



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculte des sciences et de la Technologie
Génie Mécanique

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences et Techniques

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Ergétique

Réf. :

Présenté et soutenu par :

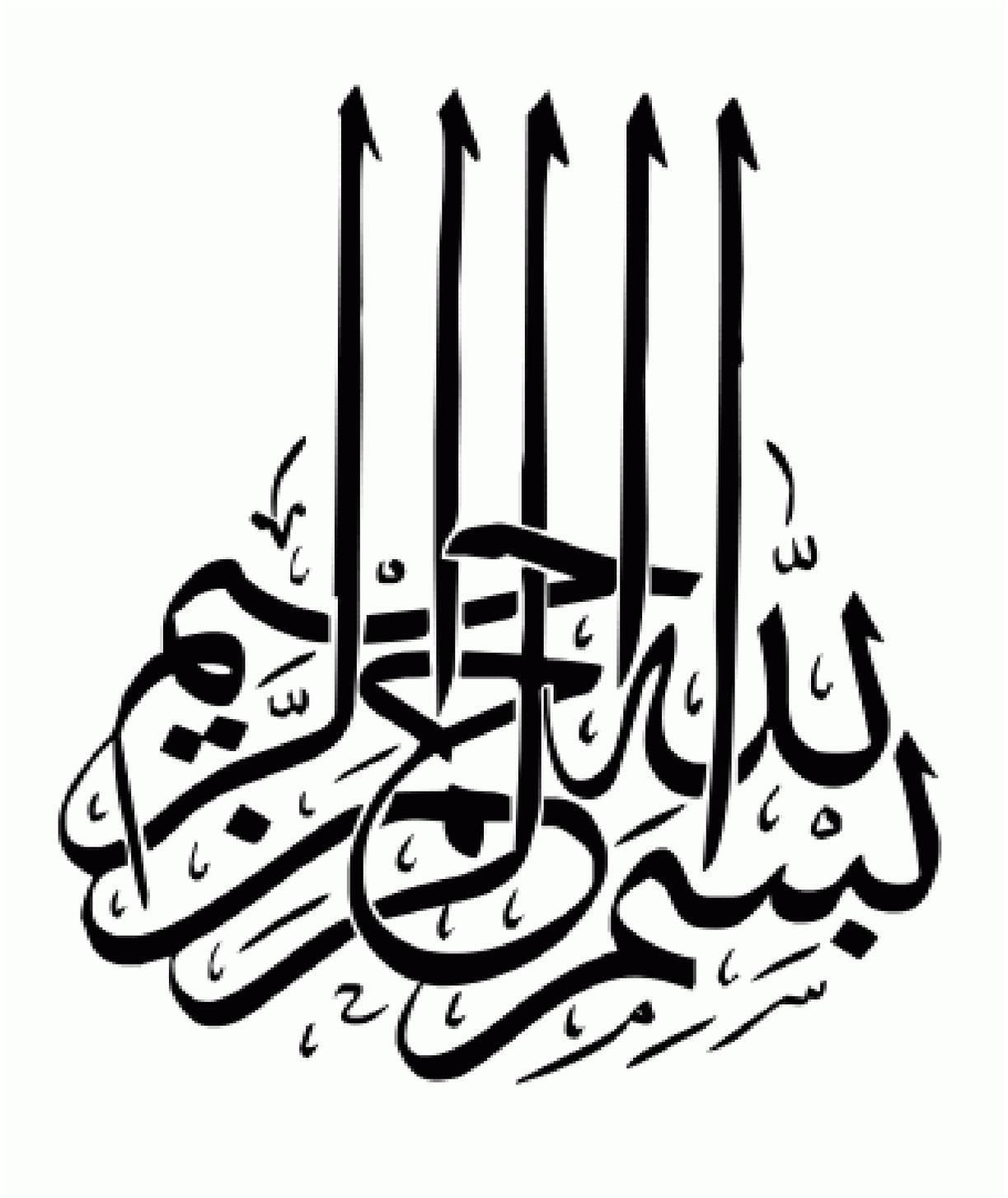
Sara DOGHMANE

Le : mardi 09 juillet 2019

Contribution au contrôle du gradient de pression dans un écoulement bidimensionnel en présence de singularités

Jury :

Dr.	Lakhdar SEDIRA	MCA	Université de Biskra	Président
Pr.	Abdelhafid BRIMA	Pr	Université de Biskra	Rapporteur
Dr.	Chawki MAHBOUB	MCB	Université de Biskra	Examineur



إهداء

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلا بطاعتك.. إلهي لك الحمد والشكر في الأولى ولك الحمد والشكر في الآخرة.. ولك الحمد والشكر من قبل ولك الحمد والشكر من بعد.. اللهم لك الحمد حمدا أبلغ به رضاك و أؤدي به شكرك وأستوجب به المزيد من فضلك.

إلى من بلغ الرسالة.. وأدى الأمانة.. ونصح الأمة.. إلى نبي الرحمة ونور العالمين

سيدنا محمد عليه أفضل الصلاة وأزكى التسليم

إلى الذي وهبني كل ما يملك حتى أحقق له أماله.. إلى من كان يدفعني قدما نحو الأمام لنيل المبتغى.. إلى الإنسان الذي امتلك الإنسانية بكل قوة.. إلى الذي حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلم.. إلى مدرستي الأولى في الحياة

والذي الغالي أطل الله في عمرك

إلى عشقي المقدس وملاكي الطاهر.. إلى من أوصاني الرحمن بها وجعل الجنة تحت قدميها.. إلى من كان دعاؤها سر نجاحي..

إلى نبض حياتي

والدتي الحبيبة عسى الله يطيل بعمرك

إلى حماة ظهري وذخري و ثروتي العظيمة.. إلى حائطي الذي أتكا عليه عند شدتي وملاذي بعد الله عند كربتي..

إلى إخوتي

شمس الدين.. بشير.. ومحمد أيمن

إلى زهرتا الحياة الدنيا.. إلى أميرتي قلبي

إلى أختاي

فاطمة الزهراء.. وآية

إلى من برحيلهم أوجعوني.. إلى من مهما بلغت من مراحل السعادة إلا أنني افتقد لذتها دونهم

إلى روح جدي.. إلى روح جدتي

ليرحمكما الله ويسكنكما فسيح جنانه

إلى جدتي قرمية وجدي بشير أسأل الله أن يطيل عمركما ويديم عليكما الصحة والعافية

إلى عائلتي دغمان وشريف فردا فردا

إلى الوردة الفواحة والعروس المنتظرة زوجة أخي

مديحة

إلى نجوم سمائي المتألثة في الحياة.. إلى إخواني التي لم تلدهم أمي ولكن ولدتهم لي الأيام إلى من كانوا سندا لي بفضلكم
أُف في هذا الموقف الجميل شكرا لكل من :

رفيق الصعاب ورفيق الميكانيك العظيم أيمن .. قصيرتي شيماء.. قصي.. آيات.. عقبة.. عبدو..

شكرا لكم أصدقائي..

إلى ابنة عمي هند أسأل الله أن يعوضها خيرا عن ابنتها رحمها الله

إلى صاحبة الإبتسامة الحلوة حنان

إلى قلب البهو التكنولوجي النابض إلى من سكب في أرواحنا جرعة الأمل

عمي إسماعيل

إلى رئيس نادي الجزري الصديق

حسام أسأل الله لك التوفيق والنجاح

إلى أستاذي و صديقي

صدام وفق الله خطاك

ســــــــــــــــارة دغمان

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à réaliser cette étude en apportant des renseignements ou en acceptant de répondre à mes questions.

En premier lieu je tiens à remercier chaleureusement, mon encadreur: Pr. Abdelhafid BRIMA qui n'a épargné aucun effort pour m'aider et diriger durant la réalisation de ce modeste travail. Je lui suis très reconnaissante pour la patience dont il a fait preuve le long de ce projet qui a nécessité un travail de longue haleine.

J'exprime ma profonde gratitude au Dr. Lakhdar SEDIRA qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire. Je lui suis très reconnaissante pour l'attention qu'il a portée à ce travail.

J'exprime ma profonde gratitude au Dr. Chaouki MAHBOUB, mon second encadreur par délégation du Dr. Brima, d'avoir accepté d'être membre du Jury de soutenance et pour ces efforts remarquables qui m'ont permis d'acquérir de précieuses connaissances scientifiques, je lui suis très reconnaissante pour l'attention qu'il a portée à ce travail et pour sa patience.

J'exprime également ma profonde gratitude à tous les enseignants du département de mécanique, particulièrement aux :

Dr. Hocine DJEMAI et Dr. Kamel AOUES

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Grand Merci à Tous

ملخص

تسعى ميكانيك الموائع إلى تحديد خصائص الموائع (السرعة، الضغط، والتدفق....) لضمان نقلها عبر قنوات مختلفة الشكل، خاصة في المجالات الصناعية (محطات الضخ، قنوات نقل المحروقات...).

تطرقنا في هذا العمل إلى دراسة نظرية لجريان صفائحي ثنائي البعد داخل قناة موشورية بوجود عائق مستطيل الشكل، قمنا بكتابة معادلات نافي و ستوكس إلى الشكل اللابعدي ثم باستخدام طريقة تغيير المتغير (Ψ و Ω) اختزلنا المعادلات المطبقة على مجال الدراسة إلى معادلتين، والتي من خلالها توصلنا إلى حل المشكلة عددياً باستخدام المحاكاة عبر برنامج Matlab .

النتائج تظهر السلوك الفيزيائي لهذه الظاهرة، بظهور مناطق دوامة للمائع خلف العائق مباشرة والتي تزداد بدلالة إرتفاع العائق ($m1$) وعدد رينولدز ، بالإضافة إلى مراقبة تغيرات تدرج الضغط وتغيرات مركبات شعاع السرعة، مما أظهرت توافقاً مع الأعمال المنجزة سابقاً في نفس المجال.

الكلمات المفتاحية

جريان صفائحي، قناة موشورية، عائق، عدد رينولدز، منطقة دوامة ، تدرج الضغط، مركبات شعاع السرعة، Matlab.

Résumé

La mécanique des fluides cherche à déterminer les caractéristiques des fluides (vitesse ,pression, débit..) pour assurer leurs transport par canalisation dans différentes formes de conduites surtout dans le domaine industriel (station de pompage , transport des hydrocarbures ...).

Dans ce travail, on présente une contribution à l'étude théorique de l'écoulement laminaire dans une conduite prismatique présentant un obstacle de forme rectangulaire. A partir des équations de Navier- Stocks transformées à la forme adimensionnelle à travers l'utilisation de la méthode de changement de variables (Ψ et Ω) puis par simplification des équations appliquées dans le domaine d'étude choisi à deux équations qui à travers lesquelles nous avons solutionner le problème numériquement en utilisant le MATLAB.

Les résultats obtenus reflètent le comportement physique du phénomène, par l'apparition des zones de recirculations en aval de l'obstacle qui augmente en fonction de la hauteur de celui-ci et du nombre de Reynolds , par le contrôle du gradient de pression et par la variation de la composante du vecteur vitesse ce qui concordent avec les travaux antérieurs dans le même domaine.

Mots-clés :

Écoulement laminaire, conduite prismatique, obstacle, nombre de Reynolds, zone de recirculation, gradient de pression, composante de vecteur vitesse, Matlab.

Table des matières

Dédicaces	i
Remerciements	iii
Résumé	iv
Table des matières	v
Liste des figures	ix
Nomenclature	x
Introduction générale	1

Chapitre I:

Généralités sur les écoulements bidimensionnels

I.1. Introduction	6
I.2. Ecoulements internes	6
I.2.1. Types des écoulements	6
I.3. Ecoulement laminaire	7
I.4. Pertes de charge	8
I.4.1. Les pertes de charge régulières (linéaires)	9
I.4.2. Les pertes de charge singulières	10
I.5. Equations de mouvement	19
I.5.1. Equation de continuité	20

I.5.2. Equation de Navier-Stokes	21
I.6. Approche numérique	22
I.6.1. Méthodes de discrétisation (Méthode de différences finies)	22
I.6.2. Méthodes itératives (Gauss-Seidel)	24
I.7.Synthèse bibliographique	24
I.8.Conclusion	27

Chapitre II:

Formulation mathématique du problème

II.1. Introduction	29
II.2. Mise en équation	29
II.2.1. Equation de continuité	29
II.2.1.1. Equation forme intégrale	29
II.2.1.2. Equation forme différentielle	30
II.2.2. Equation de quantité de mouvement	31
II.2.2.1. Equation forme intégrale	31
II.2.2.2. Equation forme différentielle	31
II.3. Ecriture adimensionnelle des équations gouvernant le problème	32
II.4. Transformation des équations gouvernantes	34
II.5.Conclusion	35

Chapitre III:

Approche mathématique de résolution

III.1. Introduction	37
III.2. Description du problème et les conditions aux limites	37
III.3. Etapes de la résolution du problème	40
III. 4. Discrétisation des équations de mouvement	42
III.5. Détermination du profil de la vitesse axiale	45
III.6. Procédure de résolution	46
III.7. Langage choisi pour la résolution	47
III.8. Organigramme	48
III.9. Conclusion	49

Chapitre IV:

Résultats et commentaires

IV .1. Introduction	51
IV.2. Interprétation des résultats	51
IV.2.1. L'influence de la caractéristique géométrique de l'obstacle pour $R_e=1000$	51
IV.2.2. Influence du nombre de Reynolds sur le comportement dynamique de l'écoulement	53
IV.2.3. Le gradient de pression	55
IV.2.4. Les composantes du vecteur vitesse U^* et V^*	60

IV.3. Conclusion	62
Conclusion générale	64
Références bibliographiques	65
Annexe	68

Liste des figures

Figure	Intitulé	page
I.1	Régime d'écoulement	7
I.2	Elargissement brusque	11
I.3	Entrée de réservoir	12
I.4	Divergent	12
I.5	Rétrécissement brusque	13
I.6	sortie de réservoir	14
I.7	Rétrécissement arrondi	14
I.8	Rétrécissement progressif	15
I.9	Coude à angles vifs	16
I.10	Coude arrondi	17
I.11	Coudes à ailettes	17
I.12	Les différentes formes de coudes	18
I.13	Les différentes sections de passage du coude	19
I.14	Représentation du problème sous forme de maille	23
II.1	Fluide Newtonien et fluide non Newtonien	29
III.1	Domaine physique	37
III.2	Domaine de calcul et les conditions aux limites	38
III.3	Domaine de calcul et les conditions aux limites X	38
III.4	Le Principe du calcul numérique	41
III.5	Discrétisation du domaine d'étude	42
III.6	Organigramme de résolution de l'équation des lignes de courant et de la vorticité par Matlab	50
IV.1	Contours de fonction de courant pour $Re=1000$ à ($m_1=10, 16$ et 20)	52
IV.2	Contours de fonction de courant respectivement pour $Re =1500, 2000,2300$	54
IV.3	Contours de fonction de courant respectivement pour $Re=1500, 2000,2300$	54
IV.4	Contours de fonction de courant respectivement pour $Re=1500, 2000,2300$	54
IV.5	Variation du gradient de pression près de la paroi inférieure de la conduite respectivement pour $X^*= 1 : 21, X^*= 21 : 31$ et $X^*= 31 : 100$.	57
IV.6	Variation du gradient de pression sur la ligne médiane de la conduite respectivement pour $X^*= 1 : 21, X^*= 21 : 31$ et $X^*= 31 : 100$.	58
IV.7	Variation du gradient de pression en dessous de la paroi supérieure de la conduite respectivement pour $X^*= 1 : 21, X^*= 21 : 31$ et $X^*= 31 : 100$.	59
IV.8	Variation des composantes du vecteur vitesse et pour variable. $X^* \quad V^* \quad U^*$.	61

Nomenclature

D: Diamètre.	[m]
f : la force massique.	[N/Kg]
H : hauteur de la conduite.	[m]
K : coefficient de perte de charge singulière	[Pa]
L : longueur de la conduite.	[m]
P* : Pression adimensionnelle	
\vec{q} : Le vecteur vitesse	[m/s]
Re : nombre de Reynolds	
u: composante axiale du vecteur vitesse	[m/s]
\bar{U} : vitesse moyenne.	[m/s]
U* : vitesse adimensionnelle horizontale.	
V* : vitesse adimensionnelle verticale.	
x, y : Cordonnées cartésiennes	[m]
X*, Y* : Cordonnées adimensionnelle	
ψ : Fonction de courant	[sans unité]
Ω : Fonction de vorticité	[sans unité]

Lettres grecques

ρ : Masse volumique du fluide en	[kg/m ³]
μ : Viscosité dynamique	[Kg/m .s]
λ : Coefficient de perte de charge linéaire	[Pa]
τ : Contrainte de cisaillement	[Kg/m.s ²]
ΔH : Pertes de charge	[Pa]
ω : La vorticité.	[s ⁻¹]

Introduction

Générale

Introduction générale

❖ **Bref historique de la mécanique des fluides**

La première contribution à la théorie de la mécanique des fluides à avoir été reconnue est celle du mathématicien grec Archimède (−285 ; −212 avant JC). Il a formulé et appliqué le principe de flottabilité.

Au moyen-âge, l'utilisation du rouage des fluides s'est développée lentement mais sûrement. Les harmonieuses pompes à piston ont été développées pour l'assèchement des mines, les moulins à eau et les moulins à vent ont été améliorés pour moudre le grain, forger les métaux ou pour réaliser toute autre tâche. Pour la première fois dans l'histoire de l'humanité, d'importants travaux étaient réalisés sans la puissance musculaire d'un homme ou d'un animal. Ces inventions ont généralement été considérées comme à l'origine de la révolution industrielle plus tardive.

La Renaissance a continué à développer les systèmes fluidiques et les machines tout en améliorant la méthodologie scientifique partout en Europe. Simon Stevin (1548–1617), Galiléo Galilei (1564–1642), Edme Mariotte (1620–1684) et Evangelista Torricelli (1608–1647), ont été parmi les premiers à appliquer la méthode des fluides en faisant des recherches sur la distribution de la pression hydrostatique et sur le vide. Ce travail a été intégré et affiné par le brillant mathématicien Blaise Pascal (1623–1662). Le moine italien Benedetto Castelli (1557–1644) fut le premier à publier un état sur le principe de la continuité des fluides. En parallèle à la formulation des équations de mouvement du solide, Isaac Newton (1643–1727) a appliqué ses lois aux fluides et exploré l'inertie et la résistance des fluides, des jets libres, et à la viscosité. Cet effort s'est concrétisé grâce au suisse Daniel Bernoulli (1700–1782) et son associé Leonard Euler (1707–1783).

