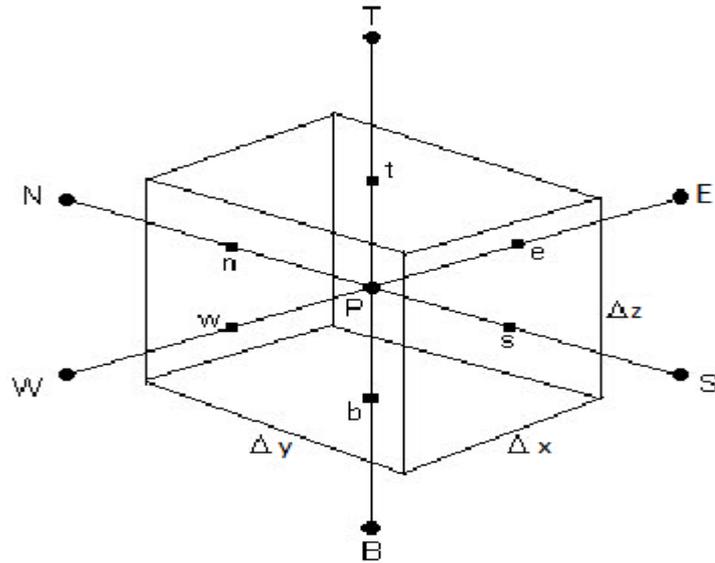


Figure III. 6 : cas de volume de contrôle 3D.

L'équation de conduction thermique est de forme générale tridimensionnel comme suit :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S \quad (\text{III. 27})$$

Où :

$\rho$  : Masse volumique moyenne en  $[\text{kg}/\text{m}^3]$ .

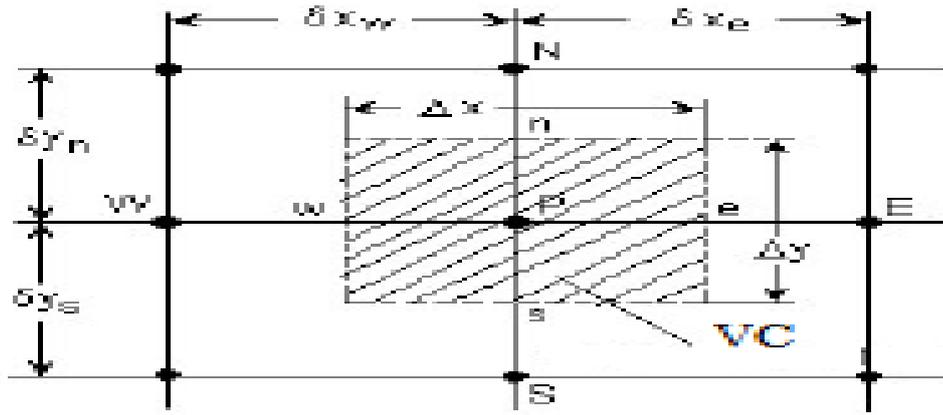
$C_p$  : Capacité calorifique massique moyenne en  $[\text{J}/\text{kg K}]$ .

$\lambda$  : Conductivité thermique moyenne en  $[\text{W}/\text{m K}]$ .

$T$  : Température en  $[\text{K}]$  en un point du domaine de calcul repéré par les coordonnées  $(x, y, z)$  et à l'instant  $t$  en  $[\text{s}]$ .

$x, y, z$  : Coordonnées spatiale du point considéré dans le domaine en  $[\text{m}]$ .

$S$  : Terme source considéré dans l'équation de conduction en  $[\text{W}/\text{m}^3]$ .



**Figure III. 7 :** Volume de contrôle en deux dimensions.

L'intégration de l'équation (III.1) sur le volume de contrôle (VC) bidimensionnel schématisé à la figure (III. 5) et sur un intervalle de temps de  $t$  à  $t + \Delta t$ , donne :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} S dV dt \quad (\text{III. 28})$$

$$\rho C_p (T_P - T_P^0) \Delta x \Delta y = \int_t^{t+\Delta t} \left\{ \lambda_e \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_w \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right\} \Delta y dt + \int_t^{t+\Delta t} \left\{ \lambda_n \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_n - \lambda_s \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_s \right\} \Delta x dt \quad (\text{III. 29})$$

En remplaçant les gradients de température on obtient :

$$\rho C_p (T_P - T_P^0) \Delta x \Delta y = \int_t^{t+\Delta t} \left\{ \lambda_e \left( \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} \right) - \lambda_w \left( \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \right) \right\} \Delta y dt + \int_t^{t+\Delta t} \left\{ \lambda_n \left( \frac{T_N - T_P}{\delta n} \right) - \lambda_s \left( \frac{T_P - T_S}{\delta x_s} \right) \right\} \Delta x dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta x \Delta y dt \quad (\text{III. 30})$$

En utilisant le schéma totalement implicite, on obtient :

$$\rho C_p (T_P - T_P^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} = \lambda_e \left( \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} \right) \Delta y - \lambda_w \left( \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \right) \Delta y + \left( \frac{T_N - T_P}{\delta y_n} \right) \Delta x - \lambda_s \left( \frac{T_P - T_S}{\delta y_s} \right) \Delta x + \bar{S} \Delta x \Delta y \quad (\text{III. 31})$$

En regroupant les termes dans l'équation (III. 31) on obtient la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_p T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b \quad (\text{III. 32})$$

$$\text{Où : } a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_w}, \quad a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_e}, \quad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_s}, \quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\delta x_n};$$

$$a_p = a_W + a_E + a_S + a_N + a_p^0 \quad (\text{III. 33})$$

$$\text{Avec : } a_p^0 = \rho C_p \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad \text{et} \quad b = \bar{S} \Delta x \Delta y + a_p^0 T_P^0$$

**Tableau III. 1:** coefficients de l'équation discrétisée

$A_w$	$A_e$	$A_s$	$A_n$
$\Delta y . 1$	$\Delta y . 1$	$\Delta x . 1$	$\Delta x . 1$

Si l'on peut exprimer  $\bar{S} = S_c + S_p T_P$  (linéarisation du terme source) alors les coefficients  $a_p$  et  $b$ , de l'équation discrétisée, sont les suivants :

$$a_p = a_W + a_E + a_S + a_N + a_p^0 - S_p \Delta x \Delta y \quad (\text{III. 34})$$

$$\text{Avec } b = S_c \Delta x \Delta y + a_p^0 T_P^0$$

# Chapitre IV

**Modélisation de la Conduction Thermique dans  
le sol**

# Chapitre IV Modélisation de la Conduction Thermique dans le sol

## IV.1 introduction :

Les facteurs influant sur la température du sol et le taux de transmission de chaleur dans le sous-sol est dû aux échanges entre l'atmosphère et la surface du sol. Elles peuvent être classées selon trois grandes catégories : les variables météorologiques, les variables du terrain considéré et celles du sous –sol. En effet cette influence est déterminée principalement par les conditions climatiques de la région telles que le rayonnement solaire, la température de l'air et les précipitations. Chaque région du sol considéré se caractérise particulièrement par ses variations cycliques de la température de l'air et du rayonnement solaire qui se produisent à la suite des changements saisonniers et quotidiens. D'autres facteurs météorologiques doivent être considérés tels que le vent, la pluie et l'humidité de l'air. De même localement elle est due aux propriétés physiques caractérisant la texture du sol (conductivité thermique, capacité calorifique, teneur en eau, ...).

## IV.2 Modélisation et formulation mathématique des échanges de chaleur sol-air :[1]

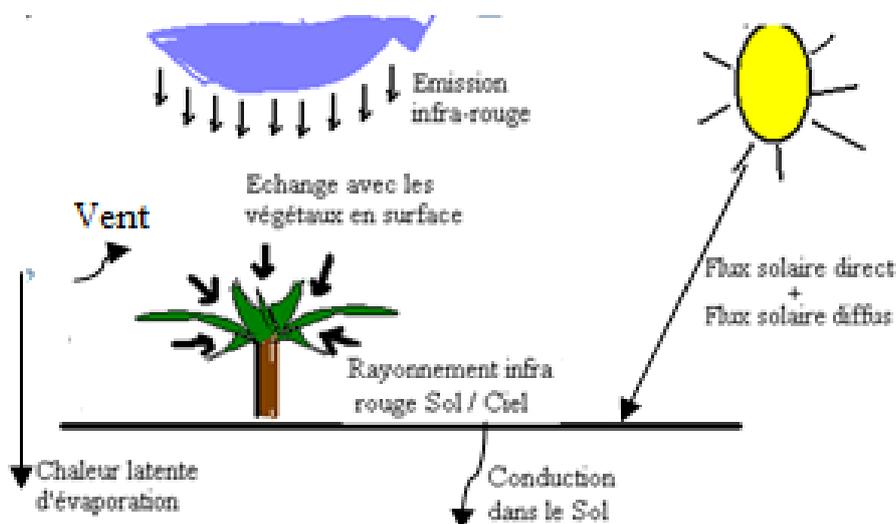


Figure IV. 1 : Différents types de flux.

Devant la multitude d'échanges thermiques qui sont mis en jeu, nous avons décidé de ne sélectionner que les principaux comme suit :

- Les apports radiatifs solaires : flux direct, flux diffus, effet de serre.
- Convection dans l'air (le vent).

## Chapitre IV Modélisation de la Conduction Thermique dans le sol

---

- Rayonnement infrarouge émis par le sol et échangé avec la voûte céleste.
- Flux de la chaleur latente dû à l'évaporation au niveau de la surface du sol.

L'équation du bilan énergétique à la surface du sol est une équation de condition limite (Krarti et al, 1995), le bilan énergétique à la surface du sol à  $y=0$  peut être exprimé par l'équation d'équilibre énergétique régissant l'ensemble des échanges sol-environnement. En effet le sol reçoit de l'énergie net  $R_n$  par le rayonnement solaire, une partie sera cédée à l'atmosphère sous forme de chaleur latente de vaporisation d'eau à la surface du sol noté  $(L_v \cdot E)$ , une partie  $H$  échangée dans l'air par convection (le vent) dite flux de chaleur sensible. Enfin une dernière partie de la chaleur  $G$  est absorbée par le sol et qui correspond au flux de chaleur conduction.

L'équation d'équilibre est donnée par :

$$R_n = L_v E + H + G + J \quad (\text{IV. 1})$$

Où :

$R_n$  : Rayonnement net ( $\text{j. m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

$L_v$  : Chaleur latente de vaporisation d'eau ( $\text{j. m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

$H$  : est le flux de chaleur dû à la convection du vent ( $\text{j. m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

$G$  : est le flux de chaleur conduction dans le sol ( $\text{j. m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

$J$  : est le flux absorbé par la végétation (photosynthèse....) ( $\text{j. m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

Les expressions détaillées des flux d'échanges sont comme suit :

### IV.3 Apport radiatif solaire net $R_n$ :

Le flux solaire incident (direct et diffus) est une grandeur variable, dépendant de plusieurs paramètres (la date, l'heure, la position géographique, la nébulosité,...etc.). Cette quantité peut être calculée par l'expression suivante :

$$R_n = R_g(1 - \alpha) - R_t \quad (\text{IV. 2})$$

## Chapitre IV Modélisation de la Conduction Thermique dans le sol

---

Où :

$R_g$  : Rayonnement solaire incident global de petite longueur d'onde est donné en ( $\text{j m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ), par l'Atlas solaire de l'Algérie.

$\alpha$  : Albédo de la surface du sol.

$R_t$  : Flux de chaleur échangé par rayonnement entre la surface du sol et la voute céleste ( $\text{j m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ) est exprimé par :

$$R_t = \varepsilon_{\text{sol}} \sigma (T_{\text{surf sol}}^4 - T_{\text{Ciel}}^4) \quad (\text{IV. 3})$$

Où les facteurs  $\varepsilon_{\text{sol}}$  et  $\sigma$  en ( $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$ ) : respectivement l'émissivité du sol et la constante de Boltzmann.

Alors que,  $T_{\text{surf sol}}$  et  $T_{\text{Ciel}}$  en  $^{\circ}\text{K}$  = respectivement la température de la surface du sol et celle de la voute céleste donnée par la loi de Swinbank en fonction de la température de l'air :

La quantité de rayonnement infrarouge réémis par la surface du sol dépend directement de sa température. On utilise une émissivité moyenne du sol égale à 0.73, valeur qui varie entre 0.65 et 0.8 en fonction de la nature du milieu.

### IV.4 Equation du flux de chaleur sensible H :

Le flux de chaleur sensible H résulte de l'échange convectif correspondant au transfert d'énergie par le déplacement de l'air entre la surface du sol et les basses couches de l'atmosphère. Ce type de transfert est dû au mouvement naturel de l'air généré par la différence de la densité (convection naturelle), ou du mouvement forcé par le vent, est calculé par la relation suivante :

$$H = h_{\text{vent}} (T_a - T_{\text{surf}}) \quad (\text{IV. 4})$$

Avec :  $h_{\text{vent}}$  = coefficient de transfert convectif estimé par la relation [01].

$$h_{\text{vent}} = 0,5 + 1,2 \sqrt{V_{\text{vent}}} \quad (\text{IV. 5})$$

Où :  $V_{\text{vent}}$  = Vitesse du vent.

## Chapitre IV Modélisation de la Conduction Thermique dans le sol

---

### IV.5 Flux de chaleur Latente $L_V E$ :

Le flux de chaleur latente de la surface du sol dû à l'évaporation est calculé par la relation de Stefan basé sur la théorie de transfert de masse appelé aussi théorie de film donné par :

$$L_V \cdot E = \frac{L_V \cdot K_E \cdot M_W}{R \cdot T_a} (P_{VS}(T_S) - P_V(T_a)) \quad (\text{IV. 6})$$

Où :

$L_V$  : Chaleur latente de vaporisation d'eau.

$E$  : Flux massique de vapeur d'eau.

$K_E$  : Coefficient de transfert de masse.

$M_W$  : Masse molaire de la vapeur d'eau.

$R$  : Constante des gaz parfaits.

$P_{VS}$  = Pression de vapeur saturante donnée par :

$$P_{VS}(T_S) = \exp \left( 25,5058 - \left( \frac{5204,9}{T_S} \right) \right) \quad (\text{IV. 7})$$

Et

$P_V$  = pression de vapeur donnée par :

$$P_V(T_a) = HR P_{VS}(T_a) \quad (\text{IV. 8})$$

Avec HR : Humidité relative.

En remplaçant chacune de ces quantités des flux échangés dans l'équation du bilan énergétique(IV.1), on peut finalement écrire le flux de chaleur de conduction imposé comme condition à la limite et conduit à travers la surface libre du sol considéré.

## Chapitre IV Modélisation de la Conduction Thermique dans le sol

---

$$G = (1 - \alpha)R_g - \varepsilon_{\text{sol}}\sigma(T_{\text{surf sol}}^4 - T_{\text{Ciel}}^4) + h_c \cdot (T_a - T_{\text{surf sol}}) - L_v \cdot E \quad (\text{IV. 9})$$

Cette expression tient compte de la température de l'air extérieur, du rayonnement global incident, du vent et de l'humidité relative de l'atmosphère. En plus des considérations des conditions météorologiques, ce modèle considère la chaleur latente de vaporisation d'eau et le flux de chaleur de conduction, souvent négligée par les spécialistes.

### IV.6 Mise en équation du problème :

La formulation mathématique de ce problème est basée sur l'équation de conduction, qui avec les conditions aux limites et à l'interface sol-air est résolu par la méthode des volumes finis. Selon les conditions limites la mise en équation de la conduction thermique dans le sol considéré bidimensionnel est de la forme comme suit :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (\text{IV. 10})$$

Où :

$\rho$  : Masse volumique moyenne du sol en  $[\text{kg}/\text{m}^3]$ .

$C_p$  : Capacité calorifique massique moyenne du sol en  $[\text{J}/\text{kg K}]$ .

$\lambda$  : Conductivité thermique moyenne du sol en  $[\text{W}/\text{m K}]$ .

$T$  : Température en  $[\text{K}]$  en un point du sol repéré par les coordonnées  $(x, y, z)$  et à l'instant  $t$  en  $[\text{s}]$ .

$(x, y, z)$  : Coordonnées spatiale du point considéré dans le sol en  $[\text{m}]$ .