Leur travail commun a permis de définir les équations d'énergie et de quantité de mouvement. Tout cela a changé avec le développement de l'école française d'ingénierie dirigée par Riche de Prony (1755–1839). Prony (connu pour son frein dynamométrique) et ses collaborateurs parisiens de l'École Polytechnique et de l'École des Ponts et Chaussées furent

les premiers à intégrer le calcul et la théorie scientifique au curriculum de l'ingénierie qui est devenu un modèle dans le reste du monde.

Au milieu du XIX^{ème} siècle, des avancées fondamentales sont apparues sur plusieurs fronts. Le physicien Jean Poiseuille (1799–1869) a précisément mesuré l'écoulement de multiples fluides dans des tubes capillaires tandis que l'allemand Gotthilf Hagen (1797–1884) différençia les flux turbulants et laminaires dans les canalisations. En Angleterre, Lord Osborn Reynolds (1842–1912) poursuivit ce travail et introduisit le nombre adimensionnel qui porte son nom. De la même manière, parallèlement au précédent travail de Navier, George Stokes (1819–1903) compléta les équations générales de la dynamique des fluides avec frottement qui portent son nom. William Froude (1810–1879) développa quasiment tout seul les procédures conduisant aux essais sur modèle physique.

La fin du XIX^{ème} siècle fut remarquable quant à l'expansion de la théorie des fluides par les scientifiques et ingénieurs irlandais et anglais, comprenant en plus de Reynolds et Stokes, William Thompson, Lord Kelvin (1824–1907), William Strutt, Lord Rayleigh (1842–1919) et Sir Horace Lamb (1849–1934). Ces individus ont étudié un grand nombre de problèmes parmi lesquels l'analyse dimensionnelle, l'écoulement irrotationnel, le mouvement vortex, la cavitation et les vagues. Au sens plus large, leurs travaux ont permis aussi d'explorer le lien entre la mécanique des fluides, la thermodynamique et le transfert de chaleur.

À l'aube du XX^{ème} siècle, les équations de Navier-Stokes furent peu utilisées à cette époque car elles étaient trop difficiles à résoudre. Dans un article novateur de 1904, l'allemand Ludwig Prandtl (1875–1953) montra que les écoulements des fluides pouvaient être décomposés en une couche proche de la paroi, la couche limite, où les effets de bords sont importants, et une couche externe où de tels effets sont négligeables et où les équations simplifiées d'Euler et de Bernoulli peuvent être appliquées.

Le milieu du XX^{ème} siècle pourrait être considéré comme l'âge d'or des applications de la mécanique des fluides. Les théories existantes étaient adéquates pour les tâches manuelles et les propriétés et paramètres des fluides étaient bien définis. Tout ceci permit un large développement dans les domaines de l'aéronautique, de la chimie, industrielle et du traitement des eaux ; chacun poussait la mécanique des fluides dans de nouvelles directions.

À la fin du XXème siècle, en Amérique, la recherche et le travail en mécanique des fluides étaient dominés par le développement des ordinateurs numériques. La capacité à résoudre des gros problèmes complexes, tels que la modélisation du climat ou l'optimisation du design d'une pale de turbine a profité davantage à la société, que les développeurs de mécanique des fluides du XVIIIème siècle n'auraient jamais pu imaginer.

Jusqu'où ira la mécanique des fluides au XXIème siècle ? Sincèrement, même une extrapolation limitée du présent serait de la pure folie. Cependant, si l'histoire nous apprend quelque chose, c'est bien que les ingénieurs appliqueront ce qu'ils connaissent dans l'intérêt de la société, recherchant ce qu'ils ne connaissent pas en améliorant les procédés.

❖ Domaines d'application de la mécanique des fluides

La mécanique des fluides est un sujet excitant et fascinant avec un nombre illimité d'applications pratiques allant des systèmes biologiques à l'échelle microscopique à la propulsion des automobiles, des avions et des fusées.

Pour commencer, la mécanique des fluides joue un rôle vital au sein du corps humain. En effet, le cœur pompe constamment le sang dans toutes les parties du corps humain via les veines et les artères, les poumons étant les lieux d'échange de flux d'air entrant et sortant.

Il n'est pas nécessaire de préciser que tous les cœurs artificiels, les respirateurs et les systèmes de dialyse sont élaborés à partir de la dynamique des fluides.

Une maison ordinaire est un hall d'exposition de mécanique des fluides. Le système de canalisation pour l'eau froide, le gaz naturel et l'évacuation des maisons individuelles sont conçus sur les bases de la mécanique des fluides. [1]

❖ Objectif du sujet :

Le but majeur de cette étude est le contrôle du gradient de pression causé par le changement des composantes du vecteur vitesse à l'intérieur d'une conduite présentant des singularités géométriques de différentes formes.

❖ Problématique

Il s'agit d'étudier dynamiquement l'écoulement bidimensionnel d'un fluide visqueux à l'intérieur d'un domaine présentant des singularités géométriques. L'effet des caractéristiques géométriques de ces singularités influence les composantes du vecteur vitesse, ce qui modifie favorablement ou défavorablement les gradients de pression à l'intérieur du domaine d'étude.

❖ Organisation du mémoire

Le travail porte sur l'étude de la dynamique de l'écoulement bidimensionnel d'un fluide visqueux à l'intérieur d'un domaine présentant des singularités géométriques.

Ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres répartis comme suit:

Le premier chapitre présente des généralités sur les écoulements bidimensionnels. Le deuxième chapitre est dédié à l'exposition du problème physique du point de vue géométrique et la formulation mathématique des équations gouvernantes avec les hypothèses retenues. Le troisième chapitre constitue une résolution numérique du problème présenté dans le deuxième chapitre sous forme d'un système d'équations linéaire par la méthode des différences finies introduisant un "schéma upwind", le procédé itératif est réalisé avec l'algorithme de Gauss-Seidel utilisé dans le programme Matlab. Le quatrième chapitre est consacré à l'analyse et aux commentaires des résultats. Enfin, nous terminons notre mémoire par une conclusion générale qui résume les différents résultats obtenus.

Chapitre I

*Généralités sur les écoulements
bidimensionnels*

I.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous essayons de donner une vue générale sur les caractéristiques des écoulements internes avec citation des types d'écoulements.

Nous exposons la perte de charge, distinctement sous ces deux formes, que subit le fluide lors de son passage dans un conduit de réseau de fluide.

Nous abordons également les notions fondamentales nécessaires à l'étude des écoulements et les équations de bases utilisées en mécanique des fluides.

Enfin l'approche numérique qui est la traduction en expressions mathématiques du problème de la mécanique des fluides. Il faut distinguer le modèle physique du modèle mathématique.

I.2. Ecoulements internes

Ils ont pour caractère particulier l'absence de conditions aux limites à l'infini, contrairement aux écoulements externes. L'influence des parois solides se manifeste donc dans toutes les directions perpendiculaires à celle de l'écoulement. Cependant, comme les écoulements externes, ils sont caractérisés par deux zones : zone d'écoulement non établi où il existe un noyau central (écoulement extérieur) qui se rétrécit régulièrement le long du canal au même temps qu'une couche limite s'épaissit au voisinage des parois solides. Zone d'écoulement établi dont la couche limite occupe l'ensemble de la veine fluide, il n'existe dans cette zone qu'une seule composante de vitesse parallèle à l'écoulement [2].

I.2.1. Types des écoulements

- Écoulements incompressibles et compressibles ;
- Écoulements permanents ou stationnaires ;
- Écoulement laminaire ou turbulent ;
- Écoulement unidimensionnel et bidimensionnel.

Les travaux les plus répandus dans le domaine de la mécanique des fluides, notamment, les études sur les écoulements internes sont Couette et Poiseuille par leurs expériences [3].

I.3. Ecoulement laminaire

Reynolds en 1883 a découvert l'apparition soudaine d'un changement de la structure de l'écoulement permanent dans un tube lorsque la vitesse était augmentée, Couette fit une constatation du même genre pour un fluide contenu entre deux cylindres concentriques dont l'un tourne à vitesse constante. Et par la suite, l'observation de l'existence de deux régimes a été faite sur toute circonstance d'écoulement. Le régime à vitesse modérée est dit laminaire tandis que l'autre est dit turbulent.

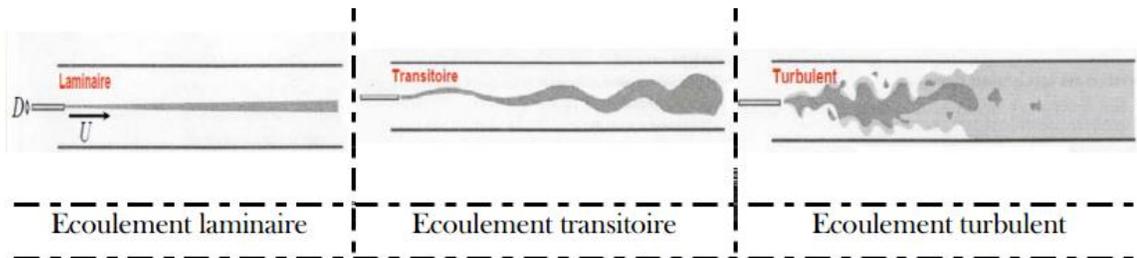


Figure (I.1): Régime d'écoulement [7].

On établit un critère qui permet de classer a priori les écoulements, c'est la valeur du nombre de Reynolds.

Dans un écoulement à faible valeur de "Reynolds" « $R_e \ll 1$ », les écoulements sont observés aux faibles vitesses. Il s'agit en général d'écoulements très stables, aux profils bien définis, appelés écoulement rampant ou écoulement de Stokes. Dans ce cas les forces d'inertie liées aux vitesses étant négligeables, les forces visqueuses et les forces de pression s'équilibrent.

L'écoulement est laminaire lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à une valeur critique, (jusqu'à 2000 - 2300), pour laquelle se produit une transition assez brutale vers le turbulent. Dans ce type d'écoulement l'effet de la viscosité s'atténue à mesure que l'on s'éloigne des parois, les vitesses du fluide tendant à s'homogénéiser.

À partir de valeur critique de Reynolds se produit une transition qui fait apparaître des instabilités dues à l'amplification des perturbations. La valeur de Reynolds de transition et la nature des instabilités dépendent essentiellement du type d'écoulement considéré.

Dans les écoulements à grand nombre de "Reynolds", les instabilités augmentent au point de donner naissance à un phénomène chaotique dans lequel il est difficile de voir une organisation. Les écoulements correspondants sont beaucoup moins stables, ils sont observés aux fortes vitesses, sont des écoulements turbulents [4].

I.4. Pertes de charge

La perte de charge désigne la perte irréversible d'énergie de pression que subit un liquide ou un gaz lors de son passage dans un conduit, un tuyau ou un autre élément de réseau de fluide.

Cette perte d'énergie, liée à la vitesse du fluide (faible vitesse=faible perte de charge), est causée par la transformation en chaleur, des frottements internes provoqués par la viscosité du fluide (un fluide parfait sans viscosité ne génère pas de perte de charge), la rugosité des parois, les variations de vitesses et les variations de direction du fluide. L'unité de la perte de charge est une pression (pascal s, bars...) ou une hauteur de colonne d'eau qui produirait une charge hydrostatique (pression hydrostatique) équivalente. Le terme "perte de charge" signifie donc "perte de charge hydrostatique". D'après cette définition nous pouvons déjà dire que les pertes de charges dans les réseaux sont importantes si :

- la vitesse du fluide est élevée et que la rugosité est importante ;
- la variation de vitesse liée au changement de section est importante et brusque ;
- le changement de direction est important et brusque.

Ces pertes d'énergie seront donc minimum si :

- la vitesse est faible et les surfaces sont lisses ;
- la variation de vitesse liée au changement de section est faible et progressive ;
- le changement de direction est faible et progressif [5].

On distingue deux types de pertes de charges à savoir ; pertes linéaires, pertes singulières.

I.4.1. Les pertes de charge régulières (linéaires)

Les pertes de charges linéaires sont aussi appelées « pertes de charges par frottement » ou encore pertes de charges régulières. Elles correspondent à une perte de pression dans une installation, due aux frottements des fluides sur les parois internes des tuyauteries, cuivre, acier, pvc ...etc. Plus la longueur du tube est importante plus il y aura de pertes. Les pertes de charges linéaires dépendent de nombreux paramètres [6].

Longueur de la canalisation : La perte de charge est proportionnelle à la longueur de la canalisation, elle augmente quand la longueur de la canalisation augmente.

La viscosité du liquide : plus le liquide est visqueux, plus la perte de charge est importante à cause des frottements.

Diamètre intérieur : quand le diamètre de la canalisation diminue, la perte de charge augmente considérablement, le liquide à plus de difficultés à s'écouler, donc les frottements augmentent pour un débit identique.

Débit : plus le débit d'écoulement augmente, plus les forces de frottement n'augmentent pour un diamètre identique.

Rugosité de la canalisation : la perte de charge est fonction du matériau de la canalisation, plus la rugosité de celle-ci est importante plus les frottements sont importants, donc la perte de charge est conséquente [7].

Elles sont provoquées par la viscosité du fluide et sont fonction du degré de turbulence (décrit par le nombre de Reynolds).

On montre que dans ce cas :

$$\Delta P = \lambda \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot \frac{L}{D} \quad (\text{I.1})$$

Où :

$$\Delta H = \lambda \cdot \frac{V^2}{2g} \cdot \frac{L}{D}$$

- Si l'écoulement est laminaire ($Re < 2000$) :

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad \text{avec} \quad Re = \frac{\rho dV}{\mu} \quad (I.2)$$

λ : Coefficient de perte de charge linéaire ;

ρ : Masse volumique du fluide en [kg/m³] ;

V : Vitesse du fluide en [m/s] ;

D : Diamètre en [m] ;

L : Longueur de la conduite [m] [5].

I.4.2. Les pertes de charge singulières

La perte de charge singulière, localisée dans une section de la conduite, est provoquée par un changement de direction et d'intensité de la vitesse. L'écoulement uniforme est perturbé et devient localement un écoulement non uniforme.

La turbulence joue un rôle considérable, alors que les forces de viscosité sont négligeables, la perte de charge n'a donc lieu qu'en régime turbulent. Une telle non-uniformité de la vitesse peut être provoquée par :

- Un branchement de section de la conduite.
- Un changement de direction (coude).
- Un branchement ou raccordement.
- Un dispositif de mesure et contrôle de débit.

En d'autres termes, les pertes de charge singulière sont le résultat des variations de vitesses et des changements de directions du fluide provoqué par les formes et obstacles que rencontre le fluide[7].

Elles s'expriment par la relation :

$$\Delta P = K \cdot \frac{\rho V^2}{2} \quad (I.3)$$

Où :

$$\Delta H = K \cdot \frac{v^2}{2g}$$

K : est un coefficient dépendant de la forme de la singularité [5].

Dans cette relation, le coefficient de perte de charge K est obtenu :

- Démonstration pour certaines particularités bien définies géométriquement (élargissement, rétrécissement, etc....)
- Expérimentalement pour chaque singularité, par la mesure de perte de charge en amont et en aval de l'accident pour d'autre organe (vanne, clapet, etc....).

➤ Elargissement

Elargissement brusque : Bien que l'élargissement soit brusque, la veine de fluide subit un élargissement progressif entre l'entrée et la section d'écoulement normal ou le fluide adhère à la paroi (figure (I. 2)). Il apparait une zone de tourbillons intense dans l'angle et l'écoulement n'est plus uniforme, dans ce cas, le coefficient de frottement est donné par la relation obtenue à partir du bilan de la quantité de mouvement :

$$K = \left[1 - \left(\frac{S_A}{S_B}\right)\right]^2 = \left[1 - \left(\frac{D_A}{D_B}\right)^2\right]^2 \quad (I.4)$$

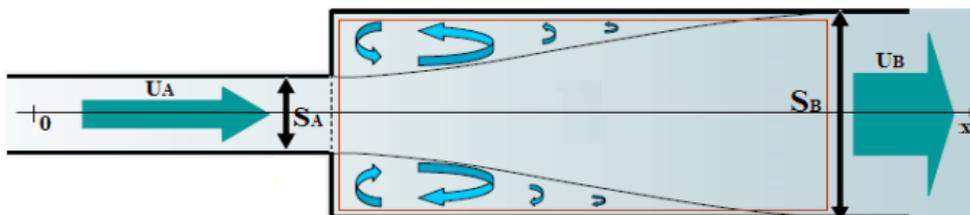
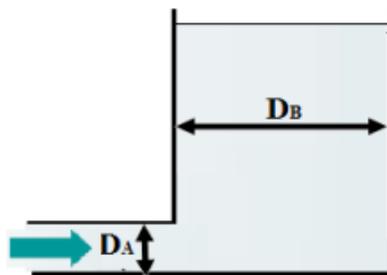


Figure (I.2) : Elargissement brusque.

Entrée de réservoir : Si la conduite de diamètre D_A entre dans un réservoir de diamètre D_B beaucoup plus grand. Le rapport D_A/D_B tend vers 0 et il est possible de considérer que $K=1$ (figure (1.3)). En réalité, on n'admet que K est compris entre 1 et 1,1.



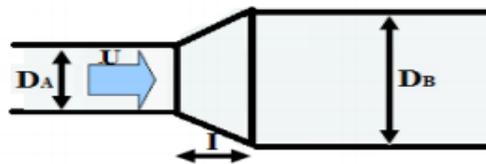
Figure(I.3) : Entrée de réservoir.

Divergent : Avec un divergent possédant un angle suffisamment faible la veine de fluide ne décolle pas et perte d'énergie provient essentiellement des frottements sur la paroi. La perte de charge donc beaucoup plus faible que pour un élargissement brusque. Pour un diffuseur précédé et suivi d'une conduite cylindrique, le coefficient de frottement donné par formule :

$$K = 0.46Re^{-0.06} \left(1 - \frac{S_A}{S_B}\right)^{0.5} \quad (I.5)$$

Si le diffuseur est situé entre une conduite rectiligne et réservoir de grandes dimensions, il est possible d'utiliser la formule suivante :

$$K = 0.2 + 2\left(\frac{S_A}{S_B}\right)^{0.5} \quad (I.6)$$



Figure(I.4) : Divergent.

➤ **Rétrécissement :**

Peut être de différentes formes et la valeur du coefficient de frottement dépend des caractéristiques géométriques de la singularité. Comme dans le cas de l'élargissement.