Le flux  $G$  est le flux net absorbé et conduit dans tout le domaine sol et sous-sol que nous pouvons considérer comme massif semi infini représenté par la figure suivante :

## Chapitre IV Modélisation de la Conduction Thermique dans le sol

---

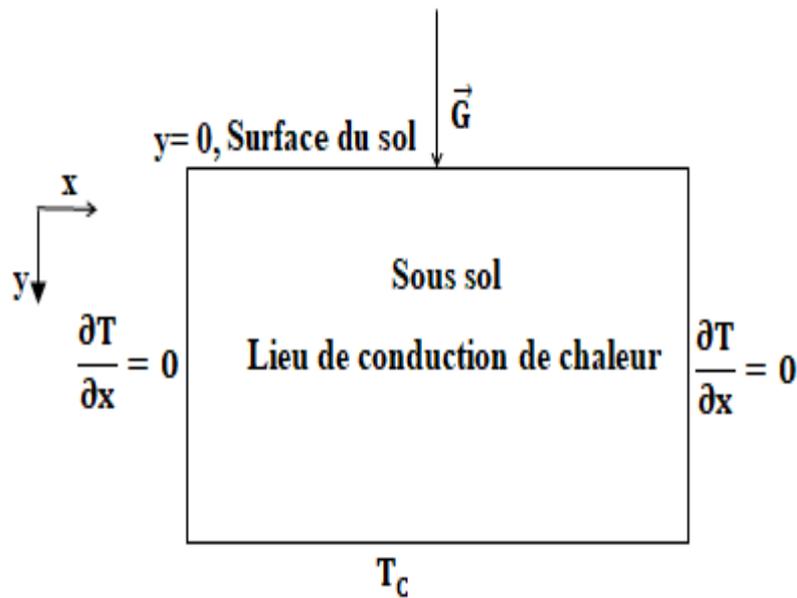


Figure IV. 2 : Domaine de calcul .

### IV.7 Conditions aux limites :

Le domaine de calcul schématisé par la figure, représente les différentes conditions aux limites considérées et sont comme suit :

$y=0$  c'est la surface libre du sol à travers laquelle est conduit le flux de chaleur  $\vec{G}$  résultant de l'équation du bilan énergétique.

La conduction de la chaleur concerne tous les points intérieurs du domaine 'sous- sol' et ne renfermant pas de source de chaleur.

Comme le domaine est considéré semi infini alors sur les frontières dans la direction de l'axe x nous pouvons considérer que le flux d'échange est nulle.

On sait qu'à une certaine profondeur dans le sol la température reste constante dont la valeur est propre au lieu géographique et à la nature géologique du sous-sol. Alors nous devons imposer à cette profondeur une température  $T_c$  constante comme condition à la limite du domaine.

La température  $T_c$  peut être déterminée par relevé de mesure expérimentale au lieu considéré.

# Chapitre IV Modélisation de la Conduction Thermique dans le sol

Les propriétés physiques ( $\rho, C_p, \lambda$ ), du matériau constitué de la roche dans le domaine sont des valeurs constantes et indépendantes du point considéré dans tout le domaine.

## IV.8 Discrétisation du domaine de calcul :

Le domaine de calcul est divisé en un nombre de point de calcul représentant les nœuds aux centres des volumes de contrôle et constituant ainsi le maillage de calcul.

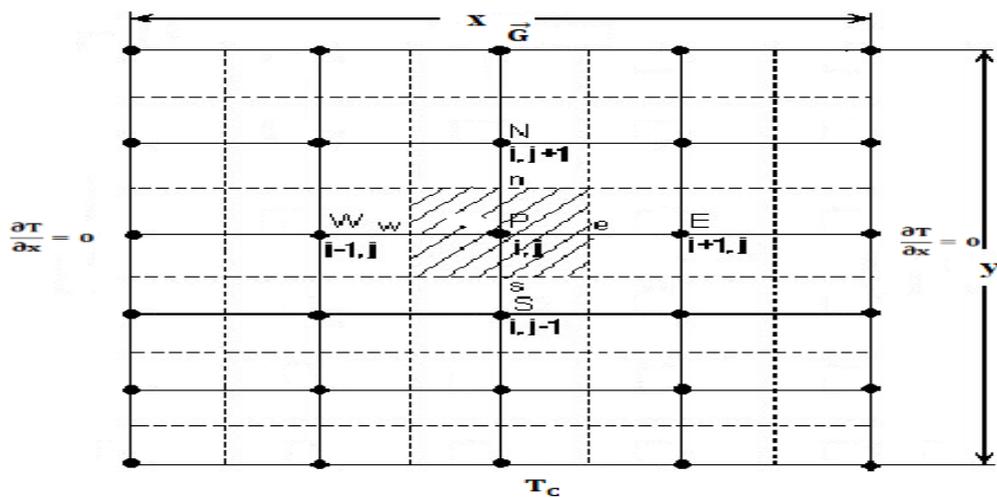


Figure IV. 3 : Maillage de calcul.

On considère le volume de contrôle bidimensionnel de la figure (IV. 3)

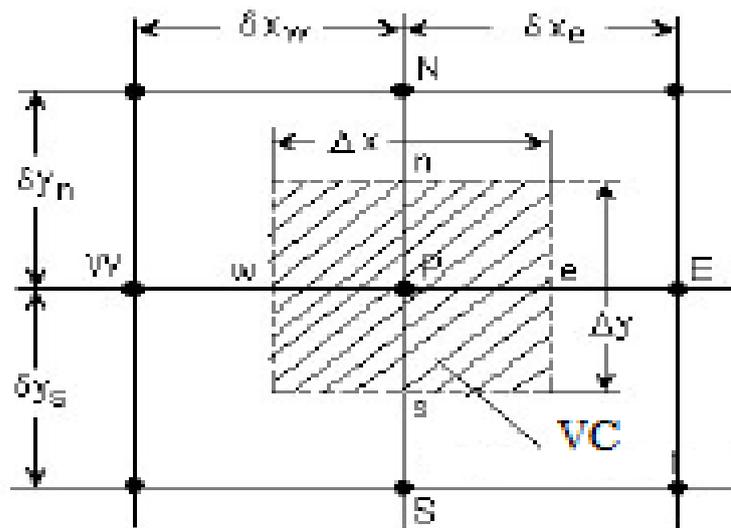


Figure IV. 4 : Volume de contrôle en deux dimensions.

## Chapitre IV Modélisation de la Conduction Thermique dans le sol

---

L'intégration de l'équation (III.1) sur le volume de contrôle schématisé dans la figure (IV. 4) et sur un intervalle de temps de  $t$  à  $t + \Delta t$ , donne :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dV dt \quad (IV. 11)$$

$$\rho C_p (T_P - T_P^0) \Delta x \Delta y = \int_t^{t+\Delta t} \left\{ \lambda_e \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_w \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right\} \Delta y dt + \int_t^{t+\Delta t} \left\{ \lambda_n \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_n - \lambda_s \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_s \right\} \Delta x dt \quad (IV. 12)$$

En remplaçant les gradients de température on obtient :

$$\rho C_p (T_P - T_P^0) \Delta x \Delta y = \int_t^{t+\Delta t} \left\{ \lambda_e \left( \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} \right) - \lambda_w \left( \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \right) \right\} \Delta y dt + \int_t^{t+\Delta t} \left\{ \lambda_n \left( \frac{T_N - T_P}{\delta n} \right) - \lambda_s \left( \frac{T_P - T_S}{\delta x_s} \right) \right\} \Delta x dt \quad (IV. 13)$$

En utilisant le schéma totalement implicite, on obtient alors l'équation:

$$\rho C_p (T_P - T_P^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} = \lambda_e \left( \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} \right) \Delta y - \lambda_w \left( \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \right) \Delta y + \left( \frac{T_N - T_P}{\delta y_n} \right) \Delta x - \lambda_s \left( \frac{T_P - T_S}{\delta y_s} \right) \Delta x \quad (IV. 14)$$

En regroupant les termes dans l'équation (IV.14) on obtient la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_p T_P = a_w T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b \quad (IV. 15)$$

Où :

$$a_w = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_w}, \quad a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_e}, \quad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_s}, \quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\delta x_n};$$

## Chapitre IV Modélisation de la Conduction Thermique dans le sol

---

Avec :

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n + a_p^0 \quad (\text{IV. 16})$$

$$a_p^0 = \rho C_p \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (\text{IV. 17})$$

$$b = a_p^0 T_p^0 \quad (\text{IV. 18})$$

**Tableau IV.1 :** Coefficients de l'équation discrétisée

$A_w$	$A_e$	$A_s$	$A_n$
$\Delta y . 1$	$\Delta y . 1$	$\Delta x . 1$	$\Delta x . 1$

Dans cette étude, la résolution est faite par une méthode numérique purement élaborée dans un environnement MATLAB. Les résultats obtenus sont exposés.