Rétrécissement brusque: Avec un rétrécissement brusque les veines de fluide doivent s'incurver pour entrer dans la section contractée en provoquant un rétrécissement de section jusqu'à la section contractée (S_A), la perte de charge par frottements est très faible et seule la perte de charge singulière entre la section contractée de diamètre D_A inférieur et les sections S_A et S_B . Sont prises en compte, si l'on définit le coefficient de contraction C par $\frac{S_A}{S_B}$, le coefficient de perte de charge sera égale à :

$$K = \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2 \quad (\text{I.7})$$

Dans ce cas, la formule de Weisbach permet de calculer C :

$$C = 0.59 + 0.41\left(\frac{S_B}{S_A}\right)^3 \quad (\text{I.8})$$

Des valeurs approchées peuvent aussi être obtenues par la formule qui est la plus utilisée :

$$K = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{D_A}{D_B}\right)^2\right] = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{S_A}{S_B}\right)\right] \quad (\text{I.9})$$

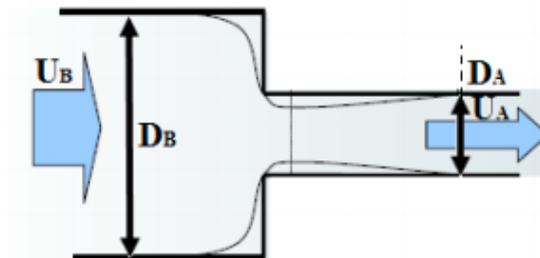
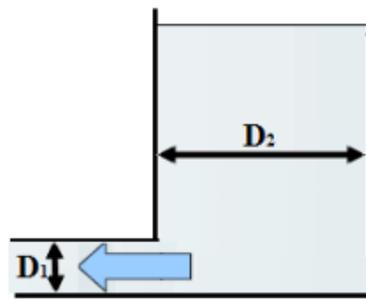


Figure (I.5) : Rétrécissement brusque.

Sortie de réservoir : Dans la sortie de réservoir, le diamètre du tuyau (D_1) est très petit par rapport au diamètre (D_2) de sorte que la formule précédente devient $K = \frac{1}{2}$



Figure(I.6) : sortie de réservoir.

Rétrécissement arrondi : Avec le rétrécissement arrondi, le coefficient dépend alors du rapport entre le rayon de courbure (r) et le diamètre du tuyau (D), plus ce rapport est important et plus le coefficient est faible.



Figure(I.7) : Rétrécissement arrondi.

Rétrécissement progressif : Avec un convergent les veines de fluide adhèrent à la paroi et il n'y a pas de décollement, compte tenu de la faible longueur des convergents, les valeurs de K sont peu élevées de l'ordre de 0.01 et 0.02 et sont données par plusieurs expressions. Le coefficient de perte de charge par frottement (K_1) et du coefficient de perte de charge par décollement (K_2)

Avec :

$$K_1 = x \frac{\lambda L}{D_A} \quad (\text{I.10})$$

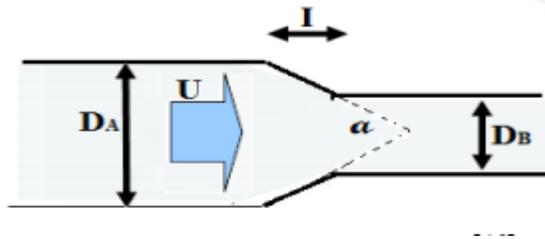
Ou : $x = \frac{n(n^4-1)}{4(n-1)}$, λ le coefficient de frottement et $n = \frac{D_A}{D_B}$

K_2 : dépend lui-même du rapport des diamètres et de la longueur du convergent.

Des formules plus simple et plus générale peuvent être aussi utilisées lorsque :

$$\diamond \alpha < 90^\circ : K = \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2 \sin \alpha$$

$$\diamond \alpha > 90^\circ : K = \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2$$



Figure(I.8) : Rétrécissement progressif.

➤ Les coudes :

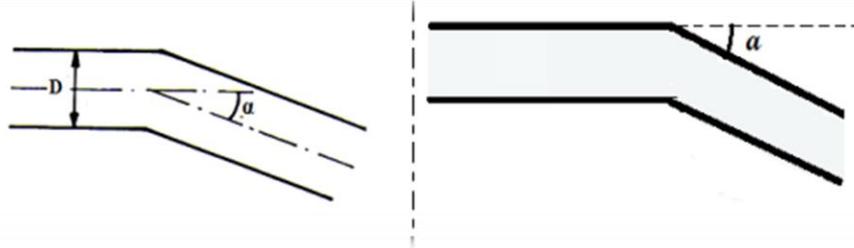
Lorsqu'un fluide s'écoule dans un coude, la différence de pression entre la paroi extérieure (de plus grand rayon de courbure) et la paroi intérieure perturbe l'écoulement du fluide en provoquant des décollements locaux.

D'une façon générale, le coefficient de perte de charge dépend du rayon du coude, cependant il est possible de faire une distinction entre les coudes brusques et les coudes arrondis.

Coude brusque : Dans ce cas d'un coude brusque, le coefficient de frottement dépend uniquement de l'angle du coude et est obtenu à partir de formule de Weisbach.

Weisbach a donné la formule suivante pour K en fonction de l'angle de déviation α :

$$K = 0.9457 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2.047 \sin^4 \frac{\alpha}{2} \approx 1 - 2 \cos \alpha \quad (\text{I.11})$$



pour la formule de Weisbach

pour la formule de l'industrie

figure (I.9) : Coude à angles vifs.

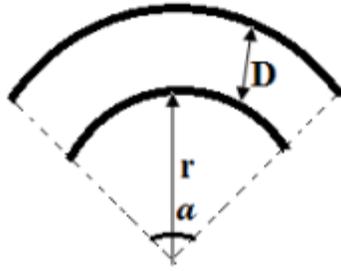
En réalité, cette formule, n'est pas très bien adaptée dans le cas des coudes industriels et on préfère utiliser la formule (I.12) qui donne des résultats plus élevés

$$K = \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} \quad (\text{I.12})$$

$$K = 1.3(1 - \cos \alpha) \quad (\text{I.13})$$

Coude arrondi : Avec les coudes arrondis, K dépend alors de l'angle du coude et du rayon de courbure, il peut être utilisée pour tous les angles de coude de canalisation lorsque le rapport du diamètre par le rayon de courbure est compris entre 0.2 et 1 dans cette expression.

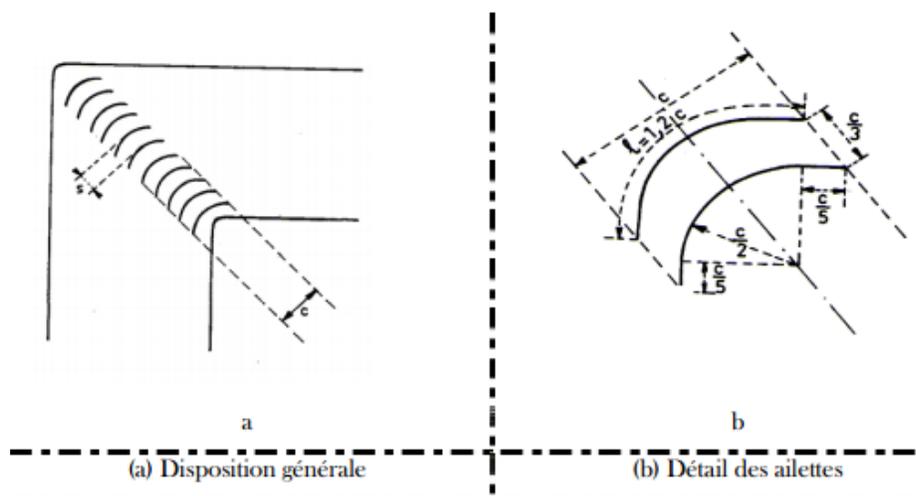
$$K = \frac{\alpha}{90} \left[0.13 + 0.16 \left(\frac{D}{r} \right)^{3.5} \right] \quad (\text{I.14})$$



Figure(I.10) : Coude arrondi .

Coudes à ailettes (cas des sections carrées ou rectangulaires) : Dans le cas d'un conduit de section carrée ou rectangulaire la perte de charge due à un coude peut être très sensiblement réduite en disposant, dans la bissectrice intérieure de l'angle au centre du coude, des ailettes de guidage (figure(I.11)).

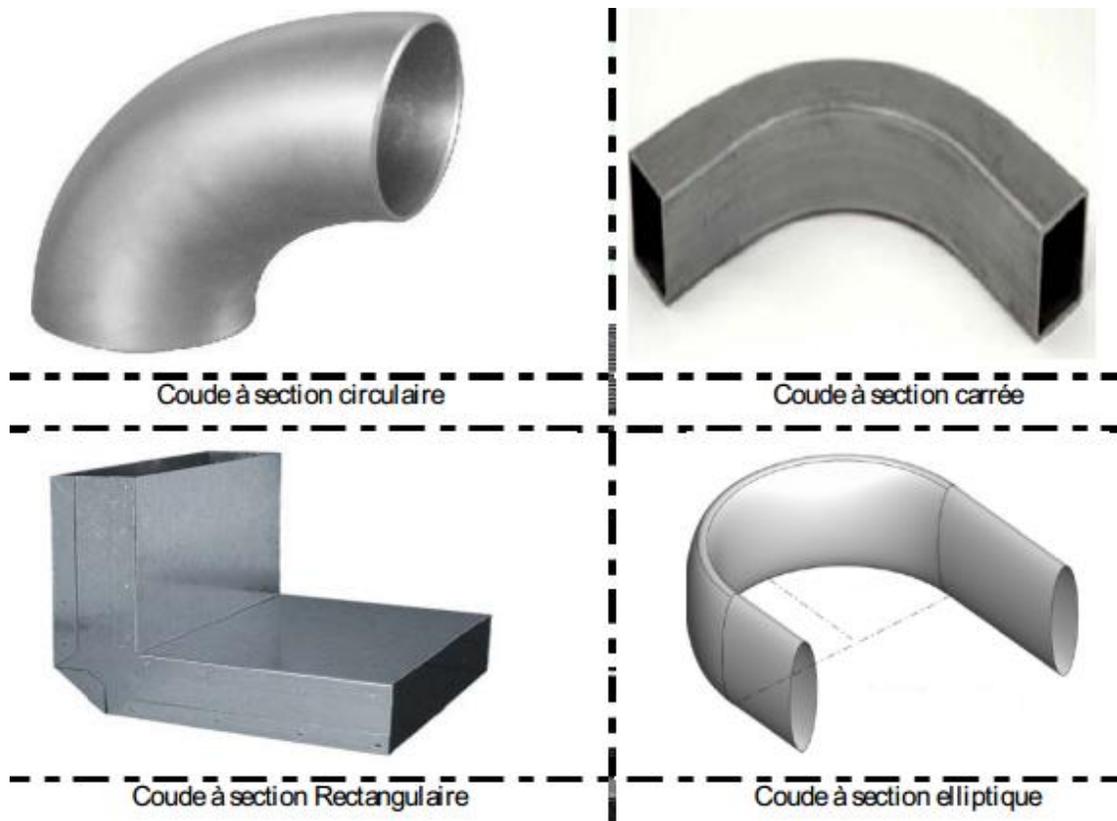
Dans le cas d'un coude à 90° , avec 5 à 15 ailettes en tôle mince en quart de cercle, espacées de telle $S/C=0.3$ ou 0.4 , on peut ramener le coefficient K à une valeur de l'ordre de $0,15$. Les ailettes s'opposent en effet aux courants secondaires et aux décollements qui sont les causes principales de la perte de charge[7].



Figure(I.11) : Coudes à ailettes.



Figure(I.12) : Les différentes formes de coudes.



Figure(I.13) : Les différentes sections de passage du coude.

❖ **Remarque :**

En réalité ces deux types de pertes de charges ne sont pas toujours séparés, ainsi dans un coude arrondis il y a une part de perte de charge singulière due au changement de direction et une part de perte de charge régulière due aux frottements sur la longueur de conduite formée par le coude. Une addition des deux pertes de charges peut être nécessaire si les surfaces de frottements sont importantes (un serpentin constitué de coudes par exemple) mais en général, les pertes de charge régulières sont négligées pour les éléments singuliers [5].

I.5. Equations de mouvement

Un écoulement laminaire, incompressible et bidimensionnel d'un fluide visqueux est caractérisé par les équations suivantes :

I.5.1. Equation de continuité

Développement mathématique :

Considérons un volume matériel δ . La masse contenue dans ce volume est :

$$m = \int_{\delta} \rho dv$$

Où ρ désigne la densité locale. Si le volume matériel ne contient ni sources ni puits, la masse qui se trouve dans δ est constante et on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} m = \frac{d}{dt} \iiint_{\delta} \rho dv = 0 \quad (\text{I.15})$$

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de transport au volume Ω :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\delta} \rho dv = \iiint_{\delta} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \iint_A \rho(\vec{q} \cdot \vec{n}) ds$$

A est la surface de contrôle. D'après (I.15) on peut écrire :

$$\iiint_{\delta} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \iint_A \rho(\vec{q} \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad (\text{I.16})$$

L'équation (I.16) est souvent appelée équation de continuité (forme intégrale).

Si le volume δ ne contient pas de surface de discontinuité, l'intégrale sur A peut être remplacée par une intégrale de volume et "le théorème de Green-Ostrogradsky" permet d'écrire :

$$\iint_A \rho(\vec{q} \cdot \vec{n}) ds = \iiint_{\delta} \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{q}) dv$$

Dans ces conditions, l'équation (I.16) devient :

$$\iiint_{\delta} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{q}) \right] dv = 0$$

Le volume d'intégration est arbitraire et par conséquent l'intégrale doit être identiquement nulle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{q}) = 0 \quad (\text{I.17})$$

L'équation (I.17) est souvent appelée équation de continuité (forme différentielle) [4].

I.5.2. Equation de Navier-Stokes

Elle s'appelle aussi l'équation de quantité de mouvement et elle traduit la loi fondamentale de la dynamique à un fluide newtonien. Sous sa forme générale, peut être exprimée par l'équation suivante, sous forme intégrale :

$$\iiint_{\delta} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot \vec{q}) dv + \iint_A (\rho \cdot \vec{n} \cdot \vec{q}) \cdot \vec{q} ds = \iiint_{\delta} \rho \cdot \vec{f} dv + \iint_A \vec{n} \cdot \bar{\bar{P}} ds \quad (\text{I.19})$$

Où \vec{n} est la vectrice unité tangente à la surface A, et $\bar{\bar{P}}$, définit le tenseur des contraintes totales appliquées en un point du fluide et qui s'écrit de la manière suivante :

$$\bar{\bar{P}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

L'équation (I.19) s'écrit sous la forme différentielle comme suit :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \cdot \vec{V} = \vec{f} - \nabla \cdot \bar{\bar{P}} \quad (\text{I.20})$$

Où \vec{f} représente le vecteur des forces appliquées au fluide (forces massiques).

Dans le cas d'un écoulement idéal, donc sans frottements internes, ou pour un fluide au repos, le tenseur des contraintes totales se réduit uniquement à l'effet de la pression hydrostatique p, et cela devient :

$$\bar{\bar{p}} = - \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

Pour un fluide incompressible, newtonien et visqueux, le tenseur ci-dessus présente alors des contraintes visqueuses, dont le tenseur est, $\bar{\bar{\tau}}$ et cela devient :

$$\bar{\bar{P}} = \bar{\bar{p}} + \bar{\bar{\tau}} \quad (\text{I.21})$$

Le tenseur des contraintes visqueuses, selon l'hypothèse de "Newton", est une fonction linéaire du taux de déformation $\bar{\bar{D}}$:

$$\bar{\tau} = 2\mu\bar{D} \quad (I.22)$$

Avec \bar{D} , défini de la manière suivante :

$$\bar{D} = [\nabla \otimes \vec{q} + (\nabla \otimes \vec{q})^T] \quad (I.23)$$

La formulation de l'équation de Navier- Stokes s'exprime de la manière suivante : [4]

$$\rho \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \rho(\vec{q} \cdot \nabla) \cdot \vec{q} = \vec{f} - \nabla \cdot p + \mu \nabla^2 \vec{q} \quad (I.24)$$

I.6. Approche numérique

Pour résoudre un problème de la mécanique des fluides il faut distinguer le modèle physique du modèle mathématique. Le modèle physique peut s'exprimer en mots et phrases qu'il est nécessaire de traduire en expressions mathématiques. Le principe est de transformer les équations différentielles en un système d'équations algébriques, les méthodes utilisées dans ce projet sont [8] :

I.6.1. Méthodes de discrétisation (Méthode de différences finies)

La méthode des différences finies est la plus ancienne des méthodes numériques, elle a été introduite en 18^{ème} siècle par Euler, elle s'avère la plus adaptée et la plus facile à utiliser pour les problèmes à géométrie simple (Kalla, 1999). Cette méthode est basée sur la technique du développement en séries de Taylor qui permet d'approximer la valeur d'une fonction en un point donné si on connaît la valeur de la dite fonction ainsi que toutes ces dérivées en un point voisin en espace ou en temps. A l'aide de la méthode des différences finies l'équation aux dérivées partielles sera transformée en équation algébrique. Cette équation algébrique est appliquée sur tous les nœuds de la grille de calcul, donc on obtient un système d'équation algébrique comportant autant d'équations que d'inconnues, résolu par une méthode appropriée[9].

Avant de discrétiser les équations différentielles, il est nécessaire de couvrir le domaine de calcul avec un maillage.

Selon l'utilisation des développements limités, on obtient des expressions différentes des dérivées qui engendrent trois types de schémas (centré, progressif ou régressif), (Haioun A, 2008)[10].

- ❖ **Avantages** : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.
- ❖ **Inconvénients** : limitation de la géométrie des domaines de calculs, difficultés de prise en compte des conditions aux limites portant sur les dérivées ou les gradients de l'inconnue [3].

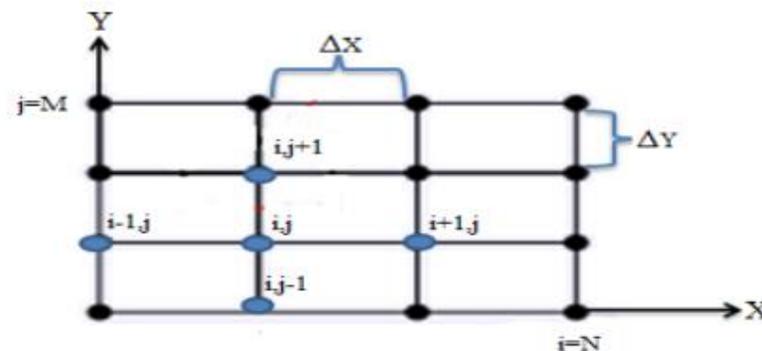


Figure (I.14) : Représentation du problème sous forme de maille. [3]

On exprime les dérivées partielles en fonction des valeurs aux points de discrétisation, on a:

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{I.26})$$

Et :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_i = \begin{cases} \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} & \text{schéma décentré à droite} \\ \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} & \text{schéma décentré à gauche} \\ \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} & \text{schéma centré} \end{cases}$$

On peut noter qu'a priori, on a le choix entre les trois formes d'approximation de la dérivée première.