Nous avons choisis le site de Biskra, des relevés enregistrés sur une période d'une année (2005) tableau I.1 [35] ont été investis et plus particulièrement les moyennes mensuelles des paramètres de :

- La vitesse du vent
- L'humidité relative de l'air
- La température ambiante
- Le taux d'évaporation
- L'Insolation.

## Chapitre IV Modélisation de la Conduction Thermique dans le sol

Le tableau suivant regroupe les valeurs moyennes mensuelles pour l'année 2005.

Mois	Insolation h	Température T° moy °C	Vitesse de Vent V m/s	Humidité relative de l'air HR moy %	Evaporation
Janvier	221	10	04.6	53	110.7
Février	232	10.7	03.9	51	140.3
Mars	270	17.8	04.2	41	195.5
Avril	298	21.8	05.3	32	257.6
Mai	320	27.9	03.7	28	329.1
Juin	358	31.7	04	29	370.6
Juillet	371	35.9	03.5	26	420.83
Aout	334	27.2	03.4	29	385.8
Septembre	268	28.5	03.5	46	290.2
Octobre	251	24	02.1	51	198.2
Novembre	215	17.7	03.7	54	144.2
Décembre	219	10.8	03.1	66	159.8

**Tableau IV.2 :** Valeurs moyennes mensuelles pour l'année 2005.

Source : station météorologique Biskra 2005 [35].

La région de Biskra est caractérisée par un sol de texture limono sableuse [0cm - 20 cm], sablo limoneuse [20 cm – 60 cm] et sablo argileuse au-delà de 60 cm [35] avec les caractéristiques thermo physiques qui sont regroupées dans le tableau IV.1. Celui-ci possède la particularité d'être typiquement homogène sur toute la profondeur dans toute la région.

**Tableau VI.3 :** Caractéristiques du sol de la région de Biskra [35].

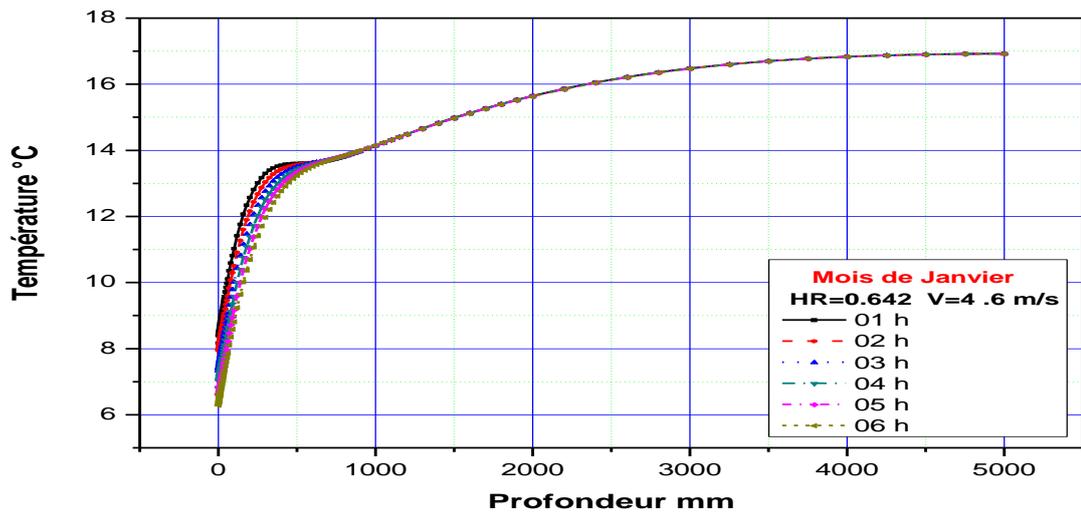
Chaleur Spécifique	Conductivité thermique	Emissivité	Masse volumique
$10^3 \text{ j.K}^{-1}.\text{Kg}^{-1}$	$3 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$	0.73	$2.10^3 \text{ Kg m}^{-3}$

# Chapitre V

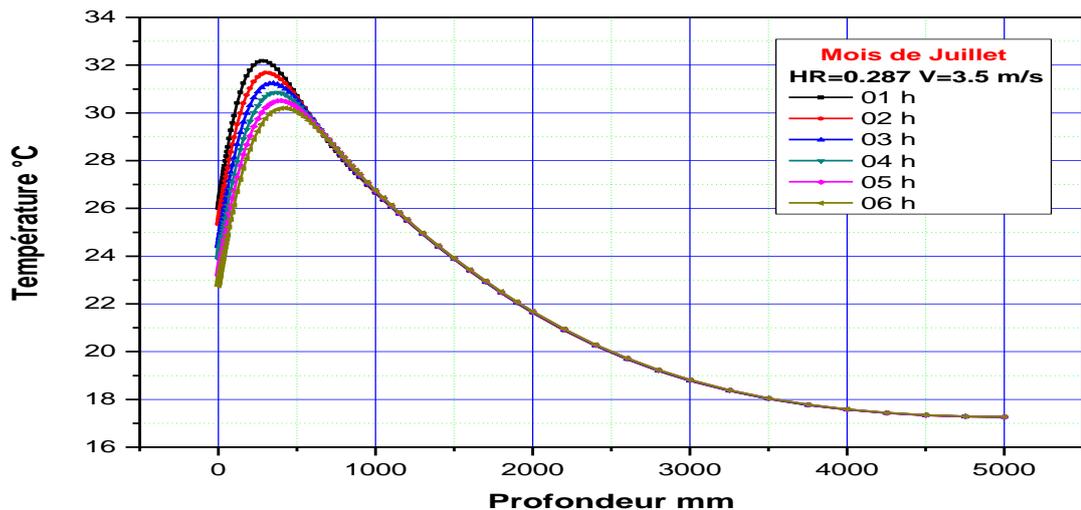
**Résultats et Interprétations**

Nous avons jugé utile de ne présenter que les résultats relatifs aux mois de Janvier caractérisant la saison froide et humide, puis le mois de Juillet caractérisant la saison chaude et sèche. Les courbes qui suivent traduisent la distribution de la température du sol soumis à diverses sollicitations thermiques. Les valeurs sont données pour les 24 heures de la journée type du mois considéré.

**V.1 La variation de la température du sol (Janvier – Juillet) :**



**Figure V.1 :** Variations des T° dans le sol du mois de Janvier de (01 à 06) heures.



**Figure V.2 :** Variations des T° dans le sol du mois de Juillet de (01 à 06) heures.

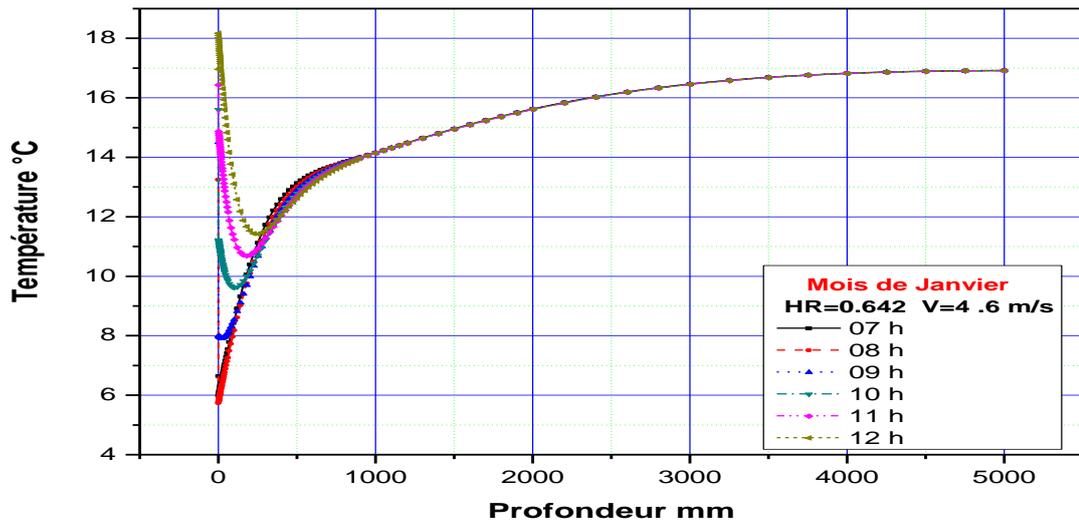


Figure V.3 : Variations des T° dans le sol du mois de Janvier de (07 à 12) heures.

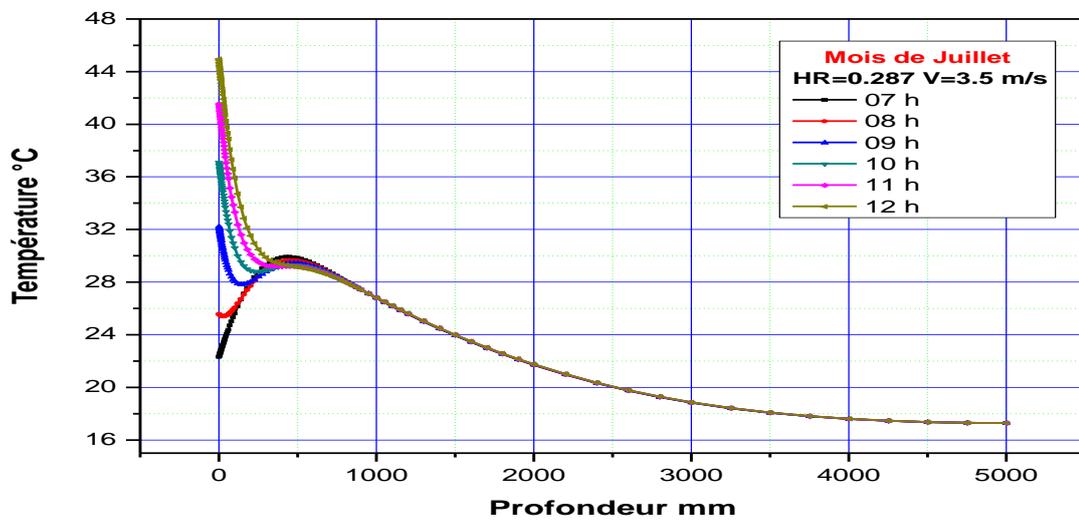


Figure V.4 : Variations des T° dans le sol du mois de Juillet de (07 à 12) heures.

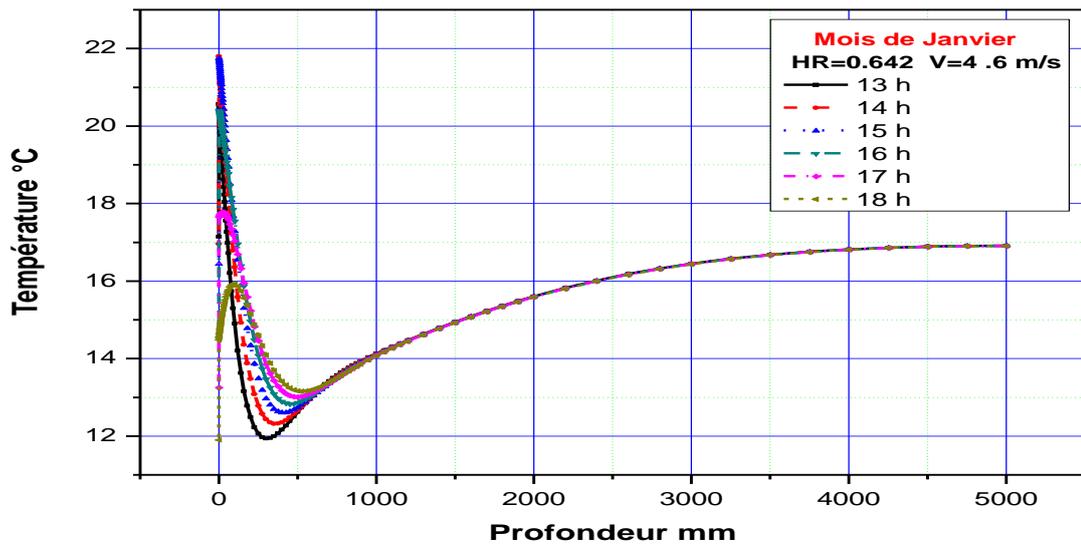


Figure V.5 : Variations des T° dans le sol du mois de **Janvier** de (13 à 18) heures.

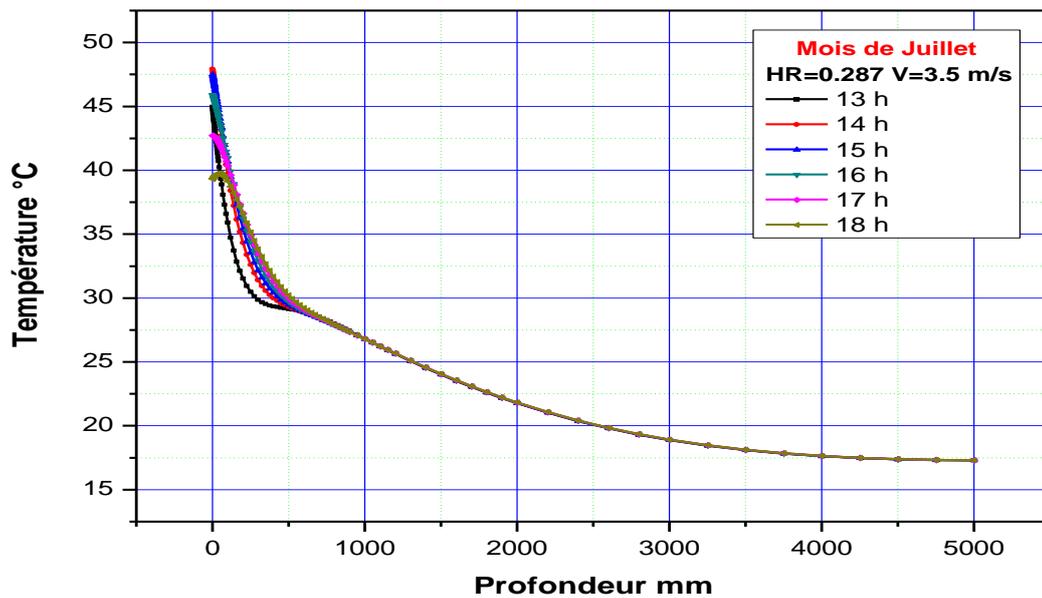


Figure V.6 : Variations des T° dans le sol du mois de **Juillet** de (13 à 18) heures.

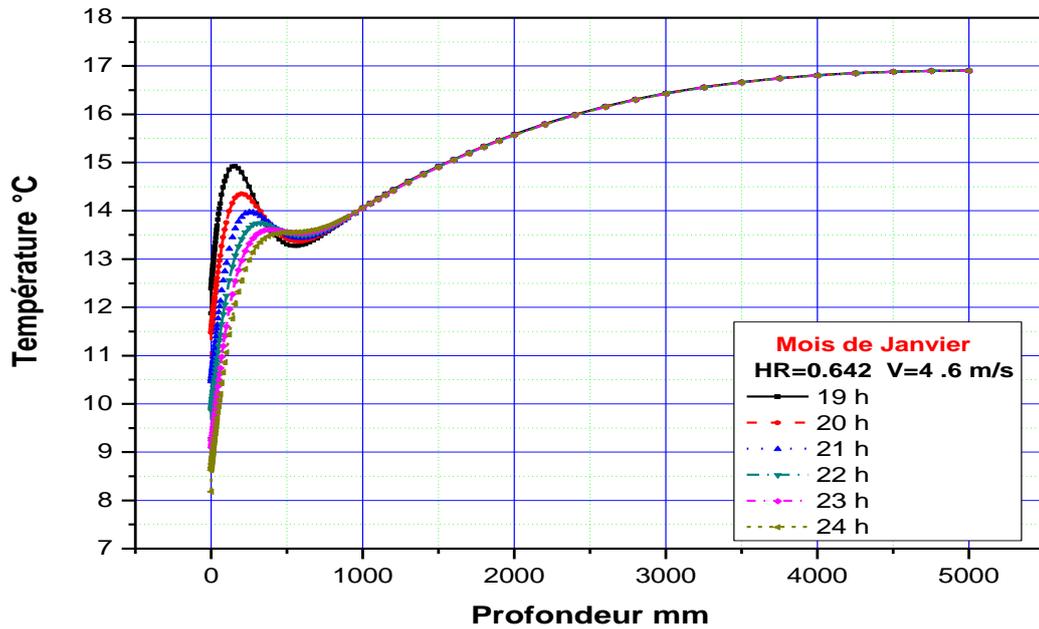


Figure V.7 : Variations des T° dans le sol du mois de Janvier de (19 à 24) heures.