I.6.2. Méthodes itératives (Gauss-Seidel)

L'extension de la méthode itérative de Gauss-Seidel constitue une autre alternative.

Considérons le système pré-conditionné $[\widehat{A}]x = [\widehat{b}]$, l'extension de la méthode de Gauss-Seidel aux intervalles est basée sur la relation itérative suivante :

$$[x_i^{(k)}] = (([\widehat{b}_i] - \sum_{j=1}^{i-1} [\widehat{a}_{ij}][x_j^{(k-1)}]) / [\widehat{a}_{ii}]) \cap [x_i^{(k-1)}] \quad (I.27)$$

Le contracteur de Gauss-Seidel est donc donné par :

$$C_{GS}: [x_i] \rightarrow (([\widehat{b}_i] - \sum_{j=1}^{i-1} [\widehat{a}_{ij}][x_j] - \sum_{j=i+1}^n [\widehat{a}_{ij}][x_j]) / [\widehat{a}_{ii}]) \cap [x_i]$$

A noter que comme pour les autres contracteurs, C_{GS} est appliqué tant que les réductions du domaine $[x]$ sont significatives [11].

I.7. Synthèse bibliographique

L'étude de l'écoulement à l'intérieur d'une conduite, dont l'importance est dictée par le rôle que joue ce dernier dans divers secteurs industriels, a conduit à une importante bibliographie spécialisée qui s'est accumulée au fur des années [12].

Les premiers pas dans l'étude semblent commencer au 19ème siècle, ceci apparaît bien dans les travaux de (Stokes 1851), E. Hagenbach (1860) et H. Lamb (1879) [13].

Depuis cette époque les travaux réalisés sur le sujet n'ont pas cessé d'être publiés jusqu'à nos jours. Les études analytiques, numériques et expérimentales s'y rattachant sont en fait si nombreuses et si variées qu'ils deviennent difficile de les citer tous. De plus malgré cette abondance apparente, le problème reste loin d'être épuisé [12].

G. Szymanski (1932) a présenté une étude analytique d'un écoulement visqueux d'un fluide incompressible à travers une conduite cylindrique lorsque le gradient de pression axiale est une fonction arbitraire de temps. Il a pu aboutir à une solution exacte de l'équation du mouvement [14].

J.R. Womersley (1955) [15] et S. Uchida (1956) [16] ont étudié, séparément, l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux et incompressible à l'intérieur d'une conduite cylindrique horizontale, à section transversale circulaire. Le gradient de pression est considéré comme une fonction périodique du temps. Ils ont pu aboutir à une solution exacte des équations du mouvement. Ils ont montré qu'il existe une phase de décalage entre le mouvement du liquide et le gradient de pression qui le provoque (déphasage entre le gradient de pression et la vitesse).

En 1959, Michael et Bernet, ont étudiés expérimentalement, dans les conditions normales de pression, l'écoulement diphasique Air liquide dans un élargissement et un rétrécissement brusque pour parvenir à mettre en évidence les effets de ces singularités sur la vitesse du mélange et le taux de vide dans chaque section.

Lottes (1960), a étudié théoriquement l'effet de l'élargissement brusque sur la perte de pression pour un mélange diphasique. Cette étude a été reprise expérimentalement par **Geiger et Rohrer (1966)**, mais pour un rétrécissement brusque. Pour l'écoulement de fluide non-newtonien et incompressible,

Macagno et Tin-Kan Hung (1966) ont résolu numériquement les équations du bilan de masse et de quantité de mouvement en régime laminaire dans le but de déterminer les lignes de courant et le profil de la vitesse longitudinale dans l'élargissement brusque et de faire apparaître l'évolution de la zone de recirculation en fonction du nombre de Reynolds. Leur étude a été suivi d'une visualisation expérimentale de l'écoulement pour confirmer la validité du model théorique.

Schmidt et Wimmer (1971) puis **Christiansen et al. (1972)** se sont intéressés aux problèmes de calcul de la vitesse et de la pression en régime laminaire à partir des équations de bilans dans un rétrécissement brusque. A partir des équations de **Navier et Stokes**, **Ladveze et Peyret (1974)** ont menés des simulations dans le but de calculer les paramètres de l'écoulement dans le cas d'une singularité.

Dans le domaine diphasique et en particulier le secteur pétrolier, le transport des hydrocarbures, plusieurs études ont été consacrées à ces types d'écoulements dans les

singularités. A titre d'exemple **Tapucu et al (1989) et Wadle (1989)** se sont intéressés à la perte de charge à travers l'élargissement brusque et la contraction brusque [17].

A. N. Darus (2000) a présenté une étude numérique de l'écoulement de fluide dans un conduit rectangulaire. L'écoulement étudié est considéré stationnaire, laminaire et rotationnel. L'analyse de l'écoulement est menée en trois dimensions spatiales en utilisant les coordonnées cartésiennes. La formulation mathématique du problème a produit une équation aux dérivées partielles non linéaire pour la vitesse, qui a été résolue numériquement en utilisant la méthode "marching technique". L'autre formulation est une équation aux dérivées partielles de type elliptique, pour laquelle la fonction de courant a été calculée en utilisant la méthode de sur-relaxation successive. Les résultats obtenus sont investigués pour déterminer la distribution de la vitesse dans une section transversale du conduit et le développement de la vitesse à travers le long du conduit. Il a montré que les résultats obtenus pour la longueur d'entrée sont adéquats on comparant la solution de son modèle avec celles d'autres modèles plus exacts. Il a pu conclure que la formulation du problème de l'écoulement à l'entrée en fonction de courant est au moins possible pour l'écoulement à l'entrée du conduit rectangulaire [18].

A.J. Majdalani et H. A. Chibli (2002) ont mené une étude de caractérisation de l'écoulement pulsé avec un gradient de pression arbitraire. Ils ont déterminé une solution exacte des équations de Navier-Stokes pour l'écoulement d'un fluide visqueux dans un canal (à section transversale rectangulaire) [19].

HAMDI Omar, en 2012 ; ce dernier a exposé une étude qui porte sur l'effet du temps et du gradient de pression sur l'évolution de la vitesse d'écoulement. Il a ensuite étudié l'écoulement non-stationnaire d'un fluide incompressible dans un domaine cartésien en présence d'un gradient de pression.

Du fait de la présence des termes non linéaires, les équations de Navier-Stokes en leur forme complète sont très compliquées et la résolution de ces équations a nécessité des hypothèses spécifiques pour chaque situation. Dans cette contribution, et pour résoudre le problème, il a utilisé les méthodes analytiques et numériques appropriées [4].

M^{LLE} TRAKA Fatiha, en 2017 ; a présenté une étude de l'écoulement laminaire dans une conduite à élargissement brusque, à partir des équations de Navier- Stocks transformées en variables adimensionnelle (Ψ et Ω) appliquées au domaine d'étude choisi, elle a solutionner le problème numériquement en utilisant le MATLAB.

Les résultats obtenus reflètent le comportement physique du phénomène, par l'apparition des zones de recirculations dont les bulles augmentent en fonction du coefficient géométrique (a) est du nombre adimensionnel ce qui concordent avec les travaux antérieurs dans le même domaine [20].

I.8.Conclusion

Dans ce chapitre nous avons fait un tour d'horizon à travers une synthèse bibliographique présentant les différentes études antérieures dans le domaine de la mécanique des fluides. Nous avons mis l'accent sur le comportement dynamique d'un fluide visqueux en écoulement à l'intérieur d'un domaine présentant des singularités géométriques avec présentation de quelques aspects tout en dénombrant les différents types d'écoulement avec les pertes de charge qui en résultent. A la fin de ce chapitre, nous avons exposé les équations de base se rapportant à la mécanique des fluides dans leur forme générale avec une approche numérique.

Chapitre II

Formulation mathématique du problème

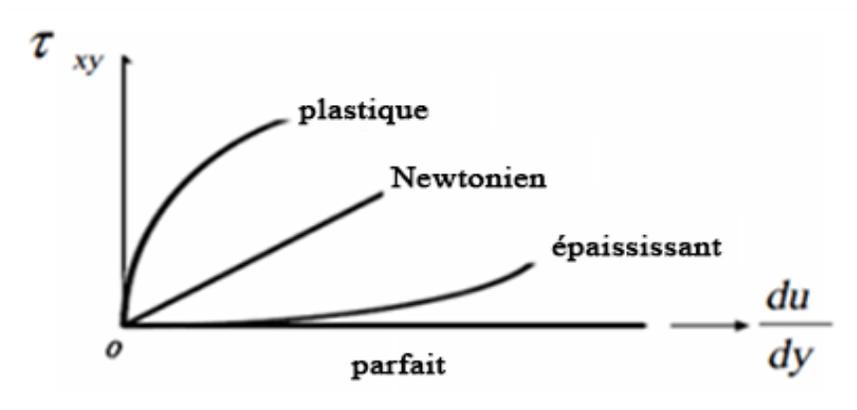
II.1. Introduction

Dans ce chapitre, l'écoulement considéré est bidimensionnel (x,y), permanent et laminaire d'un fluide Newtonien incompressible. Il est régi par des équations de continuité, de quantité de mouvement. Ces dernières expriment les principes fondamentaux de la mécanique des fluides. On commence par l'écriture des équations sous leurs formes générales qui subissent dans leurs hypothèses les simplifications nécessaires qui nous permet enfin d'aboutir aux équations adéquates aux cas étudiés.

II.2. Mise en équation

Le fluide est Newtonien ; incompressible ($\rho = \text{cste}$) ; permanent. L'expression de la contrainte de cisaillement s'exprime sous sa forme linéaire comme suit :

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{II.1})$$



Figure(II.1) : Fluide Newtonien et fluide non Newtonien.

II.2.1. Equation de continuité

II.2.1.1. Equation forme intégrale

Comme nous l'avons exposé au l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv + \int_S \rho(\vec{q} \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad (\text{II.2})$$

- ❖ si l'écoulement est permanent (stationnaire) : $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$

L'équation se simplifie en :

$$\int_S \rho(\vec{q} \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad (\text{II.3})$$

II.2.1.2. Equation forme différentielle

En appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\int_S \rho(\vec{q} \cdot \vec{n}) ds = \int_V \vec{\nabla}(\rho \vec{q}) dv = 0 \quad ; \quad dv \neq 0$$

$$\vec{\nabla}(\rho \vec{q}) = 0 \quad (\text{II.4})$$

$\vec{q}(u, v, w)$ est le vecteur vitesse de l'écoulement ; remplaçons \vec{q} par $u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$, l'équation (II.4) dans le domaine cartésien comme suit :

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{II.5})$$

➤ Hypothèses

- ❖ si l'écoulement est incompressible " $\rho = \text{constante}$ "

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

- ❖ $\rho \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$

- ❖ comme l'écoulement est bidimensionnel (x, y) : $\rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

Donc l'équation se simplifie en :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.6})$$

II.2.2. Equation de quantité de mouvement

II.2.2.1. Equation forme intégrale

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{q} \, dv + \int_S \rho \vec{q} (\vec{q} \cdot \vec{n}) \, ds = - \int_S P \vec{n} \, ds + \int_V \rho \vec{f} \, dv \quad (\text{II.7})$$

Cette équation forme intégrale et vectorielle, se projete sur l'axe \vec{ox} et sur l'axe \vec{oy} pour fournir l'information sur l'effet du fluide sur la paroi interne de la conduite ou l'effet de la paroi sur les particules en écoulement.

II.2.2.2. Equation forme différentielle

Pour les hypothèses imposées alors la forme différentielle de quantité de mouvement s'écrit comme suit :

→ \vec{ox} :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f_x \quad (\text{II.8})$$

→ \vec{oy} :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f_y \quad (\text{II.9})$$

Puisque l'écoulement est considéré comme permanent (stationnaire) $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$, alors les équations précédentes se simplifient en:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f_x$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f_y$$

- ❖ Si les forces massiques sont négligeables, devant les forces d'inertie et de pression ; alors le système d'équation différentielle au dérivées partielles s'écrira sous la forme :

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

Le problème de l'écoulement visqueux, incompressible, bidimensionnel et stationnaire (permanent) à l'intérieur du domaine d'étude se réduit en :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (\text{II. 10})$$

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (\text{II. 11})$$

$$\begin{cases} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (\text{II. 12})$$

Avec u, v, P sont les caractéristiques physiques du problème étudié.

II.3. Ecriture adimensionnelle des équations gouvernant le problème

Pour rendre le problème universel, il est recommandé de passer à la formulation adimensionnelle. Il est donc nécessaire de réécrire toutes les équations et les conditions aux limites en fonction des grandeurs adimensionnelles.

On introduit le changement des variables suivantes, Soit :

\bar{U} : vitesse moyenne.

L : longueur de la conduite.

H : hauteur de la conduite.

$$U^* = \frac{u}{\bar{U}} \quad V^* = \frac{v}{\bar{U}} \quad P^* = \frac{P}{\rho \bar{U}^2} \quad X^* = \frac{x}{H} \quad Y^* = \frac{y}{H}$$

On peut tirer les expressions des variables dimensionnelles en fonction des rapports adimensionnels par les formules suivantes :

$$u = \bar{U} U^* \quad v = \bar{U} V^* \quad P = P^* \rho \bar{U}^2 \quad x = X^* H \quad y = Y^* H$$

On injecte les variables dans les équations (II.10), (II.11) et (II.12) :

$$\bar{U}U^* \frac{\partial(\bar{U}U^*)}{\partial(X^*H)} + \bar{U}V^* \frac{\partial(\bar{U}U^*)}{\partial(Y^*H)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(P^*\rho\bar{U}^2)}{\partial(X^*H)} + \nu \left[\frac{\partial^2(\bar{U}U^*)}{\partial(X^{*2}H^2)} + \frac{\partial^2(\bar{U}U^*)}{\partial(Y^{*2}H^2)} \right]$$

Faisant un arrangement de l'équation, il vient :

$$\left(\frac{\bar{U}^2}{H}\right) U^* \frac{\partial U^*}{\partial X^*} + \left(\frac{\bar{U}^2}{H}\right) V^* \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} = \left(\frac{\bar{U}^2}{H}\right) \frac{-\partial P^*}{\partial X^*} + \frac{\nu \bar{U}}{H^2} \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y^{*2}} \right) \quad (\text{II.13})$$

Introduisant une transformation au niveau du deuxième terme de l'équation :

$$\left(\frac{\bar{U}^2}{H}\right) U^* \frac{\partial U^*}{\partial X^*} + \left(\frac{\bar{U}^2}{H}\right) V^* \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} = \left(\frac{\bar{U}^2}{H}\right) \frac{-\partial P^*}{\partial X^*} + \frac{\nu \bar{U} \bar{U}}{\nu H.H \bar{U}} \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y^{*2}} \right) \quad (\text{II.14})$$

$$\text{Re} = \frac{H\bar{U}}{\nu} \quad (\text{II.15})$$

$$\left(\frac{\bar{U}^2}{H}\right) \left[U^* \frac{\partial U^*}{\partial X^*} + V^* \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} \right] = \left(\frac{\bar{U}^2}{H}\right) \left[-\frac{\partial P^*}{\partial X^*} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 U^* \right] \quad (\text{II.16})$$

Après simplification, l'équation (II- 16) différentielle aux dérivées partielles sur l'axe (\vec{ox}) se réduit en:

$$U^* \frac{\partial U^*}{\partial X^*} + V^* \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial X^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y^{*2}} \right) \quad (\text{II.17})$$

De la même façon, sur l'axe (\vec{oy}), on aura :

$$U^* \frac{\partial V^*}{\partial X^*} + V^* \frac{\partial V^*}{\partial Y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial Y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 V^*}{\partial Y^{*2}} \right) \quad (\text{II.18})$$

La même procédure s'effectue pour l'équation de continuité :

$$\left(\frac{\bar{U}}{H}\right) \frac{\partial U^*}{\partial X^*} + \left(\frac{\bar{U}}{H}\right) \frac{\partial V^*}{\partial Y^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U^*}{\partial X^*} + \frac{\partial V^*}{\partial Y^*} = 0 \quad (\text{II.19})$$

(II.17), (II.18) et (II.19) sont les équations différentielles aux dérivées partielles adimensionnelles.

II.4. Transformation des équations gouvernantes

On remarque que les équations gouvernantes sont au nombre de trois avec trois inconnues (u^*, v^*, P^*). On réduit d'abord le nombre d'inconnues, puis on procède au changement de variables.

On a les équations (II-17) et (II-18) :

$$U^* \frac{\partial U^*}{\partial X^*} + V^* \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial X^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y^{*2}} \right) \quad (\text{II.17})$$

$$U^* \frac{\partial V^*}{\partial X^*} + V^* \frac{\partial V^*}{\partial Y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial Y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 V^*}{\partial Y^{*2}} \right) \quad (\text{II.18})$$

Les équations de Navier-Stokes (II-17) et (II-18) peuvent être dérivées par rapport à $\left(\frac{\partial}{\partial Y^*}, \frac{\partial}{\partial X^*}\right)$ respectivement pour fournir les équations suivantes :

$$\frac{\partial U^*}{\partial X^*} \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} \frac{\partial U^*}{\partial X^*} + U^* \frac{\partial^2 U^*}{\partial X^{*2} \partial Y^*} + \frac{\partial V^*}{\partial X^*} \frac{\partial V^*}{\partial Y^*} \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} + V^* \frac{\partial^2 U^*}{\partial X^* \partial Y^{*2}} = -\frac{\partial^2 P^*}{\partial X^* \partial Y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^3 U^*}{\partial X^{*3} \partial Y^*} + \frac{\partial^3 U^*}{\partial X^* \partial Y^{*3}} \right) \quad (\text{II.20})$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial X^*} \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} \frac{\partial V^*}{\partial X^*} + U^* \frac{\partial^2 V^*}{\partial X^{*2} \partial Y^*} + \frac{\partial V^*}{\partial X^*} \frac{\partial V^*}{\partial Y^*} \frac{\partial V^*}{\partial Y^*} + V^* \frac{\partial^2 V^*}{\partial X^* \partial Y^{*2}} = -\frac{\partial^2 P^*}{\partial X^* \partial Y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^3 V^*}{\partial X^{*3} \partial Y^*} + \frac{\partial^3 V^*}{\partial X^* \partial Y^{*3}} \right) \quad (\text{II.21})$$

Après simplification des équations précédentes, on obtient :

$$U^* \frac{\partial}{\partial X^*} \left(\frac{\partial V^*}{\partial X^*} - \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} \right) + V^* \frac{\partial}{\partial Y^*} \left(\frac{\partial V^*}{\partial X^*} - \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2}{\partial X^{*2}} \left(\frac{\partial V^*}{\partial X^*} - \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^{*2}} \left(\frac{\partial V^*}{\partial X^*} - \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} \right) \right] \quad (\text{II.22})$$

Rappelons que l'expression de la vorticité est donnée par :

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \quad (\text{écriture dimensionnelle})$$

$$\Omega = \frac{\partial V^*}{\partial X^*} - \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} = - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^{*2}} \right) \quad (\text{écriture adimensionnelle})$$

Remplaçons la vorticité ( criture adimensionnelle) dans l'équation (II.22), on obtient alors :

$$U^* \frac{\partial \Omega}{\partial X^*} + V^* \frac{\partial \Omega}{\partial Y^*} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^{*2}} \right) \quad (\text{II.23})$$

Exprimons les composantes du vecteur vitesse \vec{q} (U^*, V^*) par rapport à la fonction de courant Ψ

$$U^* = \frac{\partial \Psi}{\partial Y^*}; \quad V^* = -\frac{\partial \Psi}{\partial X^*} \text{ dans l'équation (II.23)}$$

$$\Psi = \Psi^* \quad \text{avec } \Psi^*: \text{ est exprimée en } \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$$

La forme finale du système gouvernant notre étude s'écrit alors comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Psi}{\partial Y^*} \frac{\partial \Omega}{\partial X^*} + \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial X^*} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial Y^*} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^{*2}} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II. 24})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^{*2}} \end{array} \right. \quad (\text{II. 25})$$

II.5. Conclusion

Après avoir écrit l'équation de la continuité et l'équation de quantité de mouvement dans leurs formes générales, puis les avoir réduites selon les hypothèses exprimées précédemment, et en projetant les équations des Navier-Stokes sur les axes (\vec{ox}, \vec{oy}) , nous avons obtenus trois équations avec trois inconnues. Nous avons également transformés ces dernières sous la forme adimensionnelle en utilisant le changement de variables avec réduction du nombre d'inconnues. Enfin, nous avons aboutis à un système d'équations différentielles aux dérivées partielles adimensionnelles ce qui va nous permettre de passer à la résolution du problème.

Chapitre III

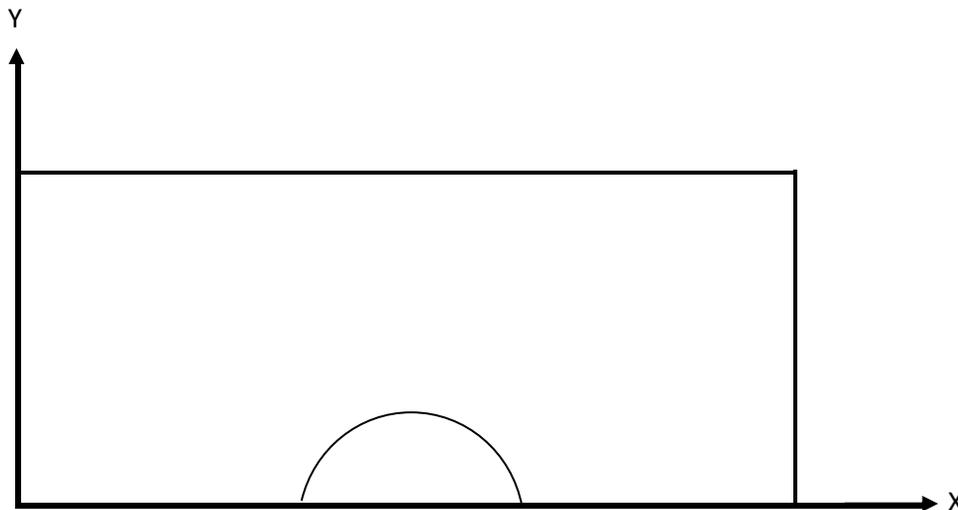
Approche mathématique de résolution

III.1. Introduction

Pour résoudre un problème de la mécanique des fluides il faut distinguer le modèle physique du modèle mathématique. Le modèle physique peut s'exprimer en mots et en phrases qui peuvent se traduire en expressions mathématiques. Lorsque le problème est ainsi bien posé, il est alors possible de le résoudre soit mathématiquement (solution analytique) ou numériquement (solution numérique). Les solutions analytiques, basées sur la forme locale du problème (Equations aux Dérivées Partielles), ne peuvent être déterminées dans le cas général sauf dans certains cas classique connus depuis bien longtemps. Dans le cas général où il y'a des difficultés si l'on résout les équations aux dérivées partielles qui régissent les phénomènes étudiés, on fait appel aux méthodes numériques, le principe de ces méthodes est de transformer les équations différentielles en un système d'équations algébriques.

III.2. Description du problème et les conditions aux limites

La géométrie du problème étudié est bidimensionnelle dans le plan x,y (voir figure III.1). Le domaine physique dans lequel on doit chercher la solution des équations de mouvement est une conduite prismatique présentant un obstacle sous forme d'une demi-sphère.



Figure(III.1) : Domaine physique.

Compte tenu de la difficulté de discrétiser l'obstacle, nous avons échangé l'obstacle de la forme citée sus-dessus à une forme plus appropriée carré ou rectangulaire.

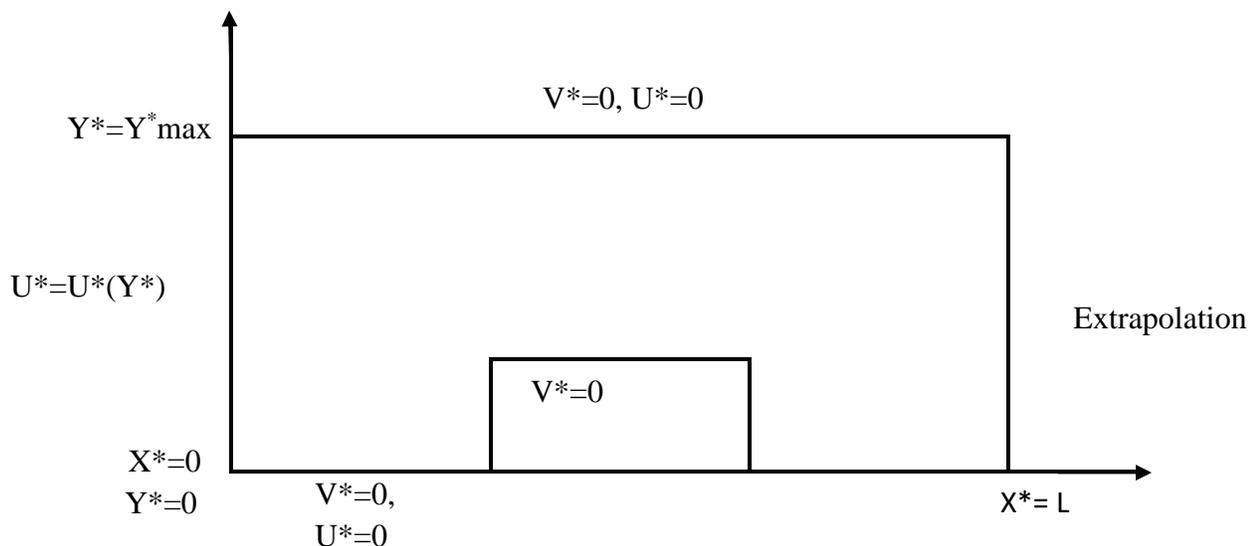
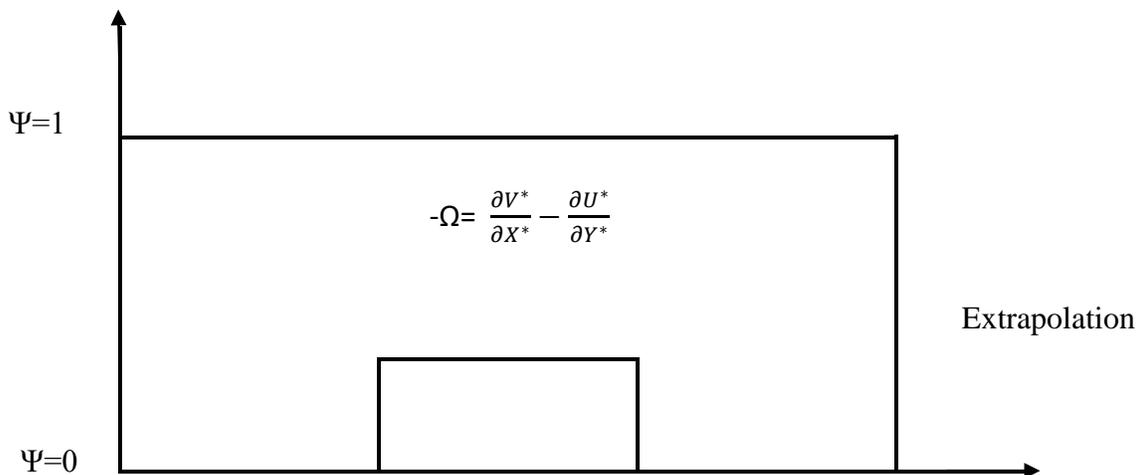


Figure (III.2) : Domaine de calcul et les conditions aux limites.

Le domaine de calcul et les conditions aux limites après changement des variables U^* et V^* en Ψ et Ω (Figure III.3)



Figure(III.3) : Domaine de calcul et les conditions aux limites.

❖ conditions aux limites

Comme le degré des équations différentielles aux dérivées partielles est de deux; alors il faut imposer deux (02) conditions sur l'axe des X et deux(02) autres sur l'axe des Y :

1. à $X^* = 0; 0 \leq Y^* \leq Y^*_{\max} ; U^* = U^*(Y^*) ; V^* = 0$
2. à $Y^* = Y^*_{\max} ; 0 \leq X^* \leq L ; U^* = V^* = 0$
3. à $Y^* = 0 ; 0 \leq X^* \leq L ; \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} = 0 ; V^* = 0$
4. à $X^* = L ; 0 \leq Y^* \leq Y^*_{\max} ; V^* = 0 ;$ (au niveau de la sortie l'extrapolation).

Après changement des variables, les nouvelles conditions aux limites deviennent :

❖ Fonction de courant Ψ

$$\Psi = 3Y^2 - 2Y^3 \quad \text{A l'entrée du conduite : pour } [j=1 : m] \quad (\text{III.1})$$

Au niveau de la Paroi solide supérieure : pour $[j=m, i=1 : n-1]$

$$\Psi = 1 \quad ; \quad U^*_{i,j} = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial Y^*} \right] = 0 \quad ; \quad V^*_{i,j} = \left[-\frac{\partial \Psi}{\partial X^*} \right] = 0$$

Au niveau de la Paroi solide inférieure : pour $[j=1, i=1 : n-1]$

$$\Psi = 0 \quad ; \quad U^*_{i,j} = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial Y^*} \right] = 0 \quad ; \quad V^*_{i,j} = \left[-\frac{\partial \Psi}{\partial X^*} \right] = 0$$

❖ Fonction de vorticité Ω

Le développement en série de Taylor :

A l'entrée du conduite : pour $[j=2 : m]$

$$\Omega = 12Y - 6 \quad (\text{III.2})$$

Au niveau de la Paroi solide supérieure : pour $[j=m, i=2 : n-1]$

$$\Omega_j = -2 \frac{\Psi_{j-1} - \Psi_j}{\Delta Y^{*2}} \quad (\text{III.3})$$

Au niveau de la Paroi solide inférieure : pour $[j=2, i=2 : n-1]$

Dans le cas : $[j=2, i=2 : n1], [j=2 : m1, i=n1 : n2], [j=2, i=n2 : n-1]$

$$\Omega_j = -\left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^{*2}}\right]_j = 2 \frac{\Psi_j - \Psi_{j+1}}{\Delta Y^{*2}} \quad (\text{III.4})$$

Dans le cas : $[j=2 : m1, i=n1]$

$$\Omega_i = -\left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^{*2}}\right]_i = -2 \frac{\Psi_i - \Psi_{i-1}}{\Delta X^{*2}} \quad (\text{III.5})$$

Dans le cas : $[j=2 : m1, i=n2]$

$$\Omega_i = -\left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^{*2}}\right]_i = 2 \frac{\Psi_i - \Psi_{i+1}}{\Delta X^{*2}} \quad (\text{III.6})$$

III.3. Etapes de la résolution du problème

En se référant aux travaux de (Mr Med Lamine LAKHDARI, 2009) [21] ayant trait les méthodes numériques de résolution du problème.

Dans le même contexte, ce dernier a proposé la confection d'un organigramme permettant de citer dans un ordre chronologique les différentes étapes de résolution.

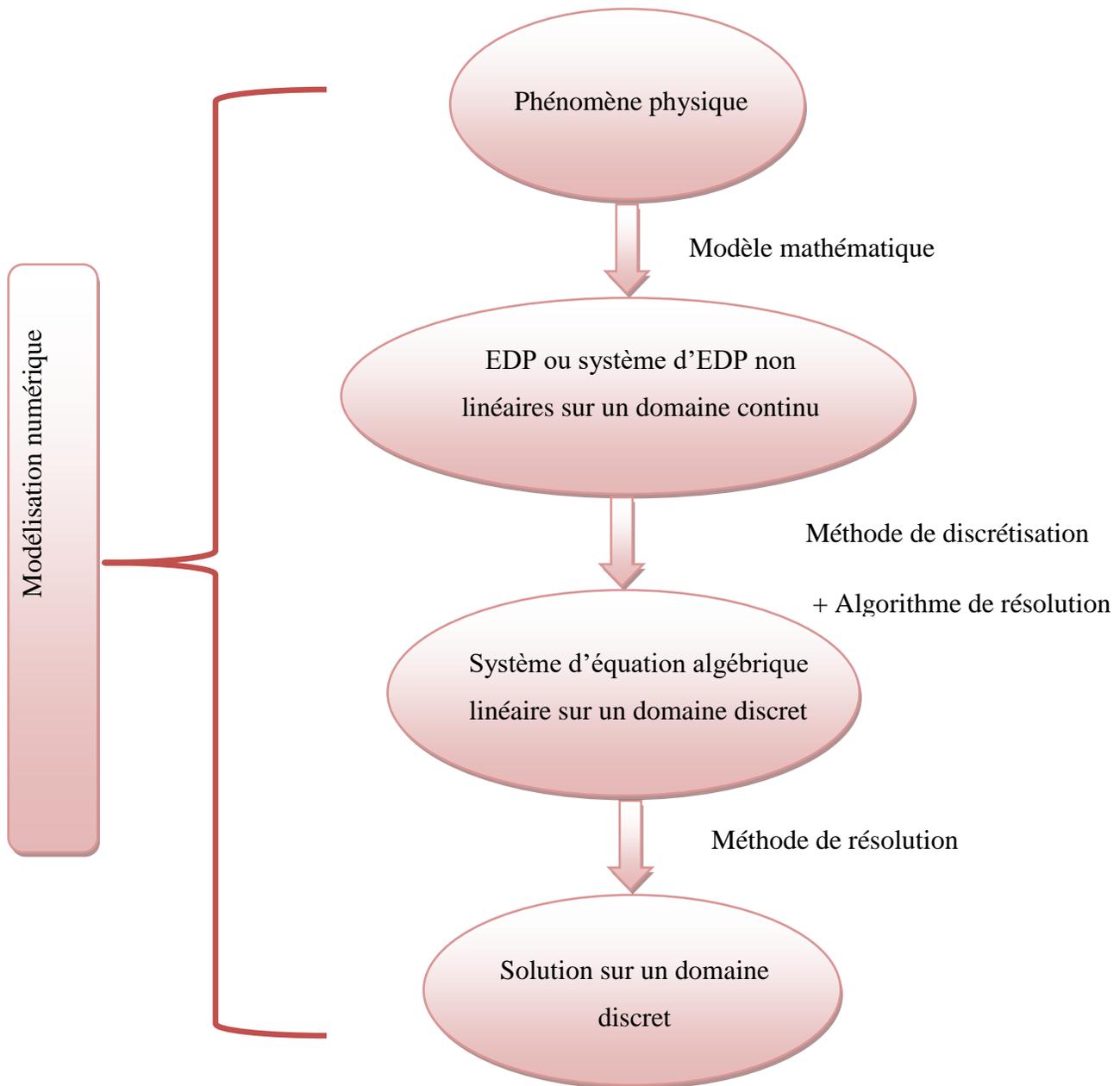
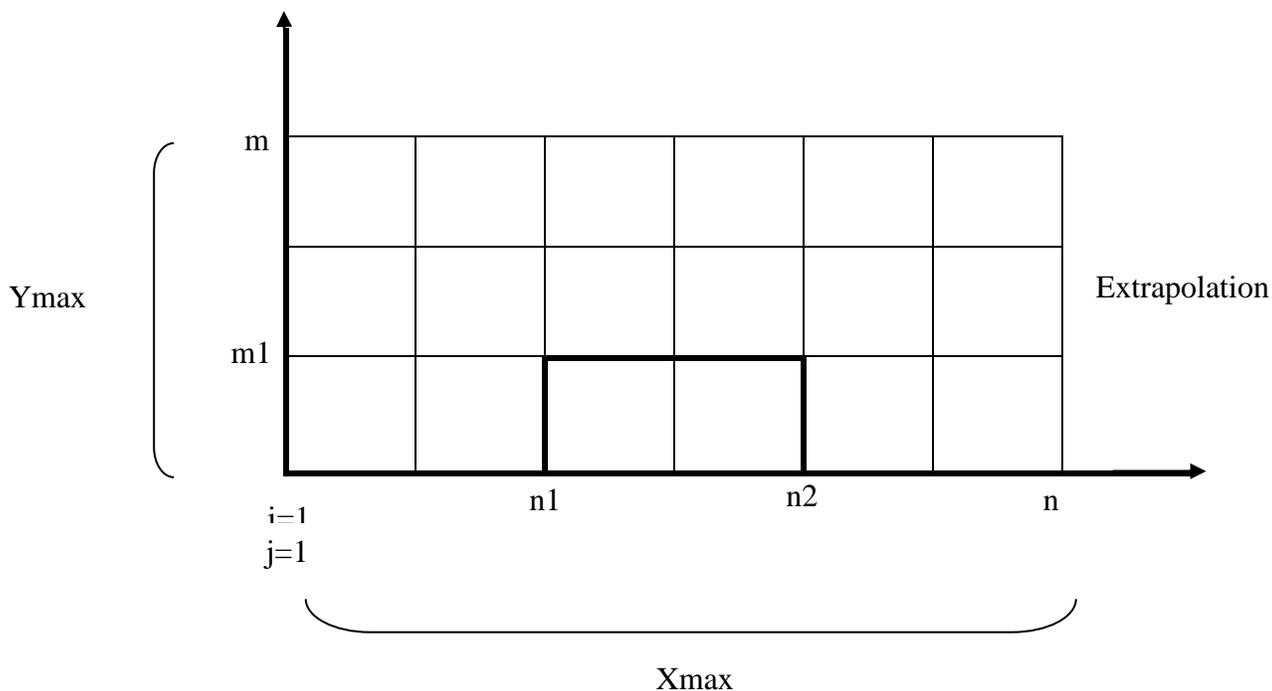


Figure III.4 : Le Principe du calcul numérique. [21]

III. 4. Discrétisation des équations de mouvement



Figure(III.5) : Discrétisation du domaine d'étude.