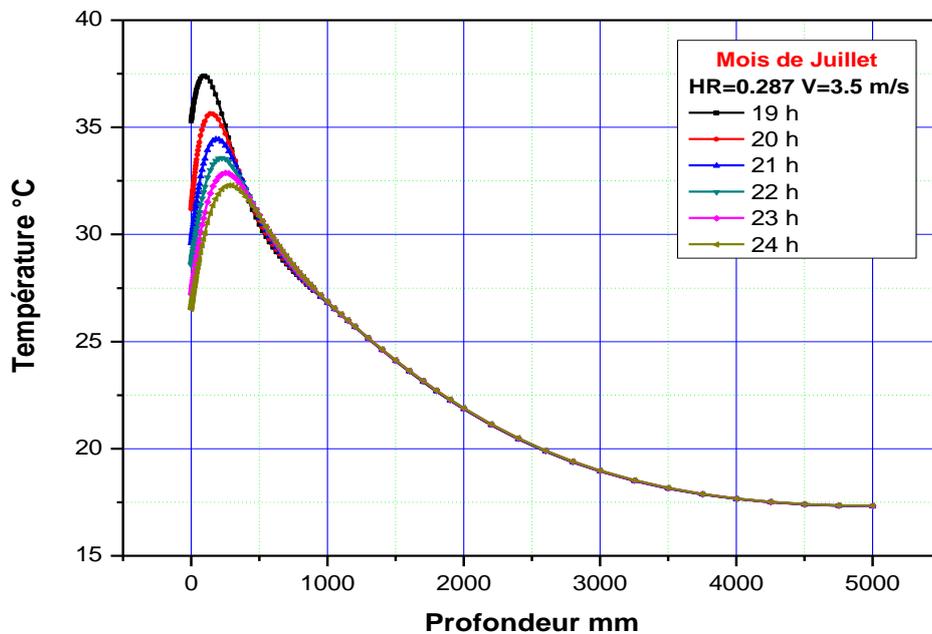


Figure V.8 : Variations des T° dans le sol du mois de Juillet de (19 à 24) heures.

## V.2 Interprétations des résultats :

Les résultats obtenus à travers les courbes exposées ci-dessus sont donnés uniquement pour le mois de Janvier et Juillet. Nous avons exposés séparément la période diurne et nocturne de la journée.

Durant la période diurne, période ensoleillée, le sol reçoit de l'énergie  $R_n$  qui se diffuse en profondeur de manière visible et significative jusqu'à la limite de 60 cm dans le sol. Au-delà de cette profondeur la variation devient de plus en plus amoindrie pour se stabiliser à partir de la profondeur de 03 mètres (allure asymptotique) pour une valeur de 17 °C.

Durant la période nocturne, l'air se refroidi et par conséquent il devient plus dense et il à tendance à s'attirer sur la surface du sol. L'air plus chaud tend à s'élever et l'atmosphère dans cette période se trouve donc étagée. C'est le phénomène de l'inversion thermique nocturne, celle-ci est le résultat d'un phénomène radiatif se produisant dans les basses couches de l'atmosphère.

Durant la nuit le sol solide cède l'énergie emmagasinée durant la période diurne et rayonne beaucoup plus rapidement que l'atmosphère. Après le coucher du soleil, il tend à se refroidir en cédant sa chaleur et peut même devenir plus froid que l'atmosphère. Ceci est très bien visible dans les courbes des figures (V.1- V.8).

## V.3 Variation des flux de chaleur dans le sol (Janvier et Juillet) :

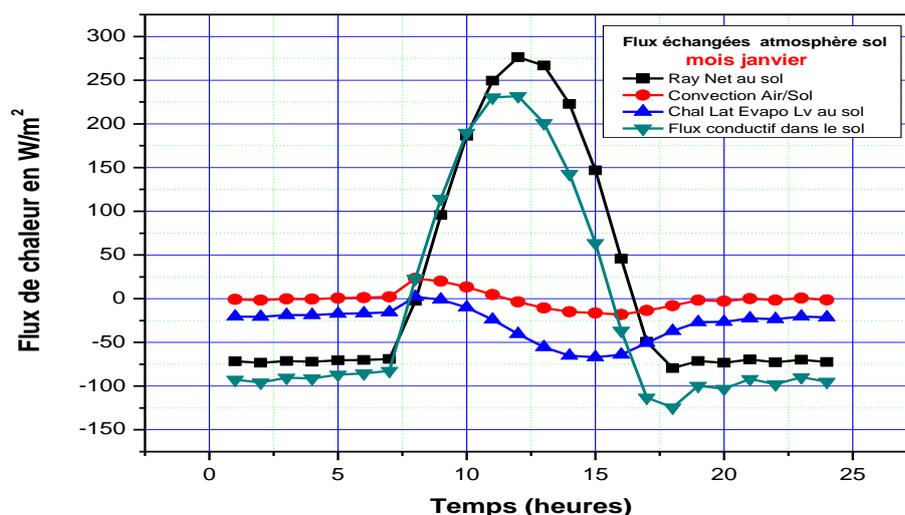


Figure V.9 : Variations des différents flux de chaleur du mois de Janvier.

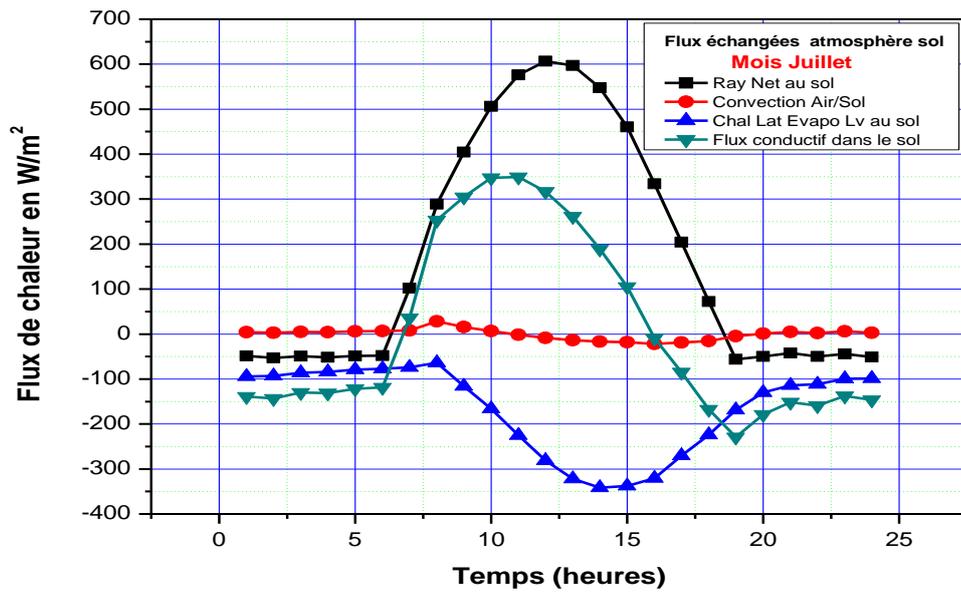


Figure V.10 : Variations des différents flux de chaleur du mois de Juillet.