- $m1$: hauteur adimensionnelle de l'obstacle.
- Y_{max} : hauteur adimensionnelle du canal.
- X_{max} : longueur adimensionnelle du canal.

Par application d'un schéma upwind dans l'équation (II.24) et (II.25)

a- L'équation de vorticité s'écrit comme suit:

Schéma centrée (dérivée seconde) :

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^{*2}}\right)_{i,j} = \frac{\Omega_{i+1,j} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i-1,j}}{\Delta X^{*2}} \quad (\text{III.7})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^{*2}}\right)_{i,j} = \frac{\Omega_{i,j+1} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i,j-1}}{\Delta Y^{*2}} \quad (\text{III.8})$$

La dérivée première peut être approximée au nœud (i,j) par:

- ✓ Dans le cas où : $U_{i,j}^* > 0$; $V_{i,j}^* > 0$ (différence en arrière)

$$(U^* \frac{\partial \Omega}{\partial X^*})_{i,j} = U_{i,j}^* \frac{\Omega_{i,j} - \Omega_{i-1,j}}{\Delta X^*} \quad (\text{III.9})$$

$$(V^* \frac{\partial \Omega}{\partial Y^*})_{i,j} = V_{i,j}^* \frac{\Omega_{i,j} - \Omega_{i,j-1}}{\Delta Y^*} \quad (\text{III.10})$$

Après arrangement, les équations (III-3), (III-4) deviennent :

$$U_{i,j}^* \frac{\Omega_{i,j} - \Omega_{i-1,j}}{\Delta X^*} + V_{i,j}^* \frac{\Omega_{i,j} - \Omega_{i,j-1}}{\Delta Y^*} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\frac{\Omega_{i+1,j} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i-1,j}}{\Delta X^{*2}} \right) + \left(\frac{\Omega_{i,j+1} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i,j-1}}{\Delta Y^{*2}} \right) \right] \quad (\text{III.11})$$

- ✓ Dans le cas où : $U_{i,j}^* > 0$; $V_{i,j}^* < 0$

$$(U^* \frac{\partial \Omega}{\partial X^*})_{i,j} = U_{i,j}^* \frac{\Omega_{i,j} - \Omega_{i-1,j}}{\Delta X^*} \quad (\text{III.12})$$

$$(V^* \frac{\partial \Omega}{\partial Y^*})_{i,j} = V_{i,j}^* \frac{\Omega_{i,j+1} - \Omega_{i,j}}{\Delta Y^*} \quad (\text{III.13})$$

Après arrangement, les équations (III-3), (III-4) deviennent :

$$U_{i,j}^* \frac{\Omega_{i,j} - \Omega_{i-1,j}}{\Delta X^*} + V_{i,j}^* \frac{\Omega_{i,j+1} - \Omega_{i,j}}{\Delta Y^*} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\frac{\Omega_{i+1,j} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i-1,j}}{\Delta X^{*2}} \right) + \left(\frac{\Omega_{i,j+1} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i,j-1}}{\Delta Y^{*2}} \right) \right] \quad (\text{III.14})$$

- ✓ Dans le cas où : $U_{i,j}^* < 0$; $V_{i,j}^* > 0$

$$(U^* \frac{\partial \Omega}{\partial X^*})_{i,j} = U_{i,j}^* \frac{\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i,j}}{\Delta X^*} \quad (\text{III.15})$$

$$(V^* \frac{\partial \Omega}{\partial Y^*})_{i,j} = V_{i,j}^* \frac{\Omega_{i,j} - \Omega_{i,j-1}}{\Delta Y^*} \quad (\text{III.16})$$

Après arrangement, les équations (III-3), (III-4) deviennent :

$$U_{i,j}^* \frac{\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i,j}}{\Delta X^*} + V_{i,j}^* \frac{\Omega_{i,j} - \Omega_{i,j-1}}{\Delta Y^*} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\frac{\Omega_{i+1,j} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i-1,j}}{\Delta X^{*2}} \right) + \left(\frac{\Omega_{i,j+1} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i,j-1}}{\Delta Y^{*2}} \right) \right] \quad (\text{III.17})$$

- ✓ Dans le cas où : $U_{i,j}^* < 0$; $V_{i,j}^* < 0$

$$(U^* \frac{\partial \Omega}{\partial X^*})_{i,j} = U_{i,j}^* \frac{\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i,j}}{\Delta X^*} \quad (\text{III.18})$$

$$(V^* \frac{\partial \Omega}{\partial Y^*})_{i,j} = V_{i,j}^* \frac{\Omega_{i,j+1} - \Omega_{i,j}}{\Delta Y^*} \quad (\text{III.19})$$

Après arrangement, les équations (III-3), (III-4) deviennent :

$$U_{i,j}^* \frac{\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i,j}}{\Delta X^*} + V_{i,j}^* \frac{\Omega_{i,j+1} - \Omega_{i,j}}{\Delta Y^*} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\frac{\Omega_{i+1,j} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i-1,j}}{\Delta X^{*2}} \right) + \left(\frac{\Omega_{i,j+1} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i,j-1}}{\Delta Y^{*2}} \right) \right] \quad (\text{III.20})$$

b- L'équation de la fonction de courant s'écrit comme suit

Dans le cas ou : $U_{i,j}^* > 0$; $V_{i,j}^* > 0$

De l'équation,

$$-\Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^{*2}} \quad (\text{III.21})$$

Après discrétisation, on obtient

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^{*2}} \right)_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{\Delta X^{*2}} \quad (\text{III.22})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^{*2}} \right)_{i,j} = \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{\Delta Y^{*2}} \quad (\text{III.23})$$

Après développement, on a obtenu l'équation suivante :

$$\left[\Psi_{i,j} \left[\frac{2}{\Delta X^{*2}} + \frac{2}{\Delta Y^{*2}} \right] + \Psi_{i-1,j} \left[\frac{1}{\Delta X^{*2}} \right] + \Psi_{i,j-1} \left[\frac{1}{\Delta Y^{*2}} \right] + \Psi_{i+1,j} \left[\frac{1}{\Delta X^{*2}} \right] + \Psi_{i,j+1} \left[\frac{1}{\Delta Y^{*2}} \right] \right] = \Omega_{i,j} \quad (\text{III.24})$$

On obtient l'équation algébrique suivante qui peut représenter n'importe quelle grandeur physique Ω , telle que:

$$A_{i,j} \Omega_{i-1,j} = B_{i,j} \Omega_{i,j} + C_{i,j} \Omega_{i+1,j} + D_{i,j} \Omega_{i,j-1} + E_{i,j} \Omega_{i,j+1} \quad (\text{III.25})$$

Avec les coefficients: $B_{i,j}$, $C_{i,j}$, $D_{i,j}$ et $E_{i,j}$, sont données par leurs expression telles que:

$$A_{i,j} = \left[\frac{2}{\text{Re} \Delta X^{*2}} + \frac{2}{\text{Re} \Delta Y^{*2}} + \frac{|U_{i,j}^*|}{\Delta X^*} + \frac{|V_{i,j}^*|}{\Delta Y^*} \right] \quad B_{i,j} = \left[\frac{1}{\text{Re} \Delta X^{*2}} + \left(\frac{\max[U_{i,j}^*, 0]}{\Delta X^*} \right) \right]$$

$$C_{i,j} = \left[\frac{1}{\text{Re}\Delta X^{*2}} + \left(\frac{\max[-U_{i,j}^*, 0]}{\Delta X^*} \right) \right]$$

$$D_{i,j} = \left[\frac{1}{\text{Re}\Delta Y^{*2}} + \left(\frac{\max[V_{i,j}^*, 0]}{\Delta Y^*} \right) \right]$$

$$E_{i,j} = \left[\frac{1}{\text{Re}\Delta Y^{*2}} + \left(\frac{\max[-V_{i,j}^*, 0]}{\Delta Y^*} \right) \right]$$

On obtient l'équation algébrique suivante qui peut représenter n'importe quelle grandeur physique Ψ

$$AA\Psi_{i,j} = BB\Psi_{i-1,j} + CC\Psi_{i+1,j} + DD\Psi_{i,j-1} + EE\Psi_{i,j+1} + S \quad (\text{III.26})$$

Où les coefficients AA, BB, CC, DD, EE et S sont donnés par:

$$AA = \left[\frac{2}{\Delta X^{*2}} + \frac{2}{\Delta Y^{*2}} \right] \quad BB = \left[\frac{1}{\Delta X^{*2}} \right] \quad CC = \left[\frac{1}{\Delta X^{*2}} \right] \quad DD = \left[\frac{1}{\Delta Y^{*2}} \right]$$

$$EE = \left[\frac{1}{\Delta Y^{*2}} \right] \quad S = -\Omega_{i,j}$$

Le système d'équations algébriques ci-dessus s'applique seulement pour les zones du maillage non influencées par les conditions aux limites. Il convient donc de déterminer les équations applicables sur les régions voisines du contour délimité par le maillage.[20]

III.5.Détermination du profil de la vitesse axiale

Le profil de vitesse est parabolique, qui signifie que l'expression de vitesse est une équation du deuxième degré, qui s'écrit comme suit :

$$u = ay^2 + by + c ; \quad c=0 \quad (\text{III.27})$$

On obtient après remplacement de y par H :

$$u = aH^2 + bH = 0; \quad b = -aH$$

$$u = ay^2 - aHy = a(y^2 - Hy)$$

L'expression de la vitesse moyenne est exprimée par:

$$\bar{U} = \frac{\int_0^H u dy}{H} = \frac{(\frac{y^3}{3} - Hy^2)_0^H}{H} \quad (\text{III.28})$$

$$\bar{U} = aH^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{aH^2}{6}$$

$$a = -6 \frac{\bar{U}}{H^2} \quad (\text{III.29})$$

$$u = -6 \frac{\bar{U}}{H^2} (y^2 - Hy) \quad (\text{III.30})$$

Après simplification, l'expression de vitesse prend la forme suivante :

$$U^* = -6(Y^{*2} - Y^*) \quad (\text{III.31})$$

Comme la vitesse axiale est définie par :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y^*} = U^* \rightarrow \int_{\Psi_0}^{\Psi} d\Psi = \int_0^{Y^*} U^* dY^*$$

En faisant intégrer la vitesse U^* , on obtient la fonction de courant Ψ :

$$\Psi - \Psi_0 = -6 \left(\frac{Y^3}{3} - \frac{Y^2}{2} \right)_0^{Y^*} \quad (\text{III.32})$$

Quand $Y=0$ est définie par $\Psi_0 = 0$

On aura: $\Psi = 3Y^2 - 2Y^3$

III.6.Procédure de résolution

Dans ce contexte, nous décrivons les méthodes numériques utilisées afin de résoudre les équations de base formulées précédemment dans le chapitre II.

Pour passer d'un problème exact à un problème approché (discret) on peut utiliser le schéma des différences finies "upwind" pour discrétiser les équations aux dérivées partielles (II- 24) et (II-25). En plus de la méthode de différences finies, nous avons utilisé une méthode itérative pour la résolution du système non-linéaire qui en résulte ; dont l'élément important

de cette méthode est l'algorithme de résolution du système d'équations associées chacune à un nœud particulier dans le maillage construit à l'intérieur du domaine physique.

Une classe de méthodes connue sous le nom de SOR est très répandue pour la résolution de tel problème. Si le facteur de relaxation $\omega = 1$, cette méthode devient identique à la méthode de **Gauss-Seidel**, dont l'algorithme, s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ a_{i,i}x_i^{(k+1)} = \omega[-\sum_{j<i} a_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{i,j}x_j^{(k)} + b_i] + (1-\omega)a_{i,i}x_i^{(k)} \end{cases} \quad (\text{III.33})$$

On obtient donc :

$$(D - \omega E)x^{(k+1)} = \omega Fx^{(k)} + \omega b + (1 - \omega)Dx^{(k)} \quad (\text{III.34})$$

La matrice d'itération de l'algorithme SOR est donc :

$$B_\omega = \left(\frac{D}{\omega} - E\right)^{-1} \left(F + \left(\frac{1-\omega}{\omega}\right)D\right) = P^{-1}N \quad (\text{III.35})$$

Avec
$$P = \frac{D}{\omega} - E \quad \text{et} \quad N = F + \left(\frac{1-\omega}{\omega}\right)D \quad (\text{III.36})$$

Il est facile de vérifier que $A = P - N$. [22]

La sous-relaxation ($\omega < 1$) est un dispositif très utile pour les problèmes non linéaires. Il est souvent employé pour éviter la divergence dans la solution itérative d'équations fortement non-linéaires [23].

III.7. Langage choisi pour la résolution

Nos résultats s'obtiennent par le langage de programmation appelé "MATLAB"

MATLAB « matrix laboratory » est un logiciel de calcul matriciel à syntaxe simple. Avec ses fonctions spécialisées, Matlab peut être aussi considéré comme un langage de programmation adapté pour les problèmes scientifiques. [24]

Il a littéralement des centaines de fonctions intégrées pour une grande variété de calculs, et de nombreuses boîtes à outils conçues pour des disciplines de recherche spécifiques, y compris des statistiques, une optimisation, une solution des équations

différentielles partielles, analyse des données, solution des équations algébriques, calculs des matrices et solutions des systèmes d'équations linéaires...[20]

III.8.Organigramme

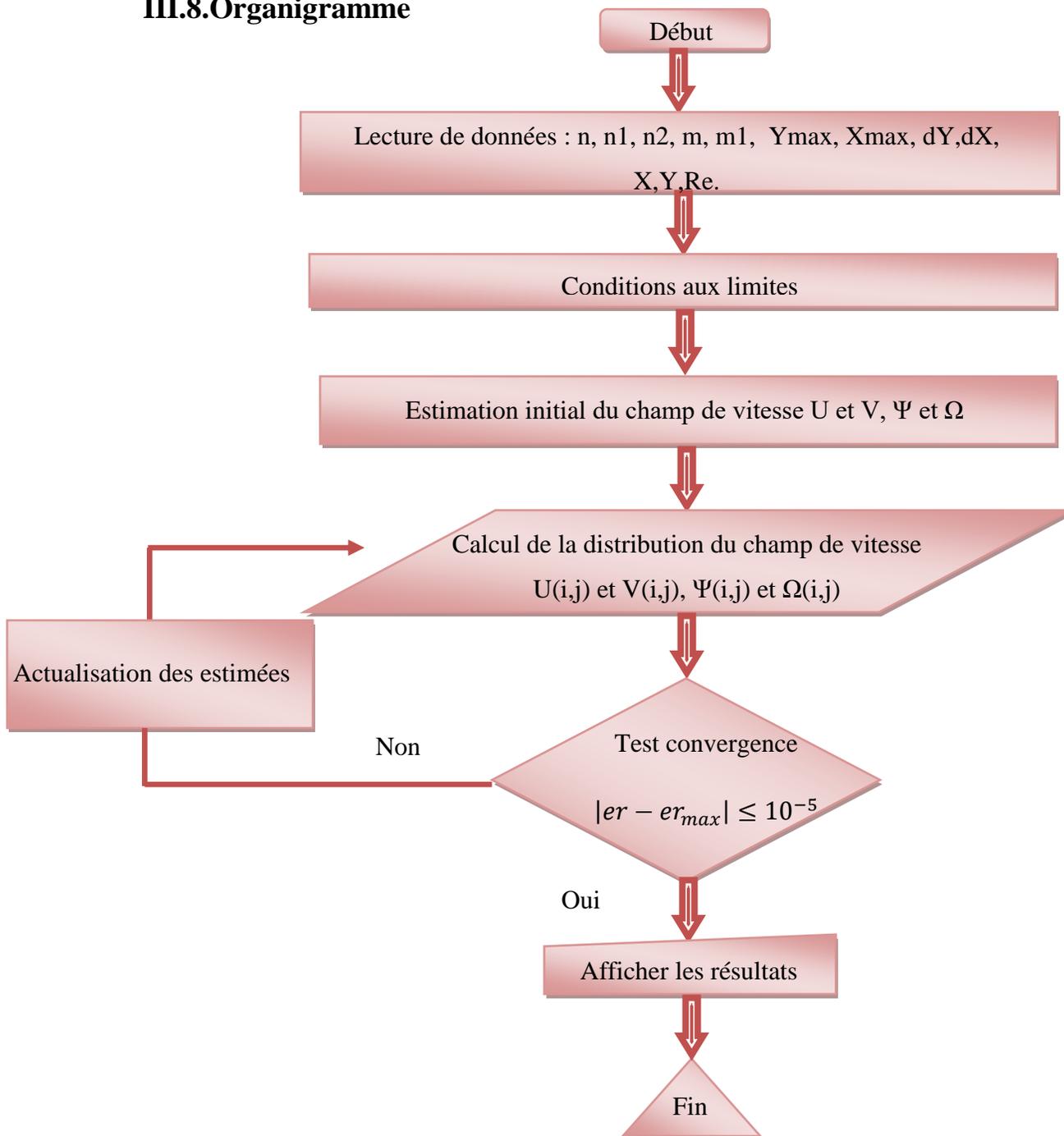


Figure III.6 : Organigramme de résolution de l'équation Ψ et de Ω par Matlab.

Le tableau ci-dessous traduit la signification des différents symboles utilisés dans le programme Matlab.

Symboles	Significations
N	Nombre de nœuds sur l'axe x
M	Nombre de nœuds sur l'axe y
n1, n2, m1	Dimension de l'obstacle
Xmax	Longueur adimensionnel
Ymax	Hauteur adimensionnel
dX	Le pas sur l'axe x
dY	Le pas sur l'axe y
X	L'axe des abscisses
Y	L'axe des ordonnées
Re	Nombre de Reynolds

Tableau I : Symboles et signification des paramètres

III.9. Conclusion

Dans ce chapitre, on a exposé les différentes étapes de la résolution du problème, puis la discrétisation des équations gouvernantes en déterminant le profil de la vitesse axiale et proposant les conditions aux limites du problème faisant l'objet de notre étude.

Chapitre IV

Résultats et commentaires

IV .1. Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à l'influence des caractéristiques géométriques et du nombre de Reynolds sur le comportement dynamique du fluide à l'intérieur de la conduite avec singularité. Après exécution du programme MATLAB dans le but de résoudre le problème de l'écoulement du fluide à l'intérieur d'une conduite, nous avons trouvés les courbes illustrant les fonctions de courant, le gradient de pression et les composantes du vecteur de vitesse U^* et V^* à l'intérieure du domaine d'étude choisi. Les courbes graphiques ci-dessous représentées, regroupent les différentes valeurs du nombre de Reynolds associés à celles de la caractéristique géométrique de l'obstacle (m_1) en vue d'expliquer le comportement du fluide en écoulement.

IV.2. Interprétation des résultats

IV.2.1. L'influence de la caractéristique géométrique de l'obstacle pour $R_e=1000$

La figure (IV.1) ci-dessous présente le contour de fonction des lignes de courant pour une hauteur adimensionnelle d'un obstacle suivant les caractéristiques géométriques proposée dans l'étude pour un nombre de Reynolds fixe ($R_e=1000$), on remarque une zone de recirculation en aval de l'obstacle. On remarque aussi qu'en augmentant la hauteur de l'obstacle, la zone de recirculation augmente.

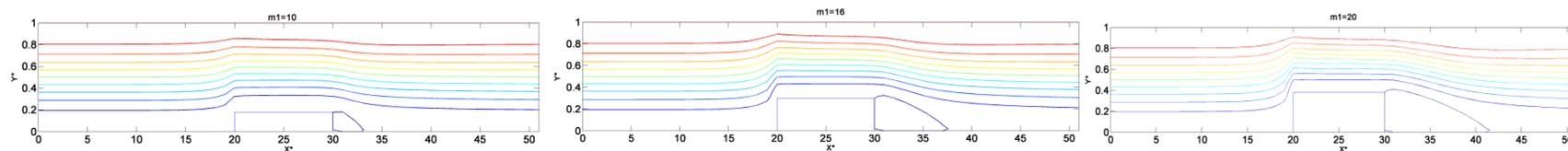


Figure IV.1 : Contours de fonction de courant pour $Re=1000$ à ($m1=10, 16$ et 20).

IV.2.2. Influence du nombre de Reynolds sur le comportement dynamique de l'écoulement

L'effet du nombre de Reynolds sur la zone de recirculation apparaît dans les figures de (IV.2) à (IV.4), dans ces figures, nous avons varié le nombre de Reynolds et les caractéristiques géométriques. On remarque que pour chaque augmentation du nombre de Reynolds la longueur de la bulle de recirculation dans la conduite augmente également.

Pour $m1=10$

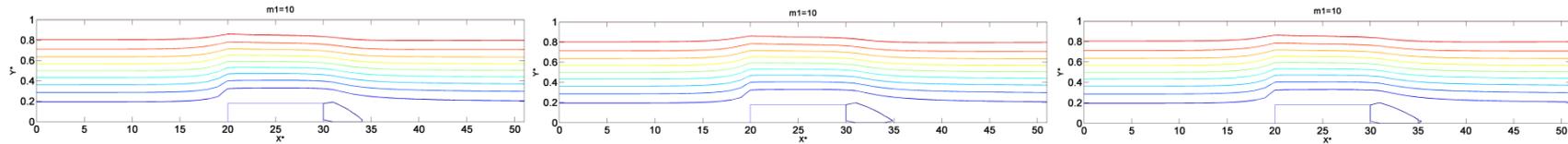


Figure IV.2 : Contours de fonction de courant respectivement pour $Re=1500, 2000, 2300$

Pour $m1=16$

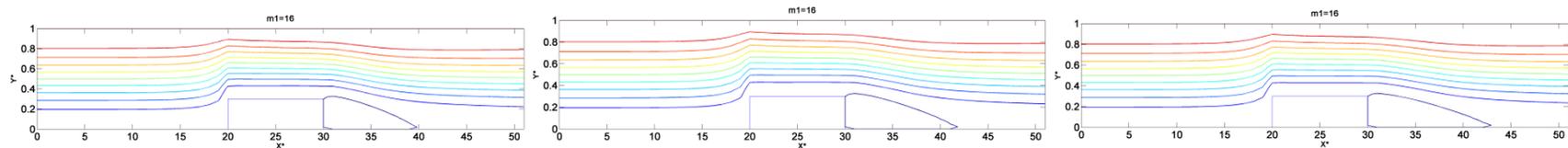


Figure IV.3 : Contours de fonction de courant respectivement pour $Re=1500, 2000, 2300$

Pour $m1=20$

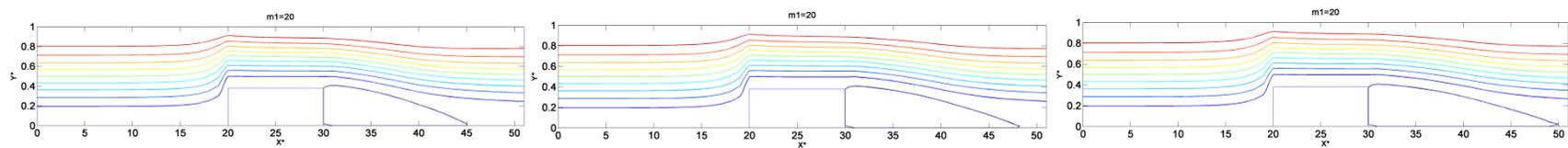


Figure IV.4 : Contours de fonction de courant respectivement pour $Re=1500, 2000, 2300$

IV.2.3. Le gradient de pression

La figure (IV.5) représente la variation du gradient de pression près de la paroi inférieure de la conduite où nous avons divisé la conduite en trois parties sur l'axe de X^* . On remarque une diminution brusque du gradient de pression dans la première partie qui tend vers une valeur négative puis augmentation progressive jusqu'au niveau zéro. Ce changement dans le gradient de pression s'explique par le changement de vitesse puisque cette dernière augmente jusqu'à la valeur maximale quand le gradient est égal à zéro. La deuxième partie a enregistré l'absence du gradient de pression à cause de la paroi du solide ce qui explique que la pression est nulle sur la paroi du solide. Une augmentation brusque du gradient de pression est observée à la dernière partie suivie d'une diminution régressive le long de la conduite. Ce phénomène s'explique par le changement de vitesse quand celle-ci a diminué, le gradient de pression a acquis une valeur positive. On déduit donc que la diminution du gradient de pression résulte de l'augmentation de vitesse et vice-versa en tenant compte du coefficient de frottement.

La figure (IV.6) représente la variation du gradient de pression le long de la ligne médiane pour différentes parties de la conduite, on remarque qu'au début de l'obstacle la le gradient de pression une légère diminution suivie d'une stabilité qui tend presque à zéro puis diminution brusque en amont de l'obstacle. La seconde courbe montre une augmentation brusque qui tend vers pratiquement zéro. La dernière courbe enregistre une augmentation brusque et atteindre une valeur positive suivi d'une diminution régressive qui tend vers zéro. Le changement brusque de pression est remarqué en se rapprochant de la singularité qui s'explique par le changement de vitesse au niveau de son voisinage.

La figure (IV.7) représente la variation du gradient de pression juste en dessous de la paroi supérieure de la conduite dans différentes zones, la première partie montre une diminution puis stabilité suivi d'une diminution régressive. La deuxième tranche de la figure enregistre une augmentation progressive et atteindre la valeur zéro, quant au troisième et dernier schéma on remarque une augmentation brusque pour atteindre une valeur positive suivi d'une diminution régressive le long de la conduite. Le changement brusque dans le comportement du gradient de pression dans les trois cas de figure est remarqué à chaque fois

qu'en se rapproche de la singularité ceci s'explique par le changement de vitesse au niveau de son voisinage.

Pour $\left. \frac{dP^*}{dx^*} \right|_{Y^*=\Delta Y^*}$

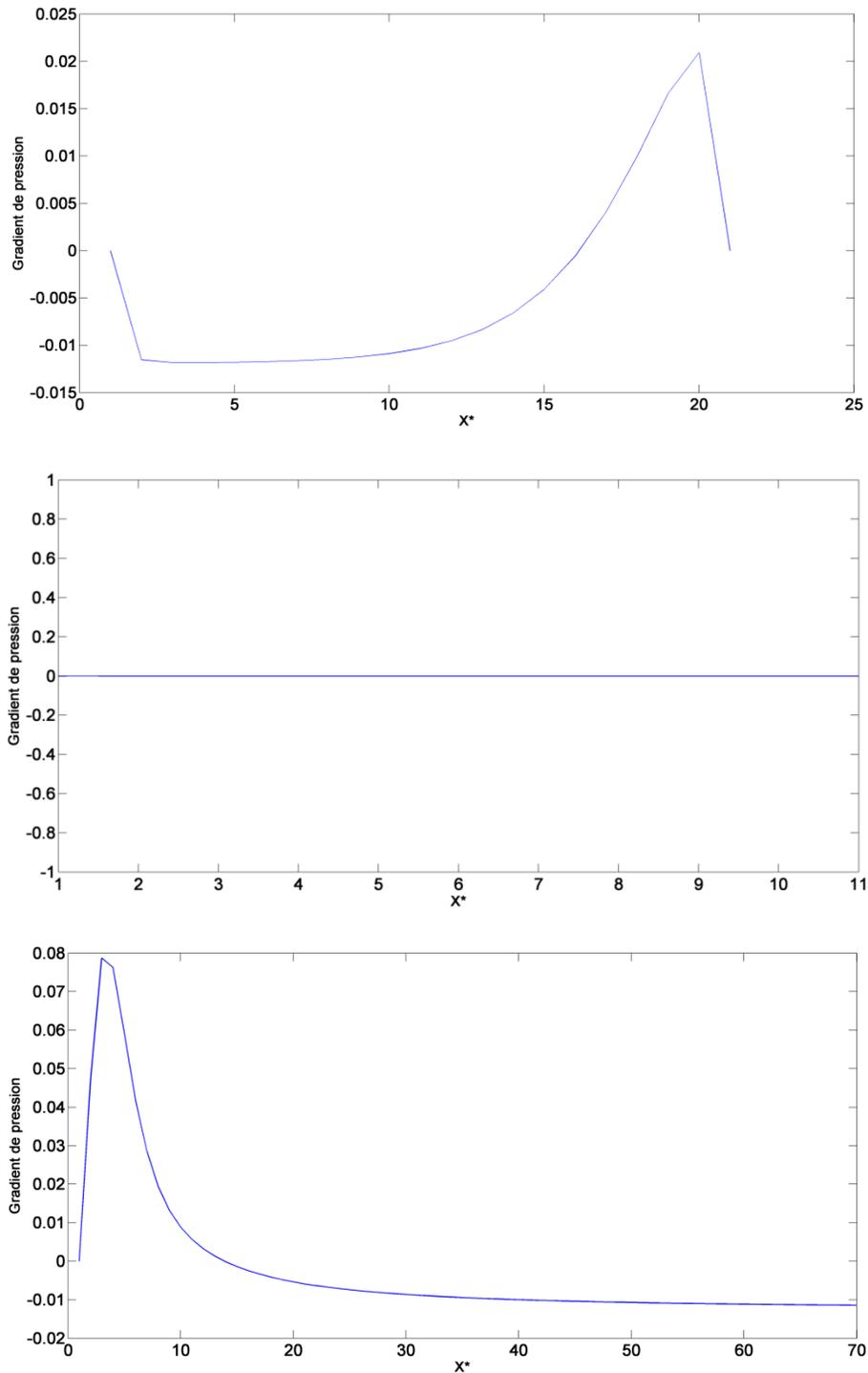


Figure IV.5 : Variation du gradient de pression près de la paroi inférieure de la conduite respectivement pour en amont, dans la zone de l'obstacle et en aval de l'obstacle

Pour $\frac{dP^*}{dx^*} \Big|_{y^* = \frac{y^*_{max}}{2}}$

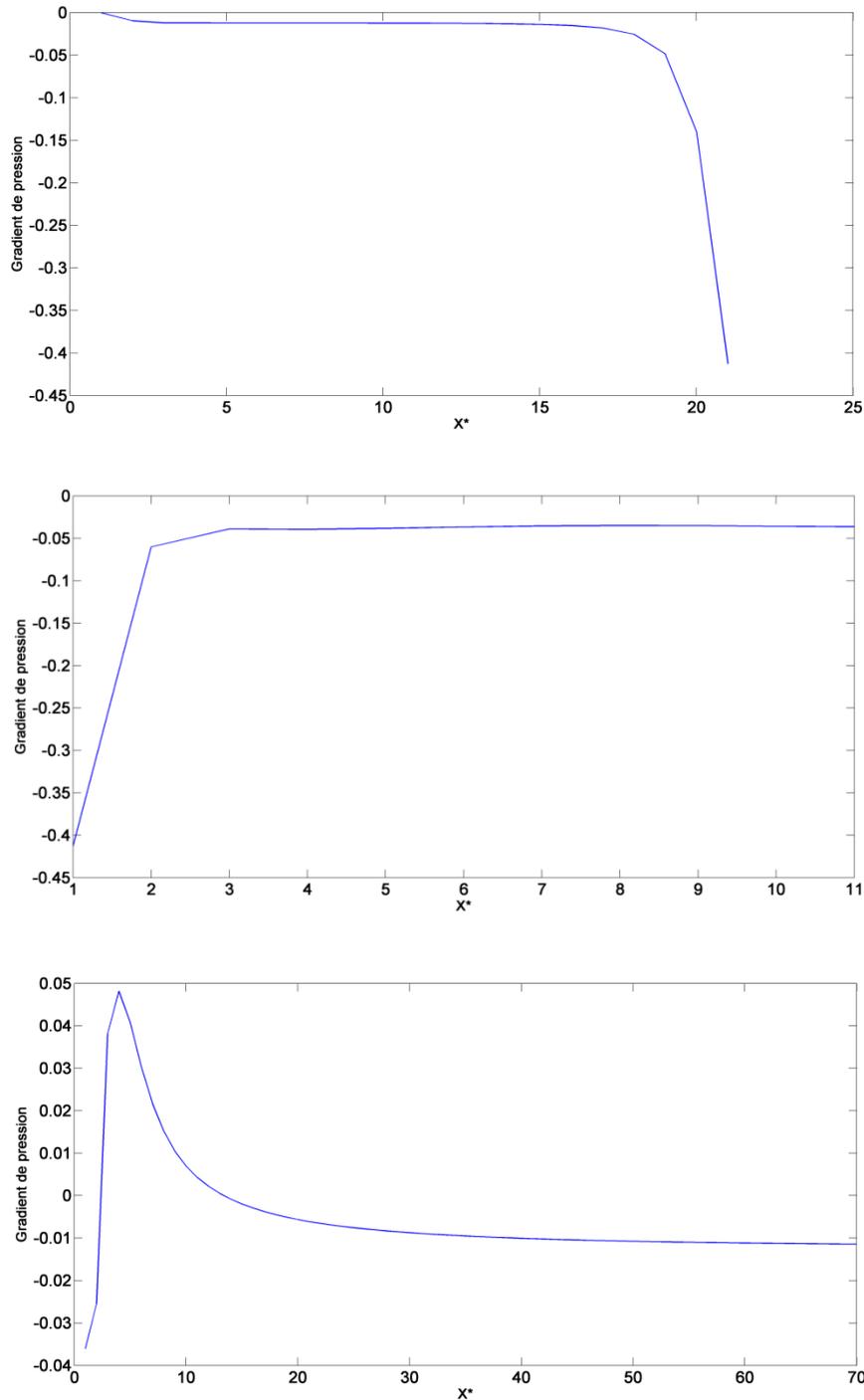


Figure IV.6 : Variation du gradient de pression sur la ligne médiane de la conduite respectivement pour en amont, dans la zone de l'obstacle et en aval de l'obstacle

Pour $\frac{dP^*}{dx^*} \Big|_{Y^*=Y^*_{\max}} - \Delta Y^*$

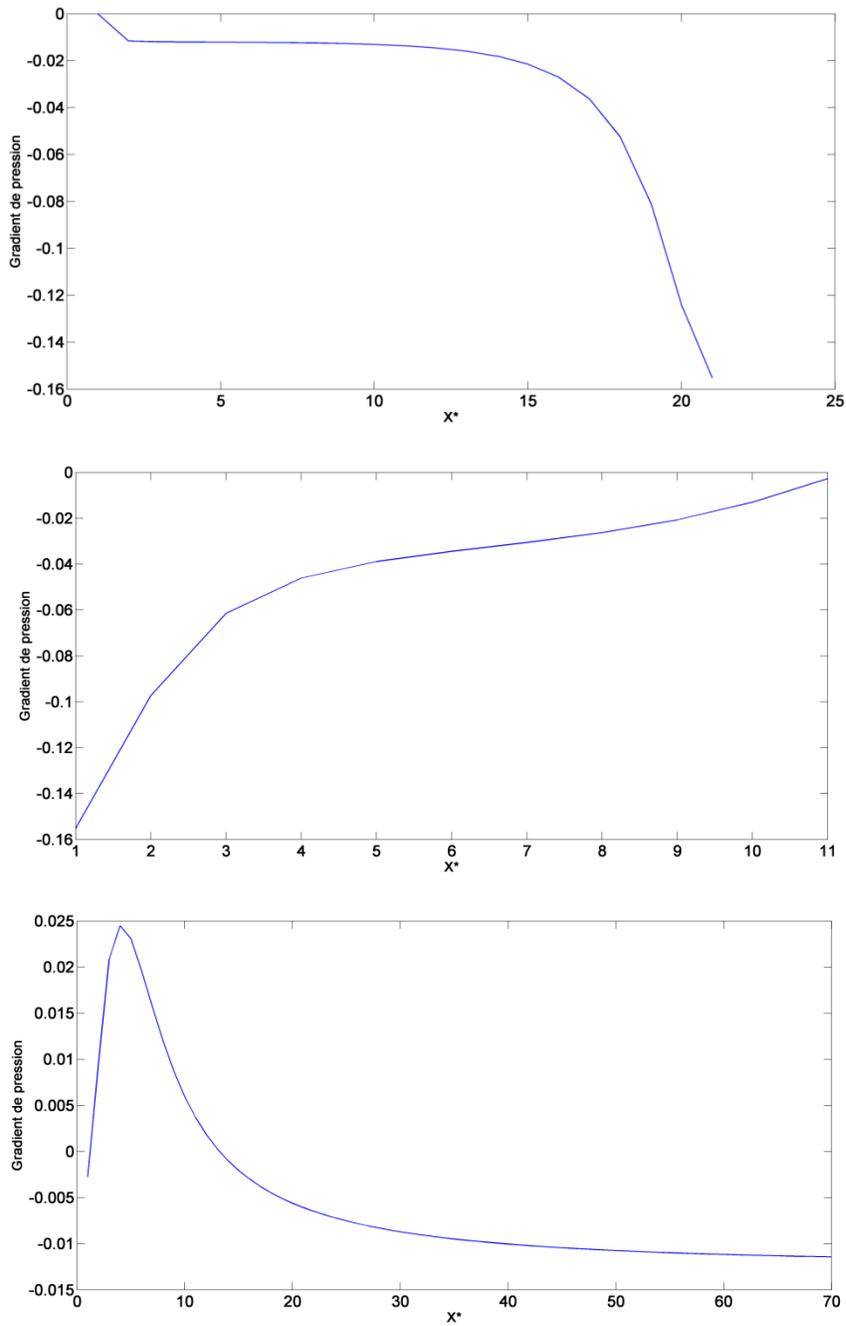


Figure IV.7 : Variation du gradient de pression en dessous de la paroi supérieure de la conduite respectivement pour en amont, dans la zone de l'obstacle et en aval de l'obstacle

IV.2.4. Les composantes du vecteur vitesse U^* et V^*

La figure (IV.8) représente la variation des composantes du vecteur vitesse, on remarque par rapport à la composante horizontale U^* , le profil de vitesse à l'entrée comme à la sortie de la conduite maintient la forme parabolique au régime laminaire sans aucune déformation en l'absence de quelconques singularités.