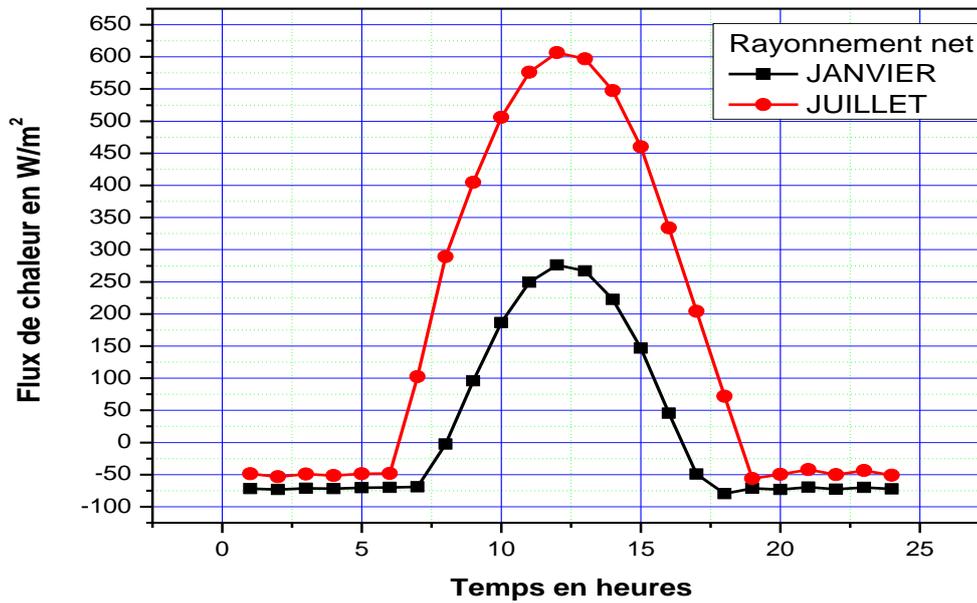
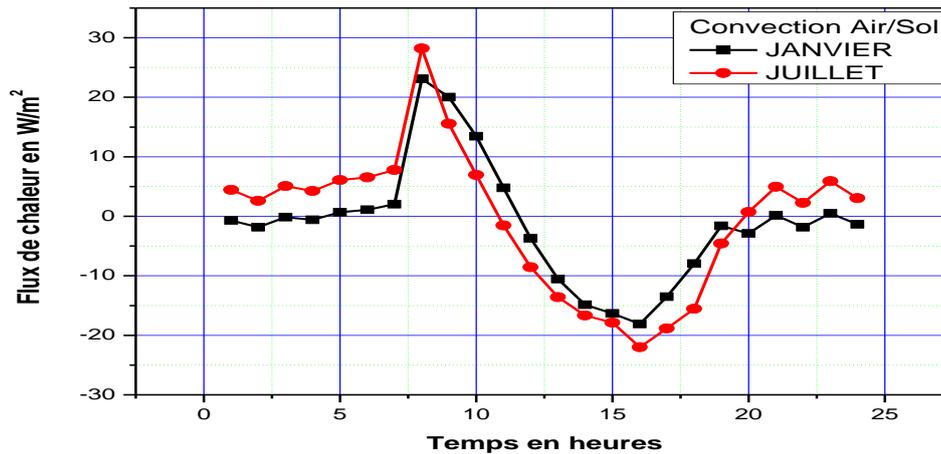


Figure V.11 : Variations du flux de chaleur de rayonnement net des mois (Janvier- Juillet).



**Figure V.12 :** Variations du flux de chaleur de Convection air/sol des mois (Janvier - Juillet).

#### V.4 Interprétations des Résultats :

Le calcul des différents flux échangés entre le sol et l'environnement ont mis en évidence différents phénomènes physiques qui ont lieu durant l'année et qui peuvent expliquer le déphasage thermique qui existe entre le sol et l'environnement en période estivale et hivernale. Cela est très important pour les applications telles que le rafraîchissement et le chauffage géothermique. En effet en été lorsque le rayonnement solaire est maximal et la température ambiante est élevée le sol est à sa valeur de température minimale. Ce déphasage est très bien expliqué dans cette étude à travers le calcul des différents flux intervenant dans ce phénomène physique extrêmement important.

Le flux de chaleur latente cédé à l'atmosphère est minimal au mois de Janvier (mois le plus humide de l'année) donc l'évaporation est minimale dans ce mois et est maximum au mois de Juillet (mois le plus sec de l'année). Ceci est en très bonne concordance avec les valeurs données au tableau VI.2. relatif à l'humidité.

Le flux convectif pour le mois de janvier est plus important que celui du mois de juillet car le vent est plus important que celui de Juillet. D'autre part le flux G conductif a le même profil que celui de rayonnement  $R_n$ . Le flux de rayonnement du mois de Juillet représente pratiquement le double de celui du mois de Janvier.

Au mois de Janvier la chaleur latente cédée à l'atmosphère est moins importante que celle cédée durant le mois de Juillet. De ce fait, le flux conductif comparativement au flux

$R_n$  du mois de Janvier est plus important que celui du mois de Juillet est ceci se remarque par l'écart notable entre les courbes des figures (V.9- V.12).

.

## **Conclusion Générale et Perspectives**

Nous avons développé un code de calcul dans un espace bidimensionnel en considérant toutes les propriétés physiques du sol homogènes sur le site considéré. Ce code nous a permis de résoudre le problème du transfert de chaleur dans le sol. Cette étude nous a permis de déterminer le profil de la température du sol soumis aux différentes sollicitations thermiques externes. Le sol est très sensible à ces sollicitations thermiques pour une couche de 60 cm à partir de sa surface. Au-delà de cette profondeur, la température dans le sol fluctue de manière moins sensible, jusqu'à la profondeur de 03 mètres où celle-ci se stabilise. Ceci est très important pour les applications de la géothermie pour le rafraîchissement estival et le chauffage hivernal des locaux dans le site de Biskra. Notre étude fournit une perception générale et quantitative des échanges de chaleur sol-air et de la conduction dans le sol. L'évolution de la température selon le temps journalier et la profondeur dans le sol a été discutée.

Plusieurs points mériteraient d'être complétés ou approfondis. Sur le plan expérimental, il conviendrait de procéder à la mesure de différents paramètres afin de valider notre modèle. En perspective effectuer des mesures expérimentales dans les couches profondes du sol pour relever la température stable sur toute l'année, dont la valeur est nécessaire à la résolution de la conduction thermique dans le sol.

## **Référence :**

- [1] **MIHALAKAKOU G**, **SANTAMOURIS M.**, **ASIMAKOPOULOS D.**, “Modeling the earth temperature using multiyear measurements”, *Energy and Buildings* Vol.: 9, pp.: 1-9, 1992.
- [2] **MIHALAKAKOU G**, **SANTAMOURIS M.**, **ASIMAKOPOULOS D.**, “Modeling the thermal performance of earth to air heat exchangers”, *Solar Energy*, Vol.: 53, pp.:301-307., 1994.
- [3] **MIHALAKAKOU G**, **SANTAMOURIS M**, **ASIMAKOPOULOS D.** And **ARGIRIOU A.**, “On the ground temperature below buildings”, *Solar Energy* Vol. 55, No. 5, pp. 355-362, 1995.
- [4] **MIHALAKAKOU G**, **SANTAMOURIS M**, **LEWIS J. O.** and **ASIMAKOPOULOS D. N.**, “On the application of the energy balance equation to predict ground temperature profiles”, *Solar Energy*, Vol. 60, pp. 181-190, 1997.
- [5] **GAUTHIER C**, **LACROIX M.** and **BERNIER H**, “ Numerical simulation of soil heat exchanger-storage systems for greenhouses, *Solar Energy*,Vol. 60, No. 6, pp. 333-346, 1997.
- [6] **ALVENIIS G**, and **JANSSON P**, “Model for evaporation, moisture and temperature of bare soil: calibration and sensitivity analysis”, *Agricultural and Forest Meteorology*, Vol. 88, pp. 47-56. 1997.
- [7] **BEST M. J**, “A model to predict surface temperatures”, *Boundary-Layer Meteorology*, Vol. 88, pp. 279–306, 1998.
- [8] **SEDLAK P**, “Stable atmospheric surface layer in modeling with constant ground temperature”, *Studia geoph, et geod*, Vol. 42, pp. 41-60, 1998.
- [9] **KISHCHA P.V.** and **DMITRIEVA I. V**, “Spatial structure and long-term variations of the ground-level temperature variance”, *Studia geoph. et geocl.* Vol 42, pp. 511-520, 1998.