Les cas de figures représentant la variation de la composante de vitesse adimensionnelle U^* à la limite de l'obstacle montrent clairement la déformation du profil en fonction de la position choisie sur la conduite. Cette déformation traduit le changement de la valeur maximale de la vitesse causé par le phénomène de recirculation.

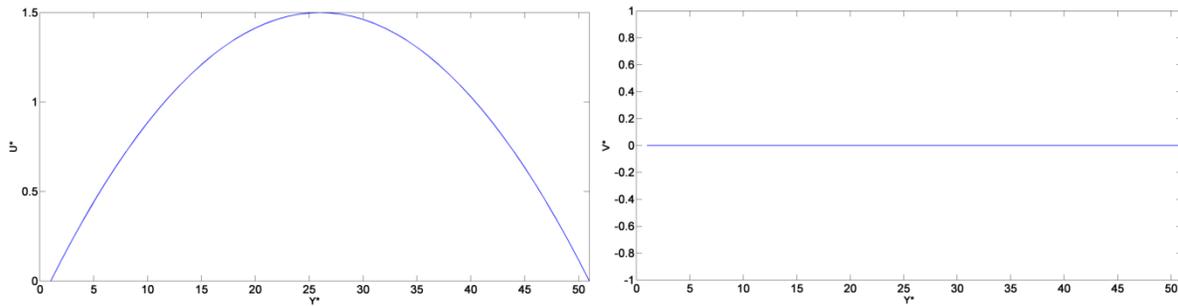
Concernant la composante verticale V^* représentée dans la figure (IV.8), on remarque que sa valeur est nulle. Ce comportement traduit la nature de l'écoulement à l'entrée de la conduite (lignes de courant, aucune déformation de ces lignes), autrement dit le vecteur vitesse \vec{q} ne possède qu'une seule composante qui est U^* , $V^* = 0$.

La variation de la composante verticale de la vitesse adimensionnelle V^* montre qu'en amont de l'obstacle, la composante du vecteur vitesse verticale est nulle ($U^* = U^*(Y^*)$), à l'impact de l'obstacle $U^* = 0$, l'écoulement est alors en fonction $V^*(V^* = V^*(X^*))$. On remarque une augmentation brusque du V^* suivie d'une diminution qui tend vers zéro.

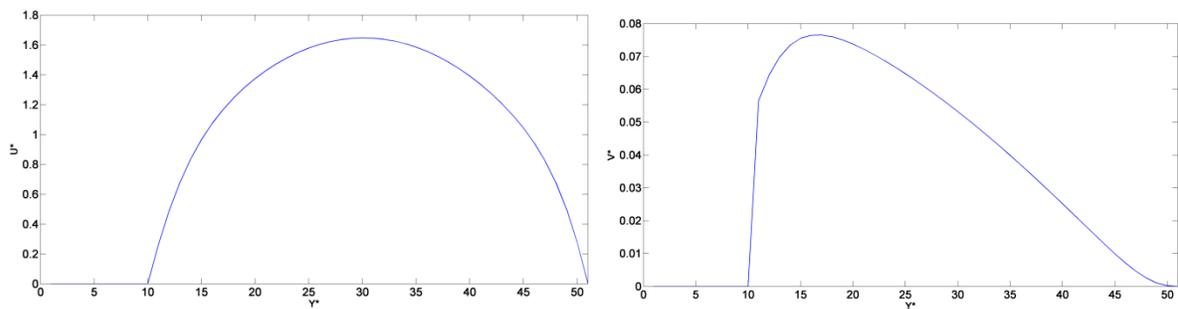
La variation de la composante verticale à la fin de l'obstacle, on remarque que V^* est constante en aval de la singularité acquise une valeur positive grâce à l'augmentation brusque suivie d'une diminution régressive enregistrant une valeur négative puis une remontée avec maintien au niveau zéro, probablement due à l'effet de la zone de recirculation juste après l'obstacle.

La variation de la composante du vecteur vitesse verticale à la sortie de la conduite, on remarque une fonction ayant une forme sinusoïdale, probablement due à l'effet de la couche limite à proximité des parois de la conduite qui provoquent une pression de part et d'autre (du haut vers le bas et vice versa).

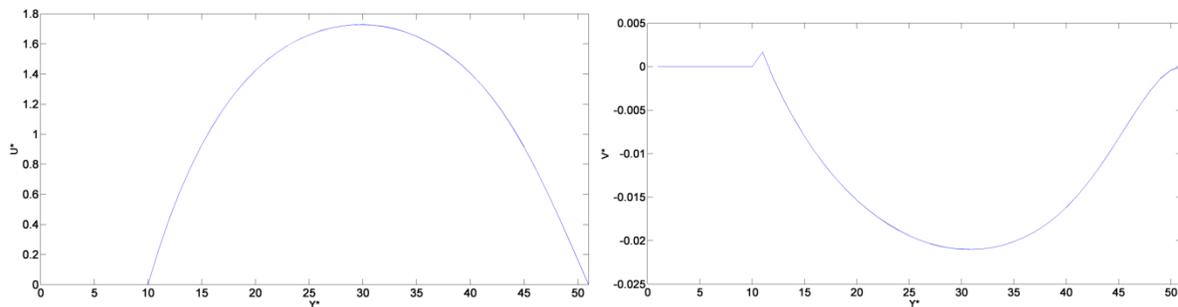
Pour $Y^* = 1$: Y^*_{\max} et $X^* = 1$



Pour $Y^* = 1$: Y^*_{\max} et $X^* = 21$



Pour $Y^* = 1$: Y^*_{\max} et $X^* = 31$



Pour $Y^* = 1$: Y^*_{\max} et $X^* = 100$

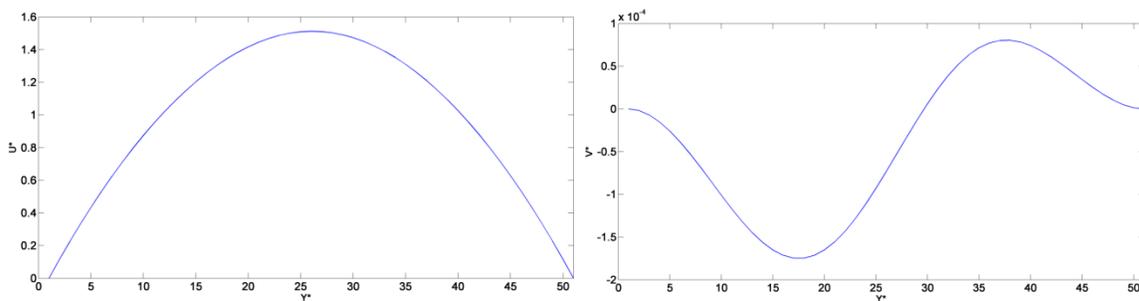


Figure IV.8 : Variation des composantes du vecteur vitesse U^* et V^* pour X^* variable.

IV.3. Conclusion

L'étude des écoulements laminaires autour d'un obstacle a été l'objectif du présent chapitre. La simulation numérique par Matlab a été adoptée pour résoudre les équations d'un écoulement stationnaire d'un fluide Newtonien et incompressible en régime laminaire. Ce travail, nous a permis de tirer de très riches observations pour différents nombres de Reynolds et différentes caractéristiques géométriques.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Notre étude s'est articulée sur le contrôle du gradient de pression des écoulements bidimensionnels en présence de perte de charge.

Nous avons étudié dynamiquement l'écoulement bidimensionnel d'un fluide visqueux à l'intérieur d'un domaine présentant des singularités géométriques d'où les caractéristiques géométriques des singularités proposées dans cette étude influent sur les composantes du vecteur vitesse modifiant les gradients de pression à l'intérieur du domaine d'étude.

Les résultats obtenus montrent que :

Le nombre de Reynolds influe sur le long de la zone de recirculation de manière que quand celui-ci augmente, la longueur de la zone de recirculation augmente et vice versa.

Le nombre de Reynolds influe également sur les valeurs limites du gradient de pression puisqu'à chaque fois que Re augmente, le gradient de pression diminue.

La caractéristique géométrique dans notre étude (hauteur de l'obstacle) influe sur la zone de recirculation, quand la hauteur de l'obstacle augmente la zone de recirculation augmente et vice versa.

La caractéristique géométrique influe aussi sur les composantes du vecteur vitesse est montré qu'en augmentant la hauteur de l'obstacle, la déformation du profil de vitesse augmente et la valeur U^* augmente (ceci revient à la continuité).

On conclue donc que le nombre de Reynolds et la caractéristique géométrique proposés dans cette étude influent sur les valeurs limites accompagnées d'une légère déformation ce qui concorde parfaitement avec la logique physique.

Références bibliographiques

- [1] Ph. Marty, “Mécanique des fluides”. Cours Master 1 GDP, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2012-13.
- [2] C.Mahboub, “simulation d’un écoulement de fluide visqueux dans un canal ouvert a pente variable”. Mémoire de Magistère, Université Biskra, 2008.
- [3] I.Zaidi, “Contribution à l’étude de la convection forcée dans un élargissement brusque”. Mémoire de Master, Université Biskra, 2018.
- [4] O.Hamdi “Etude de l’écoulement instationnaire d’un fluide Newtonien dans un domaine cartésien en présence d’un gradient de pression”. Mémoire de Magister, Université Biskra, 2012.
- [5] <https://www.mecaflux.com/document/pertes%20de%20charge.29.06.2019>
- [6] www.leguideits.fr/guides-its/dossiers--fiches...6/les-pertes-de-charge-lineai.29.06.2019
- [7] R.Ferhat, “Etude des écoulements turbulents à travers une conduite à section carrée avec un coude à 90°”. Mémoire de Magister, Université d’Oran, 2014.
- [8] A. Bouhelal, “Contribution a l’étude de l’écoulement autour d’un obstacle mince dans un intervalle de nombre de Mach: $0 < M < 3$ ”. Mémoire de Master, Université Biskra, 2014.
- [9] GEGOIRE Allaire, «Analyse numérique et optimisation », Editions de l’Ecole polytechnique, Paris, 2005.
- [10] A.Diaf, “Contribution a l’étude des écoulements de surface par méthodes numériques ”. Mémoire de Magistère, Université Tlemcen, 2012.
- [11] T.Raissi, “ Méthodes ensemblistes pour l’estimation d’état et de paramètres”. Mémoire de Doctorat, Université Paris XII Val de Marne, 2004.
- [12] S. Mokrani et H. Daoudi “Simulation numérique d’un écoulement de fluide Newtonien dans une conduite cylindrique avec propagation d’onde de pression”. Mémoire de Master, Université Bejaia, 2017.

- [13] H. Lamb, Hydrodynamics, Cambridge University Press 6th ed. 1932 (1st published 1879).
- [14] G.Szymanski, Quelques solutions exactes des équations d'hydrodynamique du fluide visqueux dans le cas d'un tube cylindrique, Journal de mathématiques pures et appliquées 9 série, tome 11 p. 67-108, 1932.
- [15] R. J. Womersley, Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. J. Physiol-London, Vol. 127, p. 553–563, 1955.
- [16] S. Uchida, The pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion of incompressible fluid in a circular pipe. ZAMP Vol. 7, p. 403–422, 1956.
- [17] A.Zitouni, “ Evolution de l'écoulement stratifié en présence d'une Singularité”. Mémoire de Master, Université Houari Boumediène (USTHB), 2012.
- [18] A. N. Darus, Streamlike Function Formulation of Entry Flow, Jurnal Mekanikal, Jilid II, 2000
- [19] J. Majdalani et H. A. Chibllial, Pulsatory channel flows with arbitrary pressure gradients. 3rd AIAA theoretical fluid mechanics meeting 24-26 juin 2002 St. Louis, MO
- [20] F.Traka, “Etude dynamique de l'écoulement laminaire dans un élargissement brusque”. Mémoire de Master, Université Biskra, 2017.
- [21] M^{ed}Lamine. Lakhdari , “ Étude du transfert thermique dans un domaine bidimensionnel en présence d'une source interne spatiale et temporelle”. Mémoire de Magister, Université Biskra, 2009.
- [22] <https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/thierry.gallouet/licence.d/anum.d/anum-c4>.
- [23] S.Momen, “Contribution à l'étude de la conduction de la chaleur instationnaire dans les corps pleins”. Mémoire de Master, Université Biskra, 2018.
- [24] Hoang Le-Huy, “Introduction à MATLAB et simulink”. Université Laval,CANADA,Septembre 1998.

Annexe

Annexe

```
clear
clc

n=101;
m=51;
Ymax=1;
Xmax=100;
dX=Xmax/(n-1);
dY=Ymax/(m-1);
for i=1:n
    X(i)=(i-1)*dX;
end
for j=1:m
    Y(j)=(j-1)*dY;
end
Re=2300;
PSI=rand(m,n);
OMI=rand(m,n);
U=zeros(m,n);
V=zeros(m,n);
%DIMENSIONS ET POSITION DE L'OBSTACLE
n1=21;
n2=31;
m1=10;%10;
%CONDITIONS AUX LIMITES
PSI(1:m1,n1:n2)=0;
PSI(m,:)=1;
PSI(1,1:n1)=0;
PSI(m1,n1:n2)=0;
PSI(1,n2:n)=0;
PSI(1:m1,n1)=0;
PSI(1:m1,n2)=0;
for j=1:m
    PSI(j,1)=3*Y(j)^2-2*Y(j)^3;
```

```

OMI(j,1)=12*Y(j)-6;
U(j,1)=6*(Y(j)-Y(j)^2);
end
AA=2/dX^2+2/dY^2;
BB=1/dX^2;
CC=1/dX^2;
DD=1/dY^2;
EE=1/dY^2;
w=1; %FACTEUR DE SOUS-RELAXATION
er=1;
while er>1e-5
    PSI0=PSI;
    OMI0=OMI;
    %CALCUL DE LA FONCTION DE COURANT PSI
    for i=2:n
        if i>=n1 & i<=n2
            for j=m1+1:m-1
                PSI(j,i)=(1-w)*PSI(j,i)+w*(BB*PSI(j,i-
1)+CC*PSI(j,i+1)+DD*PSI(j-1,i)+EE*PSI(j+1,i)+OMI(j,i))/AA;
            end
        elseif i==n
            for j=2:m-1
                PSI(j,i)=2*PSI(j,i-1)-PSI(j,i-2);
            end
        end
    end
    %CALCUL DE LA VORTICITE OMI
    for i=2:n
        if i>=n1 & i<=n2
            for j=m1+1:m-1
                OMI(j,i)=(1-w)*OMI(j,i)+w*(B(j,i)*OMI(j,i-
1)+C(j,i)*OMI(j,i+1)+D(j,i)*OMI(j-1,i)+E(j,i)*OMI(j+1,i))/A(j,i);
            end
        elseif i==n
            for j=2:m-1
                OMI(j,i)=2*OMI(j,i-1)-OMI(j,i-2);
            end
        else
            for j=2:m-1
                OMI(j,i)=(1-w)*OMI(j,i)+w*(B(j,i)*OMI(j,i-
1)+C(j,i)*OMI(j,i+1)+D(j,i)*OMI(j-1,i)+E(j,i)*OMI(j+1,i))/A(j,i);
            end
        end
    end
end
%ERREURS
for i=2:n
    if i>=n1 & i<=n2
        for j=m1:m

```

```

        ero(j,i)=abs((OMI(j,i)-OMI0(j,i))/OMI0(j,i));
    end
else
    for j=1:m
        ero(j,i)=abs((OMI(j,i)-OMI0(j,i))/OMI0(j,i));
    end
end
end
for i=2:n
    if i>=n1 & i<=n2
        for j=m1+1:m-1
            erp(j,i)=abs((PSI(j,i)-PSI0(j,i))/PSI0(j,i));
        end
    else
        for j=2:m-1
            erp(j,i)=abs((PSI(j,i)-PSI0(j,i))/PSI0(j,i));
        end
    end
end
er=max([max(max(ero)) max(max(erp))])
end

for i=1:n
    P1(i)=Y(m1);
end

for j=1:m
    P2(j)=X(n1);
    P3(j)=X(n2);
end

for i=1:n
    for j=1:m
        X1(j,i)=(i-1)*dX;
        Y1(j,i)=(j-1)*dY;
    end
end

for i=2:n-1
    if i>=n1 & i<=n2
        for j=m1+1:m-1
            dpx(j,i)=B(j,i)*U(j,i-1)+C(j,i)*U(j,i+1)+D(j,i)*U(j-1,i)+E(j,i)*U(j+1,i)-A(j,i)*U(j,i);
            dpy(j,i)=B(j,i)*V(j,i-1)+C(j,i)*V(j,i+1)+D(j,i)*V(j-1,i)+E(j,i)*V(j+1,i)-A(j,i)*V(j,i);
        end
    else

```

```
for j=2:m-1
    dpx(j,i)=B(j,i)*U(j,i-1)+C(j,i)*U(j,i+1)+D(j,i)*U(j-
1,i)+E(j,i)*U(j+1,i)-A(j,i)*U(j,i);
    dpy(j,i)=B(j,i)*V(j,i-1)+C(j,i)*V(j,i+1)+D(j,i)*V(j-
1,i)+E(j,i)*V(j+1,i)-A(j,i)*V(j,i);
end
end
end
```