- [10] **WANG J. and BRAS R. L.**, “Ground heat flux estimated from surface soil temperature”, *Journal of Hydrology*, Vol. 216, pp. 214-226, 1999. *Studia geoph. et geod.*, Vol. 42, pp. 41-60, 1998.
- [11] **YU QIU G., BEN-ASHER J, YANO T. and MOMII K.**, “Estimation of soil evaporation using the differential temperature method”, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, Vol. 63, pp. 1608–1614, 1999.
- [12] **SALAH EL DIN M. M.**, “On the heat flow in to the ground”, *Renewable Energy*, Vol. 18, pp. 473-490. 1999.
- [13] **MIHAILOVIC D. T, KALLOS G., ARSENIC I. D., LALIC B, RAJKOVIC B. and PAPADOPOULOS A.**, “Sensitivity of soil surface temperature in a forcerestore equation to heat fluxes and deep soil temperature”, *Int. J. Climatol*, Vol. 19, pp. 1617–1632, 1999.
- [14] **KANG S, KIM S, OH S. and LEE D.**, “Predicting spatial and temporal patterns of soil temperature based on topography, surface cover and air temperature”, *Forest Ecology and Management*, Vol. 136, pp. 173-184, 2000.
- [16] **X BELTRAMI H.**, “On the relationship between ground temperature histories and meteorological records: a report on the Pomquet station”, *Global and Planetary Change*. Vol. 29, pp. 327–348, 2001.
- [17] **MIHALAKAKOU G.**, “On estimating soil surface temperature profiles”, *Energy and Buildings*, Vol. 34, pp. 251-259, 2002.
- [18] **TESSY CHACKO P. and G. RENUKA.**, “Temperature mapping thermal diffusivity and subsoil heat flux at Kariavattom of Kerala”, *Proc. Indian Acad. Sci. (Earth Planet. Sci.)*, Vol. 111, No. 1, pp. 79-85, 2002.
- [19] **PLAUBORG F.**, “Simple model for 10 cm soil temperature in different soils with short grass”, *European Journal of Agronomy*, Vol. 17, pp. 173–179, 2002.
- [20] **TIMLIN D.J., PACHEPSKY YA, ACOCK B.A., SIMUNEK J., FLERCHINGER G., WHISLER F.**, “Error analysis of soil temperature simulations using measured and estimated hourly weather data with 2DSOIL”. *Agricultural Systems*, Vol.: 72, pp.: 215-239, 2002.

- [21] **WHISLER F**, “Error analysis of soil temperature simulations using measured and estimated hourly weather data with 2DSOIL”. *Agricultural Systems*, Vol.: 72, pp.: 215-239, 2002.
- [22] **QIN Z., BERLINER P. and KARNIELI A**, “Numerical solution of a complete surface energy balance model for simulation of heat fluxes and surface temperature under bare soil environment”, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 130, pp. 171–200, 2002.
- [23] **KARAM M. A**, “Reforming the force–restore method for predicting ground surface temperature”, *Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, pp.: 1-5, 2003.
- [24] **GULSER C. and EKBERLI I**, “A comparison of estimated and measured diurnal soil temperature through a clay soil depth”, *Journal of Applied Sciences*, Vol. 4, No. 3, pp. 418-423, 2004.
- [25] **LIEBETHAL C., HUWE B. and THOMAS F**, “Sensitivity analysis for two ground heat flux calculation approaches”, *Agricultural and Forest Meteorology*, Vol. 132, pp. 253–262, 2005.
- [26] **YANG W. B., HENG S. M. and DONG H**, “Numerical simulation of the performance of a solar-earth source heat pump system”, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 26, pp. 2367–2376, 2006.
- [27] **SPICHAK V. V**, “Estimating temperature distributions in geothermal areas using a neuronet approach”, *Geothermic*, Vol. 35, pp. 181–197, 2006. [27] **ESEN H, INALLI M. and ESEN M.**, “Numerical and experimental analysis of a horizontal ground-coupled heat pump system”, *Building and Environment*, Vol. 42, pp 1126–1134, 2007.
- [28] **ZHONG Z. and BRAUN J. E**, “A simple method for estimating transient heat transfer in slab-on-ground floors”, *Building and Environment*, Vol. 42, pp. 1071– 1080, 2007.
- [29] **MABROUKI Djamel**, ‘Etude de l’influence des paramètres climatiques sur la température du sol (application au site de Biskra)’ *Mémoire de Magister*, Université de Biskra, 2013.
- [30] **HATTAB YUCEF**, ‘Course de rayonnement de physique’ 2015-2016.

- [31] **H.K. Versteeg and W.Malalasekera**, 'An introduction to computational fluid dynamics'. The finite volume method. C Longman Group Ltd 1995.
- [32] **Esteban Saadjian** Les bases de la mécanique des fluides et des transferts de chaleur et de masse pour l'ingénieur . les éditions Sapiaienta ISBN 978-2-911761-85-0.
- [33] **PREBAT ADEME Dimensionnement du « puits climatique »** Analyse, modélisation, validation d'un modèle de simulation dynamique pour les puits « canadiens » ou « provençaux » Rapport final 04 04C 000 1 Région Languedoc-Roussillon
- [34] **S. V. Patankar**, Numerical heat transfer and fluid flow. Mc Graw –Hill, New York (1980).
- [35] **A. Ben Aziza et H. Lebed** “caractérisation de quelques variétés d'abricotiers dans la région de M'chouneche Wilaya de Biskra” courrier du savoir N°08, Université de Biskra, 2007 pp 101-110.

## ملخص :

لحساب درجة حرارة التربة، يستخدم العديد من المؤلفين النموذج التحليلي، استنادا إلى المعادلة التفاضلية مع التوصيل الحراري العابر وكذلك على معادلة توازن الطاقة على سطح الأرض حيث تم اقتراح طريقة نمذجة جديدة للاستبانة العددية للتوصيل الحراري في التربة. هذه الدراسة، التي تستند إلى معادلة توازن الطاقة التي تنطوي بدورها على تبادل الطاقة بين الهواء والتربة، والإشعاع الشمسي الذي تمتصه سطح الأرض وكذلك الإشعاع طويل الموجة.

يتم اختيار النموذج لأنه، يستند إلى معادلة توصيل الحرارة التفاضلية، لأنه يأخذ أيضا في الاعتبار الظروف الجوية وخصائص التربة، بغض النظر عن الموقع. إن التحليل الحدودي للتأثيرات المختلفة على التوصيل الحراري في التربة يجعل من الممكن عرض التطور وفقا للوقت ودرجة الحرارة، ليس فقط على سطح التربة من الأرض، وإنما أيضا لأعماق مختلفة. تعتمد الصيغة الرياضية لهذه المشكلة على معادلة التوصيل، والتي يتم حلها مع الظروف الحدودية وواجهة الأرض.

**الكلمات المفتاحية :** حرارة التربة ، التوصيل الحراري ، المعادلة التفاضلية

## Résumé :

Pour le calcul de la température du sol de nombreux auteurs utilisent le modèle analytique, basé sur l'équation différentielle à conduction thermique transitoire ainsi que sur l'équation du bilan énergétique à la surface du sol. En incluant et imposant dans l'équation du bilan énergétique la variation périodique du rayonnement solaire et de la température atmosphérique à côté du flux de chaleur latent dû à l'évaporation.

Une nouvelle méthode de modélisation est proposée pour la résolution numérique de la conduction thermique dans le sol. L'étude, basée sur l'équation du bilan énergétique qui implique un échange d'énergie entre l'air et le sol, le rayonnement solaire absorbé par la surface du sol ainsi que le rayonnement à ondes longues. Le modèle a été choisi parce que, même s'il est basé sur une équation différentielle de conduction thermique, il prend également en compte les conditions météorologiques et les propriétés du sol, quel que soit le lieu. L'analyse paramétrique des différentes influences sur la conduction thermique dans le sol, permet de présenter l'évolution selon le temps, de la température non seulement à la surface du sol du sol, mais également pour différentes profondeurs. La formulation mathématique de ce problème est basée sur l'équation de conduction, qui avec les conditions aux limites et à l'interface sol-air est résolu par la méthode des volumes finis.

**LES MOTS CLES:** température du sol, conduction thermique, l'équation différentielle